

# BULLETIN DE LA S. M. F.

M.-L. DUBREIL-JACOTIN

**Sur la discussion des équations de ramification  
relatives à certains problèmes d'ondes. Application  
aux ondes dues aux inégalités du fond**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 64 (1936), p. 1-24

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1936\\_\\_64\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# BULLETIN

DE LA

## SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

---

**SUR LA DISCUSSION DES ÉQUATIONS DE RAMIFICATION  
RELATIVES A CERTAINS PROBLÈMES D'ONDES.  
APPLICATION AUX ONDES DUES AUX INÉGALITÉS DU FOND;**

PAR M<sup>me</sup> M.-L. DUBREIL-JACOTIN.

Nous nous proposons, dans la première partie de ce travail, de mettre en évidence des conditions suffisantes simples qui permettent, pour certains types d'équations intégrales non linéaires, d'affirmer l'existence d'une solution unique non identiquement nulle au voisinage d'une valeur du paramètre pour laquelle il y a ramification. Nous montrons dans le paragraphe 2 que ces conditions s'appliquent immédiatement au cas des ondes périodiques permanentes à deux dimensions et permettent de simplifier beaucoup leur étude.

Dans la deuxième partie, nous envisageons des équations intégrales non linéaires pour lesquelles la discussion des équations de ramification n'est pas donnée par les conditions simples du paragraphe 1, mais pour lesquelles le problème linéarisé n'a pas de solution. Comme application, nous étudions dans le paragraphe 4 les ondulations de la surface libre d'un liquide qui s'écoule sur un fond ondulé. Ce problème a été étudié par Lamb (1) sur les équations linéarisées. Lamb trouve en général une solution unique mais dans le cas où la vitesse d'écoulement  $c$  est, au premier ordre près, égale à la vitesse de propagation des ondes de même longueur d'onde à la surface libre d'un liquide pesant de même épaisseur reposant sur un fond horizontal :  $c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}$ , le problème est

---

(1) LAMB, *Hydrodynamics*, 5<sup>th</sup> edition, 1930, p. 386.

impossible et Lamb écrit « To obtain an intelligent result in this case we should be compelled to take special account of dissipative force ». Nous reprenons l'étude de ce problème sur les équations complètes. Nous démontrons ainsi l'existence d'une solution unique pour  $c^2 \neq \frac{\lambda g}{2\pi m} \operatorname{th} \frac{2\pi m H}{\lambda}$ . Nous étudions ensuite en détails le cas  $c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}$ . Nous montrons, en utilisant les propriétés rappelées dans le paragraphe 1 et les calculs précis faits dans notre thèse pour discuter complètement l'équation de ramification des ondes de surface libre et de profondeur finie que, sans faire intervenir de forces supplémentaires, le problème admet encore une solution unique. Dans le paragraphe 5, nous donnons un procédé de calcul pratique de cette solution.

1. Nous considérons une équation intégrale non linéaire de la forme

$$(1) \quad v(x) + \int_a^b [\mathcal{K}(x, x_1) + \lambda \mathbf{K}(x, x_1)] v(x_1) dx_1 = F(v),$$

où F, qui éventuellement peut contenir  $\lambda$ , est une opération fonctionnelle non linéaire en  $v$  satisfaisant aux hypothèses qui permettent de résoudre l'équation par approximations successives (1) ce que nous exprimerons pour simplifier en disant qu'elle est du type de Schmidt. Enfin  $\mathcal{K} + \lambda \mathbf{K}$  est un noyau auquel s'applique la théorie de Fredholm.

Le paramètre  $\lambda$  étant quelconque, on sait que cette équation intégrale a, dans l'intervalle  $(a, b)$ , une seule solution petite qui est identiquement nulle. Soit  $\lambda_0$  une valeur de  $\lambda$  pour laquelle le noyau  $\mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 \mathbf{K}(x, x_1)$  admet des solutions fondamentales non identiquement nulles. Posons  $\lambda = \lambda_0 - x$  où  $x$  est un paramètre petit. L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} v(x) + \int_a^b [\mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 \mathbf{K}(x, x_1)] v(x_1) dx_1 \\ = x \int_a^b \mathbf{K}(x, x_1) v(x_1) dx_1 + F \end{aligned}$$

---

(1) Voir par exemple LIGHTENSTEIN, *Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integrodifferentialgleichungen* (Berlin, 1931).

et il s'agit de voir si pour  $x$  petit, de telle sorte que

$$x \int_a^b K(x, x_1) v(x_1) dx_1$$

est du second ordre comme  $F$ , le problème admet des solutions autres que la solution triviale 0. Supposons d'abord que le noyau admet une seule fonction fondamentale  $\varphi(x)$  que nous prenons normée et soit  $\Psi(x)$  la solution normée de l'équation homogène associée. Alors on sait qu'on peut écrire l'équation sous la forme

$$v(x) + \int_a^b E(x, x_1) v(x_1) dx_1 = r\Psi(x) + x \int_a^b K(x, x_1) v(x_1) dx_1 + F,$$

en posant

$$r = \int_a^b \varphi(x_1) v(x_1) dx_1,$$

$$E = \mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 K(x, x_1) + \varphi(x_1) \Psi(x),$$

le noyau  $E$  n'admettant pas de fonctions fondamentales. Cette équation admet une solution unique petite développable en série entière en  $r$  et  $x$ ;  $r$  et  $x$  étant considérés comme deux paramètres indépendants

$$v = A_1 r + A_2 x + A_{11} r^2 + A_{12} r x + A_{22} x^2 + \dots,$$

en supposant bien entendu que si  $F$  contient  $\lambda = \lambda_0 - x$ ,  $F$  soit analytique en  $x$ . L'équation initiale (1) aura autant de solutions, pour  $x$  petit que l'on pourra définir de racines petites  $r(x)$  par l'équation de ramification

$$r = \int_a^b \varphi(x_1) v(x_1) dx_1,$$

cette équation est de la forme

$$0 = r(a_{11} r + a_{12} x + \dots).$$

En effet il est bien connu que le terme linéaire en  $r$  disparaît dans l'équation de ramification, d'autre part il est évident,  $F(\lambda, v)$  étant du deuxième ordre en  $v$ , et le terme linéaire dans  $v$  se réduisant à  $r\varphi(x)$ , que  $r$  est en facteur dans la solution 1, c'est-à-dire que  $A_2 = A_{22} = \dots = 0$ . On a donc la solution triviale  $r = 0$  qui

donne  $v = 0$  et il reste à discuter l'équation

$$0 = a_{11}r + a_{12}z + \dots,$$

si  $a_{11} \neq 0$  on aura une solution unique  $r(z)$ , mais pour que le problème initial ait une solution unique non triviale il suffit également que l'on puisse déterminer  $x(r)$  c'est-à-dire que  $a_{12} \neq 0$ . Or sous cette forme la condition est indépendante de  $F$  et ne fait intervenir que le noyau.

