

BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI CARTAN

**Sur les fonctions de n variables complexes :
les transformations du produit topologique
de deux domaines bornés**

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 37-48

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__37_0

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES FONCTIONS DE n VARIABLES COMPLEXES :
LES TRANSFORMATIONS DU PRODUIT TOPOLOGIQUE
DE DEUX DOMAINES BORNÉS;**

PAR M. HENRI CARTAN.

1. Je me propose de développer ici le contenu d'une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1).

Il s'agit essentiellement de généraliser, pour n variables complexes, le théorème classique : dans l'espace de *deux* variables complexes x et y , le domaine

$$|x| < 1, \quad |y| < 1$$

n'admet pas d'autre transformation pseudo-conforme (2) biunivoque en lui-même que les transformations

$$(1,1) \quad x \rightarrow S(x), \quad y \rightarrow T(y),$$

combinées avec la transformation

$$(1,2) \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow x;$$

$S(x)$ ou $T(y)$ désigne la transformation homographique la plus générale du domaine $|x| < 1$ ou $|y| < 1$ en lui-même.

Pour généraliser ce résultat, partageons les n variables complexes envisagées en deux groupes x_1, \dots, x_p et y_1, \dots, y_q ($p + q = n$), et désignons la transformation pseudo-conforme la plus générale par la notation

$$x \rightarrow f(x, y), \quad y \rightarrow g(x, y);$$

$f(x, y)$ désigne p fonctions holomorphes des $p + q$ variables x_i

(1) T. 199, 1934, p. 925-927.

(2) Suivant l'usage, nous donnons, dans l'espace de n variables complexes, le nom de *pseudo-conforme* à toute transformation définie par n fonctions analytiques des n variables complexes.

et y_j , et $g(x, y)$ désigne q fonctions holomorphes des mêmes variables. Cela étant, nous démontrerons plus loin le

THÉORÈME I. — Soit, dans l'espace des p variables (x), un domaine ⁽¹⁾ borné D_x , et, dans l'espace des q variables (y), un domaine borné D_y ; soit D le produit topologique de ces deux domaines (D est un domaine borné dans l'espace des n variables x_i et y_j). Dans ces conditions : *toute transformation pseudo-conforme biunivoque de D en lui-même est le produit d'une transformation biunivoque de D_x en lui-même par une transformation biunivoque de D_y en lui-même; autrement dit, une telle transformation a nécessairement la forme*

$$x \rightarrow f(x), \quad y \rightarrow g(y);$$

ou du moins il en est ainsi pour toutes les transformations de D qui sont assez voisines de la transformation identique.

Cette dernière restriction est essentielle, comme le montre l'exemple de la transformation ^(1,2) citée plus haut. D'ailleurs, au sujet de cette restriction, on peut préciser de la façon suivante : le « groupe » d'un domaine D (c'est-à-dire le groupe de toutes les transformations pseudo-conformes biunivoques de D en lui-même) se compose, on le sait ⁽²⁾ (au moins dans le cas où D est borné), d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de familles continues et connexes, dont l'une est un groupe de Lie qui peut d'ailleurs se réduire à la seule transformation identique. Le théorème I peut alors s'énoncer ainsi :

Le groupe de Lie connexe du domaine D est le produit direct du groupe de Lie connexe de D_x par le groupe de Lie connexe de D_y . En particulier, le groupe de D n'est transitif que si les groupes de D_x et de D_y sont tous deux transitifs.

⁽¹⁾ Il s'agit aussi bien de domaines multivalents que de domaines univalents; on n'exclut pas le cas où les domaines envisagés posséderaient des variétés de ramification intérieures.

⁽²⁾ Voir H. CARTAN, *Sur les groupes de transformations analytiques* (Collection d'exposés mathématiques publiés à la mémoire de J. Herbrand, fasc. IX, Hermann, Paris 1935).

2. Pour démontrer le théorème I, nous établirons le résultat plus général que voici :

THÉORÈME II. — Soient D_x un domaine borné de l'espace (x) et D_y un domaine borné de l'espace (y) . Soit Δ un domaine de l'espace (x, y) qui contienne à son intérieur le produit topologique de D_x et de D_y , mais qui soit intérieur au produit topologique de D_x par l'espace (y) tout entier. Alors, pour toute transformation pseudo-conforme biunivoque de Δ en lui-même

$$(2,1) \quad x \rightarrow f(x, y), \quad y \rightarrow g(x, y),$$

$f(x, y)$ est indépendant de y , et la transformation

$$x \rightarrow f(x)$$

est une transformation biunivoque de D_x en lui-même. Du moins, tout cela est vrai pour toutes les transformations (2,1) assez voisines de la transformation identique.

