JULIUS WOLFF

Sur le lieu des points équidistants de deux continus et la division du plan par une courbe de Jordan

Bulletin de la S. M. F., tome 63 (1935), p. 36-55
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1935__63__36_0>

SUR LE LIEU DES POINTS ÉQUIDISTANTS DE DEUX CONTINUS ET LA DIVISION DU PLAN PAR UNE COURBE DE JORDAN;

PAR M. JULIUS WOLFF

(Utrecht).

Les développements du présent article sont indépendants du théorème général que toute courbe de Jordan divise le plan en deux domaines. Ils auront ce théorème pour conséquence. Une des propriétés topologiques que nous démontrerons est la suivante : étant donné un arc A_1A_2 de courbe continue simple, en tout point S de cet arc différent de A_1 et A_2 le lieu des points équidistants des arcs A_1S et A_2S permet de distinguer les deux côtés de l'arc A_1A_2. Ce lieu joue en quelque sorte le rôle de la normale en un point S d'une courbe régulière (théorèmes V et VI).

Nous aurons à utiliser souvent l'énoncé suivant, facile à démontrer et que nous supposons connu :

THÉORÈME A. — *Si sur une circonférence de cercle* K *les points* A *et* C *séparent les points* B *et* D, *si* γ_1 *et* γ_2 *sont deux continus n'ayant pas de point à l'intérieur de* K (*ou à l'extérieur*) *et dont l'un contient* A *et* C, *l'autre* B *et* D, *alors* γ_1 *et* γ_2 *ont au moins un point commun* [1].

Si P est un point, γ un ensemble, nous indiquerons dans la suite par $P\gamma$ la distance de P à γ, par $\varkappa(P, \gamma)$ la circonférence de cercle de centre P et de rayon $P\gamma$, par $\varepsilon(P, \gamma)$ l'ensemble commun à γ et $\varkappa(P, \gamma)$.

1. Soient γ_1 et γ_2 deux continus bornés dans un plan et sans point commun. Appelons F l'ensemble des points P du plan pour lesquels $P\gamma_1 = P\gamma_2$. Le plan est divisé en l'ensemble fermé F et les

---

[1] Une démonstration simple s'obtient en utilisant la notion de l'ordre d'un point par rapport à une courbe continue fermée. *Voir* aussi un énoncé analogue de M. A. DENJOY (*Verslagen Kon. Ak. v. Wetensch.*, XXVII, p. 147).

deux ensembles ouverts $D_1(P\gamma_1 < P\gamma_2)$ et $D_2(P\gamma_1 > P\gamma_2)$. Soit P un point de F. Sur $\varkappa(P, \gamma_1) = \varkappa(P, \gamma_2) = \varkappa$ l'ensemble $\varepsilon(P, \gamma_1)$ ne possède aucune paire de points séparés par deux points de $\varepsilon(P, \gamma_2)$, sinon γ_1 et γ_2 se couperaient en vertu du théorème A. Par suite $\varepsilon(P, \gamma_1)$ et $\varepsilon(P, \gamma_2)$ se trouvent sur deux arcs séparés K_1K_1' et K_2K_2' dont les extrémités appartiennent à ces deux ensembles respectivement. Ces arcs peuvent se réduire à des points. Soient K_1K_2 et $K_1'K_2'$ les arcs restants de K, S et S' leurs milieux. Traçons un rayon PQ de $\varkappa$ dont l'extrémité Q diffère de S et S'. Pour fixer les idées nous admettons que $\varepsilon(P, \gamma_1)$ est sur l'arc SQS', donc $\varepsilon(P, \gamma_2)$ sur l'autre arc SS' de $\varkappa$. Si $P' \neq P$ est un point du rayon PQ assez voisin de P, alors le cercle de centre P' passant par K_1 ou celui qui passe par K_1' laisse γ_2 à son extérieur, donc P' est dans D_1. Si $\varepsilon(P, \gamma_2)$ était sur l'arc SQS', tout point $P' \neq P$ du rayon PQ assez voisin de P serait dans D_2. Donc F *possède en* P *les deux demi-tangentes distinctes* PS *et* PS'. Il y a plus : par chaque point P' de F traçons la droite l' parallèle à la bissectrice des angles SPS'. Il existe un nombre fixe $\delta > 0$ tel que, pour P' assez voisin de P, tout point $\neq$ P' dè l' à une distance de P' moindre que δ se trouve dans D_1 ou dans D_2 selon qu'il est à l'un ou l'autre côté de P'.

Nous avons donc établi que l'ensemble des points de F assez rapprochés d'un point P de F est un arc de courbe d'équation $y = f(x)$, x et y étant des coordonnées rectangulaires convenables et $f(x)$ une fonction ayant partout une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Quand un point P' de F tend vers P tel que la demi-droite PP' tend vers la demi-tangente PS, alors $\varkappa(P', \gamma_1) = \varkappa(P', \gamma_2)$ finit par couper $\varkappa$ en deux points qui tendent vers K_1 et K_2, donc $\varepsilon(P', \gamma_1) \to K_1$ et $\varepsilon(P', \gamma_2) \to K_2$. Il en résulte que l'une des demi-tangentes de F en P' tend vers PS, l'autre vers le prolongement de SP. Conclusion analogue pour l'autre demi-tangente PS'. Une conséquence immédiate de ce que nous venons de trouver est que toute circonférence de centre P et de rayon suffisamment petit coupe F en *deux* points.

Nous allons maintenant montrer que D_1 et D_2 sont des domaines à frontière commune F.

Soit P un point de D_1 étranger à γ_1 et soit P' un point intérieur à $\varkappa(P, \gamma_1)$ tel que la demi-droite PP' contient un point de $\varepsilon(P, \gamma_1)$

et que $o < PP' \leqq P\gamma_1$. Alors

$$\frac{P'\gamma_1}{P'\gamma_2} \leqq \frac{P\gamma_1 - PP'}{P\gamma_2 - PP'} < \frac{P\gamma_1}{P\gamma_2}.$$

Donc la fonction $\frac{P\gamma_1}{P\gamma_2}$ n'a pas de minimum entre o et 1. De même elle n'a pas de maximum entre 1 et $+\infty$.

Je dis que tout domaine G, dont la frontière Φ est une partie de F, contient γ_1 ou γ_2 ou tous les deux. En effet, dans le cas contraire, la fonction $\frac{P\gamma_1}{P\gamma_2}$ serait continue dans G et sur Φ et égale à UN sur Φ. Puisqu'elle tend vers UN à l'infini elle aurait dans G un minimum entre o et 1 ou un maximum entre 1 et $+\infty$, ou bien tout point de G appartiendrait à F, ce qui est impossible, parce que F a partout deux demi-tangentes.

Soit G_1 le plus grand domaine contenant γ_1 sans contenir des points de F; soit G_2 un tel domaine contenant γ_2. Les frontières de G_1 et de G_2 étant des parties de F, il n'existe pas de troisième domaine limité par une partie de F en vertu de ce que nous venons de démontrer. G_1 est dans D_1, G_2 dans D_2. Donc G_1 et G_2 sont distincts, parce qu'il est impossible de relier un point de D_1 à un point de D_2 par un continu ne rencontrant pas F. Par conséquent $G_1 = D_1$, $G_2 = D_2$ et F divise le plan en deux domaines D_1 et D_2 ayant chacun pour frontière la totalité de F.

Nous montrerons maintenant que F est une courbe de Jordan ou réductible à une telle courbe au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques.