On a en effet

$$A_{12}(x) + \int_a^b E(x, x_1) A_{12}(x_1) dx_1 = \int_a^b K(x, x_1) \varphi(x_1) dx_1.$$

Multiplions alors les deux membres de cette équation par  $\Psi(x) dx$  et intégrons entre  $a$  et  $b$ , il vient, en tenant compte de la valeur de  $E$  et intervertissant les signes d'intégration, ce qui est permis en vertu des hypothèses faites sur le noyau,

$$a_{12} = \int_a^b \varphi(x_1) A_{12}(x_1) dx_1 = \int_a^b \int_a^b K(x, x_1) \varphi(x_1) \Psi(x) dx dx_1,$$

d'où la condition suffisante cherchée

$$(A) \quad \int_a^b \int_a^b K(x, x_1) \varphi(x_1) \Psi(x) dx dx_1 \neq 0.$$

Si  $\mathcal{K} \equiv 0$ , c'est-à-dire si le paramètre  $\lambda$  a la place habituelle en facteur devant le noyau, cette condition est équivalente à

$$\int_a^b \varphi(x_1) \Psi(x_1) dx_1 \neq 0.$$

Condition satisfaite si  $\lambda$  est pôle simple de la résolvante et en particulier satisfaite si le noyau est symétrique.

Si le noyau  $\mathcal{K}$  n'est pas identiquement nul mais n'admet pas de fonctions fondamentales, il admet un noyau résolvant  $\mathcal{R}$  et l'équation donnée est équivalente à l'équation

$$(1') \quad v(x) + \lambda_0 \int_a^b \bar{K}(x, x_1) v(x_1) dx_1 = \bar{F} + z \int_a^b \bar{K}(x, x_1) v(x_1) dx_1,$$

en posant

$$\bar{\mathbf{K}} = \mathbf{K}(x, x_1) + \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \mathbf{K}(t, x_1) dt,$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \int_a^b \mathcal{K}(x, x_1) \mathbf{F} dx_1,$$

et la condition suffisante cherchée s'écrit sous la forme

$$\int_a^b \varphi(x_1) \bar{\Psi}(x_1) dx_1 \neq 0.$$

où  $\bar{\Psi}(x)$  est la solution de l'équation homogène associée de (1')

$$\bar{\Psi}(x_1) + \lambda_0 \int_a^b \bar{\mathbf{K}}(x, x_1) \bar{\Psi}(x) dx = 0.$$

L'équation homogène associée de (1) peut d'ailleurs s'écrire en fonction de  $\bar{\mathbf{K}}$  et  $\mathcal{K}$

$$\Psi(x_1) + \int_a^b \left\{ \mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 \left[ \bar{\mathbf{K}}(x, x_1) + \int_a^b \mathcal{K}(x, t) \bar{\mathbf{K}}(t, x_1) dt \right] \right\} \times \Psi(x) dx = 0,$$

et cette équation n'est pas satisfaite en général par  $\bar{\Psi}$ . On a donc en général  $\bar{\Psi} \neq \Psi$  et comme on peut écrire cette équation sous la forme

$$\Psi(x_1) + \int_a^b \mathcal{K}(x, x_1) \Psi(x) dx + \lambda_0 \int_a^b \bar{\mathbf{K}}(x, x_1) \times \left[ \Psi(x) + \int_a^b \mathcal{K}(u, x) \Psi(u) du \right] dx = 0,$$

on voit qu'on peut prendre alors

$$\bar{\Psi}(x_1) = \Psi(x_1) + \int_a^b \mathcal{K}(x, x_1) \Psi(x) dx.$$

Mais si  $\mathcal{K}(x, x_1)$ ,  $\bar{\mathbf{K}}(x, x_1)$  et  $\int_a^b \bar{\mathbf{K}}(t, x_1) \mathcal{K}(x, t) dt$  sont symétriques en  $x$  et  $x_1$ , l'équation peut s'écrire sous la forme

$$\Psi(x_1) + \lambda_0 \int_a^b \bar{\mathbf{K}}(x, x_1) \Psi(x) dx + \int_a^b \mathcal{K}(x, x_1) \left[ \Psi(x) + \lambda_0 \int_a^b \bar{\mathbf{K}}(x, u) \Psi(u) du \right] dx = 0,$$

qui montre, le noyau  $\mathcal{K}$  n'admettant pas de fonctions fondamentales, que les deux équations associées sont équivalentes. Il est d'ailleurs évident *a priori* que si  $\mathcal{K}$ ,  $K$  et  $\bar{K}$  sont symétriques, les équations associées des deux équations équivalentes sont également équivalentes et qu'alors la condition suffisante (A) est satisfaite.

Mais en général  $\mathcal{K}$  et  $K$  étant symétriques  $\bar{K}$  ne l'est pas. Cependant il est un cas important pour les applications que nous avons en vue où l'on peut affirmer que  $\bar{K}$  est symétrique comme  $\mathcal{K}$  et  $K$ , c'est celui où  $\mathcal{K}$  et  $K$  sont des fonctions périodiques de période  $b - a$  et paires en  $x - x_1$ .

On a en effet la propriété suivante :

Soit  $\omega(t, \sigma)$  une fonction paire de  $t - \sigma$  périodique de période  $b - a$ ,  $N(s, t)$  une fonction également périodique et paire de  $s - t$ ; la fonction

$$g(s, \sigma) = \int_a^b N(s, t) \omega(t, \sigma) dt$$

est également périodique et paire en  $s - \sigma$ .

En effet, posons  $t' = t - \sigma$ , alors

$$\omega(t, \sigma) = \omega(t') \quad \text{et} \quad N(s, t) = N(s - \sigma, t'),$$

posons encore  $s' = s - \sigma$ , il suffit de montrer que

$$g(s, \sigma) = \int_{a-\sigma}^{b-\sigma} N(s', t') \omega(t') dt' = g(s')$$

est périodique de période  $b - a$ , ce qui est évident, et de plus que c'est une fonction paire de  $s'$ . On a en effet

$$\int_{a-\sigma}^{b-\sigma} N(s', t') \omega(t') dt' = \int_{a-\sigma}^{b-\sigma} N(-s', -t') \omega(t') dt'.$$

Posons  $\tau = -t'$

On a donc

$$\begin{aligned} g(s') &= \int_{a-\sigma}^{b-\sigma} N(s', t') \omega(t') dt' = - \int_{-a+\sigma}^{-b+\sigma} N(-s', \tau) \omega(\tau) d\tau \\ &= \int_{-b+\sigma}^{-a+\sigma} N(-s', \tau) \omega(\tau) d\tau \\ &= \int_{\sigma-b}^{\sigma-b+(b-a)} N(-s', \tau) \omega(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

mais en vertu de la périodicité  $\int_x^{x+h-\alpha} N(-s', \tau) \omega(\tau) d\tau$  est indépendant de  $\alpha$ ; on a donc

$$g(s') = \int_{\alpha-\sigma}^{b-\sigma} N(-s', \tau) \omega(\tau) d\tau = g(-s') \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Il résulte aisément de cette propriété, en se reportant à la formule de définition des noyaux résolvants, que  $\mathcal{K}$  étant périodique et pair en  $x - x_1$ , il en est de même de  $\mathcal{N}$ ; il en est par suite encore de même de  $\int_a^b \mathcal{N}(x, t) \mathcal{K}(t, x_1) dt$  donc de  $K$ . Donc