3. Pour la démonstration du théorème II, nous utiliserons la *métrique de Carathéodory*. Étant donné, dans l'espace de n variables complexes, un domaine borné Δ et deux points M et M' intérieurs à Δ , on désigne par

$$d_{\Delta}(M; M')$$

la borne supérieure, au point M' , du module des fonctions holomorphes dans Δ , de module inférieur à un dans Δ , et nulles en M . On a

$$d_{\Delta}(M; M') = d_{\Delta}(M'; M) < 1.$$

Cette pseudo-distance d_{Δ} reste *invariante* par toute transformation pseudo-conforme de Δ en lui-même; d'autre part, si Δ est intérieur à Δ_1 , on a évidemment

$$d_{\Delta}(M; M') \geq d_{\Delta_1}(M; M').$$

Nous aurons à nous servir du lemme suivant :

LEMME I. — Soit Δ un domaine qui contient l'hypersphère de centre O et de rayon r , mais est intérieur à l'hypersphère de centre O et de rayon R (O désigne un point fixe quelconque

de Δ). Tant que la distance euclidienne d'un point variable M au point O reste au plus égale à un certain nombre ρ (qui ne dépend que de r et R), la pseudo-distance

$$d_{\Delta}(O; M)$$

est une fonction monotone (au sens strict) quand M décrit une demi-droite quelconque issue de O .

Prenons en effet O comme origine des coordonnées, et choisissons les axes de façon que, sur la demi-droite OM envisagée, toutes les coordonnées (complexes) soient nulles sauf une, que nous appellerons z , et que nous supposerons réelle et positive sur la demi-droite OM . Posons

$$d_{\Delta}(o; M) = \varphi(z),$$

fonction définie pour $0 \leq z < r$. On a

$$(3,1) \quad \varphi(z) \geq \frac{z}{R},$$

car la fonction $\frac{z}{R}$ est nulle en O , et de module inférieur à un dans Δ .

Soit z_0 un point fixe de la demi-droite ($z_0 < r$). Il existe une fonction holomorphe dans Δ , de module inférieur à un dans Δ , et qui est égale à $\varphi(z_0)$ pour $z = z_0$. En effet la borne supérieure, pour $z = z_0$, du module des fonctions nulles en O et de module inférieur à un dans Δ , est atteinte pour au moins une de ces fonctions, parce qu'elles forment une famille normale. Si on annule toutes les coordonnées sauf z , cette fonction se réduit à une fonction de la variable z , soit

$$f_{z_0}(z),$$

qui est certainement holomorphe et de module inférieur à un pour $|z| < r$; d'autre part

$$f_{z_0}(o) = 0, \quad f_{z_0}(z_0) = \varphi(z_0).$$

Soit

$$f_{z_0}(z) = z \cdot \alpha(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} z^n \alpha_n(z_0) = z \alpha(z_0) + g_{z_0}(z);$$

on a

$$|\alpha_n(z_0)| \leq \frac{1}{r^n};$$

d'où

$$|g_{z_0}(z)| \leq \frac{\frac{z^2}{r^2}}{1 - \frac{z}{r}},$$

et par suite, pour $z = z_0$ (1),

$$\Re [z_0 a(z_0)] \geq \varphi(z_0) - \frac{\frac{z_0^2}{r^2}}{1 - \frac{z_0}{r}},$$

c'est-à-dire, si z_0 est inférieur ou égal à un certain nombre ρ (à déterminer ultérieurement),

$$\Re [a(z_0)] \geq \frac{\varphi(z_0)}{z_0} - \frac{\frac{\rho}{r^2}}{1 - \frac{\rho}{r}},$$

ou enfin, en tenant compte de (3,1),

$$(3,2) \quad \Re [a(z_0)] \geq \frac{1}{R} - \frac{\frac{\rho}{r^2}}{1 - \frac{\rho}{r}}.$$

Soit z_1 un autre point de la demi-droite ($0 < z_1 \leq \rho$). Nous voulons montrer que

$$\frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_0)}{z_1 - z_0} > 0,$$

ce qui établira le lemme. Supposons par exemple $z_1 > z_0$. On a alors

$$\varphi(z_1) \geq |f_{z_0}(z_1)|;$$

il suffit donc de montrer

$$(3,3) \quad \Re \left(\frac{f_{z_0}(z_1) - f_{z_0}(z_0)}{z_1 - z_0} \right) > 0.$$