Il suffit de démontrer qu'une partie Φ de F qui est une courbe de Jordan dans ce sens large constitue la totalité de F.

Soit P un point de Φ. Un cercle Γ de centre P et de rayon assez petit a, comme nous savons, les propriétés : 1° elle coupe Φ en *deux* points M et M', 2° la bissectrice des angles entre les deux demi-tangentes de Φ en P coupe Γ en deux points P_1 et P_2 séparés sur Γ par M et M' et situés dans D_1 et D_2 respectivement. Soit c une courbe continue reliant P_1 et P_2. Elle possède un arc reliant un point de l'arc MP_1M' à un point de l'arc MP_2M' de Γ et situé du reste ou bien intérieur ou bien extérieur à Γ. En vertu du théorème A cet arc coupe ou bien l'arc MM' de Φ intérieur à Γ, ou bien l'arc MM' de Φ extérieur à Γ. En tout cas c coupe Φ.

Supposons pour un instant que F contienne un point Q étranger à Φ. La bissectrice des angles entre les deux demi-tangentes de F en Q possède deux points Q_1 et Q_2 de D_1 et D_2 respectivement et tels que sur les segments de droite QQ_1 et QQ_2 le seul point de F est Q. Or P_1 peut être relié à Q_1 par une courbe continue c_1 ne coupant pas F, de même P_2 à Q_2 par une courbe continue c_2 ne coupant pas F. La réunion de c_1, c_2 et des segments QQ_1 et QQ_2 est une courbe continue c reliant P_1 et Q_1 sans couper Φ. Cette contradiction montre que $\Phi = F$.

De la propriété de F d'avoir partout deux demi-tangentes il résulte encore que sauf en un ensemble dénombrable au plus de ses points F possède une tangente unique.

Théorème I. — *Le lieu* F *des points équidistants de deux continus* γ_1 *et* γ_2 *bornés et sans point commun est une courbe de Jordan ou réductible à une telle courbe au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques.* F *divise le plan en deux domaines* D_1 *et* D_2 *contenant* γ_1 *et* γ_2 *respectivement et ayant tous les deux la totalité de* F *pour frontière. Partout* F *est muni de deux demi-tangentes distinctes. Si un point* P′ *de* F *tend vers un point* P *de* F *en restant au même côté de* P, *alors l'une des demi-tangentes de* F *en* P′ *tend vers la demi-tangente* PS *de* F *en* P *relative à ce côté, l'autre vers le prolongement de* SP.

Si γ_1 ou γ_2 ou tous les deux sont remplacés par un point, on a le même résultat.

2. Considérons maintenant l'ensemble F des points équidistants de deux ensembles fermés γ_1 et γ_2, pas nécessairement continus, ayant en commun un seul point S. Le cas de deux segments de droite se rencontrant sous un angle $\neq \pi$ montre que F peut avoir des points intérieurs.

Soient P et Q deux points intérieurs de F. Ils sont centres de deux disques circulaires ρ et σ dont tous les points sont intérieurs à F. Soient P′ sur ρ, Q′ sur σ et R sur le segment de droite P′Q′. D'abord on a $\varepsilon(P', \gamma_1) = \varepsilon(P', \gamma_2) = S$, sinon $\varepsilon(P', \gamma_1)$ contiendrait par exemple un point M étranger à $\varepsilon(P', \gamma_2)$, donc pour tout point N du segment P′M et différent de P′ on aurait $N\gamma_1 < N\gamma_2$, contrairement à l'hypothèse que P′ est intérieur à F. De la même manière on montre que $\varepsilon(Q', \gamma_1) = \varepsilon(Q', \gamma_2) = S$. Donc $P'\gamma_1 = P'\gamma_2 = P'S$ et $Q'\gamma_1 = Q'\gamma_2 = Q'S$, d'où $R\gamma_1 = R\gamma_2 = RS$. Tout point du segment $P'Q'$ appartient par conséquent à F. Et puisque tout segment tel que $P'Q'$ a cette propriété on conclut que PQ a tous ses points intérieurs à F. Les points intérieurs de F, s'ils existent, forment par conséquent un domaine convexe.

Théorème II. — *Si l'ensemble* F *des points équidistants de deux ensembles fermés, ayant un seul point commun, possède des points intérieurs, alors l'ensemble de ces derniers est un domaine convexe* Δ.

Le raisonnement ci-dessus montre que l'ensemble

$$f(P\gamma_1 = P\gamma_2 = PS)$$

est convexe et contient Δ et la frontière φ de Δ, aucun autre point. Si Δ n'existe pas, f est ou bien le point unique S, ou bien un segment de droite contenant S, ou bien une droite ou demi-droite contenant S. φ est l'ensemble des points de f qui sont limites de $D_1(P\gamma_1 < P\gamma_2)$ ou de $D_2(P\gamma_1 > P\gamma_2)$ ou de tous les deux. Si Δ existe, φ est une courbe convexe passant par S.

3. Dans la suite nous supposerons que γ_1 et γ_2 sont deux arcs simples de courbes continues A_1S et A_2S ayant en commun le point unique S.

Lemme. — Soit Γ une circonférence de cercle passant par S et ne contenant aucun point de γ_1 ni de γ_2 à son intérieur. On joint deux points $L_1 \neq S$ et $M_1 \neq S$ de γ_1 à deux points $L'_1 \neq S$ et $M'_1 \neq S$ de Γ par des continus λ_1 et μ_1 ne rencontrant pas γ_2 et sans point intérieur à Γ. On joint un point $L_2 \neq S$ de γ_2 à un point $L'_2 \neq S$ de Γ par un continu λ_2 ne rencontrant ni λ_1 ni μ_1 ni γ_1 et sans point intérieur à Γ. Alors S et L'_2 ne séparent pas L'_1 et M'_1. Car autrement le continu somme de λ_2 et de l'arc L_2S de γ_2 couperait le continu somme de λ_1, μ_1 et de l'arc L_1M_1 de γ_1 en vertu du théorème A. Mais alors γ_1 et γ_2 auraient un point commun différent de S.

L'énoncé reste valable si « intérieur » est remplacé par « extérieur »; et encore si les indices 1 et 2 sont échangés.

Les continus λ_1, μ_1, λ_2 peuvent se réduire à des points.

Pour étudier φ (*voir* le n° 2) de plus près dans le cas fixé au n° 3, nous aurons à distinguer différents cas.

4. Premier cas : Δ existe et est borné. — Alors φ est une courbe convexe fermée passant par S.

Soient τ_1 et τ_2 les demi-tangentes de φ en S. L'angle $\tau_1 S \tau_2$ contenant φ est positif et au plus égal à π. Soient π_1 et π_2 les deux demi-droites issues de S perpendiculaires à τ_1 et τ_2 renfermant un angle $\pi_1 S \pi_2 < \pi$ extérieur à $\tau_1 S \tau_2$ et ayant même bissectrice β que ce dernier angle. Nous dirons que τ_1 et π_1 sont à droite de β, τ_2 et π_2 à gauche. Si λ_1 et λ_2 sont deux demi-droites issues de S, λ_1 entre τ_1 et π_1, λ_2 entre τ_2 et π_2, alors tout point $\neq$ S de l'arc $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ assez voisin de S est dans celui des angles $\lambda_1 S \lambda_2$ qui est extérieur à $\tau_1 S \tau_2$. Si un point P sur γ tend vers S, les limites extrêmes de la demi-droite SP sont π_1 et π_2.

