BULLETIN DE LA S. M. F.

STEFAN KEMPISTY

# Sur les bornés des fonctions réelles

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 63 (1935), p. 91-120
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__91_0>

# SUR LES BORNES DES FONCTIONS RÉELLES ;

PAR M. STEFAN KEMPIŠTY.

M. A. Denjoy avait étudié, dans son Mémoire : *Sur quelques propriétés des fonctions de variables réelles*, les relations qui existent entre les bornes alternativement itérées des fonctions en un point et en particulier des fonctions ponctuellement discontinues (¹). Ses résultats étaient étendus, par M. H. Hahn, aux fonctions définies dans un espace métrique (²).

Or plusieurs propriétés des bornes subsistent pour les bornes généralisées qu'on obtient en négligeant les ensembles dénombrables, les ensembles de première catégorie ou bien les ensembles de mesure nulle. D'autre part, les notions de la continuité approximative et de la prépondérance de continuité (³) nous conduisent aux définitions de bornes dont l'itération fournit des résultats analogues à ceux qui étaient obtenus par M. Denjoy.

Pour traiter ensemble tous ces divers cas, nous allons considérer les fonctions définies dans un espace abstrait et nous allons définir les bornes généralisées de ces fonctions en se servant de l'opération fondamentale qui détermine l'intérieur d'un ensemble dans cet espace. En interprétant convenablement l'opération fondamentale, on pourra obtenir tous les genres de bornes qui viennent d'être énumérés.

Nous donnerons les conditions suffisantes de chacune des relations entre les bornes en envisageant les propriétés de l'opération fondamentale utilisées pour établir ces conditions. Ainsi, dans chacun de nos théorèmes, nous aurons affaire à un autre espace

(¹) *Bulletin de la Soc. math. de France*, t. 33, 1905, p. 98.
(²) *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, § 7, Kap. 3, p. 219.
(³) A. DENJOY, *Sur les fonctions dérivées sommables* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 43, 1915, p. 165 et 183).

caractérisé par les propriétés correspondantes de l'opération fondamentale ([1]).

En étudiant les fonctions ponctuellement discontinues, nous établirons une condition nécessaire et suffisante sous la forme d'une relation d'inégalité entre la borne inférieure de la borne supérieure et la borne supérieure de la borne inférieure, tandis que la condition de M. Denjoy concerne les bornes de ces bornes itérées.

Notre méthode générale permet aussi de traiter ensemble les propriétés des différentes itérations alternées des bornes et d'étendre les propriétés des fonctions continues et semi-continues aux classes de fonctions définies au moyen des bornes itérées. En particulier quelques-unes de ces propriétés peuvent être appliquées aux fonctions quasi continues qui interviennent dans l'étude des fonctions partiellement continues de plusieurs variables réelles ([2]).

En passant aux suites de fonctions, nous allons donner, à côté des relations établies par M. Denjoy, quelques autres relations qui impliquent non seulement le théorème de M. Baire sur la discontinuité ponctuelle de la limite d'une suite de fonctions continues, mais encore un théorème plus général d'après lequel la limite des fonctions simultanément quasi continues est ponctuellement discontinue ([3]).

Pour simplifier les énoncés nous n'allons considérer d'abord que les fonctions définies en tous points de l'espace et les bornes définies relativement à cet espace, car, en partant de l'opération fondamentale dans l'espace considéré, on peut toujours définir convenablement une opération relativement à un ensemble de cet espace pour l'appliquer ensuite aux bornes. En se servant des bornes définies sur un ensemble parfait, nous allons montrer qu'une fonction est de première classe de Baire au plus, quand l'ensemble de ses points de quasi-continuité est partout dense sur tout ensemble parfait.

1. **Définitions**. — Considérons une fonction réelle $f(x)$ définie

---

([1]) S. Kempisty, *Sur les opérations de la topologie générale* (*Mathematica*, t. 10, p. 137).
([2]) S. Kempisty, *Sur les fonctions quasi-continues* (*Fund. Math.*, t. 19, p. 184).
([3]) *Loc. cit.*, p. 193.

aux points $x$ d'un espace E, dans lequel une opération fondamentale $\varphi$ fait correspondre à tout ensemble A, contenu dans E, un autre ensemble $\varphi(A)$, de même contenu dans E.

Nous dirons qu'un nombre $M_\varphi(f, a)$ est la *borne supérieure de genre* $\varphi$ de la fonction $f(x)$ au point $a$, lorsque

$$M_\varphi(f, a) = \text{inf.} \mathop{E}_{y}\Big[a \in \varphi \mathop{E}_{x}[f(x) < y]\Big],$$

c'est-à-dire lorsque $M_\varphi(f, a)$ est la borne inférieure des nombres $y$ tels que $a$ est un point de l'intérieur de l'ensemble de points $x$ en lesquels $f(x) < y$.

Par exemple, quand E est un espace cartésien et $\varphi(A)$ est l'intérieur de A au sens commun, $M_\varphi(f, a)$ est la borne supérieure ou maximum de $f(x)$ au point $a$. Quand $\varphi(A)$ est la réunion de l'intérieur de A et de la partie isolée du complément $E - A$, $M_\varphi(f, a)$ est la plus grande limite de $f(x)$ en $a$. Quand $\varphi(A)$ désigne presque l'intérieur de A, c'est-à-dire l'intérieur en négligeant les ensembles de mesure nulle, $M_\varphi(f, a)$ est la borne supérieure en négligeant les ensembles de mesure nulle. Il en est de même des bornes supérieures en négligeant les ensembles dénombrables ou les ensembles de première catégorie. Quand $\varphi(A)$ désigne l'ensemble de points de densité (d'épaisseur) un de A, $M_\varphi(f, a)$ est la limite supérieure approximative [1].

Dans tous les cas cités l'opération $\varphi$ est *non décroissante*, c'est-à-dire $\varphi(A)$ est contenu dans $\varphi(B)$, si A est contenu dans B, quels que soient A et B.

Or, si $\varphi$ est une opération non décroissante, la borne $M_\varphi(f, a)$ est définie par la coupure dont le reste (la seconde classe) est l'ensemble de nombres $y$ pour lesquels $a$ est un point de $\varphi \mathop{E}_{x}[f(x) < y]$. Il est à remarquer que le nombre déterminé par cette coupure ne change pas quand on remplace l'inégalité $f(x) < y$ par la condition $f(x) \leq y$.

On définit la *borne inférieure* $m_\varphi(f, a)$ *de genre* $\varphi$ en posant

$$m_\varphi(f, a) = - M_\varphi(-f, a).$$

Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *semi-continue supérieu-*

---

[1] S. Kempisty, *Sur les fonctions approximativement continues* (*Fund. Math.*, t. 6, 1924).

*rement de genre* $\varphi$ au point $a$ lorsque

$$f(a) \geqq \mathrm{M}_\varphi(f, a).$$

Pour qu'une fonction $f(x)$ soit au point $a$ semi-continue supérieurement de genre $\varphi$, il faut et il suffit que $a$ soit un point de l'ensemble $\underset{x}{\mathrm{E}}[f(x) < b]$, $b$ étant un nombre supérieur à $f(a)$.

Une fonction $f(x)$ est *semi-continue inférieurement de genre* $\varphi$ si $-f$ est semi-continue supérieurement de genre $\varphi$, donc si

$$f(a) \leqq m_\varphi(f, a).$$

Ainsi quand $\varphi(\mathrm{A})$ désigne l'intérieur de l'ensemble A, dans un espace cartésien, toute fonction semi-continue de genre $\varphi$ est semi-continue au sens de M. Baire et, quand $\varphi(\mathrm{A})$ désigne la dérivée de l'intérieur de A, toute fonction semi-continue de genre $\varphi$ est quasi semi-continue.

En partant des bornes $m_\varphi$ et $\mathrm{M}_\varphi$, on peut former les bornes itérées

$$\begin{array}{llll} m_\varphi m_\varphi, & m_\varphi \mathrm{M}_\varphi, & m_\varphi m_\varphi m_\varphi, & m_\varphi m_\varphi \mathrm{M}_\varphi, \\ m_\varphi \mathrm{M}_\varphi m_\varphi, & m_\varphi \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi, & \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi, & \ldots, \\ \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi, & \mathrm{M}_\varphi m_\varphi, & \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi, & \mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi m_\varphi, \\ \mathrm{M}_\varphi m_\varphi \mathrm{M}_\varphi, & \mathrm{M}_\varphi m_\varphi m_\varphi, & m_\varphi m_\varphi m_\varphi, & \ldots, \end{array}$$

et définir ensuite les fonctions semi-continues correspondantes.

**2. Les bornes de genres conjugués.** — Nous dirons qu'une opération $\Phi$ est conjuguée à $\varphi$ lorsque

$$\Phi(\mathrm{A}) = \mathrm{E} - \varphi(\mathrm{E} - \mathrm{A}),$$

quel que soit l'ensemble A contenu dans l'espace E. Il est clair que les opérations $\varphi$ et $\Phi$ sont mutuellement conjuguées.

Ainsi l'intérieur et la fermeture d'un ensemble dans un espace cartésien s'obtiennent par les opérations conjuguées.