Or le premier membre de cette inégalité est égal à

$$\Re \left(a(z_0) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_0) \frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0} \right),$$

et l'on a

$$\left| a_n(z_0) \frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0} \right| \leq \frac{n \rho^{n-1}}{r^n};$$

(1) Par $\Re(u)$, nous désignons la partie réelle d'un nombre complexe u .

d'où

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} a_n(z_0) \frac{z_1^n - z_0^n}{z_1 - z_0} \right| \leq \frac{2 \frac{\rho}{r^2} - \frac{\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2},$$

et par suite, en tenant compte de (3,2),

$$\Re \left(\frac{f_{z_0}(z_1) - f_{z_0}(z_0)}{z_1 - z_0} \right) \geq \left(\frac{1}{R} - \frac{\frac{\rho}{r^2}}{1 - \frac{\rho}{r}} \right) - \frac{2 \frac{\rho}{r^2} - \frac{\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} = \frac{1}{R} - \frac{\frac{3\rho}{r^2} - \frac{2\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Si ρ ($\rho < r$) a été choisi assez petit pour que

$$(3,4) \quad \frac{\frac{3\rho}{r} - \frac{2\rho^2}{r^3}}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} < \frac{r}{R},$$

alors l'inégalité (3,3) est vérifiée; cela démontre le lemme en le précisant.

4. Abordons maintenant la démonstration du théorème II. Tout revient à démontrer que, si la transformation T

$$x \rightarrow f(x, y), \quad y \rightarrow g(x, y)$$

est « assez voisine de la transformation identique » (et il faudra préciser le sens de cette locution), alors la fonction $f(x, y)$ ne dépend pas des variables y . En effet, une fois ce point acquis, la transformation inverse T^{-1}

$$x \rightarrow f_1(x, y), \quad y \rightarrow g_1(x, y)$$

aura la même forme, pour la même raison. Nous aurons donc deux transformations

$$x \rightarrow f(x) \quad \text{et} \quad x \rightarrow f_1(x),$$

définies dans D_x , et dont le produit sera la transformation identique $x \rightarrow x$. Il en résultera que chacune d'elles est une transformation biunivoque de D_x en lui-même, ce qui achèvera d'établir le théorème II.

Ainsi tout revient à montrer que $f(x, y)$ ne dépend pas de y . Pour cela, choisissons une fois pour toutes, dans le domaine Δ ,

un point (x_0, y_0) tel que x_0 appartienne à D_x sans en être un point de ramification, et que y_0 appartienne à D_y sans en être un point de ramification. Dans ces conditions, il existe deux nombres positifs r et r' , tels que l'hypersphère de centre x_0 et de rayon $2r$ soit intérieure à D_x , et que l'hypersphère de centre y_0 et de rayon $2r'$ soit intérieure à D_y . Pour simplifier l'écriture, désignons par

$$|x - x'|, \quad \text{ou} \quad |y - y'|,$$

la distance euclidienne de deux points x et x' de l'espace (x) , ou de deux points y et y' de l'espace (y) . Nous allons démontrer le lemme suivant :

LEMME II. *Les hypothèses et notations précédentes étant conservées, il existe deux nombres positifs α et β ($\alpha < r$, $\beta < r'$) jouissant de la propriété suivante : si la transformation T est telle que l'on ait*

$$(4,1) \quad |f(x, y) - x| < \alpha, \quad |g(x, y) - y| < \beta$$

pour tout point (x, y) du domaine

$$(4,2) \quad |x - x_0| < r, \quad |y - y_0| < r',$$

et si en outre la transformation inverse jouit de la même propriété, alors on a

$$f(x, y) = f(x, y_0)$$

quel que soit le point (x, y) du domaine

$$(4,3) \quad |x - x_0| < \alpha, \quad |y - y_0| < \beta.$$

Une fois le lemme II établi, on pourra conclure, par prolongement analytique de $f(x, y)$ dans le domaine Δ , que $f(x, y)$ ne dépend pas de y ; le théorème II sera donc démontré, et le sens de la locution « si T est assez voisine de la transformation identique » se trouvera précisé.

5. Avant le lemme II, nous établirons le

LEMME III. — *Si x et x' appartiennent à D_x , si en outre l'un au moins des points y et y' appartient à l'hypersphère*

$$|y - y_0| < r',$$

on a

$$(5,1) \quad d_{\Delta}(x, y; x', y') = d_x(x; x')$$

dès que le quotient

$$\frac{|y' - y|}{|x' - x|}$$

est inférieur à un certain nombre positif K .