Sans perte de généralité nous supposons qu'il existe sur φ à droite de β une suite de points limites de D_1 tendant vers S. Il existe alors une suite de points L_1^n de D_1 tendant vers S tel que la demi-droite SL_1^n tend vers τ_1.

$\varkappa(L_1^n, \gamma_1)$ contient un point K_1^n de γ_1 et laisse S à son extérieur. Le segment de droite $L_1^n K_1^n$ ne contient aucun point de γ_2.

Soit Γ un cercle passant par S, dont le centre est sur la bissectrice de l'angle $\pi_1 S \pi_2 < \pi$ et laissant A_1 et A_2 à son extérieur. γ_1, parcouru de S à A_1, a un premier point $B_1 \neq S$ sur Γ. Soit B_2 le premier point $\neq$ S de γ_2 parcouru de S à A_2.

Dès que n est assez élevé la droite $L_1^n K_1^n$ coupe Γ en un point R_1^n à droite de β, le segment $K_1^n R_1^n$ ne rencontre pas γ_2 et n'a aucun point extérieur à Γ. On a $K_1^n \neq S$, $R_1^n \neq S$, K_1^n et $R_1^n \to S$ pour $n \to \infty$.

Je dis que φ contient à gauche de β un arc d'extrémité S, dont tous les points sauf S sont limites de D_2 et non pas de D_1. Car autrement on aurait sur Γ à gauche de β une suite $\overline{R}_1^n \neq S$, $\overline{R}_1^n \to S$, dont chaque point pourrait être joint à un point $\overline{K}_1^n \neq S$ de γ_1 par un segment $\overline{K}_1^n \overline{R}_1^n$ ne rencontrant pas γ_2 et n'ayant pas de point extérieur à Γ. En outre $\overline{K}_1^n \to S$. Donc pour n assez grand S et B_2 séparent R_1^n et $\overline{R}_1^n$ sur Γ et les points K_1^n et $\overline{K}_1^n$ sont sur l'arc $B_1 S$ de γ_1. Le lemme appliqué aux arcs $B_1 S$ et $B_2 S$ de γ_1 et γ_2 fournit une contradiction.

Il est donc démontré que φ possède un arc à droite de β et d'extrémité S, dont tous les points sont limites de D_1 et non pas de D_2, et un arc à gauche de β, d'extrémité S, dont tous les points sont limites de D_2 et non pas de D_1.

Donc φ contient au moins UN point limite de D_1 et de D_2 à la fois et différent de S.

Soit K un tel point. Supposons-le d'abord *entre* τ_1 *et* τ_2. Soit $P_n \to K$, P_n dans D_1. Le cercle $\varkappa(P_n, \gamma_1)$ a son rayon $< P_n S$, donc tous les points de $\varepsilon(P_n, \gamma_1)$ sont éloignés de S d'une quantité plus grande qu'une constante positive. Donc sur $\varkappa(K, \gamma_1) = \varkappa(K, \gamma_2) = \varkappa(K)$ l'ensemble $\varepsilon(K, \gamma_1)$ est composé du point isolé S et d'autres points. Même propriété de $\varepsilon(K, \gamma_2)$. Le lemme exige que les points de $\varepsilon(K, \gamma_1)$ et de $\varepsilon(K, \gamma_2)$ autres que S se trouvent sur deux arcs séparés $K_1 K'_1$, et $K_2 K'_2$ de $\varkappa(K)$, dont les extrémités appartiennent à ces deux ensembles respectivement. Ces arcs peuvent se réduire à des points. Nous supposons la dénomination telle que γ_1 et γ_2 n'ont pas de point sur les arcs SK_1, SK_2 et $K'_1 K'_2$ sauf extrémités. Soient M_1, M_2 et N les milieux de ces arcs.

En raisonnant comme au n° 1, nous voyons que :

1° Sur toute demi-droite KR dans l'angle M_1KN ne contenant pas M_2, les points assez voisins de K sont dans D_1 et sur toute demi-droite KR dans l'angle M_2KN ne contenant pas M_1 les points assez voisins de K sont dans D_2.

2° Sur toute demi-droite KR dans l'angle M_1SM_2 contenant S les points assez voisins de K sont dans Δ. KM_1 et KM_2 sont les demi-tangentes de φ en K, qui est nécessairement un point anguleux de φ. K est extrémité commune de deux arcs de φ tels que tout point de l'un, sauf K, est limite de D_1 et non pas de D_2, tout point de l'autre, sauf K, est limite de D_2 et non pas de D_1.

3° KN est la demi-tangente unique en K de la partie de F extérieure à f augmentée du point K.

Je dis qu'il ne peut exister sur φ *deux points* K *et* $\overline{K}$ *entre* τ_1 *et* τ_2 *et limites de* D_1 *et* D_2 *à la fois.*

Car $\varkappa(K)$ et $\varkappa(\overline{K})$ se couperaient en S et en un autre point T. Au moins un des ensembles $\varepsilon(\overline{K}, \gamma_1)$ et $\varepsilon(\overline{K}, \gamma_2)$; le premier par exemple, ne contient pas T. Joignons un point $\neq$ S de $\varepsilon(\overline{K}, \gamma_1)$ à un point de l'arc ST de $\varkappa(K)$ intérieur a $\varkappa(\overline{K})$ au moyen d'un segment de droite sans point intérieur à $\varkappa(K)$ et joignons de la même manière un point $\neq S$ de $\varepsilon(\overline{K}, \gamma_2)$ à un autre point du même arc ST de $\varkappa(K)$ ou à T, tel que les deux segments employés ne se coupent pas. Le lemme conduit à une contradiction.

Soit maintenant $K \neq S$ un point de φ limite de D_1 et de D_2 et *situé sur* τ_1.

La courbe φ possède alors un segment SH de τ_1. Je dis que tout point P de SH entre S et H est limite de D_1 et non pas de D_2. En effet, $\varkappa(P, \gamma_1) = \varkappa(P, \gamma_2) = \varkappa(P)$ touche $\varkappa(H)$ intérieurement en S, d'où $\varepsilon(P, \gamma_1) = \varepsilon(P, \gamma_2) = S$. Si donc il existait une suite $P_2'' \to P$ dans D_2, on aurait sur γ_2 une suite $K_2'' \neq S$, $K_2'' \to S$, telle que les segments $K_2''P_2''$ coupent Γ en une suite $R_2'' \neq S$, $R_2'' \to S$ à droite de β sans rencontrer γ_1. Pour n assez grand le segment $K_2''R_2''$ n'aurait pas de point à l'extérieur de Γ. Il y aurait sur Γ deux points R_2^p et R_2^q séparés par S et par un point R_1^k de la suite R_1'' trouvée page 41 et tel que les segments $K_2^pR_2^p$, $K_2^qR_2^q$ $K_1^kR_1^k$ ne se rencontrent pas deux à deux et n'ont pas de point à l'extérieur de Γ. Le lemme conduit à une contradiction.

Donc K est extrémité du segment SK de φ sur τ_1. Tous les points de $\gamma_1 + \gamma_2$ sont extérieurs à $\varkappa(K)$ ou sur $\varkappa(K)$. Donc les segments $K_1''L_1''$ (*voir* p. 41) coupent $\varkappa(K)$ en une suite $T_1'' \neq S$, $T_1'' \to S$ tel que les segments $K_1''T_1''$ ne possèdent aucun point intérieur à $\varkappa(K)$ et ne rencontrent pas γ_2. Le lemme conduirait à une contradiction si $\varepsilon(K, \gamma_2)$ aurait une suite $K_2 \neq S$, $K_2 \to S$. Par suite S est un point isolé de $\varepsilon(K, \gamma_2)$.