*Si* $\varphi$ *est une opération non décroissante, il en est de même de l'opération conjuguée* $\Phi$ *et*

$$m_\Phi(f, a) = \mathrm{M}_\varphi(f, a). \tag{1}$$

En effet $m_\Phi$ est définie par la coupure composée du segment

$$\mathrm{E}_y[a \in \Phi \mathrm{E}_x(f(x) > y)]$$

et du reste

$$E_y[a \in \varphi E(f(x) \leqq y)].$$

Il résulte de ce théorème qu'une fonction $f$ qui n'est pas semi-continue supérieurement de gènre $\varphi$ doit être semi-continue de genre $\Phi$.

Considérons deux opérations $\varphi$ et $\psi$ telles qu'on ait $\varphi(A) \subset \psi(A)$ (¹) quel que soit l'ensemble A dans E. En vertu des définitions des bornes, nous avons

$$(2) \qquad m_\varphi(f, a) \leqq m_\psi(f, a), \qquad M_\psi(f, a) \leqq M_\varphi(f, a).$$

Convenons de dire qu'une opération $\varphi$ est *inférieure*, si $\varphi(A) \subset A$, quel que soit $A \subset E$.

Comme $f(a)$ est en même temps la borne inférieure et supérieure de genre $\psi$, tel que $\psi(A) = A$, nous avons d'après (2), quelle que soit l'opération inférieure $\varphi$, les inégalités

$$m_\varphi(f, a) \leqq M_\varphi(f, a).$$

Si $\varphi_0(A)$ est l'ensemble de points $x$ tels que $x$ appartienne à l'ensemble $\varphi[A + (x)]$, l'opération $\varphi_0$ sera appelée *complétée* de $\varphi$.

Comme

$$A\varphi_0(A) \subset \varphi(A) \subset \varphi_0(A),$$

nous avons, d'après (2), les inégalités suivantes :

$$m_\varphi(f, a) \leqq m_{\varphi_0}(f, a), \qquad M_{\varphi_0}(f, a) \leqq M_\varphi(f, a).$$

Par exemple, quand $\varphi(A)$ est l'intérieur de A dans un espace cartésien, $\varphi_0(A)$ est l'intérieur complété par les points isolés du complément E — A, et les bornes $m_{\varphi_0}$ et $M_{\varphi_0}$ sont respectivement la plus petite et la plus grande limite de $f(x)$ au point $x$.

On déduit des inégalités établies que *toute fonction semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) *de genre* $\varphi$ *est semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) *de genre* $\varphi_0$. Pour voir que *la réciproque est aussi vraie*, prenons un nombre $b$ supérieur à $f(a)$. Si $f(x)$ est semi-continue supérieurement de genre $\varphi_0$,

(¹) $\subset$ est le signe d'inclusion.

le point $a$ appartient aux ensembles

$$\varphi_0 E_x[f(x) < b], \qquad E_x[f(x) < b],$$

donc à l'ensemble $\varphi E_x[f(x) < b]$.

Lorque $\Phi$ est une opération conjuguée à $\varphi$, l'opération $\Phi^0$ conjuguée à l'opération complétée $\varphi_0$ sera appelée *réduite* de $\Phi$. Elle peut être définie par la propriété suivante : tout point $x$ de l'ensemble $\Phi^0(A)$ appartient à l'ensemble $\Phi[A - (x)]$ et inversement.

Par exemple, si $\varphi(A)$ est l'intérieur dans un espace cartésien, $\Phi(A)$ est la fermeture de A et $\Phi^0(A)$ est la dérivée de A.

Comme

$$\Phi^0(A) \subset \Phi(A) \subset \Phi^0(A) + A,$$

nous avons, d'après (2),

$$m\Phi_0(f, a) \leqq m\Phi(f, a), \qquad M\Phi(f, a) \leqq M\Phi_0(f, a).$$

Lorque $\varphi$ est une opération non décroissante, ces inégalités se réduisent aux précédentes.

Considérons maintenant les opérations $\psi\varphi$ et $\chi\psi\varphi$ composées, définies par les égalités

$$\psi\varphi(A) = \psi[\varphi(A)], \qquad \chi\psi\varphi(A) = \chi[\psi(\varphi(A)].$$

Si $\varphi$ est une opération non décroissante, il en est de même des opérations suivantes

$$\begin{array}{cccccc} \varphi\varphi, & \Phi\varphi, & \varphi\varphi\varphi, & \varphi\Phi\varphi, & \Phi\varphi\varphi, & \Phi\Phi\varphi, \\ \Phi\Phi, & \varphi\Phi, & \Phi\Phi\Phi, & \Phi\varphi\Phi, & \varphi\Phi\Phi, & \varphi\varphi\Phi, \end{array}$$

et de plus les opérations inscrites dans la même colonne sont conjuguées.

En se servant des opérations composées, on peut transformer les bornes itérées en bornes simples. Nous allons voir en effet qu'*en tout point a*

$$(3) \qquad m_\varphi m_\psi(f, a) = m_{\varphi\psi}(f, a), \qquad M_\varphi M_\psi(f, a) = M_{\varphi\psi}(f, a),$$

*quelles que soient les opérations non décroissantes $\varphi$ et $\psi$.*

Il suffit de vérifier la première de ces égalités. Si $b < m_{\varphi\psi}(f, a)$, $a$ est un point de l'ensemble $\varphi\psi E_x[f(x) > b]$, donc de l'ensemble $\varphi E_x[m_\psi(f, x) \geqq b]$. Par suite nous avons

$$m_\varphi m_\psi(f, a) \geqq b.$$

Inversement, si

$$b < m_\varphi m_\psi(f, a),$$

le point $a$ appartient à l'ensemble $\varphi E_x[m_\psi(f, x) \geqq b]$, donc à l'ensemble $\varphi\psi E[f(x) > b]$, ce qui veut dire que

$$m_{\varphi\psi}(f, a) \geqq b.$$

Notre table des bornes itérées peut être transformée, en vertu des égalités (3) et (1), de manière qu'elle ne contienne que les bornes simples suivantes :

$$\begin{array}{cccccc} m_{\varphi\varphi}, & m_{\Phi\varphi}, & m_{\varphi\varphi\varphi}, & m_{\varphi\Phi\varphi}, & m_{\Phi\varphi\varphi}, & m_{\Phi\Phi\varphi}, \\ m_{\Phi\Phi}, & m_{\varphi\Phi}, & m_{\Phi\Phi\Phi}, & m_{\Phi\varphi\Phi}, & m_{\varphi\Phi\Phi}, & m_{\varphi\varphi\Phi}. \end{array}$$

Convenons de dire qu'une opération $\varphi$ est *récurrente* dans l'espace E si $\varphi\varphi(A) = \varphi(A)$, quel que soit l'ensemble A contenu dans E. Par exemple, l'opération qui détermine l'intérieur ou presque l'intérieur d'un ensemble dans un espace cartésien est évidemment récurrente.

Quand $\varphi$ est une opération récurrente, il en est de même de l'opération conjuguée $\Phi$, et la table des opérations composées se réduit aux six opérations suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \varphi, & \varphi\Phi, & \varphi\Phi\varphi, \\ \Phi, & \Phi\varphi, & \Phi\varphi\Phi. \end{array}$$

Lorsque $\varphi$ est en même temps non décroissante, inférieure et récurrente, on a les inclusions

$$\varphi(A) \subset \varphi\Phi\varphi(A) \subset \begin{matrix} \varphi\Phi(A) \\ \Phi\varphi(A) \end{matrix} \subset \Phi\varphi\Phi(A) \subset \Phi(A)$$

et les équivalences

$$\varphi\Phi\,\varphi\Phi(A) = \varphi\Phi(A), \qquad \Phi\varphi\,\Phi\varphi(A) = \Phi\varphi(A).$$

Par suite, *nous avons les relations suivantes pour les bornes inférieures de genres $\varphi$ quand $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure et récurrente :*

$$m_\varphi(f, a) \leqq m_{\varphi\Phi\varphi}(f, a) \leqq \begin{matrix} m_{\varphi\Phi}(f, a) \\ m_{\Phi\varphi}(f, a) \end{matrix} \leqq m_{\Phi\varphi\Phi}(f, a) \leqq m_\Phi(f, a),$$

$$m_{\varphi\Phi\,\varphi\Phi}(f, a) = m_{\varphi\Phi}(f, a), \qquad m_{\Phi\varphi\,\Phi\varphi}(f, a) = m_{\Phi\sigma}(f, a),$$

ce qui peut être écrit, en vertu des égalités (1) et (3), de la manière suivante :

$$(4)\begin{cases} m_\varphi(f,\,a) = m_\varphi \mathrm{M}_\varphi m_\varphi(f,\,a) \leqq \dfrac{m_\varphi \mathrm{M}_\varphi(f,\,a)}{\mathrm{M}_\varphi m_\varphi(f,\,a)} \leqq \mathrm{M}_\varphi m_\varphi \mathrm{M}_\varphi(f,\,a) \leqq \mathrm{M}_\varphi(f,\,a), \\ m_\varphi \mathrm{M}_\varphi m_\varphi \mathrm{M}_\varphi(f,\,a) = m_\varphi \mathrm{M}_\varphi(f,\,a), \quad \mathrm{M}_\varphi m_\varphi \mathrm{M}_\varphi m_\varphi(f,\,a) = \mathrm{M}_\varphi m_\varphi(f,\,a). \end{cases}$$

Ainsi, entre les bornes alternativement itérées de genre $\varphi$, il existe des relations analogues à celles qui étaient établies par M. Denjoy pour les bornes alternativement itérées d'une fonction de variables réelles [1].