*Si les noyaux  $K$  et  $\mathcal{K}$  sont des fonctions périodiques paires en  $x - x_1$ , on est sûr que l'équation (1) admet une solution unique non identiquement nulle au voisinage de toute valeur caractéristique  $\lambda_0$  de  $\lambda$  pour laquelle le noyau admet une seule fonction fondamentale.*

Considérons maintenant le cas où pour la valeur  $\lambda_0$  le noyau  $\mathcal{K} + \lambda_0 K$  admet deux solutions fondamentales  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  que nous prenons orthogonales et normées; et supposons de plus que l'on sache *a priori* que  $v(x)$  est orthogonale à une combinaison linéaire de ces deux solutions :

$$\int_a^b (k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2) v(x_1) dx_1 = 0 \quad \text{avec} \quad k_1^2 + k_2^2 = 1.$$

Prenons alors comme solutions fondamentales, orthogonales et normées

$$\Phi_1 = k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, \quad \Phi_2 = k_2 \varphi_1 - k_1 \varphi_2.$$

Prenons enfin comme solutions orthogonales et normées de l'équation homogène associée  $\Psi_1$  et  $\Psi_2$  telles que

$$\int_a^b \Psi_1 \Phi_2 dx = 0.$$

Posons alors

$$E = \mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 K(x, x_1) + \Phi_1(x_1) \Psi_1(x) + \Phi_2(x_1) \Psi_2(x).$$



L'équation donnée peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} v(x) + \int_a^b E(x, x_1) v(x_1) dx_1 \\ = r \Psi_2(x) + F + \lambda \int_a^b K(x, x_1) v(x_1) dx_1, \end{aligned}$$

en posant

$$r = \int_a^b v(x) \Phi_2(x) dx.$$

Le noyau  $E$  n'admet plus de solutions fondamentales et tout se passe comme dans le cas d'une seule fonction fondamentale; la première approximation de  $v$  est  $r\Phi_2$ , et la condition suffisante cherchée s'écrit encore

$$\int_a^b \int_a^b K(x, x_1) \Phi_2(x_1) \Psi_2(x) dx dx_1 \neq 0.$$

Elle est certainement satisfaite si

- 1°  $\mathcal{K}$  étant identiquement nul,  $K$  est symétrique;
- 2°  $\mathcal{K}$  n'admettant pas de fonctions fondamentales,  $\mathcal{K}$  et  $K$  sont des fonctions périodiques et paires en  $x - x_1$ .

Si au lieu d'une équation intégrale on a un système, on peut le remplacer par le procédé de Schmidt par une équation unique de même forme et il suffit d'écrire pour elle la condition suffisante (A). Mais si ce système est équivalent à un système de la forme

$$\begin{aligned} v(x) + \int_a^b (\mathcal{K} + \lambda K) v(x_1) dx_1 = F(u, v), \\ u(x) + \int_a^b K_1 u(x_1) dx_1 + \int_a^b K_2 v(x_1) dx_1 = H(u, v), \end{aligned}$$

où pour simplifier l'écriture nous ne considérons que deux équations, on est encore assuré de l'existence d'une solution unique non triviale au voisinage de  $\lambda_0$  si,  $K_1$  et  $\mathcal{K}$  n'admettant pas de fonctions fondamentales, les noyaux  $\mathcal{K}$  et  $K$  sont périodiques et pairs en  $x - x_1$ , et si le noyau  $\mathcal{K} + \lambda_0 K$  n'admet qu'une seule fonction fondamentale ou en admet deux dont on sait a priori que l'une d'elles est orthogonale à la solution  $v$ .

Enfin il en est encore de même évidemment si on a une équation intégral-différentielle

$$v(x) + \int_a^b (\mathcal{K} + \lambda \mathbf{K}) v(x_1) dx_1 = F\left(v, \frac{dv}{dx}, \dots, \frac{d^p v}{dx^p}\right),$$

pourvu que l'on ait pu montrer, en la remplaçant par exemple par un système, qu'elle était résoluble par approximations successives et que les conclusions relatives à une équation lui étaient applicables à savoir : pour  $\lambda$  quelconque il y a une solution unique identiquement nulle; pour  $\lambda = \lambda_0 - \alpha$  l'équation

$$\begin{aligned} v(x) + \int_a^b E v(x_1) dx_1 \\ = r \Psi(x) + \alpha \int_a^b \mathbf{K}(x, x_1) v(x_1) dx_1 + F\left(v, \dots, \frac{d^p v}{dx^p}\right) \end{aligned}$$

admet une solution unique développable en série en  $r$  et  $\alpha$ .

## 2. Application aux ondes permanentes à deux dimensions. —

1<sup>o</sup> Dans le cas d'une onde irrotationnelle à la surface d'un liquide de profondeur infinie, Lichtenstein (1) s'est ramené à l'étude du système

$$\begin{aligned} \theta(\sigma^*) - \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} \theta(\sigma) d\sigma &= \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} (e^{-3\tau} \sin \theta - \theta) d\sigma, \\ \tau(\sigma^*) - p \int_0^{2\pi} \theta(\sigma) d\sigma &= p \int_0^{\sigma^*} (e^{-3\tau} \sin \theta - \theta) d\sigma, \end{aligned}$$

avec  $r = \sqrt{2[1 - \cos(\sigma - \sigma^*)]} = 2 \left| \sin \frac{\sigma - \sigma^*}{2} \right|$  et la condition de symétrie  $\theta(\sigma) = -\theta(-\sigma)$ ,  $\tau(\sigma) = \tau(-\sigma)$ . Ce système est du type étudié dans le précédent paragraphe : le noyau  $\log \frac{1}{r}$  est symétrique et au voisinage de chaque valeur caractéristique de  $p$  :  $p = n$  pour lesquelles il y a deux fonctions fondamentales  $\Phi_1 = \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{\pi}}$ ,  $\Phi_2 = \frac{\sin n\sigma}{\sqrt{\pi}}$  dont l'une, en vertu de la

---

(1) *Loc. cit.*, 2, p. 47.

symétrie, est orthogonale à la solution, on est assuré qu'il existe une solution unique non triviale.

2° Dans le cas de l'onde rotationnelle (avec comme cas particulier l'onde irrotationnelle), je me suis ramené (1) à l'étude du système intégral-différentiel

$$\frac{\partial V^*}{\partial n} - \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \log \frac{1}{r} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \omega^*}{\partial n} ds - \frac{\partial \omega^*}{\partial n} - p\omega^* + \Phi^*$$

avec

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \iint F \log \frac{1}{r} d\xi d\eta.$$

$$V^* = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \log \frac{1}{r} d\sigma.$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V^* \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{r} \right) d\sigma - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \log \frac{1}{r} d\sigma,$$

où  $F$  et  $\Phi$  sont du second ordre en  $V, V^*, \omega$  et leurs dérivées des deux premiers ordres et la fonction arbitraire  $f$  qui a en facteur le paramètre  $r$  caractérisant la hauteur de l'onde. Ce système est, comme je l'ai montré, résoluble par approximations successives. D'autre part il résulte de la forme de  $F$  et  $\Phi$  et de la propriété rappelée dans le paragraphe 1, que si l'on écrit la première approximation de  $\frac{\partial V^*}{\partial n}$ , qui dépend de deux paramètres sous la forme  $\frac{r \cos(s - \Omega)}{\sqrt{\pi}}$ ,  $\frac{\partial V^*}{\partial n}$  est une fonction paire de  $s - \Omega$ ; on sait donc *a priori* que  $\int_0^{2\pi} \frac{\partial V^*}{\partial n} \sin(s - \Omega) ds = 0$  et le système admet une solution unique non triviale au voisinage de toute valeur entière de  $p$ , c'est-à-dire qu'il existe une onde fonction du paramètre  $r$  dont la vitesse est donnée par  $p = \frac{\lambda g}{2\pi c^2} = n - \kappa(r)$ ; l'amplitude de cette onde s'annule avec  $r$  et si l'équation de ramification ne donne pas  $\kappa \equiv 0$ ,  $r$  arbitraire (cas de l'onde de Gertsner),  $\kappa(r)$  s'annule également avec  $r$ .