Soit $P_2'' \to K$, P_2'' dans D_2. Puisque $P_2''\gamma_2 < P_2''S$, l'ensemble $\varepsilon(P_2'', \gamma_2)$ ne contient pas S. Sa distance à S surpasse un nombre positif fixe, sinon il existerait sur γ_2 une suite $K_2'' \neq S$, $K_2'' \to S$ telle que les segments $K_2''P_2''$ coupent $\varkappa(K)$ en une suite $T_2'' \neq S$, $T_2'' \to S$ sans rencontrer γ_1, ce qui serait encore en contradiction avec le lemme. Donc $\varepsilon(K, \gamma_2)$ a des points autres que S. Appelons $\varepsilon^*(K, \gamma_2)$ leur ensemble. Soit de même $\varepsilon^*(K, \gamma_1)$ l'ensemble des points $\neq S$ de $\varepsilon(K, \gamma_1)$.

Je dis que, si $\varepsilon^*(K, \gamma_1)$ existe et si l'on parcourt $\varkappa(K)$, en partant de S, dans une telle direction qu'on commence par rencontrer la suite T_1'', on rencontre $\varepsilon^*(K, \gamma_1)$ avant $\varepsilon^*(K, \gamma_2)$. Car autrement un point T_1^p serait séparé de $\varepsilon^*(K, \gamma_1)$ par S et $\varepsilon^*(K, \gamma_2)$, en contradiction avec le lemme.

Soient SK'_1 et $K_2K'_2$ les deux arcs séparés de $\varkappa(K)$ contenant $\varepsilon(K, \gamma_1)$ et $\varepsilon^*(K, \gamma_2)$, les extrémités étant sur ces ensembles et la dénomination étant telle que γ_1 et γ_2 n'ont pas de points sur les arcs SK_2 et $K'_1K'_2$, sauf extrémités. K'_1 peut coïncider avec S. Nous trouvons :

1° Sur toute demi-droite KR dans l'angle SKN ne contenant pas M_2 les points assez voisins de K sont dans D_1 et sur toute demi-droite KR dans l'angle M_2KN ne contenant pas S les points assez voisins de K sont dans D_2.

2° Sur toute demi-droite KR dans l'angle SKM_2 ne contenant par N les points assez voisins de K sont dans Δ.

KS et KM_2 sont les demi-tangentes de φ en K, qui est un point anguleux de φ. K est extrémité commune de deux arcs de φ tels que tout point $\neq$ K de l'un est limite de D_1 et non pas de D_2, tout point $\neq$ K de l'autre est limite de D_2 et non pas de D_1. Le premier de ces deux arcs est le segment KS.

3° KN est la demi-tangente unique en K de la partie de F extérieure à f, augmentée du point K.

Mêmes conclusions *mutatis mutandis* pour un tel point $\overline{K}$ sur τ_2.

Nous allons montrer qu'il ne peut exister en même temps un tel point K sur τ_1 et $\overline{K}$ sur τ_2. Admettons que K et $\overline{K}$ existent. Le domaine convexe Δ contient un arc SB de $\varkappa(K)$ et un arc SB de $\varkappa(\overline{K})$. On peut donc joindre un point $\overline{K}_1$ de l'ensemble existant $\varepsilon^*(\overline{K}, \gamma_1)$ à un point $L_1 \neq S$ par un segment $\overline{K}_1L_1$ ne rencontrant pas γ_2 et ne pénétrant pas dans $\varkappa(K)$. S et $\varepsilon^*(K, \gamma_2)$ sont séparés sur $\varkappa(K)$ par L_1 et un point de la suite T''_1, ce que le lemme contredit.

En parcourant φ à partir de S tel qu'on rencontre d'abord des points limites de D_1 et non pas de D_2, on rencontre après le premier passage d'un point K un arc dont tout point a la qualité opposée; après le deuxième passage d'un point K on parcourt de nouveau un arc de la frontière de D_1, etc. Or, en vertu de ce que nous avons trouvé, le nombre des points K ne surpasse pas 2. Mais ce nombre est impair parce que le passage de S change aussi la qualité des points. Ce nombre est donc UN.

K et S divisent φ en deux arcs dont l'un est une frontière partielle de D_1, l'autre de D_2.

5. **Deuxième cas : Δ existe et s'étend à l'infini.** — Alors φ est une courbe convexe s'étendant à l'infini.

Je dis que sur φ il ne peut exister plus d'un seul point $K \neq S$ limite de D_1 et D_2. D'abord K et $\overline{K}$ entre τ_1 et τ_2 est impossible et de même K sur τ_1 et $\overline{K}$ sur τ_2 : nous l'avons démontré au n° 4. Si K est sur τ_1, $\overline{K}$ entre τ_1 et τ_2, les ensembles $\varepsilon^*(K, \gamma_2)$, $\varepsilon^*(\overline{K}, \gamma_1)$ et $\varepsilon^*(\overline{K}, \gamma_2)$ existent, de même on a sur $\varkappa(K)$ la suite T_1'' et le lemme conduit à une contradiction. Donc sur φ le nombre des points K est 1 ou 0. Des exemples simples montrent que les deux cas peuvent se présenter.

Dans le premier cas les énoncés 1°, 2°, 3° du n° 4 sont valables. S, K et le point à l'infini divisent φ en trois arcs, dont les deux qui s'étendent à l'infini forment une frontière partielle d'un même ensemble D_1 ou D_2 et le troisième forme une frontière partielle de l'autre ensemble. Le point à l'infini joue le rôle d'un point de φ différent de S et K.

Dans le second cas S et le point à l'infini divisent φ en deux arcs faisant partie de la frontière de D_1 et D_2 respectivement. Le point à l'infini joue le rôle d'un point K de φ.

On peut dire qu'il y a toujours un seul point K sur φ, qui peut être le point à l'infini.

6. **Troisième cas : f est un segment de droite SK dont S est une extrémité.** — τ_1, τ_2 et β coïncident avec SK, π_1 et π_2 avec les deux côtés de la perpendiculaire π à SK en S, que nous appellerons côtés droit et gauche. Nous dirons que K est au-dessus de π. Sans perte de généralité nous supposons qu'à droite de β il existe une suite $L_1^n \to S$ dans D_1, telle que la demi-droite SL_1^n tend vers SK. De $L_1^n\gamma_1 < L_1^n S$ on conclut que $\varepsilon(L_1^n, \gamma_1)$ est à droite de β pour n assez grand. Tout point K_1^n de $\varepsilon(L_1^n, \gamma_1)$ est extérieur à $\varkappa(K)$ ou sur $\varkappa(K)$. Ceux extérieurs à $\varkappa(K)$ peuvent être joints à $\varkappa(K)$ par des segments $K_1^n T_1^n$ ne rencontrant pas γ_2, $T_1^n \neq S$ et à droite de β, $T_1^n \to S$. On en déduit (*voir* le n° 4) que le segment SK est une partie commune des frontières de D_1 et D_2 : si P est un point de β entre S et K, un point assez voisin de P est dans D_1 ou D_2 selon qu'il est à droite ou à gauche de β.