Notre table des bornes itérées, ainsi que celle de M. Denjoy, ne contient pas les bornes $m_\varphi m_\varphi$ et $\mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\varphi$, car celles-ci sont respectivement égales à $m_\varphi$ et $\mathrm{M}_\varphi$, lorsque $\varphi$ est une opération non décroissante et récurrente. Cela veut dire que, dans ce cas, $m_\varphi$ est une fonction semi-continue inférieurement et $\mathrm{M}_\varphi$ est une fonction semi-continue supérieurement, de genre $\varphi$.

D'ailleurs, *pour qu'une borne $m_\psi(f,\,x)$ soit semi-continue inférieurement et pour que la borne $\mathrm{M}_\psi$ soit semi-continue supérieurement de genre $\varphi$, il suffit que $\varphi$ et $\psi$ soient non décroissantes et qu'on ait*

$$\varphi\psi(\mathrm{A}) = \psi(\mathrm{A}),$$

puisque

$$m_\varphi m_\psi(f,\,a) = \mathrm{M}_{\varphi\psi}(f,\,a) = \mathrm{M}_\psi(f,\,a),$$
$$\mathrm{M}_\varphi \mathrm{M}_\psi(f,\,a) = \mathrm{M}_{\varphi\psi}(f,\,a) = \mathrm{M}_\psi(f,\,a).$$

Cela a lieu, par exemple, lorsque $\varphi(\mathrm{A})$ désigne l'intérieur et $\psi(\mathrm{A})$ presque l'intérieur ou l'intérieur en négligeant les ensembles dénombrables (ou les ensembles de première catégorie) dans un espace cartésien, puisque cet espace est séparable. En se servant du lemme de M. Vitali sur le recouvrement des ensembles, on peut montrer que cela a lieu aussi pour $\psi(\mathrm{A})$ désignant l'ensemble des points de densité 1 de A. Il en résulte que les bornes approximatives sont semi-continues.

3. **Les propriétés des bornes de genre $\varphi$.** — Pour étudier les relations qui existent entre les bornes de fonctions inégales, nous

---

(1) *Loc. cit.*, p. 102.

avons besoin encore d'une propriété des opérations sur les ensembles.

Nous dirons qu'une opération $\varphi$ est *multiplicative* dans E, lorsque

$$\varphi(A)\varphi(B) = \varphi(AB),$$

quels que soient les ensembles A et B dans E, AB désignant l'intersection des ensembles A et B. Par exemple, l'opération déterminant l'intérieur d'un ensemble est multiplicative. Il en est de même de l'opération déterminant l'ensemble de points de densité 1.

Si $\varphi$ est une opération non décroissante et multiplicative, l'opération $\Phi$ conjuguée à $\varphi$ vérifie l'inclusion

$$(5) \qquad \varphi(A)\,\Phi(B) \subset \Phi(AB).$$

On déduit de la dernière inclusion, pour $\varphi$ récurrente, l'inclusion

$$(5') \qquad \varphi\Phi(A)\,\Phi\varphi(B) \subset \begin{matrix}\Phi(AB), \\ \Phi\varphi\Phi(AB).\end{matrix}$$

*Supposons que $\varphi$ est une opération non décroissante et multiplicative et qu'on ait de plus $\varphi(E) = E$. Si $a$ est un point de l'ensemble $\varphi E_x[f(x) \leqq g(x)]$, on a*

$$(6) \qquad m_\varphi(f, a) \leqq m_\varphi(g, a), \qquad M_\varphi(f, a) \leqq M_\varphi(g, a).$$

En effet, si la seconde de ces inégalités n'a pas lieu, il existe un nombre $b$ tel que

$$M_\varphi(g, a) < b < M_\varphi(f, a) = m_\Phi(f, a).$$

Comme $\varphi$ est une opération non décroissante, le point $a$ appartient aux ensembles $\varphi E[g(x) < b]$ et $\Phi E[f(x) \geqq b]$; donc, en vertu de l'inclusion (5), à l'ensemble $\Phi E[g(x) < b \leqq f(x)]$. Mais $a$ est par hypothèse un point de l'ensemble $\varphi E_x[f(x) \leqq g(x)]$, par suite c'est un point de $\Phi(0)$, d'après la même inclusion (5). Or nous avons

$$\Phi(0) = E - \varphi(E) = 0.$$

La première des inégalités (6) s'établit de la même manière.

Il résulte des inégalités (6) que les fonctions $\max(f_1, f_2)$ et $\min(f_1, f_2)$ sont semi-continues inférieurement (supérieurement) de genre $\varphi$, si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont semi-continues inférieurement (supérieurement) de genre $\varphi$ [1].

En s'appuyant sur l'inclusion (5′), on démontre, par le même raisonnement, qu'*en un point a de l'ensemble* $\varphi E_x[f(x) \leqq g(x)]$, *on a*

$$(7) \quad \begin{cases} M_\varphi m_\varphi(f, a) = m\Phi_\varphi(f, a) \leqq m\Phi_\varphi(g, a) = M_\varphi m_\varphi(g, a), \\ m_\varphi M_\varphi(f, a) = M\Phi_\varphi(f, a) \leqq M\Phi_\varphi(g, a) = m_\varphi M_\varphi(g, a), \end{cases}$$

*lorsque* $\varphi$ *est une opération non décroissante, multiplicative et récurrente et* $\varphi(E) = E$.

Les inégalités (6) nous permettent de prouver qu'*une fonction partout semi-continue de genre* $\varphi$ *satisfait à la condition*

$$(8) \qquad m_\varphi M_\varphi(f, a) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, a)$$

*quand* $\varphi$ *est une opération non décroissante, inférieure et multiplicative.*

En effet, en appliquant la seconde des inégalités (6) à la condition

$$M_\varphi(f, a) \leqq f(x),$$

nous avons

$$m_\varphi M_\varphi(f, a) \leqq m_\varphi(f, a).$$

Mais, d'après (4),

$$m_\varphi(f, x) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, x),$$

puisque $\varphi$ est une opération inférieure.

Par un raisonnement analogue, on peut montrer qu'*une fonction partout semi-continue de genre* $\Phi\varphi$ *satisfait à la condition* (8), $\varphi$ *étant une opération non décroissante, inférieure et multiplicative.*

Remarquons que, si $\varphi$ est de plus récurrente, la relation (8) est équivalente, quel que soit $\varphi$, à chacune des égalités

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) = m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f, x), \qquad M_\varphi m_\varphi(f, x) = M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, x).$$

En effet, chacune de ces égalités entraîne, d'après notre table (4), la relation (8). Inversement il résulte de (8) et de (6) que

$$M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, x) \leqq M_\varphi M_\varphi m_\varphi(f, x).$$

(1) Cela a lieu pour $\varphi$ non décroissante et multiplicative. La classe de fonctions semi-continues inférieurement (supérieurement) de genre $\varphi$ est donc dans ce cas un *anneau* au sens de M. Sierpinski [*Sur les anneaux de fonctions* (*Fundamenta mathematicæ*, t. 18, 1932)].

Or, $\varphi$ étant une opération récurrente et intérieure, nous avons

$$M_\varphi M_\varphi m_\varphi(f, x) = M_\varphi m_\varphi(f, x) \leqq M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, x).$$

Les bornes de genre $\varphi$ d'une somme de deux fonctions de $x$ jouissent des propriétés suivantes : *si $\varphi$ est une opération non décroissante et multiplicative, nous avons*

$$\begin{aligned} m_\varphi(f, a) + m_\varphi(g, x) &\leqq m_\varphi(f+g, a) \\ &\leqq m_\varphi(f, a) + M_\varphi(g, a) \leqq M_\varphi(f+g, a) \leqq M_\varphi(f, a) + M_\varphi(g, a). \end{aligned}$$

Démontrons la dernière de ces inégalités. Quand elle n'a pas lieu, il existe deux nombres $b$ et $c$ tels que

$$M(f, a) < b, \qquad M(f, a) < c, \qquad b + c < M(f+g, a).$$

L'opération $\varphi$ étant non décroissante, $a$ est un point commun aux ensembles

$$\varphi E_x[f(x) < b], \qquad \varphi E_x[g(x) < b],$$

donc $a$ appartient à l'ensemble $\varphi E_x[f(x) + g(x) < b + c]$, car $\varphi$ est une opération multiplicative. Par suite nous avons

$$M(f+g, a) \leqq b + c,$$

contrairement à l'hypothèse.