3° Enfin les ondes à la surface d'un liquide homogène de pro-

---

(1) *Journ. de Math.*, 13, 1934, p. 217-291

fondeur finie sont données par (1)

$$\begin{aligned}
 U^* &= \frac{p}{\pi} \int_0^{2\pi} U^* \log \frac{1}{r(\sigma, s)} ds + \frac{p\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} U^{**} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} dt \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} \omega^{**} dt}{2\pi \log \rho_0} + \frac{p\rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn_t} dt \\
 &\quad - \left( \frac{d\omega^*}{dn} + p\omega^* - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega^*}{dn} ds \right) + \Phi^*;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U^{**}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U^* \frac{d \log \frac{1}{r(t, s)}}{dn_t} ds + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V^* \frac{d^2}{dn_s dn_t} \log \frac{1}{r(t, s)} ds \\
 &= \frac{\int_0^{2\pi} \omega^{**} dt}{2\pi \rho_0 \log \rho_0} + \frac{\rho_0}{\pi} \mathcal{L}(\omega^{**});
 \end{aligned}$$

$$\omega = -\frac{1}{2\pi} \iint F \log \frac{1}{r} d\xi d\eta,$$

$$V^* = -\frac{U^*}{p} + \frac{\int_0^{2\pi} \omega^{**} dt}{2\pi p \log \rho_0} + \frac{\Phi^*}{p} - \frac{1}{p} \left( \frac{d\omega^*}{dn} + p\omega^* - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\omega^*}{dn} ds \right).$$

En portant dans la deuxième équation la valeur de  $V^*$  donnée par la dernière on a  $U^{**}$  et cette valeur portée dans la première équation donne une équation intégrale dont la partie linéarisée ne dépend que de  $U^*$ . En vertu de la propriété rappelée dans le paragraphe 1, le noyau de cette équation, qui est visiblement linéaire en  $p$ , a comme terme  $\mathcal{K}$  indépendant de  $p$  et comme coefficient  $K$  de  $p$  des fonctions périodiques et paires en  $s - \sigma$  (2). Comme ce système est encore résoluble par approximations successives et puisqu'on montre, comme dans le cas de la profondeur infinie, que la solution est symétrique, on est encore assuré de l'existence d'une solution unique non triviale au voisinage de toute les valeurs

(1) *Loc. cit.*, 4, p. 276.

(2) Cette équation est d'ailleurs

$$U^*(\sigma) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \rho_0^2 \frac{\partial}{\partial \rho_0^2} \log \frac{1}{r(\sigma, s)} + p \log \frac{r(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} \right] U^*(s) ds = 0$$

avec  $r(\sigma, s) = \sqrt{1 - 2\rho_0^2 \cos(\sigma - s) + \rho_0^4}$  (*loc. cit.*, 4, p. 283), mais les résultats du paragraphe 1 permettent d'éviter les longs calculs conduisant à cette équation.

caractéristiques de  $p^{(1)}$  :  $p = n \frac{1 + \rho_0^2 n}{1 - \rho_0^2 n}$  pour lesquelles on a les deux fonctions fondamentales  $\frac{\cos n\sigma}{\sqrt{\pi}}$ ,  $\frac{\sin n\sigma}{\sqrt{\pi}}$  dont, par suite de la symétrie, une combinaison linéaire est orthogonale à  $U^*$ .

3. Considérons maintenant une équation intégrale de la forme

$$(2) \quad \begin{aligned} v(x) + \int_a^b [\mathcal{K}(x, x_1) + \lambda \mathbf{K}(x, x_1)] v(x_1) dx_1 \\ = \gamma h(x) + \mathbf{F}(\gamma h(x), v), \end{aligned}$$

où  $\gamma$  est un paramètre petit,  $h$  une fonction donnée,  $\mathbf{F}$  une opération fonctionnelle non linéaire en  $v$  et  $\gamma h$ .

Alors  $\lambda$  étant quelconque, on sait que l'équation a une solution unique développable en série par rapport à  $\gamma$  et tendant vers 0 avec  $\gamma$ . Au voisinage  $\lambda = \lambda_0 - \kappa$  d'une valeur  $\lambda_0$  pour laquelle le noyau  $\mathcal{K} + \lambda_0 \mathbf{K}$  admet des solutions fondamentales non identiquement nulles, il faut étudier les équations de ramification relatives à

$$\begin{aligned} v(x) + \int_a^b [\mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 \mathbf{K}(x, x_1)] v(x_1) dx_1 \\ = \kappa \int_a^b \mathbf{K}(x, x_1) v(x_1) dx_1 + \gamma h(x) + \mathbf{F}[\gamma h(x), v]. \end{aligned}$$

Nous nous bornerons encore au cas où le noyau a une seule fonction fondamentale ou deux mais telles que l'on sache *a priori* que la solution est orthogonale à une de leurs combinaisons linéaires ce qui conduit toujours à l'équation

$$\begin{aligned} v(x) + \int_a^b \mathbf{E}(x, x_1) v(x_1) dx_1 \\ = r \Psi_2(x) + \gamma h(x) + \kappa \int_a^b \mathbf{K}(x, x_1) v(x_1) dx_1 + \mathbf{F}, \end{aligned}$$

---

(1) Ces valeurs sont données immédiatement en résolvant le problème linéarisé équivalent : déterminer  $p$  tel que  $\Delta V = 0$  ait une solution  $V(p, \alpha)$  périodique de période  $2\pi$  en  $\alpha$  et satisfaisant aux conditions aux limites

$$V = 0 \quad \text{sur } \rho = \rho_0, \quad pV + \frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \rho = r.$$

avec l'équation de ramification

$$r = \int_a^b \Phi_2(x_1) v(x_1) dx_1.$$

On voit aisément, l'équation de ramification étant de la forme

$$0 = \alpha_1 \gamma + \alpha_{20} \gamma^2 + \alpha_{11} \gamma r + \alpha_{02} r^2 + \dots + z(\beta_1 \gamma + \beta_2 r + \beta_{12} \gamma z + \dots),$$

que le nombre des solutions petites  $r(x, \gamma)$  est le même pour  $z$  suffisamment petit que dans le cas  $z = 0$ . Il s'agit donc essentiellement de discuter l'équation de ramification de l'équation

$$v(x) + \int_a^b E(x, x_1) v(x_1) dx_1 = r \Psi_2(x) + \gamma h(x) + F,$$

discussion qui n'est pas simple comme celle relative à l'équation (1). En effet,  $\gamma$  est un paramètre donné, il faut donc discuter nécessairement par rapport à  $r$ ; or  $r$  n'est plus en facteur dans l'équation de ramification et d'autre part la discussion par rapport à  $r$  fait intervenir non plus simplement le noyau, mais les termes non linéaires c'est-à-dire la valeur explicite de  $F$ .