Il existe sur $\varkappa(K)$ un arc $SK_2' > 0$ parcouru dans la direction fixée page 43, qui n'a aucun point de $\varepsilon(K, \gamma_2)$ hors de S et K_2', et un arc $SK'_1 > o$ parcouru dans la directien opposée, qui n'a aucun point de $\varepsilon(K, \gamma_1)$ hors de S et K'_1. On le voit par un raisonnement comme au n° 4. En parcourant $\varkappa(K)$ dans la direction fixée on rencontre successivement S, K'_1, K'_2. Si $K'_1 = S$, l'ensemble $\varepsilon^*(K, \gamma_1)$ n'existe pas. Même remarque pour K'_2.

Soit N le milieu de l'arc K'_1, K'_2 parcouru dans la direction fixée. Sur tout rayon KR de $\varkappa(K)$ dont l'extrémité R est sur l'arc SN parcouru dans cette direction et différent de S et N, les points assez voisins de K sont dans D_1. L'arc complémentaire SN jouit de cette propriété par rapport à D_2.

KN est la demi-tangente unique en K de la partie de F extérieure à f, augmentée du point K.

Si $K'_1 = K'_2 = S$, alors KN est le prolongement de SK.

7. **Quatrième cas : f est un segment de droite $K\overline{K}$.** — Alors S est entre K et $\overline{K}$, γ_1, γ_2 n'ont pas de point intérieur à $\varkappa(K)$ ou $\varkappa(\overline{K})$. Dans un cercle c de centre S et de rayon suffisamment petit γ_1 et γ_2 sont séparés par $K\overline{K}$. Car si par exemple γ_1 avait deux suites $P_n \to S$ et $Q_n \to S$ à différents côtés de $K\overline{K}$, l'arc P_nQ_n finirait par contenir le point S, ce qui est impossible parce que γ_1 est simple; et s'il existait un cercle c de centre S à l'intérieur duquel γ_1 et γ_2 sont au même côté de $K\overline{K}$, Δ existerait.

La simplicité de ce cas permet d'omettre la démonstration des résultats suivants :

Si P est un point de $K\overline{K}$ entre K et $\overline{K}$, tout point assez voisin de P est dans D_1 ou D_2 selon qu'il est à l'un ou l'autre côté de $K\overline{K}$, qui est une partie commune des frontières de D_1 et D_2. La partie de F extérieure à f augmentée de K et $\overline{K}$ possède en chacun de ces deux points une demi-tangente unique distincte de KS, $\overline{K}S$ respectivement.

Il est superflu de mentionner les résultats dans le cas où K ou $\overline{K}$ est à l'infini. Pour que tous les deux soient à l'infini il faut et il suffit que γ_1 et γ_2 soient des segments d'une même droite.

Un des résultats des n^{os} 4, 5, 6, 7 est : *en un point* K *la demi-tangente de la partie de* F *extérieure à f augmentée de* K *est distincte des deux demi-tangentes de la frontière φ de f.*

8. Nous allons examiner de plus près D_1 et D_2 et leurs frontières F_1, F_2.

Soient P et Q deux points de D_1, donc $P\gamma_1 < P\gamma_2$ et $Q\gamma_1 < Q\gamma_2$. On peut choisir un point $S' \neq S$ et $\neq A_1$ de γ_1 tel que P et Q sont plus rapprochés de l'arc $A_1 S'$ de γ_1 que de γ_2. Or tous les points ayant cette dernière propriété forment un domaine D' (nº 1), qui est intérieur à D_1 parce que tous ces points sont plus rapprochés de γ_1 que de γ_2. On peut joindre P et Q par un continu dans D' et ce continu est *à fortiori* dans D_1. *Par suite* D_1 *et* D_2 *sont des domaines.*

Dans le premier et le deuxième cas (nºs 4 et 5) φ se compose d'une frontière partielle φ_1 de D_1 et d'une frontière partielle φ_2 de D_2. Dans les autres cas le segment fini ou infini φ est en même temps frontière partielle φ_1 de D_1 et φ_2 de D_2. Si $f = S$, φ_1 et $\varphi_2 = S$. Les frontières totales F_1 et F_2 de D_1 et D_2 sont distinctes dans les deux premiers cas, identiques dans les autres cas. On a toujours

$$F - f = F_1 - \varphi_1 = F_2 - \varphi_2.$$

Tout point P de $F - f$ satisfait à $P\gamma_1 = P\gamma_2 < PS$, donc $\varepsilon(P, \gamma_1)$ et $\varepsilon(P, \gamma_2)$ n'ont pas de points communs d'où (*voir* nº 1) : $F - f$ *possède en chacun de ses points deux demi-tangentes distinctes.*

Un point étranger à $F - f$ et limite de $F - f$ est limite de D_1 et de D_2. Donc un tel point ne peut être que S ou un point K de φ. En un point K de φ la frontière F_1 de D_1 a deux demi-tangentes, à savoir celle de $F - f + K$ et celle de l'arc convexe, $\varphi_1 = KS$ de φ, et ces deux demi-tangentes sont distinctes, comme nous l'avons remarqué à la fin du nº 7. Donc, φ étant convexe, *les frontières* F_1 *et* F_2 *de* D_1 *et* D_2 *ont en chacun de leurs points* P, *sauf éventellement* S, *deux demi-tangentes distinctes.* L'ensemble des points de $F_1(F_2)$ assez rapprochés d'un point $P \neq S$ de $F_1(F_2)$ est un arc de courbe d'équation $y = f(x)$, x et y étant des coordonnées rectangulaires convenables et $f(x)$ une fonction ayant partout une dérivée à droite et une dérivée à gauche. Toute circonférence de centre $P \neq S$ sur $F_1(F_2)$ et de rayon suffisamment petit coupe $F_1(F_2)$ en deux points. Ces dernières propriétés de $P \neq S$ et encore les propriétés des limites des demi-tangentes de $F_1(F_2)$ (p. 39) se démontrent de la même manière dont elles ont été démontrées au nº 1 en tous les points de F.

F_1 divise le plan en deux domaines : D_1 et $D'_1 = D_2 + f - \varphi_1$

et ayant chacun la totalité de F_1 pour frontière. Propriété analogue de F_2.

On démontre comme n° 1 qu'une partie de $F_1(F_2)$ qui est une courbe de Jordan au sens large (p. 38) est identique à $F_1(F_2)$, d'où les deux formes possibles pour F_1 et F_2.

a. Une courbe de Jordan au sens large passant par S.

b. Une courbe continue simple s'étendant de S à l'infini.

Bien qu'une courbe de la forme *b* ne divise pas le plan, nous ne voulons pas rejeter cette possibilité ici afin que nos considérations soient indépendantes du théorème de Jordan.

Nous trouvons donc :

Si $P \neq S$ et $Q \neq S$ sont deux points de $F_1(F_2)$, alors ou bien $F_1(F_2)$ possède un arc PQ ne contenant pas S, ou bien deux arcs s'étendant de P et Q à l'infini sans contenir S. Une conséquence immédiate est que deux points quelconques de F différents de S peuvent être joints par une courbe continue ne rencontrant pas $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. En effet, si $P_1 \neq S$ est sur φ_1 et $P_2 \neq S$ sur φ_2, le segment $P_1 P_2$ est sur f et ne rencontre pas γ; et deux points assez éloignés peuvent être joints par un segment de droite qui ne rencontre pas γ.