Pour montrer qu'on ne peut pas avoir

$$M_\varphi(f+g, a) < m_\varphi(f, a) + M_\varphi(g, a),$$

choisissons les nombres $b$ et $c$ de façon qu'on ait

$$m_\varphi(f, a) > b, \qquad M_\varphi(f, a) > c, \qquad M_\varphi(f+g, a) < b + c.$$

Le point $a$ appartient aux ensembles :

$$\varphi E_x[f(x) > b] \qquad \text{et} \qquad \Phi E_x[g(x) \geqq c].$$

Or, en vertu de l'inclusion (5), nous avons

$$\varphi E[f(x) > b]\, \Phi E[g(x) \geqq c] \subset \Phi E(f+g > b+c),$$

donc $a$ appartient à ce dernier ensemble et

$$b + c < M(f+g, a),$$

ce qui contredit l'hypothèse.

Les autres inégalités s'obtiennent en remplaçant les fonctions $f$; $g$ par les fonctions respectivement opposées $-f$ et $-g$.

En particulier, en posant $g(x)=c$, on déduit du théorème établi que

$$\mathrm{M}_\varphi(f+c, a)=\mathrm{M}_\varphi(f, a)+c. \tag{9}$$

Il en résulte aussi que *la somme de deux fonctions semi-continues supérieurement (inférieurement) de genre $\varphi$ est elle-même semi-continue supérieurement (inférieurement) de genre $\varphi$, $\varphi$ étant une opération non décroissante et multiplicative.*

En particulier, quand $\varphi(\mathrm{A})$ est l'ensemble de points de densité 1 de A, on déduit de ce théorème que la somme de deux fonctions approximativement continues est une fonction approximativement continue.

**4. Les fonctions ponctuellement discontinues de genre $\varphi$.** — Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *doublement semi-continue de genre $\varphi$*, au point $a$, lorsqu'elle est en même temps semi-continue inférieurement et supérieurement de genre $\varphi$ en ce point, c'est-à-dire lorsque

$$\mathrm{M}_\varphi(f, a) \leqq f(a) \leqq m_\varphi(f, a).$$

Quand l'opération $\varphi$ est non décroissante, pour que $f(x)$ soit doublement semi-continue de genre $\varphi$, il faut et il suffit que, étant donné

$$b<f(a)<c,$$

$a$ soit un point commun aux ensembles

$$\varphi \mathrm{E}_x[f(x)<c] \quad \text{et} \quad \varphi \mathrm{E}[f(x)>b].$$

Quand $\varphi$ est une opération mulplicative, le point $a$ appartient à l'ensemble $\varphi \mathrm{E}_x[b<f(a)<c]$, et la fonction $f$ est *continue de genre* $\varphi$ au point $a$. Mais en général une fonction doublement semi-continue de genre $\varphi$ n'est pas nécessairement continue de genre $\varphi$. Par exemple, quand $\varphi(\mathrm{A})$ est l'intérieur de l'ensemble A, dans un espace cartésien, une fonction doublement semi-continue de genre $\Phi\varphi$ n'est pas toujours continue de genre $\Phi\varphi$. De même, si $\varphi(\mathrm{A})$ désigne l'ensemble de points en lesquels la densité inférieure de A est supérieure à $1/2$, une fonction doublement continue de

genre $\varphi$, c'est-à-dire une fonction à prépondérance de continuité, n'est pas continue de genre $\varphi$.

Lorsque $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure et multiplicative, l'égalité

$$f(a) = m_\varphi(f, a) = M_\varphi(f, a)$$

est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f$ soit continue de genre $\varphi$, car, $\varphi$ étant une opération inférieure, nous avons

$$m_\varphi(f, a) \leqq f(a) \leqq M_\varphi(f, a).$$

Nous dirons qu'un ensemble A est *partout dense de genre* $\varphi$ *dans* E, quand

$$\Phi(A) = E,$$

$\Phi$ désignant l'opération conjuguée à $\varphi$.

Une fonction sera appelée *ponctuellement discontinue de genre* $\varphi$, si l'ensemble des points de semi-continuité double de genre $\varphi$ est partout dense de genre $\varphi$.

Nous allons voir que *toute fonction ponctuellement discontinue de genre* $\varphi$ *satisfait à la condition*

$$(8') \qquad m_\varphi M_\varphi(f, x) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, x),$$

*si* $\varphi$ *est une opération non décroissante et multiplicative.*

Cela résulte d'un théorème général suivant : *si* $\varphi$ *est une opération non décroissante et multiplicative, et si l'ensemble des points de semi-continuité double de genre* $\psi$ *est partout dense de genre* $\varphi$, *on a partout*

$$(10) \qquad m_\varphi M_\psi(f, x) \leqq M_\varphi m_\psi(f, x).$$

En effet, soit $a$ un point où cette inégalité n'a pas lieu. Choisissons un nombre $b$ tel qu'on ait

$$M_\varphi m_\psi(f, a) < b < m_\varphi M_\psi(f, a).$$

Comme $\varphi$ est une opération non décroissante, $a$ est un point commun aux ensembles :

$$\varphi E_x[m_\psi(f, x) < b], \qquad \varphi E_x[M_\psi(f, x) > b];$$

donc $a$ appartient à l'ensemble

$$\varphi E_x[m_\psi(f, x) < b < M_\psi(f, x)],$$

puisque $\varphi$ est multiplicative. Mais, par hypothèse, l'ensemble des points de semi-continuité double de genre $\psi$ est partout dense de genre $\varphi$, par suite

$$\Phi E_x[m_\psi(f, x) \geqq M_\psi(f, x)] = E,$$

c'est-à-dire

$$\varphi E_x[m_\psi(f, x) < M_\psi(f, x)] = 0.$$

Par conséquent le point $a$ n'existe pas.

En particulier, en posant $\psi = \varphi$, nous obtenons la relation (8').

Lorsque $\psi = \Phi\varphi$, la relation (9) prend la forme

$$m_\varphi M_{\Phi\varphi}(f, x) \leqq M_\varphi m_{\Phi\varphi}(f, x);$$

donc, si $\varphi$ est une opération récurrente, nous avons encore la relation (8').

Considérons la différence $\omega_\varphi(f, a)$ de la borne supérieure et de la borne inférieure de genre $\varphi$ de la fonction $f^*$, définie de la manière suivante :

Si

$$\begin{aligned} f(x) &= -\infty, & f^*(x) &= -1, \\ -\infty < f(x) &< +\infty, & f^*(x) &= \frac{f(x)}{1+[f(x)]}, \\ f(x) &= +\infty, & f^*(x) &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\omega_\varphi(f, x) = M_\varphi(f^*, x) - m_\varphi(f^*, x).$$

La fonction $\omega_\varphi(f, x)$ sera appelée *oscillation de genre* $\varphi$ de la fonction $f$ au point $x$. L'oscillation $\omega_\varphi$ est non négative quand $\varphi$ est une opération inférieure. Lorsque $\varphi$ est non décroissante, récurrente et multiplicative, l'oscillation $\omega_\varphi$ est une fonction supérieurement semi-continue de genre $\varphi$ par rapport à la variable $x$, puisque $M_\varphi$ et $-m_\varphi$ sont supérieurement semi-continues de genre $\varphi$.

Comme

$$m_\varphi(f^*, x) = m_\varphi^*(f, x), \qquad M_\varphi(f^*, x) = M_\varphi^*(f, x),$$

la fonction $f$ et sa transformée $f^*$ ne peuvent être qu'en même temps inférieurement et supérieurement semi-continues de genre $\varphi$. Par suite, l'égalité

$$\omega_\varphi(f, x) = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que la fonction $f$ soit doublement semi-continue de genre $\varphi$, si $\varphi$ est une opération inférieure. Lorsque de plus $\varphi$ est multiplicative, cette égalité est une condition nécessaire et suffisante de la continuité de genre $\varphi$ de la fonction $f$.

Nous allons montrer que *si $\varphi$ est une opération inférieure et récurrente et $f(x)$ est une fonction ponctuellement discontinue de genre $\varphi$, on a partout l'égalité*

$$m_\varphi \omega_\varphi(f, x) = 0.$$

En effet, $\varphi$ étant une opération inférieure, nous avons, par hypothèse,

$$\Phi E_x[\omega_\varphi(f, x) = 0] = E.$$

Alors, quel que soit $\varepsilon$ positif, tout point $x$ de l'espace E appartient à l'ensemble

$$\Phi E_x[\omega_\varphi(f, x) = 0];$$

par suite il appartient, en vertu de la monotonie de $\Phi$, à l'ensemble

$$\Phi E[\omega_\varphi(f, x) < \varepsilon].$$

On en déduit que

$$M\Phi\, \omega_\varphi(f, x) \leqq \varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon$ positif, donc

$$M\Phi\, \omega_\varphi(f, x) = 0.$$

Or, pour $\varphi$ non décroissante, nous avons

$$M\Phi\, \omega_\varphi(f, x) = m_\varphi \omega_\varphi(f, x).$$

5. **Les ensembles supports d'une fonction $f(x)$.** — Nous dirons qu'un ensemble A est *ouvert de genre* $\varphi$ dans E lorsque A est contenu dans $\varphi(A)$. Un ensemble A est *fermé de genre* $\varphi$ quand il est le complément par rapport à E d'un ensemble ouvert de genre $\varphi$, donc quand $\Phi(A)$ est contenu dans A.