L'équation de ramification a visiblement la forme

$$0 = \alpha_1 \gamma + \alpha_{20} \gamma^2 + \alpha_{11} \gamma r + \alpha_{02} r^2 + \dots$$

Si  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_{02} \neq 0$ , on a deux solutions réelles ou imaginaires, données par des développements en  $\gamma^{\frac{1}{2}}$ . Si  $\alpha_1 \neq 0$  et si  $\alpha_{0n} \neq 0$  est le premier coefficient de  $r^n$  non nul, on a  $n$  solutions données par des développements en  $\gamma^{\frac{1}{n}}$ . Remarquons que  $\alpha_1 \neq 0$  a une signification intéressante. En effet, on a

$$v(x) = r \Phi_2(x) + \gamma a_1(x) + \text{deuxième ordre},$$

et

$$a_1(x) = h(x) + \int_a^b L(x, x_1) h(x_1) dx_1,$$

où  $L(x, x_1)$  est le noyau résolvant de  $E$ . D'où

$$\alpha_1 = \int_a^b h(x) \Phi_2(x) dx + \int_a^b \int_a^b L(x, x_1) h(x_1) \Phi_2(x) dx dx_1.$$

or on sait que

$$\int_a^b L(x, x_1) \Phi_2(x) dx = \Psi_2(x_1) - \Phi_2(x_1);$$

d'où

$$x_1 = \int_a^b \Psi_2(x) h(x) dx.$$

Et la condition  $x_1 \neq 0$  exprime que le *problème linéarisé* : trouver une solution de

$$v(x) + \int_a^b [\mathcal{K}(x, x_1) + \lambda_0 \mathbf{K}(x, x_1)] v(x_1) dx_1 = \gamma h(x)$$

*est impossible*. Mais ceci n'entraîne pas, ainsi que nous venons de le voir, que le problème complet n'aie pas de solution.

**4. Application aux ondes dues aux inégalités du fond.** — Le mouvement est permanent et périodique de même période  $\lambda$  que les ondulations du fond. Les équations qui régissent ce mouvement sont exactement les mêmes que celles que nous avons données pour étudier, dans les axes liés à l'onde, le mouvement ondulatoire permanent de la surface libre d'un liquide pesant de profondeur finie <sup>(1)</sup>. Les hypothèses caractérisant ce mouvement sont les mêmes : la courbe limite n'est pas très différente d'une horizontale la composante horizontale de la vitesse est voisine de  $c$ , la composante verticale petite.

La seule différence est que sur le fond on n'a plus  $v^{**} = 0$ , mais  $v^{**} =$  fonction donnée périodique de période  $\lambda$ , soit

$$v^{**} = \gamma \cos \frac{2\pi x}{\lambda},$$

pour prendre l'exemple traité par Lamb.

Il suffit donc de remplacer  $\omega^{**}$  par  $\Omega^{**} - \gamma \cos t$  dans toutes les équations, en désignant maintenant par  $\Omega^{**}$  la valeur de  $\omega$  quand le point tend vers un point du cercle intérieur, pour avoir toutes les équations du mouvement.

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*, 4, p. 283.

L'équation finale à discuter est

$$U^*(\sigma) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \rho_0^2 \frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)} \log \frac{1}{r(\sigma, s)} + p \log \frac{r(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} \right] U^*(s) ds$$

$$= E(\omega^*) + D(\omega^{**}) + G^*,$$

où  $\omega^{**}$  intervient seulement dans

$$D(\omega^{**}) = \frac{\int_0^{2\pi} \omega^{**} dt}{2\pi \rho_0 \log \rho_0} + \frac{p \rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega^{**} \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} dt$$

$$- \frac{p \rho_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} \mathcal{L}(\omega^{**}) dt$$

$$= D(\Omega^{**}) - \gamma \left[ \frac{\int_0^{2\pi} \cos t dt}{2\pi \rho_0 \log \rho_0} + \frac{p \rho_0}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} dt \right.$$

$$\left. - \frac{p \rho_0^2}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} \mathcal{L}(\cos t) dt \right];$$

or

$$\mathcal{L}(\cos t) = \lim. \text{ quand } (\rho, \alpha) \rightarrow (\rho_0, t) \text{ de } \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{2\pi} \cos \tau \frac{\partial}{\partial n_\tau} \log \frac{1}{r(\rho_0, \tau; \rho, \alpha)} d\tau;$$

mais

$$\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r(\rho_0, \tau; \rho, \alpha)} \cos \tau d\tau = \pi \frac{\rho_0}{\rho} \cos \alpha;$$

d'où, comme on le vérifie sans peine,

$$\mathcal{L}(\cos t) = -\frac{\pi}{\rho_0^2} \cos t,$$

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{L}(\cos t) \log \frac{1}{r(\sigma, t)} dt = -\frac{\pi^2}{\rho_0} \cos \sigma$$

et

$$\int_0^{2\pi} \cos t \frac{\partial}{\partial n_t} \log \frac{1}{r(\sigma, t)} dt = \pi \cos \sigma.$$

D'où finalement

$$D(\omega^{**}) = D(\Omega^{**}) - 2p\rho_0\gamma \cos \sigma.$$

L'équation fondamentale linéarisée du problème est donc

$$U^* + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \rho_0^2 \frac{\partial}{\partial(\rho_0^2)} \log \frac{1}{r(\sigma, s)} + p \log \frac{r(\sigma, s)}{r(\sigma, s)} \right] U^* ds$$

$$= -2p\rho_0\gamma \cos \sigma.$$



Lorsque  $p$  n'est pas valeur caractéristique, le problème admet une solution unique qui, ainsi qu'on le constate immédiatement, admet les mêmes axes de symétrie que le fond. Cette solution est développable en série entière en  $\gamma$  pour  $\gamma$  suffisamment petit.

Pour les valeurs exceptionnelles de  $p$

$$p = m \frac{1 + \rho_0^2 m}{1 - \rho_0^2 m} = m \coth \frac{2\pi m H}{\lambda} \quad (m \text{ entier}),$$

l'équation homogène a deux solutions fondamentales  $\frac{\cos m\sigma}{\sqrt{\pi}}$ ,  $\frac{\sin m\sigma}{\sqrt{\pi}}$ . Si  $m \neq 1$ , le problème linéarisé admet une solution déterminée à une combinaison linéaire près de  $\cos m\sigma$  et  $\sin m\sigma$ , c'est-à-dire qu'il n'admet pas une solution univoquement déterminée et il y aurait lieu de discuter les équations de ramification pour avoir la ou les solutions du problème. Si  $m = 1$ , le problème linéarisé est impossible. Nous allons discuter complètement ce cas et montrer que le problème a encore une solution unique.