9. Nous considérerons différentes positions de S sur l'arc $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Pour distinguer les arcs $\gamma_1 = A_1 S$, $\gamma_2 = A_2 S$ et les ensembles D_1, D_2, F, etc. relatifs aux divers choix de S, nous les indiquerons par $\gamma_1(S)$, $\gamma_2(S)$, $D_1(S)$ etc. Ainsi $\gamma_1(A_2) = \gamma_2(A_1) = \gamma$, $\gamma_1(A_1) = A_1$, $\gamma_2(A_2) = A_2$.

Soit S un point de γ, différent de A_1 et A_2 et $P \neq S$ un point de $F_1(S)$. Soit PP_1 un segment de droite dont tous les points sauf P sont dans $D_1(S)$, et qui ne rencontre pas γ. On a $P_1\gamma_1(S) < P_1\gamma_2(S)$ et $P_1\gamma_1(A_1) \geqq P_1\gamma_2(A_1)$. Sur $\gamma_1(S)$ parcouru de A_1 à S le dernier point T satisfaisant à $P_1\gamma_1(T) \geqq P_1\gamma_2(T)$ diffère donc de S. Prenons un point $S' \neq T$ sur l'arc ST. Alors $P_1\gamma_1(S') < P_1\gamma_2(S')$ et $P\gamma_1(S') \geqq P\gamma_2(S')$, donc le segment PP_1 contient un point P' tel que $P'\gamma_1(S') = P'\gamma_2(S')$, c'est-à-dire un point de $F(S')$. Par suite le segment PP_1 relie tous les ensembles $F(S')$ relatifs aux points $S' \neq T$ de l'arc ST. De même il existe un arc de $\gamma_2(S)$ d'extrémité S tel qu'un segment de droite ne rencontrant pas γ relie tous les $F(S')$ relatifs aux points S' de cet arc. En combinant ce résultat avec celui à la fin du n° 8 nous trouvons que tout point $S \neq A_1$ et $\neq A_2$ de γ est intérieur à un arc $\sigma(S)$ de γ tel que, S' et S'' étant deux points quelconques de $\sigma(S)$, tout point $\neq S'$ de $F(S')$ peut être joint à tout point $\neq S''$ de $F(S'')$ par un continu ne rencontrant pas γ.

Si P et Q sont deux points de $F(A_2)$, alors $P\gamma = PA_2$ et $Q\gamma = QA_2$; donc tout point R du segment PQ satisfait à $R\gamma = RA_2$ et appartient par conséquent à $F(A_2)$. Donc $F(A_2)$ est convexe. Cet ensemble peut se réduire au point A_2. Si $P \neq S$ est un point de la frontière $F_1(A_2)$ de $F(A_2)$, on peut tracer un segment PP_1 dont tout point sauf P est dans $D_1(A_2)$. On conclut que A_2 est extrémité d'un arc $\sigma(A_2)$ de γ ayant la propriété des $\sigma(S)$ ci-dessus. De même il existe un tel arc $\sigma(A_1)$ si $F(A_1)$ ne se réduit pas au point A_1.

Soient maintenant P et Q deux points quelconques hors de γ. Sur γ il existe un point S_P tel que $P\gamma_1(S_P) = P\gamma_2(S_P)$ et un point S_Q tel que $Q\gamma_1(S_Q) = Q\gamma_2(S_Q)$, car on a par exemple $P\gamma_1(A_1) \geqq P\gamma_2(A_1)$ et $P\gamma_1(A_2) \leqq P\gamma_2(A_2)$. Donc P et Q sont sur $F(S_P)$ et $F(S_Q)$ respectivement. Or on peut recouvrir l'arc PQ de γ par un nombre fini d'arcs $\sigma(S)$. Par suite on peut joindre P à Q par un continu ne rencontrant pas γ.

Théorème III. — *Un arc simple de courbe continue γ ne divise pas le plan.*

Ce résultat nous fournit le droit de rejeter la forme *b* (p. 48) de F_1 et F_2. En même temps nous trouvons que tout point P hors de γ peut être joint à tout point S de γ sauf extrémités par une courbe continue qui ne rencontre γ qu'en S. L'extension de cet énoncé aux extrémités A_1 et A_2 est facile.

On peut remarquer que l'ensemble des points S de γ, pour lesquels $\Delta(S)$ existe, est dénombrable, car ce sont des points anguleux de γ.

Théorème IV. — *Le lieu des points équidistants de deux arcs simples de courbes continues $\gamma_1 = SA_1$ et $\gamma_2 = SA_2$ ayant en commun un seul point S est un continu F réunion d'un ensemble fermé convexe f, qui peut se réduire à S, et d'une courbe continue $F - f$. L'ensemble $D_1(P\gamma_1 < P\gamma_2)$ est un domaine dont la frontière F_1 est la réunion de $F - f$ et d'un arc $\varphi_1 = KS$ de la* *frontière* φ *de* f. *La frontière du domaine* $D_2(P\gamma_1 > P\gamma_2)$ *est la réunion de* $F - f$ *et de l'autre arc* $\varphi_2 = SK$ *de* φ. F_1 *et* F_2 *sont des courbes de Jordan ou réductibles à de telles courbes au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques, et possèdent partout, sauf en* S, *deux demi-tangentes distinctes. En tout point* $\neq S$ *ces dernières ont la propriété de continuité énoncée dans le théorème* I.

F_1 *divise le plan en deux domaines :* D_1 *et* $D_2 + f - \varphi_1$, *ayant chacun la totalité de* F_1 *pour frontière. Propriété analogue de* F_2.

f *peut se réduire à un segment de droite fini ou infini. Alors* φ_1 *et* φ_2 *coïncident avec ce segment,* F_1 *et* F_2 *sont identiques.*

$F - f$ *existe, sauf dans le cas où* γ_1 *et* γ_2 *sont des segments d'une même droite.*

10. Soit Γ un cercle ayant dans son intérieur un point S de γ et laissant A_1 et A_2 à son extérieur. Soient B_1 et B_2 les premiers points de rencontre des arcs SA_1 et SA_2 de γ avec Γ, c' et c'' les deux arcs B_1B_2 de Γ, C' et C'' leurs milieux et R', R'' des points sur les segments SC' et SC'' tels que les segments $R'C'$ et $R''C''$ ne rencontrent pas l'arc B_1B_2 de γ. En vertu du théorème A tout continu dans l'intérieur G de Γ joignant R' à R'' rencontre l'arc B_1B_2 de γ. Cet arc divise donc G en deux domaines au moins.

Appelons G' et G'' les deux domaines contenant les points de G qu'on peut joindre par une courbe continue dans G à R' et R'' respectivement. Tout point P de G hors de l'arc B_1B_2 de γ peut être joint à R' par une courbe continue k ne rencontrant pas cet arc (théorème III). Si k ne rencontre pas Γ, P est dans G'. Si sur k, parcourue de P à R', le premier point de rencontre R avec Γ est sur c', P est dans G', ce qu'on voit en ajoutant à l'arc PR^* de k, R^* étant dans G assez voisin de R, un arc $R^*\overline{R}$ de cercle concentrique à Γ, et un segment de droite $\overline{R}R'$. Si R est sur c'', on voit de la même manière que P est dans G''.

Donc l'arc B_1B_2 *de* γ *divise* G *en deux domaines* G' *et* G''.