Si $\varphi$ est une opération non décroissante et $a$ est un point de l'ensemble $\Phi(A)$, tout ensemble ouvert contenant le point $a$ contient un point de l'ensemble A. La réciproque est vraie pour $\varphi$ non décroissante et récurrente. Si $\varphi$ est une opération inférieure, l'ensemble ouvert est caractérisé par l'égalité $A = \varphi(A)$ et l'ensemble fermé de genre $\varphi$ par l'égalité correspondante $A = \Phi(A)$.

Il est aisé à voir que, si $\varphi$ est une opération non décroissante, la réunion des ensembles ouverts de genre $\varphi$ est un ensemble de genre $\varphi$ et par suite l'intersection des ensembles fermés de genre $\varphi$ est fermée de genre $\varphi$.

Considérons les ensembles supports d'une fonction $f(x)$, c'est-à-dire les ensembles

$$E_x[f(x) < b], \quad E_x[f(x) \leqq b], \quad E_x[f(x) > b], \quad E_x[f(x) \geqq b].$$

Il résulte de la définition d'une fonction semi-continue de genre $\varphi$ que la semi-continuité supérieure de $f$ est nécessaire et suffisante pour que l'ensemble support $E[f(x) < b]$ soit ouvert de genre $\varphi$, donc pour que l'ensemble $E[f(x) \geqq b]$ soit fermé de genre $\varphi$.

Nous avons fait remarquer dans le Chapitre II qu'une fonction supérieurement (inférieurement) semi-continue de genre $\varphi$ est aussi supérieurement (inférieurement) semi-continue de genre $\varphi_0$, $\varphi_0$ désignant une complétée de $\varphi$. Par suite, lorsque $f$ est supérieurement semi-continue de genre $\varphi$, l'ensemble $E_x[f(x) < b]$ est ouvert de genre $\varphi_0$. D'ailleurs, en se servant de l'inclusion

$$A\,\varphi_0(A) \subset \varphi(A) \subset \varphi_0(A),$$

on peut montrer que tout ensemble ouvert de genre $\varphi$ est ouvert de genre complété $\varphi_0$ et inversement.

Si $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure, récurrente et multiplicative, l'oscillation $\omega_\varphi(f, x)$ est supérieurement semi-continue de genre $\varphi$ par rapport à $x$ et par suite l'ensemble support $E_x[\omega_\varphi(f, x) < \varepsilon)$ est ouvert de genre $\varphi$, quel que soit $\varepsilon$ positif.

Lorsque la fonction $f$ est ponctuellement discontinue de genre $\varphi$, cet ensemble est de plus partout dense de genre $\varphi$, c'est-à-dire

$$\Phi E_x[\omega_\varphi(f, x) < \varepsilon] = E.$$

Pour voir si, réciproquement, la fonction $f$ est ponctuellement discontinue de genre $\varphi$ quand cet ensemble est partout dense de genre $\varphi$, nous aurons besoin de nouvelles notions.

Convenons de dire qu'un ensemble A est *compact de genre* $\varphi$, lorsque pour tout ensemble B qui est infini et contenu dans A, l'ensemble $\Phi^0(B)$ est non vide, $\Phi^0$ désignant la réduite de l'opération $\Phi$ conjuguée à $\varphi$.

Il est facile de montrer que, $\varphi$ étant une opération non décroissante et A étant un ensemble compact de genre $\varphi$, une suite non décroissante d'ensembles fermés de genre $\varphi$, contenus dans A, possède un point commun.

Une opération $\varphi$ est *régulièrement compacte*, lorsqu'on peut déterminer, pour tout point $a$ d'un ensemble ouvert G, un ensemble ouvert A contenant le point $a$ compact de genre $\varphi$, et tel que $\Phi(A)$ soit contenu dans G.

Supposons maintenant qu'on a

$$\Phi E_x[\omega_\varphi(f, x) < \varepsilon] = E,$$

quel que soit $\varepsilon$ positif. Soit G un ensemble ouvert de genre $\varphi$ et $a$ son point. Lorsque l'opération $\varphi$ est régulièrement compacte, il existe un ensemble A compact de genre $\varphi$ et tel que $\Phi(A) \subset G$. Désignons par $A_n$ l'ensemble $E_x\left[\omega_\varphi(f, x) < \frac{1}{n}\right]$. Cet ensemble est ouvert de genre $\varphi$, si $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure, récurrente et multiplicative. Comme $\varphi$ est régulièrement compacte, on peut déterminer un ensemble ouvert $B_1$ tel qu'on ait $\Phi(B_1) \subset AA_1$. Ayant déterminé $B_n$ on déterminera un ensemble ouvert $B_{n+1}$ de manière qu'on ait $\Phi(B_{n+1}) \subset A_n B_n$. L'opération $\varphi$ étant récurrente, les ensembles $\Phi(B_n)$ sont fermés. Il existe donc un point commun $a$ de tous les ensembles $\Phi(B_n)$. Or $a$ est aussi un point commun des ensembles $A_n$, nous avons donc

$$0 \leqq \omega_\varphi(f, x) < \frac{1}{n},$$

quel que soit $n$, par suite

$$\omega_\varphi(f, x) = 0.$$

Ainsi tout ensemble G ouvert de genre $\varphi$, contenant $a$, contient un point de l'ensemble

$$E_x[\omega_\varphi(f, x) = 0].$$

Par conséquent nous avons

$$\Phi\, E_x[\omega_\varphi(f, x) = 0] = E,$$

et la fonction $f(x)$ est ponctuellement discontinue de genre $\varphi$.

Nous avons ainsi démontré le théorème inverse pour $\varphi$ non décroissante, inférieure, récurrente, multiplicative et régulièrement compacte. Il en résulte que, *si $\varphi$ possède toutes ces propriétés, l'égalité*

$$m_\varphi\, \omega_\varphi(f, x) = 0$$

*est une condition nécessaire et suffisante de la discontinuité ponctuelle de genre $\varphi$ d'une fonction $f(x)$* (¹).

En effet nous avons prouvé, dans le Chapitre IV, que cette condition est nécessaire. Pour voir que cette condition est suffisante, il reste à remarquer que, quel que soit le nombre positif $\varepsilon$, nous avons en tout point $a$ de E :

$$M_\Phi\, \omega_\varphi(f, x) = m_\varphi\, \omega_\varphi(f, x) < \varepsilon,$$

donc $a$ est un point de l'ensemble $\Phi E_x[\omega_\varphi(f, x) < \varepsilon]$.

Le théorème démontré nous permet d'établir une autre condition nécessaire et suffisante de la discontinuité ponctuelle de genre $\varphi$ d'une fonction $f$. Nous avons prouvé, dans le Chapitre IV, que la relation $(8')$ est nécessaire, si $\varphi$ est une opération non décroissante et multiplicative. En admettant que $\varphi$ jouit de toutes les propriétés utilisées dans le théorème qui vient d'être démontré, nous allons montrer que cette relation suffit pour qu'une fonction $f(x)$ soit ponctuellement discontinue de genre $\varphi$.

En effet, si $f(x)$ n'est pas ponctuellement discontinue de genre $\varphi$, il existe un point $a$ où

$$m_\varphi \omega_\varphi(f, x) > \varepsilon > 0,$$

donc $a$ est un point de l'ensemble $A = \varphi E[\omega_\varphi(f, x) > \varepsilon]$.

L'opération $\varphi$ étant non décroissante, récurrente et multiplicative, nous avons, en vertu des relations (6) et (9),

$$(11) \qquad m_\varphi M_\varphi(f^*, a) > m_\varphi m_\varphi(f^*, a) + \varepsilon = m_\varphi(f^*, a) + \varepsilon.$$

---

(¹) C'est une généralisation de la condition établie par M. Baire pour les fonctions ponctuellement discontinues.

Or, par hypothèse,

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) \leqq M_\varphi m_\varphi(f. x);$$

donc

$$m_\varphi \Phi(f, a) \leqq m\Phi_\varphi(f, a)$$

et par suite

$$m^*_\varphi \Phi(f, a) \leqq m^*_\Psi \varphi(f, a).$$

Comme

$$m_\varphi M_\varphi(f^*, a) = m_\varphi \Phi(f^*, a) = m^*_\varphi \Phi(f, a),$$
$$M_\varphi m_\varphi(f^*, a) = m\Phi_\varphi(f^*, a) = m^*_\Phi \varphi(f, a),$$

nous déduisons de l'inégalité (11) que

$$M_\varphi m_\varphi(f^*, a) > m_\varphi(f^*, a) + \varepsilon.$$

Ainsi le point $a$ appartient à l'ensemble

$$B = E_x[M_\varphi m_\varphi(f^*, x) > m_\varphi(f^*, x) + \varepsilon];$$

donc $\varphi(A)$ est contenu dans B, et l'opération $\varphi$ étant non décroissante et récurrente, $\varphi(A)$ est contenu aussi dans $\varphi(B)$.