Dans cet énoncé, $d_x(x; x')$ désigne la pseudo-distance des points x et x' dans le domaine D_x , et $d_{\Delta}(x, y; x', y')$ désigne la pseudo-distance des points (x, y) et (x', y') dans le domaine Δ . Pour démontrer (5,1) on remarque d'abord que l'on a

$$(5,2) \quad d_{\Delta}(x, y; x', y') \geq d_x(x; x').$$

En effet, si l'on désigne pour un instant par D le produit topologique de D_x par l'espace (y) tout entier, et qu'on observe que Δ est intérieur à D , on a

$$d_{\Delta}(x, y; x', y') \geq d_D(x, y; x', y');$$

or

$$d_D(x, y; x', y') = d_x(x; x'),$$

car toute fonction de x et y , holomorphe et de module inférieur à un dans D , se réduit à une fonction de x seul, holomorphe et de module inférieur à un dans D_x .

Il reste donc à démontrer l'inégalité

$$(5,3) \quad d_{\Delta}(x, y; x', y') \leq d_x(x; x').$$

Pour cela, supposons x, y, x', y' fixés; au moyen d'une transformation linéaire sur les coordonnées (conservant les distances), on peut se ramener au cas où toutes les coordonnées de x et de x' sont égales sauf une; de même pour y et y' . On aura donc

$$\begin{aligned} x'_i - x_i &= 0 & (2 \leq i \leq p), \\ y'_j - y_j &= 0 & (2 \leq j \leq q). \end{aligned}$$

Cela étant, à chaque point $\xi(\xi_1, \dots, \xi_p)$ de D_x , je fais correspondre le point $\eta(\eta_1, \dots, \eta_q)$ défini par les formules

$$(5,4) \quad \begin{cases} \eta_1 = y_1 + \frac{y'_1 - y_1}{x'_1 - x_1} (\xi_1 - x_1), \\ \eta_j = y_j & (2 \leq j \leq q). \end{cases}$$

On a par hypothèse

$$\left| \frac{y'_1 - y_1}{x'_1 - x_1} \right| < K,$$

et par suite

$$|\eta_1 - \gamma_1| < K |\xi_1 - x_1| < KM,$$

M étant un nombre fixe; en effet, le domaine D_x est *borné* par hypothèse. Par hypothèse aussi, le point γ est intérieur à l'hypersphère de centre γ_0 et de rayon r' . Nous serons donc sûrs que le point η reste intérieur à D_γ si

$$|\eta_1 - \gamma_1| < r'$$

car alors le point η sera intérieur à l'hypersphère de centre γ_0 et de rayon $2r'$. En définitive, il suffit que

$$KM < r'$$

pour que le point (ξ, η) (dont les coordonnées sont des fonctions holomorphes de coordonnées de ξ lorsque ξ décrit le domaine D_x) reste intérieur à Δ .

K étant choisi de façon à satisfaire à cette condition, je vais construire une fonction $G(\xi)$, holomorphe et de module inférieur à un dans D_x , nulle pour $\xi = x$, et égale à $d_\Delta(x, \gamma; x', \gamma')$ pour $\xi = x'$. L'inégalité (5,3) en résultera.

Or il existe précisément une fonction $F(\xi, \eta)$, holomorphe et de module inférieur à un dans Δ , nulle au point (x, γ) et égale à $d_\Delta(x, \gamma; x', \gamma')$ au point (x', γ') . Si, dans cette fonction, nous remplaçons η en fonction de ξ d'après les formules (5,4), nous obtiendrons la fonction $G(\xi)$ annoncée. Le lemme 3 est donc démontré.

6. Nous arrivons à la démonstration du lemme II. Soit R un nombre positif assez grand pour que toute hypersphère de rayon R , dont le centre ξ appartient à l'hypersphère

$$(6,1) \quad |\xi - x_0| < r,$$

contienne le domaine D_x à son intérieur. D'après la définition de r (§ 4), l'hypersphère de rayon r et de centre ξ est intérieure à D_x quel que soit ξ satisfaisant à (6,1). Si nous voulons appliquer

le lemme I au domaine D_x et au point ξ de ce domaine, nous sommes conduit à choisir un nombre positif ρ ($\rho < r$) satisfaisant à

$$(3,4) \quad \frac{\frac{3\rho}{r} - \frac{2\rho^2}{r^2}}{\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)^2} < \frac{r}{R};$$

nous ajouterons la condition

$$(6,2) \quad \rho < \frac{r}{2}.$$

ρ étant ainsi choisi, choisissons un nombre positif α satisfaisant à

$$(6,3) \quad \alpha < \frac{\rho}{2},$$

et enfin un nombre positif β satisfaisant à

$$(6,4) \quad \beta < r'$$

et à

$$(6,5) \quad \beta < K\left(\frac{\rho}{2} - \alpha\right),$$

K ayant la même signification qu'au lemme III.