Soit $\varkappa$ un cercle de centre S de rayon arbitrairement petit et soient L_1 et L_2 les *derniers* points de rencontre des arcs SB_1, SB_2 de γ avec $\varkappa$. L'arc α composé de l'arc B_1L_1, de la ligne brisée L_1SL_2 et de l'arc L_2B_2 divise G en deux domaines H' et H''. Le lieu F du théorème I relatif aux arcs L_1B_1 et L_2B_2 coupe un cercle ρ de centre S et de rayon assez petit en deux points M', M'' séparés sur ρ par les points d'intersection M_1, M_2 de ρ avec les segments SL_1 et SL_2. Une courbe continue dans G joignant M' à M'' sans couper α aurait un arc joignant un point de l'un des deux arcs M_1M_2 de ρ à un point de l'autre, se trouvant du reste ou bien intérieur, ou bien extérieur à ρ. En vertu du théorème A elle couperait dans le premier cas la ligne brisée L_1SL_2 et dans le second cas l'arc composé de l'arc L_1B_1 de γ_1, d'un arc B_1B_2 de Γ et de l'arc B_2L_2 de γ. Elle couperait donc α. Par suite nous pouvons dire que M' est dans H', M'' dans H''. Or la courbe F ne coupe α qu'au point S. Elle coupe évidemment les deux arcs c', c'' de Γ. Donc les premiers points de rencontre avec Γ des arcs de F prolongeant les arcs SM', SM'' sont l'un sur c', l'autre sur c''. Nous trouvons ainsi que les deux arcs B_1L_1 et B_2L_2 ne divisent pas G. Le rayon de $\varkappa$ étant arbitrairement petit nous avons démontré qu'*en supprimant un arc intérieur de l'arc* B_1B_2 *de* γ, *les deux arcs restants ne divisent pas* G. On en conclut que *tout point de l'arc* B_1B_2 *de* γ *est limite de* G' *et de* G''. Si en effet un tel point S n'était pas limite de G par exemple, S appartiendrait à un arc intérieur de l'arc B_1B_2 dont aucun point ne serait limite de G'; la frontière de G' se composerait de c' et d'une partie de ce qui reste de l'arc B_1B_2 de γ en supprimant cet arc intérieur, donc G'' n'existerait pas.

Considérons la courbe $F_1(S) = F_1$ relative aux arcs SA_1 et SA_2 de γ. Soient P et N les premiers points de rencontre de F_1 avec Γ quand on parcourt F_1 dans les deux sens en partant de S. Je dis que l'un *des arcs* SP *et* SN *de* F_1 *ainsi parcourus est dans* G', *l'autre dans* G'', *sauf extrémités.*

Pour le démontrer, admettons que ces arcs seraient tous les deux dans G'. Si F_1 a des points dans G'', chacun de ces points est sur un arc α de F_1, situé dans G'' sauf ses extrémités E_1, E_2 qui sont sur c'', parce que F_1 ne rencontre pas γ hors de S. Si α et α' sont deux tels arcs de F_1, alors les extrémités E'_1, E'_2 de α' ne séparent pas ceux de α, car F_1 étant une courbe simple le théorème A s'y opposerait. Supprimons tous les arcs α' ayant la propriété que l'arc $E'_1E'_2$ de c'' fait partie de l'arc E_1E_2 de c'' relatif à un autre arc α. Nous conservons ainsi un nombre fini ou dénombrable d'arcs α qui forment avec l'ensemble complémentaire p de l'ensemble des arcs $E_1 E_2$ de c'' relatifs à ces α une courbe continue simple σ d'extrémités B_1 et B_2. Soit τ l'arc somme de σ et de l'arc $B_1 S$ de γ.

Parce que tout point de l'arc $B_1 B_2$ de γ est limite de G'', on peut choisir dans G'' un point P_1 de $D_1(S) = D_1$ tel que $\varepsilon(P_1, \gamma_1)$ possède un point K_1 sur l'arc $B_1 S$ de γ. Alors le segment $P_1 K_1$ ne rencontre pas F_1. De même on peut choisir dans G'' un point P_2 de $D_2(S) = D_2$. On peut joindre P_1 à P_2 par une courbe continue $k = P_1 P_2$ ne rencontrant pas τ (théorème III). Si k ne rencontre pas F_1 nous avons évidemment une contradiction. Je dis que k ne peut rencontrer F_1 avant de sortir de G''. Car un tel point de rencontre R serait sur un arc α' supprimé. Ajoutons à l'arc $P_1 R$ de k un arc RE'_1 de α', E'_1 étant une extrémité de α' située sur c'' entre les extrémités E_1, E_2 d'un arc α conservé. En vertu du théorème A le continu somme de l'arc $P_1 E'_1$ ainsi obtenu, du segment $P_1 K_1$ et de l'arc $K_1 B_1$ de γ couperait α. Donc k couperait α, ce qui est une contradiction. Si k sort de G'' sa première rencontre avec la frontière de G'' ne peut pas être sur p, cet ensemble appartenant à τ. Il ne peut pas être sur un arc $E_1 E_2$ de c'', car le théorème A s'y opposerait comme ci-dessus. N'étant pas sur γ_1 il doit être sur γ_2 et différer de S. Mais alors un arc de k joint le point P_1 de D_1 à un point de γ_2 sans rencontrer F_1, ce qui est impossible. Si enfin k ne sort pas de G'', elle ne rencontre pas F_1 et l'on a encore une contradiction, parce que P_2 est dans D_2.

Il est donc démontré que l'un des arcs SP, SN de F_1 est dans G', l'autre dans G''; ou encore, que P et N sont séparés sur Γ par B_1 et B_2.

Il est clair que $F_1(S)$ peut être remplacé par $F_2(S)$ et plus généralement par $F(S)$. Car si les arcs SP_1 de φ_1 et SP_2 de φ_2 sont dans G', l'ensemble convexe commun à $f(S)$ et G est aussi dans G'.

Les raisonnements et les résultats auraient été les mêmes si nous avions supposé que l'arc $B_1 S B_2$ de γ sauf B_1 et B_2 était extérieur au lieu de intérieur à Γ.

Théorème V. — *Soit* $\bar{\gamma} = B_1 B_2$ *un arc de* γ *situé dans le domaine intérieur (extérieur)* G *d'un cercle* Γ, *sauf les extrémités* B_1 *et* B_2.

L'arc $\bar{\gamma}$ *divise* G *en deux domaines* G', G''. $\bar{\gamma}$ *forme avec l'un des arcs* B_1B_2 *de* Γ *la frontière de* G', *avec l'autre celle de* G''.

Si $S \neq B_1$ *et* $\neq B_2$ *est un point arbitraire de* $\bar{\gamma}$, *soit* PSN *l'arc de la courbe* $F_1(S)$ *du théorème IV passant par* S *et situé dans* G *sauf ses extrémités* P *et* N. *Alors* $\bar{\gamma}$ *sépare dans* G *les arcs* SP *et* SN. *Même propriété de* $F_2(S)$.

Si $F_1(S) \neq F_2(S)$, *soit* $f^*(S)$ *la partie de* $f(S)$ *dans* G, *et* SQ *l'arc de* $F(S) - f(S)$ *issu de* S *et situé dans* G *sauf l'extrémité* Q. *Alors* $\bar{\gamma}$ *sépare dans* G *l'ensemble* $f^*(S)$ *et l'arc* SQ.

11. Soient S et $S' \neq S$ deux points de l'arc B_1B_2 de γ, différents de B_1 et B_2, et soient SP et $S'P'$ les arcs de $F_1(S)$ et de $F_1(S')$ situés dans G', sauf S et les points P et P', qui sont sur c'. Nous pouvons admettre que S' est sur l'arc SB_1 de γ.