Comme $a$ est un point de $\varphi(B)$, nous pouvons appliquer encore une fois les relations (6) à la dernière inégalité pour obtenir l'inégalité

$$M_\varphi m_\varphi(f^*, a) = M_\varphi M_\varphi m_\varphi(f^*, a) > M_\varphi m_\varphi(f^*, a) + \varepsilon,$$

qui est impossible pour $\varepsilon > 0$.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant : *Si $\varphi$ est une opération non décroissante, récurrente, multiplicative et régulièrement compacte, la relation*

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, x)$$

*est une condition nécessaire et suffisante de la discontinuité ponctuelle de genre $\varphi$ d'une fonction $f(x)$* [1].

Il en résulte qu'une fonction ponctuellement discontinue de genre $\varphi$ est, en chaque point $x$, semi-continue inférieurement ou

---

[1] J'ai établi cette condition pour une fonction de variable réelle, dans une communication au Premier Congrès des Mathématiciens de Pays Slaves, à Varsovie, en 1929 (*Comptes rendus du Congrès. Sur les fonctions ponctuellement discontinues*, p. 275).

supérieurement de genre $\Phi\varphi$ puisqu'on a

$$f(x) \leqq M_{\varphi} m_{\varphi}(f, x) \quad \text{ou} \quad f(x) \geqq m_{\varphi} M_{\varphi}(f, x).$$

Il en résulte aussi qu'une fonction $f$ est ponctuellement discontinue de genre $\varphi$ quand l'ensemble des points de semi-continuité double de genre $\Phi\varphi$ est partout dense de genre $\varphi$.

6. **Les suites de fonctions.** — Considérons une suite de fonctions $f_n(x)$ qui tendent dans E vers une fonction $f(x)$. Soit $F(n, \varepsilon)$ l'ensemble de points $x$ tels que $|f_n(x) - f(x)| \geqq \varepsilon$ et soit

$$Q(\varepsilon) = \prod_{n=1}^{\infty} \Phi\varphi[E - F(n, \varepsilon)].$$

Lorsque $\varphi$ est une opération non décroissante et récurrente, l'ensemble $Q(\varepsilon)$ est fermé de genre $\varphi$.

Il est facile de voir que, *si $\varphi$ est inférieure, récurrente et régulièrement compacte et $\varphi(E) = E$, on a*

$$\varphi\Phi[Q(\varepsilon)] = 0,$$

*c'est-à-dire l'ensemble $Q(\varepsilon)$ est non dense de genre $\varphi$.*

En effet, en vertu de la définition de l'ensemble $Q(\varepsilon)$, nous avons

$$\varphi\Phi[Q(\varepsilon)] \subset \varphi\Phi\,\Phi\varphi[E - F(n, \varepsilon)] = \varphi\Phi\varphi[E - F(n, \varepsilon)],$$

puisque $\varphi$ et par suite $\Phi$ sont des opérations récurrentes. Donc, si l'ensemble $\varphi\Phi[Q(\varepsilon)]$ n'est pas vide, il en est de même de l'ensemble $\varphi[E - F(n, \varepsilon)]$.

Comme $\varphi[E - F(n, \varepsilon)]$ est un ensemble ouvert et $\varphi$ est une opération régulièrement compacte, il existe un ensemble A ouvert, régulièrement compact et contenu dans $\varphi[E - F(1, \varepsilon)]$ et il existe aussi des ensembles $B_n$ ouverts, vérifiant les inclusions :

$$\Phi(B_1) \subset A, \qquad \Phi(B_n) \subset \varphi[E - F(n, \varepsilon)].$$

Soit $a$ un point commun des ensembles fermés $\Phi(B_n)$. Il appartient à l'ensemble $\varphi[E - F(n, \varepsilon)]$, donc à l'ensemble $E - F(n, \varepsilon)$, car $\varphi$ est une opération inférieure.

Par conséquent $|f_n(a) - f(a)| > \varepsilon$, quel que soit l'indice $n$. Or la suite est convergente au point $a$. Nous avons donc démontré que

$$\varphi\Phi[Q(\varepsilon)] = 0.$$

*Lorsque* $\varphi$ *est une opération non décroissante et récurrente, et de plus les ensembles* $F(n, \varepsilon)$ *sont fermés de genre* $\Phi\varphi$, *tout point n'appartenant pas à l'ensemble* $Q(\varepsilon)$ *appartient à l'un des ensembles* $\varphi F(n, \varepsilon)$.

En effet nous avons, par hypothèse,

$$\varphi\Phi[F(n, \varepsilon)] \subset F(n, \varepsilon);$$

donc

$$\varphi\Phi[F(n, \varepsilon)] \subset \varphi\varphi\Phi[F(n, \varepsilon)] \subset \varphi[F(n, \varepsilon)].$$

Par suite,

$$E - Q(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\Phi[F(n, \varepsilon)] \subset \sum_{n=1}^{\infty} \varphi F(n, \varepsilon).$$

En particulier cela a lieu quand les fonctions $f_n(x)$ sont continues de genre $\varphi$, puisque $F(n, \varepsilon)$, étant l'intersection des ensembles

$$E_x[\,|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon],$$

fermés de genre $\varphi$, pour $p = 1, 2, 3, \ldots$, est lui-même fermé de genre $\varphi$, donc *à fortiori* fermé de genre $\Phi\varphi$.

L'ensemble $F(n, \varepsilon)$ est encore fermé de genre $\Phi\varphi$, quand les fonctions $f_n(x)$ sont ***simultanément continues de genre*** $\Phi\varphi$, c'est-à-dire quand tout point $a$ de $E$ appartient à l'ensemble

$$\Phi\varphi E_x[b_n < f_n(x) < c_n;\, b_p < f_p(x) < c_p],$$

quels que soient les deux indices $n$ et $p$ et les nombres réels $b_n$, $c_n$, $b_p$, $c_p$ vérifiant les inégalités :

$$b_n < f(a) < c_n, \qquad b_p < f(a) < c_p.$$

Après avoir fait ces remarques préliminaires, passons à l'étude de bornes alternativement itérées des fonctions $f_n(x)$ et de leur limite $f(x)$.

Si $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure et récurrente, nous avons les relations

$$m_\varphi(f_n, x) \leqq m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f_n, x) \leqq \begin{matrix} m_\varphi M_\varphi(f_n, x) \\ M_\varphi m_\varphi(f_n, x) \end{matrix} \leqq M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, x) \leqq M_\varphi(f_n, x),$$

et les relations analogues pour les limites vers lesquelles tendent ces bornes quand l'indice $n$ tend vers l'infini.

Pour établir les relations de grandeur entre ces limites et les bornes de $f(x)$, considérons l'ensemble

$$Q = \sum Q(\varepsilon).$$

Comme l'ensemble défini $Q(\varepsilon)$ ne décroît pas quand $\varepsilon$ décroît vers zéro, nous avons

$$Q = \sum_{p=1}^{\infty} Q\left(\frac{1}{p}\right);$$

donc Q est la réunion d'une suite d'ensembles non denses de genre $\varphi$. Nous pouvons dire que $\varphi$ est un ensemble de *première catégorie de genre* $\varphi$.

Montrons que dans l'ensemble $E - Q$, donc *dans le complémentaire d'un ensemble de première catégorie, on a*

$$(12) \quad m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f, a) \leqq \lim_{n \to \infty} m_\varphi M_\varphi(f_n, a), \qquad \lim_{n \to \infty} M_\varphi m_\varphi(f_n, a) \leqq M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, a),$$

*si* $\varphi$ *est une opération non décroissante, inférieure, récurrente, multiplicative et régulièrement compacte.*

Ces inégalités ainsi que les inégalités (14) étaient établies par M. Denjoy pour l'opération déterminant l'intérieur dans l'espace cartésien (¹).

Il suffit de vérifier la première de ces inégalités. Soit $n_0$ un nombre tel qu'on ait

$$(13) \qquad m_\varphi M_\varphi(f_n, a) < \lim_{n \to \infty} m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \mu$$

dès que $n$ est supérieur à $n_0$. Choisissons $n$ de manière qu'on ait

$$n > n_0, \qquad E - Q(\varepsilon) \subset \varphi\Phi[F(n, \varepsilon)].$$

Lorsque le point $a$ n'appartient pas à l'ensemble $Q(\varepsilon)$, il appartient à $\varphi\Phi[F(n, \varepsilon)]$, donc *à fortiori* à l'ensemble

$$\varphi\Phi E_x[f(x) \leqq f_n(x) + \varepsilon].$$

---

(¹) *Loc. cit.*, p. 113-114.

D'autre part, $\varphi$ étant une opération non décroissante, nous avons

$$M\Phi\varphi(f_n, a) = m_\varphi M_\varphi(f_n, a).;$$

donc $a$ est un point de l'ensemble

$$\Phi\varphi E_x[f_n(x) < m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \mu].$$

Or, $\varphi$ étant une opération non décroissante, récurrente et multiplicative, on a

(5′) $$\varphi\Phi(A)\Phi\varphi(B) \subset \Phi\varphi\Phi(AB).$$

En posant

$$A = E_x[f(x) \leqq f_n(x) + \varepsilon], \qquad B = E_x[f_n(x) < m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \varepsilon],$$

on en déduit, en vertu de l'inégalité (13), que $a$ est un point de l'ensemble

$$\Phi\varphi\Phi E_x[f(x) < \lim_{n \succ \infty} m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \varepsilon + 2\mu],$$

quel que soit $\mu$ positif.