α et β étant ainsi choisis, il nous reste à démontrer l'exactitude du lemme II. Soit donc (x, y) un point du domaine (4,3). Nous voulons démontrer que, dans le domaine D_x , les points $f(x, y_0)$ et $f(x, y)$ coïncident. Or, qu'ils coïncident ou non, on a, d'après l'hypothèse (4,1),

$$(6,6) \quad |f(x, y) - f(x, y_0)| < 2\alpha < \rho.$$

On peut donc trouver, dans l'espace (x) , un point ξ situé à une distance ρ du point $f(x, y_0)$ et tel que le point $f(x, y)$ appartienne au segment de droite qui joint $f(x, y_0)$ à ξ . L'inégalité (6,1) est bien vérifiée par ξ , et par suite le lemme I est applicable au domaine D_x et à la demi-droite qui joint le point ξ au point $f(x, y_0)$. Pour s'assurer que ξ satisfait à (6,1), on écrit

$$|\xi - x_0| \leq |\xi - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - x| + |x - x_0| \\ < \rho + \alpha + \alpha < 2\rho < r.$$

Appliquons maintenant l'hypothèse (4,1) à la transformation inverse T^{-1} ; soit (x', y') le transformé de (ξ, y_0) par T^{-1} . On aura

$$(6,7) \quad |\xi - x'| < \alpha, \quad |y_0 - y'| < \beta.$$

Nous allons appliquer le lemme III au deux points (x, y_0) et (x', y') . Pour cela, nous devons nous assurer que

$$|y' - y_0| < K|x' - x|;$$

or on a

$$|x' - x| > |\xi - f(x, y_0)| - |f(x, y_0) - x| - |\xi - x'| > \rho - 2\alpha$$

et

$$|y' - y_0| < \beta;$$

comme on a effectivement, d'après (6,5),

$$\beta < K(\rho - 2\alpha),$$

les conditions du lemme III sont bien remplies. D'où

$$(6,8) \quad d_{\Delta}(x, y_0; x', y') = d_x(x; x').$$

Appliquons de même le lemme III aux deux points

$$[f(x, y_0), g(x, y_0)] \quad \text{et} \quad [f(x', y'), g(x', y')],$$

c'est-à-dire en définitive aux points

$$[f(x, y_0), g(x, y_0)] \quad \text{et} \quad (\xi, y_0).$$

Il faut vérifier que

$$|g(x, y_0) - y_0| < K|f(x, y_0) - \xi|.$$

Or, d'après l'hypothèse (4,1), on a

$$|g(x, y_0) - y_0| < \beta,$$

et, par construction,

$$|f(x, y_0) - \xi| = \rho;$$

comme on a effectivement, d'après (6,5),

$$\beta < K\rho,$$

le lemme III est applicable. D'où

$$(6,9) \quad d_{\Delta}[f(x, y_0), g(x, y_0); f(x', y'), g(x', y')] = d_x[f(x, y_0); \xi]$$

Comparons maintenant (6,8) et (6,9). Les premiers membres sont égaux, puisque la pseudo-distance d_{Δ} reste invariante par la transformation T. On en déduit

$$(6,10) \quad d_x[f(x, y_0); \xi] = d_x(x; x').$$

Maintenant, on pourrait appliquer pareillement le lemme III aux deux points (x, y) et (x', y') , puis à leur transformés par T; le lecteur s'assurera facilement que les conditions d'application du lemme III sont remplies chaque fois. Il viendra finalement

$$(6,11) \quad d_x[f(x, y); \xi] = d_x(x; x').$$

Comparons enfin (6,10) et (6,11), ce qui donne

$$d_x[f(x, y_0); \xi] = d_x[f(x, y); \xi].$$

En vertu du lemme I, *les points $f(x, y_0)$ et $f(x, y)$, qui sont situés sur une même demi-droite issue de ξ , et à une distance de ξ au plus égale à ρ , doivent coïncider.* Tout est donc démontré.