Supposons d'abord que $P \neq P'$ et que les arcs SP et $S'P'$ ne se coupent pas. Le théorème A montre de suite que P' est sur c' entre P et B_1.

Si γ a des points dans G' étrangers à l'arc B_1SB_2, chacun de ces points est sur un arc α de γ situé dans G' sauf ses extrémités E_1, E_2, qui sont sur c', parce que γ est simple. Si α et α' sont deux tels arcs de γ, alors les extrémités E'_1, E'_2 de α' ne séparent pas ceux de α sur c', car γ étant simple, le théorème A s'y opposerait. Supprimons tous les α' ayant la propriété que l'arc $E'_1E'_2$ de c' fait partie de l'arc E_1E_2 de c' relatif à un autre arc α. Nous conservons ainsi un nombre fini ou dénombrable d'arcs α qui forment avec l'ensemble complémentaire p de l'ensemble des arcs E_1E_2 de c' relatifs à ces α une courbe continue simple σ, d'extrémités B_1 et B_2. Soit τ l'arc simple somme de σ et de l'arc B_2SS' de γ.

Soient Q et Q' des points dans G' sur les arcs SP et $S'P'$ respectivement. On peut joindre Q à Q' par une courbe continue $k = QQ'$ ne rencontrant pas τ (théorème III). Je dis que k ne peut rencontrer un des arcs A_1B_1, A_2B_2 de γ avant de sortir de G'. En effet, un tel point de rencontre R serait sur un arc α' supprimé. Ajoutons à l'arc QR de k un arc RE'_1 de α', E'_1 étant une extrémité de α' située sur c' entre les extrémités E_1, E_2 d'un arc α conservé. Le continu somme de l'arc QE'_1, de l'arc QS de $F_1(S)$ dans G' et de l'arc SB_2 de γ couperait α (théorème A), donc k couperait α, ce qui n'est pas. Si k sort de G', son premier point de rencontre T avec la frontière de G' n'est pas sur p, car p appartient à τ. Il n'est pas sur un arc E_1E_2 de c', car le théorème A s'y opposerait comme ci-dessus. N'étant pas sur l'un des arcs B_2SS', A_1B_1, A_2B_2 de γ, il est sur l'arc $S'B_1$ de γ et diffère de S'. Le continu somme de l'arc QT de k, de l'arc TB_1 de γ et de l'arc QP de $F_1(S)$ dans G' coupe le continu somme de l'arc B_2S' de γ et de l'arc $S'P'$ de $F_1(S')$ dans G' (théorème A). Donc k coupe l'arc $S'P'$ avant d'atteindre T. Par suite les arcs SP et $S'P'$ sont reliés par un continu dans G' qui ne rencontre pas γ. Si k ne sort pas de G', on a *a fortiori* le même résultat.

Supposons maintenant que les arcs SP et $S'P'$ se coupent dans G' en L. Alors ils sont reliés par le point L, qui est étranger à γ.

Supposons enfin que $P = P'$. Un arc de cercle de centre P, intérieur à G' sauf ses extrémités, qui sont sur c', ne rencontre pas γ si son rayon est assez petit. Il coupe les deux arcs SP et $S'P'$, ce qui fournit le même résultat.

Théorème VI. — *Soient* S *et* $S' \neq S$ *deux points de l'arc* $\bar{\gamma}$ *du théorème* V *différents de* B_1 *et* B_2 *et soient* SP *et* $S'P'$ *les arcs de* $F_1(S)$ *et de* $F_1(S')$ *situés dans* G' *sauf* S *et les points* P, P'.

Tout point différent de S *et* P *sur l'arc* SP *peut être joint à tout point différent de* S' *et* P' *sur l'arc* $S'P'$ *par un continu dans* G' *qui ne rencontre pas* γ.

Même énoncé pour les arcs analogues dans G''. *Tout point* $\overline{P}$ *de* F(S) *dans* G' (*ou* G'') *assez voisin de* S *peut être joint à tout point* $\overline{P}'$ *de* $F(S')$ *dans* G' (*ou* G'') *assez voisin de* S' *par un continu dans* G' (*ou* G'') *qui ne rencontre pas* γ.

Le dernier énoncé se vérifie en remarquant que $\overline{P}$ et $\overline{P}'$ peuvent être joints aux arcs SP et $S'P'$ par des segments de droite faisant partie de F(S) et $F(S')$.

12. **Le théorème de Jordan.** — Soit J une courbe de Jordan, S et T deux points différents de J, $\varkappa$ un cercle de centre S et de rayon $\frac{1}{4}$ ST. Considérons des cercles Γ de centre T et de rayons

$\rho < \frac{1}{4}$ ST. Pour un tel Γ soit $B_1 S B_2$ l'arc de J extérieur à Γ, sauf ses extrémités B_1, B_2 et soit $A_1 T A_2$, $A_1 \neq A_2$ un arc partiel de $B_1 T B_2$ intérieur à Γ. Posons

$$A_1 S A_2 = \gamma, \qquad A_1 T A_2 = \gamma', \qquad A_1 B_1 S = \gamma_1, \qquad A_2 B_2 S = \gamma_2.$$

Ces arcs varient avec ρ.

Tout point R dans $\varkappa$ satisfait aux inégalités

$$S\varepsilon(R, \gamma_1) < \frac{1}{2} ST, \qquad S\varepsilon(R, \gamma_2) < \frac{1}{2} ST, \qquad S\varepsilon(R, \gamma') > \frac{3}{4} ST,$$

d'où résulte que la partie de F(S) dans $\varkappa$ ne dépend pas de ρ. Fixons dans $\varkappa$ un arc PSN de $F_1(S)$.

Soit maintenant Q un point arbitraire du plan, hors de J. Prenons $\rho <$ TQ. On peut joindre Q à P par une courbe continue QP ne coupant pas l'arc $B_1 T B_2$ de J (théorème III). Si cette courbe QP ne coupe pas J, alors Q et P se trouvent dans un même domaine limité par J ou par une partie de J. Si elle coupe J pour la première fois en $\overline{Q}$, nous pouvons choisir sur l'arc $Q\overline{Q}$ un point $R \neq \overline{Q}$ assez rapproché de $\overline{Q}$ pour que $\varepsilon(R, \gamma)$ contienne un point S_R de l'arc $B_1 S B_2$ et que le segment $R S_R$ soit extérieur à Γ. Alors ce segment appartient à $F(S_R)$. En vertu du théorème VI le point R, donc aussi Q, peut être joint à P ou à N par une courbe continue extérieure à Γ et ne coupant pas γ. Cette courbe ne coupe pas γ' qui est dans Γ, donc elle ne coupe pas J. Par suite J *divise le plan en deux domaines au plus.*

S'il existait une courbe continue PN joignant P à N sans couper J, cette courbe serait extérieure à Γ pour ρ assez petit, ce qui est en contradiction avec le théorème V. Donc J *divise le plan en deux domaines.* En vertu des théorèmes V et VI l'arc $B_1 S B_2$ fait partie de la frontière de chacun de ces deux domaines. Et parce que ρ est arbitrairement petit, *chacun a pour frontière la totalité de* J.

Tout point S *de* J *est accessible à partir d'un point arbitraire* Q *hors de* J, car on n'a qu'à ajouter l'arc PS ou NS de $F_1(S)$ à l'arc qui joint Q à P ou à N sans couper J. Enfin les arcs SN et SP de F_1 (S), ou plus généralement *les deux parties en lesquelles* γ *divise* F(S) *dans le voisinage de* S *indiquent les deux côtés de* J.