En effet montrons d'abord qu'il y a une solution unique admettant la même symétrie que le fond c'est-à-dire telle que

$$\int_0^{2\pi} U^* \sin \sigma \, d\sigma = 0.$$

L'unique équation de ramification se présente alors sous la forme

$$0 = -2p\rho_0 \sqrt{\pi} \gamma + \text{termes d'ordre supérieur en } r \text{ et } \gamma.$$

Si l'on fait  $\gamma = 0$  on détermine les termes en  $r$  seul. Or leurs coefficients sont, avec les notations utilisées dans ma thèse et à des coefficients  $\pi$  près, ceux des termes en  $\mu$  seul de l'équation de ramification des ondes de surface libre. Or il résulte de l'expression du coefficient de  $\mu^2$

$$\frac{4\pi^2}{\lambda} \int_{\rho_0}^1 \left[ \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho(1 - \rho_0^2)} + (1 + \rho_0^2) \rho \frac{\log \rho - \log \rho_0}{\log \rho_0} \right] h_1(\rho) \, d\rho,$$

que celui-ci est nul dans le cas du mouvement irrotationnel ( $h_1 = 0$ ) qui nous occupe ici. On vérifie sans peine que le coefficient de  $r^3$  n'est pas nul et le problème a une solution unique réelle développable en  $\gamma^{\frac{1}{2}}$ .

De plus il n'y a pas de solution non symétrique par rapport à OY. En effet supposons qu'il y ait une solution non symétrique.

Elle s'écrirait, en posant  $r_1 = r \cos \Omega$ ,  $r_2 = r \sin \Omega$

$$\nu = -2p\rho_0\gamma \cos \sigma + r \frac{\cos(\sigma - \Omega)}{\sqrt{\pi}} + \text{termes d'ordre supérieur,}$$

et l'on aurait à satisfaire à deux équations de ramification que l'on pourrait écrire

$$r = \int_0^{2\pi} \nu \frac{\cos(\sigma - \Omega)}{\sqrt{\pi}} d\sigma,$$

$$0 = \int_0^{2\pi} \nu \frac{\sin(\sigma - \Omega)}{\sqrt{\pi}} d\sigma.$$

Or dans  $\nu$ , en vertu de la forme de F et  $\Phi$ , les termes en  $r$  seul satisfont à  $\int_0^{2\pi} \nu \frac{\sin(\sigma - \Omega)}{\sqrt{\pi}} d\sigma = 0$ . La deuxième équation de rami-

fication se réduit donc à

$$0 = \gamma(2p\rho_0\sqrt{\pi} \sin \Omega + \text{termes du premier ordre au moins en } r, \gamma).$$

Comme  $\gamma \neq 0$ , cette équation ne peut être satisfaite par des valeurs de  $r$  petites que si  $\sin \Omega = 0$  au premier ordre près. Mais alors les termes du premier ordre en  $\nu$  sont

$$\nu_1 = -2p\rho_0\gamma \cos \sigma + \frac{r \cos \sigma}{\sqrt{\pi}},$$

et toute la solution est paire en  $\sigma$ . On a donc bien une solution unique ayant les mêmes symétries que le fond, mais la surface libre est de l'ordre de  $\gamma^{\frac{1}{3}}$  et non plus de  $\gamma$ , elle a donc des crêtes et des creux nettement plus accusés.

5. Nous allons, pour terminer, indiquer un procédé pratique permettant de calculer simplement et effectivement la solution, jusqu'à tel ordre d'approximation désiré dans le cas exceptionnel

$$c^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi H}{\lambda}.$$

Nous cherchons la solution sous la forme

$$y = A\psi + \nu(x, \psi),$$

où  $A = \frac{1}{c}$ . Chaque ligne  $\psi = \text{const.}$  est une ligne de courant, la surface libre est obtenue en faisant  $\psi = 0$ ; pour simplifier l'écriture nous posons

$$\Psi = \frac{2\pi A}{\lambda} \psi, \quad X = \frac{2\pi x}{\lambda}, \quad Q = \frac{2\pi A q}{\lambda} = \frac{2\pi H}{\lambda}.$$

L'équation donnant  $v$  est alors (1)

$$\Delta v = \frac{4\pi}{\lambda} \left( \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial \Psi} - \frac{\partial v}{\partial \Psi} \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \right) + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \left[ - \left( \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \Psi^2} + 2 \frac{\partial v}{\partial X} \frac{\partial v}{\partial \Psi} \frac{\partial^2 v}{\partial X \partial \Psi} - \left( \frac{\partial v}{\partial \Psi} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \right].$$

Les conditions aux limites étant

$$v^{**} = \gamma \cos X \quad \text{sur le fond } \Psi = Q,$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v^*}{\partial \Psi} + (\coth Q) v^* \\ &= \frac{\lambda}{2\pi} k \left[ \frac{A^2}{2} + \frac{2\pi A^2}{\lambda} \frac{\partial v^*}{\partial \Psi} + \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{A^2}{2} \left( \frac{\partial v^*}{\partial \Psi} \right)^2 \right] \\ &+ \frac{\pi}{\lambda} \left[ \left( \frac{\partial v^*}{\partial X} \right)^2 - \left( \frac{\partial v^*}{\partial \Psi} \right)^2 - 4(\coth Q) v^* \frac{\partial v^*}{\partial \Psi} - \frac{4\pi}{\lambda} \coth Q v^* \left( \frac{\partial v^*}{\partial \Psi} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

sur  $\Psi = 0$ ;  $k$  étant, comme on sait, la constante qui s'introduit lorsqu'on écrit que, sur la surface libre, la pression est constante.

Nous savons que le problème admet une solution unique développable en  $\gamma^{\frac{1}{3}}$ . Nous portons donc un développement de la forme

$$v = v_1 \gamma^{\frac{1}{3}} + v_2 \gamma^{\frac{2}{3}} + v_3 \gamma + \dots,$$

et identifions,  $k$  étant également représenté par un développement

$$k = k_1 \gamma^{\frac{1}{3}} + k_2 \gamma^{\frac{2}{3}} + k_3 \gamma + \dots$$

On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} v_1 &= C_1 \text{sh}(\Psi - Q) \cos X, \\ k_1 &= 0, \end{aligned}$$

(1) *Loc. cit.* 4, p. 228. Nous supposons ici le mouvement irrotationnel  $f = 0$ .

où  $C_i$  est une constante arbitraire. D'autre part on se rend compte immédiatement que  $v_2, v_3, \dots$ , sont de la forme

$$v_2 = v_2^0(\Psi) + v_2^1(\Psi) \cos X + v_2^2(\Psi) \cos 2X,$$

.....

$$v_n = v_n^0(\Psi) + v_n^1(\Psi) \cos X + \dots + v_n^j(\Psi) \cos jX + \dots + v_n^n(\Psi) \cos nX,$$

.....

En portant ces expressions dans l'équation donnant  $v$  et identifiant en  $\gamma$ , puis en  $\cos mX$ , on obtient pour déterminer  $v_i^j$  l'équation

$$v_i^{j''} - j^2 v_i^j = V_i^j(\Psi),$$

$V_i^j$  étant connu en fonction des  $v_i^{j'}$  où  $j' \leq j - 1$ .