Par conséquent

$$m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f, a) \leqq \lim_{n \succ \infty} m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \varepsilon,$$

lorsque $a$ n'appartient pas à l'ensemble $Q(\varepsilon)$.

Cette inégalité a lieu quel que soit $\varepsilon$ positif, lorsque $a$ n'appartient pas à l'ensemble Q. La première des inégalités (12) est ainsi établie.

*Si l'ensemble* $F(n, \varepsilon)$ *est fermé de genre* $\Phi\varphi$ *nous avons de plus*

(14) $$m_\varphi M_\varphi(f, a) \leqq \lim m_\varphi M_\varphi(f_n, a), \qquad \lim M_\varphi m_\varphi(f_n, a) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, a),$$

*dans le complémentaire d'un ensemble de première catégorie de genre* $\varphi$.

En effet, d'après nos remarques faites au début de ce chapitre, il existe un indice $n > n_0$ et tel que le point $a$ de $E - Q(\varepsilon)$ appartient à l'ensemble

$$\varphi E_x[f(x) \leqq f_n(x) + \varepsilon].$$

Or, $\varphi$ étant une opération récurrente et multiplicative, on a

$$\varphi(A)\Phi\varphi(B) \subset \Phi\varphi(AB);$$

donc $a$ est un point de l'ensemble

$$\Phi\varphi E_x[f(x) < \lim_{n \succ \infty} m_\varphi M_\varphi(f, a) + \varepsilon + 2\mu],$$

quel que soit $\mu$ positif. Par suite nous avons

$$m_\varphi M_\varphi(f, a) = M_{\Phi\varphi}(f, a) \leqq \lim_{n \succ \infty} m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \varepsilon.$$

Quand $a$ n'appartient pas à l'ensemble Q, il n'appartient pas à Q($\varepsilon$), quel que soit $\varepsilon$; donc la dernière inégalité a lieu quel que soit $\varepsilon$, ce qui entraîne la première des inégalités (14).

*Lorsque l'ensemble* $F(n, \varepsilon)$ *n'est pas fermé de genre* $\Phi\varphi$, *nous n'avons que les relations*

$$(15)\quad \lim_{n \succ \infty} m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f_n, a) \leqq m_\varphi M_\varphi(f, a), \quad M_\varphi m_\varphi(f, a) \leqq \lim_{n \succ \infty} M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, a).$$

Pour le voir déterminons $n_0$ de manière qu'on ait, pour $n > n_0$,

$$M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, a) < \lim_{n \succ \infty} M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \mu.$$

Soit $n$ l'indice tel que $a$ appartienne à l'ensemble

$$\varphi\Phi E_x[f(x) < f_n(x) + \varepsilon].$$

Or, d'après la définition de la borne $M_{\varphi\Phi\varphi}(f, a)$, égale, pour $\varphi$ non décroissante, à $M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, a)$, le point $a$ appartient à l'ensemble

$$\varphi\Phi\varphi E_x[f_n(x) < M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, x) + \mu].$$

L'opération $\varphi$ étant non décroissante et multiplicative, nous avons, quels que soient les ensembles A et B, l'inclusion

$$\varphi\Phi\varphi(A)\varphi\Phi(B) \subset \varphi\Phi(AB).$$

En posant

$$A = E[f(x) < f_n(x) + \varepsilon], \qquad B = E_x[f_n(x) < M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, x) + \mu],$$

nous en déduisons que $a$ est un point de l'ensemble

$$\varphi\Phi E[f(x) < \lim_{n \succ \infty} M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \varepsilon + 2\mu),$$

quel que soit $\mu$ positif.

Par suite nous avons, pour le point $a$ de $E - Q(\varepsilon)$, la relation

$$M_\varphi m_\varphi(f, a) = M_\varphi\Phi(f, a) < \lim_{n \succ \infty} M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, a) + \varepsilon.$$

Lorsque $a$ est un point de $E - Q$, cette inégalité a lieu quel que soit $\varepsilon$ positif; donc la seconde des inégalités (15) a lieu. On en déduit immédiatement la première de ces inégalités.

En particulier, quand les fonctions $f_n(x)$ sont continues de genre $\varphi$, c'est-à-dire quand

$$\begin{aligned} f_n(x) &= m_\varphi(f_n, x) = m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f_n, x) \\ &= m_\varphi M_\varphi(f_n, x) = M_\varphi m_\varphi(f_n, x) = M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f_n, x) = M_\varphi(f_n, x), \end{aligned}$$

nous avons dans l'ensemble $E - Q(\varepsilon)$, les inégalités

$$M_\varphi m_\varphi(f, x) - \varepsilon < f(x) < m_\varphi M_\varphi(f, x) + \varepsilon. \tag{16}$$

D'autre part, l'ensemble $F(n, \varepsilon)$ étant fermé de genre $\varphi$, nous avons, en tout point $x$ de l'ensemble $E - Q(\varepsilon)$,

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) - \varepsilon < f(x) < M_\varphi m_\varphi(f, x) + \varepsilon. \tag{17}$$

Comme l'ensemble $Q(\varepsilon)$ est fermé de genre $\varphi$ et $\varphi$ est une opération inférieure,

$$\varphi[E - Q(\varepsilon)] = E - Q(\varepsilon).$$

Si $a$ est un point de $E - Q(\varepsilon)$, nous déduisons de (16) et (17), en passant aux bornes supérieures, les inégalités

$$\begin{aligned} M_\varphi m_\varphi(f, a) - \varepsilon &\leqq M_\varphi(f, a) \leqq M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, a) + \varepsilon, \\ M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, a) - \varepsilon &\leqq M_\varphi(f, a) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, x) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Quand $a$ est un point de l'ensemble $E - Q$, ces inégalités ont lieu quel que soit le nombre positif $\varepsilon$ et par suite

$$f(a) = M_\varphi m_\varphi(f, a) = M_\varphi(f, a) = M_\varphi m_\varphi M_\varphi(f, a).$$

Un raisonnement analogue donne

$$f(x) = m_\varphi M_\varphi(f, a) = m_\varphi(f, a) = m_\varphi M_\varphi m_\varphi(f, a);$$

donc $a$ est un point de continuité de $f(x)$.

Ainsi *la limite d'une suite convergente de fonctions continues de genre $\varphi$ est une fonction ponctuellement continue de genre $\varphi$, lorsque $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure, récurrente, multiplicative et régulièrement compacte et* $\varphi(E) = E$.

Nous avons donc obtenu une généralisation du théorème connu dû à M. Baire.

Lorsque les fonctions $f_n(x)$ sont simultanément continues de genre $\Phi\varphi$, on a

$$m_\varphi M_\varphi(f_n, x) \leqq f_n(x) \leqq M_\varphi m_\varphi(f_n, x).$$

Comme tout point $x$ de l'ensemble $E - Q(\varepsilon)$ appartient, dans ce cas, à $\varphi[F(n, \varepsilon)]$, nous avons

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) - \varepsilon \leqq f(x) \leqq M_\varphi m_\varphi(f, x) + \varepsilon.$$

Or il résulte d'un raisonnement fait à la fin du chapitre précédent que la relation

$$m_\varphi M_\varphi(f, x) - \varepsilon \leqq M_\varphi m_\varphi(f, x) + \varepsilon$$

ayant lieu dans l'ensemble partout dense $E - Q(\varepsilon)$, la fonction $f(x)$ est ponctuellement discontinue.

Ainsi *la limite d'une suite de fonctions simultanément semi-continues de genre $\Phi\varphi$ est ponctuellement continue de genre $\varphi$, si $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure, récurrente, multiplicative, régulièrement compacte et si l'on a $\varphi(E) = E$.*

En particulier quand $\varphi$ détermine l'intérieur d'un ensemble dans un espace cartésien, ce théorème se réduit au théorème suivant : *la limite des fonctions simultanément quasi continues est ponctuellement discontinue* (1).

7. **La relativisation des bornes.** — Pour définir les bornes d'une fonction $f(x)$ relativement à un ensemble P contenu dans l'espace E, nous allons relativiser l'opération $\varphi$ c'est-à-dire nous allons définir une opération relative $\varphi_P$ dans l'ensemble P de façon que tout ensemble ouvert de genre $\varphi_P$ dans P soit l'intersection de l'ensemble P et d'un ensemble ouvert de genre $\varphi$ dans E.

Soit $n_\varphi(A)$ la réunion des ensembles ouverts de genre $\varphi$, contenus dans l'ensemble A. L'ensemble $n_\varphi(A)$ peut être appelé *noyau de genre* $\varphi$ de l'ensemble A. Lorsque $\varphi$ est une opération non décroissante, le noyau de genre $\varphi$ est le plus grand des ensembles ouverts de genre $\varphi$, contenus dans A. L'opération correspondante $n_\varphi$ est non décroissante inférieure et récurrente, quelle que soit l'opération $\varphi$.