Les conditions aux limites permettant de déterminer  $v_i^j$  étant : sur  $\Psi = Q$ ,  $v_i^j(Q) = v_i^{j*} = 0$  sauf pour  $i = 3, j = 1$  auquel cas on a  $v_3^1(Q) = 1$ ; et sur  $\Psi = 0$  :

$$\frac{\partial v_i^j}{\partial \Psi} + \coth Q v_i^{j*} = \mathcal{V}_i^{j*},$$

où  $\mathcal{V}_i^{j*}$  pour  $j \neq 0$  est une constante connue également lorsque sont connues les approximations précédentes.

De plus on a pour  $j = 0$ ,  $v_i^{0*} = 0$ ; en effet, en vertu du choix de l'axe des  $x$  dans le niveau moyen, on a  $\int_x^{x+2\pi} v^* dX = 0$ , ce qui entraîne bien  $v_i^{0*} = 0$ . La condition

$$\frac{\partial v_i^{0*}}{\partial \Psi} = \mathcal{V}_i^{0*} = \frac{\lambda A^2}{4\pi} k_i + \text{quantité connue}$$

détermine donc  $k_i$ .

Nous avons ainsi le schéma des calculs pratiques qui donnent la solution. Mais il faut encore remarquer que si les équations

$$v_i^{j''} - j^2 v_i^j = V_i^j(\Psi),$$

$$v_i^{j*} = 0,$$

$$\frac{\partial v_i^j}{\partial \Psi} + \coth Q v_i^{j*} = \mathcal{V}_i^{j*},$$

déterminent univoquement  $v_i^j$  pour  $j \neq 1$  par

$$(1) \quad v_i^j = \frac{1}{j} \int_0^\Psi \text{sh } j(\Psi - u) V_i^j(u) du + \frac{\text{sh } j(\Psi - Q) \mathfrak{V}_i^{j*} + (j \text{ch } j\Psi - \text{coth } Q \text{sh } j\Psi) \int_0^Q \text{sh } j(u - Q) V_i^j(u) du}{j \text{ch } jQ - \text{sh } jQ \text{coth } Q},$$

il n'en est plus de même pour  $j = 1$ . Les équations

$$\begin{aligned} v_i^{1*} - v_i^1 &= V_i^1(\Psi), \\ v_i^{1**} &= 0 \quad (i \neq 3), \\ \frac{\partial v_i^{1*}}{\partial \Psi} + \text{coth } Q v_i^{1*} &= \mathfrak{V}_i^{1*} \end{aligned}$$

ne déterminent  $v_i^1$  que si  $V_i^1(\Psi)$  et  $\mathfrak{V}_i^{1*}$  sont liés par la relation

$$(2) \quad \text{sh } Q \mathfrak{V}_i^{1*} = \int_0^Q \text{sh}(u - Q) V_i^1(u) du,$$

alors on a  $v_i^1$  non univoquement déterminé et donné par

$$(3) \quad v_i^1 = \int_0^\Psi \text{sh}(\Psi - u) V_i^1(u) du - \frac{\text{ch } \Psi}{\text{ch } Q} \int_0^Q \text{sh}(Q - u) V_i^1(u) du + C_i \text{sh}(\Psi - Q),$$

où  $C_i$  est une constante arbitraire. Pour  $i = 3$  on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} v_3^{1*} - v_3^1 &= V_3^1(\Psi), \\ v_3^{1**} &= 1, \\ \frac{\partial v_3^{1*}}{\partial \Psi} + \text{coth } Q v_3^{1*} &= \mathfrak{V}_3^{1*}, \end{aligned}$$

et l'on trouve de même la condition

$$(4) \quad \text{sh } Q \mathfrak{V}_3^{1*} = 1 + \int_0^Q \text{sh}(u - Q) V_3^1(u) du$$

et

$$(5) \quad v_3^1 = \int_0^\Psi \text{sh}(\Psi - u) V_3^1(u) du - \frac{\text{ch } \Psi}{\text{ch } Q} \int_0^Q \text{sh}(Q - u) V_3^1(u) du + \frac{\text{sh } \Psi}{\text{sh } Q} + C_3 \text{sh}(\Psi - Q),$$

où  $C_3$  est arbitraire.

En résumé le premier terme est déterminé à la constante  $C_1$  près, le deuxième à la constante  $C_2$  près, etc., mais pour déterminer chaque terme  $v_i$  il faut écrire la condition (2) (ou (4) pour  $i=3$ ); donc chaque terme introduit une nouvelle constante arbitraire mais donne une relation entre les constantes introduites précédemment. Nous allons voir en effectuant le calcul des premiers termes que  $v_2$  introduit une constante  $C_2$  mais ne détermine pas  $C_1$ , car  $\mathcal{V}_2^{1*} \equiv 0$ ,  $V_2^1 \equiv 0$ ; au contraire le calcul de  $v_3$  détermine  $C_1$  et l'on vérifie en effectuant les calculs que celui de  $v_4$  détermine  $C_2$ , etc.

En effet en portant la valeur de  $v_1$  dans les deuxièmes membres des équations on trouve

$$V_2^0 = \frac{2\pi}{\lambda} C_1^2 \operatorname{sh} 2(\Psi - Q).$$

$$V_2^1 = 0,$$

$$V_2^2 = 0$$

D'où

$$v_2^0 = \frac{\pi C_1^2}{2\lambda} \left[ \operatorname{sh} 2(\Psi - Q) - \left( \frac{\Psi}{Q} - 1 \right) \operatorname{sh} 2Q \right],$$

et de même

$$\mathcal{V}_2^{0*} = \frac{\lambda A^2}{4\pi} k_2 + \frac{\pi}{\lambda} C_1^2 \left( \frac{1}{2} + \operatorname{ch} 2Q \right),$$

$$\mathcal{V}_2^{1*} = 0,$$

$$\mathcal{V}_2^{2*} = \frac{\pi}{\lambda} C_1^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2Q \right).$$

La relation donnant  $\mathcal{V}_2^{0*}$  permet donc de déduire, puisque

$$v_2^{0*} = \frac{\pi C_1^2}{\lambda} \left( \operatorname{ch} 2Q - \frac{\operatorname{sh} 2Q}{2Q} \right),$$

$$k_2 = - \frac{2\pi^2 C_1^2}{A^2 \lambda^2} \left( \frac{\operatorname{sh} 2Q}{Q} + 1 \right).$$

Enfin (1) donne immédiatement

$$v_2^2 = \Gamma_2 \operatorname{sh} 2(\Psi - Q) = \frac{\pi C_1^2}{4\lambda} \times \frac{2 + \operatorname{ch} 2Q}{\operatorname{sh}^2 Q} \operatorname{sh} 2(\Psi - Q).$$

D'où

$$v_2 = \frac{\pi C_1^2}{2\lambda} \left[ \operatorname{sh} 2(\Psi - Q) - \left( \frac{\Psi}{Q} - 1 \right) \operatorname{sh} 2Q \right]$$

$$+ C_2 \operatorname{sh}(\Psi - Q) \cos X + \frac{\pi C_1^2}{4\lambda} \frac{(2 + \operatorname{ch} 2Q)}{\operatorname{sh}^2 Q} \operatorname{sh} 2(\Psi - Q) \cos 2X.$$

Le calcul de  $\nu_3$  s'effectue de la même manière. Par identification, on trouve

$$V_3^0 = \frac{4\pi}{\lambda} C_1 [\text{sh}(\Psi - Q) \nu_2^1 + \text{ch}(\Psi - Q) \nu_2^0],$$

$$V_3^1 = \frac{4\pi}{\lambda} C_1 \left[ 3 \text{ch}(\Psi - Q) \nu_2^2 + \frac{3}{2} \text{sh}(\Psi - Q) \nu_2^1 + \text{sh}(\Psi - Q) \nu_2^0 \right] \\ + \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \text{sh}(\Psi - Q) [2 \text{ch} 2(\Psi - Q) + 3],$$

$$V_3^2 = 0,$$

$$V_3^3 = \frac{4\pi}{\lambda} C_1 \left( \text{ch}(\Psi - Q) \nu_2^2 - \frac{1}{2} \text{sh}(\Psi - Q) \nu_2^1 \right) - \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \text{sh}(\Psi - Q);$$

d'où, en remplaçant  $\nu_2^0$ ,  $\nu_2^1$  et  $\nu_2^2$  par leur valeur

$$V_3^0 = \frac{4\pi}{\lambda} C_1 C_2 \text{sh} 2(\Psi - Q),$$

$$V_3^1 = \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \left[ -\frac{2 \text{sh} 2Q}{Q} \text{sh}(\Psi - Q) + 9 \text{coth}^2 Q \text{sh} 3(\Psi - Q) \right],$$

$$V_3^2 = 0,$$

$$V_3^3 = \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \left( \frac{\text{sh}^2 Q + 3}{\text{sh}^2 Q} \right) \text{sh}(\Psi - Q),$$

et de même

$$\mathcal{V}_3^0 = \frac{\lambda}{4\pi} k_3 A^2 - \frac{\pi}{\lambda} C_1 \left[ \nu_2^1 \left( \text{sh} Q + \frac{2 \text{ch}^2 Q}{\text{sh} Q} \right) - \nu_2^0 \text{ch} Q \right],$$

$$\mathcal{V}_3^1 = k_2 A^2 C_1 \text{ch} Q + \frac{3\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \text{ch}^3 Q \\ + C_1 \frac{\pi}{\lambda} \left[ (2\nu_2^0 + \nu_2^1) \text{ch} Q - 2\nu_2^2 \left( \frac{1}{\text{sh} Q} + 2 \text{sh} Q \right) \right],$$

$$\mathcal{V}_3^2 = -\frac{C_1 \pi}{\lambda} \left[ -\text{ch} Q \nu_2^1 + \left( \text{sh} Q + \frac{2}{\text{sh} Q} \right) \nu_2^0 \right],$$

$$\mathcal{V}_3^3 = \frac{C_1 \pi}{\lambda} \left( \text{ch} Q \nu_2^1 - \frac{2}{\text{sh} Q} \nu_2^0 \right) + \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \text{ch}^3 Q;$$

d'où, en tenant compte encore des valeurs de  $\nu_2^0$ ,  $\nu_2^1$  et  $\nu_2^2$ ,

$$\mathfrak{V}_3^0 = \frac{\lambda}{4\pi} A^2 k_3 + \frac{\pi}{\lambda} C_1 C_2 (3 \operatorname{ch}^2 Q + \operatorname{sh}^2 Q).$$

$$\mathfrak{V}_3^1 = \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^3 \operatorname{ch} Q \left[ \frac{9}{2 \operatorname{sh}^2 Q} - 3 \frac{\operatorname{sh} 2Q}{Q} + 13 \operatorname{ch}^2 Q + 2 \right],$$

$$\mathfrak{V}_3^2 = \frac{\pi C_1 C_2}{\lambda} (2 + \operatorname{ch} 2Q),$$

$$\mathfrak{V}_3^3 = \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^3 \operatorname{ch} Q \left[ 3 \operatorname{ch}^2 Q + 4 + \frac{9}{2 \operatorname{sh}^2 Q} \right].$$

On en déduit immédiatement

$$\nu_3^0 = \frac{\pi}{\lambda} C_1 C_2 \left[ \operatorname{sh} 2(\Psi - Q) - \left( \frac{\Psi}{Q} - 1 \right) \operatorname{sh} 2Q \right];$$

d'où

$$k_3 = - \frac{4\pi^2}{\lambda^2 A^2} C_1 C_2 \left( 1 + \frac{\operatorname{sh} 2Q}{Q} \right).$$

La relation (4) liant  $V_3^1$  et  $\mathfrak{V}_3^1$  s'écrit, puisque

$$\int_0^Q \operatorname{sh}^2(u - Q) du = -\frac{Q}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2Q}{4},$$

$$\int_0^Q \operatorname{sh}(u - Q) \operatorname{sh} 3(u - Q) du = \frac{\operatorname{sh} 4Q}{8} - \frac{\operatorname{sh} 2Q}{4};$$

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^3 \operatorname{ch} Q \operatorname{sh} Q \left[ \frac{9}{2 \operatorname{sh}^2 Q} - 3 \frac{\operatorname{sh} 2Q}{Q} + 13 \operatorname{ch}^2 Q + 2 \right] \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^3 \left[ \operatorname{sh} 2Q - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh}^2 2Q}{Q} + \frac{9}{8} \operatorname{coth}^2 Q (\operatorname{sh} 4Q - 2 \operatorname{sh} 2Q) \right]; \end{aligned}$$

d'où la valeur de  $C_1$ ,

$$(6) \quad C_1^3 = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{1}{\operatorname{ch} Q \operatorname{sh} Q \left[ \frac{9}{2 \operatorname{sh}^2 Q} - 2 \frac{\operatorname{sh} 2Q}{Q} + 4 \operatorname{ch}^2 Q \right]},$$

quantité positive.



Enfin on trouve sans peine

$$\begin{aligned} \nu_1^2 &= \frac{\pi^2}{\lambda^2} C_1^2 \left[ 2 \operatorname{sh} \Psi \operatorname{ch} Q - \frac{\Psi}{Q} \operatorname{ch}(\Psi - Q) \operatorname{sh} 2Q + \frac{9}{8} \operatorname{coth}^2 Q \operatorname{sh} 3(\Psi - Q) \right] \\ &\quad + \frac{\operatorname{sh} \Psi}{\operatorname{sh} Q} + C_3 \operatorname{sh}(\Psi - Q) \\ \nu_2^2 &= \frac{\pi C_1 C_2}{\lambda} \frac{2 + \operatorname{ch} 2Q}{2 \operatorname{sh}^2 Q} \operatorname{sh} 2(\Psi - Q) \\ \nu_3^2 &= \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{C_4^2}{8 \operatorname{sh}^2 Q} \left[ -(3 + \operatorname{sh}^2 Q) \operatorname{sh}(\Psi - Q) \right. \\ &\quad \left. + \left( 3 \operatorname{ch}^2 Q + 4 + \frac{9}{2 \operatorname{sh}^2 Q} \right) \operatorname{sh} 3(\Psi - Q) \right], \end{aligned}$$

où  $C_1$  a la valeur donnée par (6),  $C_2$  et  $C_3$  étant des constantes déterminées comme nous l'avons dit par la condition (2) appliquée à la détermination de  $\nu_4$  et  $\nu_5$ . Et l'on calcule ainsi sans difficulté la solution jusqu'à tel ordre d'approximation désiré.