Posons, pour tout ensemble A contenu dans P,

$$\varphi_P(A) = P\, n_\varphi[A + (E - P)].$$

(1) *Sur les fonctions quasi continues, loc. cit.*, p. 194.

L'opération $\varphi_P$ est évidemment non décroissante, inférieure et récurrente.

Lorsque $\varphi$ est elle-même une opération non décroissante inférieure et récurrente l'ensemble $\varphi(A)$ jouit des propriétés suivantes :

1° Il contient tout ensemble ouvert de genre $\varphi$ contenu dans A.

2° Il est contenu dans A et il est ouvert de genre $\varphi$.

Par suite $\varphi(A)$ est lui-même le noyau de genre $\varphi$ de l'ensemble A et

$$\varphi_P(A) = P n_\varphi[A + (E - P)].$$

L'opération conjuguée à $\varphi_P$ est, dans ce cas, définie par l'égalité

$$\Phi_P(A) = P\Phi(A).$$

Lorsque $\varphi$ est de plus multiplicative ou régulièrement compacte, il en est de même de l'opération relative $\varphi_P$.

Les bornes de genre $\varphi_P$ dans P jouissent donc des propriétés analogues à celles des bornes de genre $\varphi$ dans E.

Comme l'opération $\varphi_P$ ne dépend que de l'opération $\varphi$ et de l'ensemble P, nous dirons, pour simplifier le langage, que les bornes $m_{\varphi_P}(f, x)$, $M_{\varphi_P}(f, x)$ sont *des bornes de genre $\varphi$ de $f(x)$ sur l'ensemble* P. De même les fonctions semi-continues de genre $\varphi_P$ seront appelées *semi-continues de genre $\varphi$ sur* P.

En particulier, on peut supposer que l'ensemble P est *parfait de genre* $\varphi$, c'est-à-dire qu'on a $\Phi^0(P) = P$, $\Phi^0$ étant la réduite de l'opération $\Phi$ conjuguée à $\varphi$.

Il est clair qu'une fonction semi-continue de genre $\varphi$ sur E est semi-continue de genre $\varphi$ sur tout ensemble parfait de genre $\varphi$. Par suite, si $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure, récurrente, multiplicative, régulièrement compacte et $\varphi(E) = E$, la limite $f$ d'une suite de fonctions continues de genre $\varphi$ dans E est ponctuellement discontinue de genre $\varphi$ dans E et par suite elle satisfait à la relation

$$(18) \qquad m_{\varphi_P} M_{\varphi_P}(f, x) \leqq M_{\varphi_P} m_{\varphi_P}(f, x),$$

quel que soit l'ensemble P parfait de genre $\varphi$.

Pour montrer que la réciproque a lieu, on doit admettre que l'opération $\varphi$ jouit d'une propriété de plus.

Nous dirons qu'une opération $\varphi$ est *séparable* quand il existe une suite d'ensembles $A_n$ tels qu'on puisse déterminer, quel que soit l'ensemble A et son point $a$, un indice $n$ pour lequel $\varphi(A_n)$ contient le point $a$ et est contenu dans l'ensemble $\varphi(A)$.

En suivant un raisonnement connu dû à M. Lebesgue et étendu par M. Hahn [1] aux espaces métriques parfaitement séparables (au sens de M. Fréchet), nous pouvons démontrer le théorème suivant : *si* $\varphi$ *est une opération non décroissante, multiplicative et séparable et si tout ensemble non vide*, P, *parfait de genre* $\varphi$ *contient un point de continuité de genre* $\varphi$ *sur* P *d'une fonction* $f(x)$, *cette fonction est la limite de fonctions de genre* $\varphi$ *dans* E, c'est-à-dire *de première classe de genre* $\varphi$ dans E.

Il suffit pour cela de modifier la définition des fonctions de première classe à $\varepsilon$ près en un point $a$. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ est *de première classe de genre* $\varphi$ *à* $\varepsilon$ *près au point* $a$, lorsqu'il existe une fonction $g(x)$ de première classe de genre $\varphi$ telle que $a$ soit un point de l'ensemble

$$\varphi E[\,|f(x)-g(x)|\leqq\varepsilon].$$

Une fonction de première classe de genre $\varphi$ à $\varepsilon$ près en tout point de E, est *de première classe de genre* $\varphi$ *à* $\varepsilon$ *près dans* E.

Pour montrer ensuite que la relation (18), étant vérifiée quel que soit l'ensemble P, parfait de genre $\varphi$, caractérise une fonction de première classe de genre $\varphi$, il suffit de remarquer qu'une fonction ponctuellement discontinue de genre $\varphi$, sur tout ensemble parfait de genre $\varphi$, possède un point de continuité sur tout ensemble parfait de genre $\varphi$ si $\varphi$ est une opération non décroissante, inférieure, récurrente et telle que $\varphi(E)=E$.

En effet nous avons, par hypothèse,

$$P=\Phi_P E_x[\omega_{\varphi_P}(f,x)=0]=P\,\Phi E_x[\omega_{\varphi_P}(f,x)=0],$$

ce qui entraîne l'inclusion

$$P\subset\Phi E_x[\omega_{\varphi_P}(f,x)=0].$$

Donc, si $P\neq 0$, nous avons

$$E_x[\omega_{\varphi_P}(f,x)=0]\neq 0,$$

puisque $\Phi(0)=0$.

Or quand $\varphi$ est une opération non décroissante, récurrente, multiplicative et régulièrement compacte et quand une fonction

---

[1] H. HAHN, *Reelle Funktionen*, Leipzig, 1932, p. 293 et 302.

$f(x)$ vérifie la condition (18), quel que soit P parfait de genre $\varphi$, cette fonction est ponctuellement discontinue de genre $\varphi$ sur tout ensemble parfait de genre $\varphi$, en vertu de la conclusion du Chapitre V. Donc si $\varphi$ est de plus séparable, toute fonction vérifiant la condition (18), pour tout ensemble P parfait de genre $\varphi$, est de première classe de genre $\varphi$.

Ainsi, *pour qu'une fonction $f(x)$ soit de première classe de genre $\varphi$, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition* (18), *quel que soit l'ensemble* P *parfait de genre $\varphi$, $\varphi$ étant une opération non décroissante, récurrente, inférieure, multiplicative, régulièrement compacte, séparable et telle que* $\varphi(E) = E$.

Remarquons que la relation (18) peut être remplacée par la relation équivalente

$$(19) \qquad m_{\varphi_P} M_{\varphi_P}(f, x) = m_{\varphi_P} M_{\varphi_P} m_{\varphi_P}(f, x).$$

Nous avons donc généralisé le théorème principal du mémoire cité de M. Denjoy. Ce théorème a été étendu par M. Hahn aux fonctions définies dans les espaces métriques séparables et « relativvollständig », c'est-à-dire formés par l'intersection des ensembles ouverts dans un ensemble complet ([1]).

Notre espace E, étant caractérisé par une opération $\varphi$ régulièrement compacte et séparable, est équivalent à un espace métrique, car il est régulier et parfaitement séparable, si $\varphi(A)$ désigne l'intérieur de l'ensemble A dans cet espace. Mais les autres hypothèses de notre théorème diffèrent de celles du théorème de M. Hahn.

Le théorème démontré peut être appliqué aux fonctions continues de genre $\Phi\varphi$. En effet, il résulte d'une proposition établie dans le Chapitre III que la condition (18) ou (19) a lieu, pour $\varphi$ non décroissante, inférieure, récurrente et multiplicative, quand la fonction $f(x)$ est doublement semi-continue de genre $\Phi\varphi$, sur un ensemble P parfait de genre $\varphi$ ([2]), donc *à fortiori* quand elle est

---

([1]) *Theorie der reellen Funktionen,* 1921, p. 220-221, théorèmes II et III.

([2]) Car, $\varphi$ étant une opération inférieure et multiplicative, nous avons

$$\Phi_P \varphi_P(A) = P\Phi \{ P\varphi[A + (E - P)] \}$$
$$= P\Phi(P)\Phi\varphi[A + (E - P)] = P\Phi\varphi[A + (E - P)] = (\Phi\varphi)_P(A),$$

donc la fonction semi-continue de genre $\Phi_P \varphi_P$ est en même temps semi-continue de genre $(\Phi\varphi)_P$, c'est-à-dire de genre $(\Phi\varphi)_P$ sur P.

continue de genre $\Phi\varphi$ sur P. Par suite, *si* $\varphi$ *est une opération non décroissante, inférieure, récurrente, multiplicative, régulièrement compacte, séparable et* $\varphi(E) = E$, *et si l'ensemble des points de continuité de genre* $\Phi\varphi$ *de* $f(x)$ *est partout dense de genre* $\varphi$ *sur tout ensemble parfait de genre* $\varphi$, *la fonction* $f(x)$ *est de première classe de genre* $\varphi$.

En particulier, lorsque $\varphi(A)$ désigne l'intérieur de l'ensemble A dans un espace cartésien, nous avons le théorème suivant : *si l'ensemble des points de quasi-continuité d'une fonction* $f(x)$ *est partout dense sur tout ensemble parfait*, $f(x)$ *est une fonction de première classe de Baire, au plus.*