BULLETIN DE LA S. M. F.

S. ZAREMBA

Sur la notion de force en mécanique

Bulletin de la S. M. F., tome 62 (1934), p. 110-119

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1934__62__110_0>

SUR LA NOTION DE FORCE EN MÉCANIQUE;

PAR M. S. ZAREMBA.

Professeur à l'Université de Cracovie.

1. Dans cet article qui constitue le développement des idées esquissé dans la Communication que j'ai faite sous le même titre au Congrès international des Mathématiciens tenu à Zurich en 1932, je me propose de dégager une notion que l'on fait ordinairement intervenir d'une façon implicite en mécanique des corps continus.

L'intérêt des considérations qui vont suivre ne se borne nullement à satisfaire à l'amour de précision et de rigueur des logiciens : on aura en effet l'occasion de reconnaître dans la suite que le malentendu qui a donné lieu à une polémique entre J. Bertrand et Helmholz, citée par H. Poincaré dans un de ses ouvrages [1], ne se serait pas produit si, à cette époque, les idées que nous nous proposons d'exposer dans cet article avaient été tirées au clair.

2. D'aprés la conception, ordinaire une force a un point d'application, une intensité et une direction déterminés. En mécanique des corps continus cette conception de la notion de force ne suffit pas. En effet considérons par exemple un corps pesant ; il est évident que le siège de la pesanteur de ce corps est constitué par l'ensemble de tous ses points. Considérons en second lieu un solide (C) plongé dans un liquide; la pression du liquide sur le solide (C) est évidemment un effet qui a pour siège l'ensemble des points formant la surface de ce corps. Il convient donc d'envisager en même temps que des forces dont chacune a un point d'application unique et que nous appellerons *forces concentrées*, des forces ayant une infinité de points d'application et que nous appellerons *forces*

---

[1] H. POINCARÉ, *Électricité et Optique,* t. II, p. 51. Paris, 1891; Georges Carré, éditeur.

non concentrées. Pour que ces dernières puissent iutervenir dans des théories déductives, il est indispensable d'adopter à leur sujet un système convenable de postulats. Pour énoncer ces postulats nous poserons d'abord les définitions suivantes :

1° Un système de forces sera dit *statiquement neutre* si, après solidification de l'ensemble (E) de ses points d'application, ce système de forces devient un système de forces se faisant équilibre, quand on considère le solide obtenu par la solidification l'ensemble de points (E) comme libre [1];

2° Deux systèmes de forces (S_1) et (S_2) seront dits *statiquement équivalents* s'il existe un troisième système de forces (S) tel que chacun des deux systèmes de forces $(S)+(S_1)$ et $(S)+(S_2)$ soit statiquement neutre.

Voici maintenant les postulats auxquels les forces non concentrées seront supposées satisfaire.

Postulat I. — Il correspond à toute force non concentrée F un système fini (S) de forces concentrées statiquement équivalent à la force F.

Postulat II. — Lorsque deux systèmes finis de forces concentrées sont chacun équivalent à une même force non concentrée, ils sont statiquement équivalents entre eux.

Postulat III. — A toute division de l'ensemble (E) des points d'application d'une force non concentrée F en deux ensembles infinis (E_1) et (E_2), il correspond une décomposition parfaitement

---

[1] A cause de notre conception générale de la notion de force, cette définition appelle la question suivante : en quoi consiste la propriété de se faire équilibre des forces formant un système de forces appliquées à un solide libre ? Nous admettrons qu'elle se réduit à ceci : l'opération qui consisterait à appliquer à un solide libre (C), pendant une période quelconque un système de forces se faisant équilibre en chaque instant ou à supprimer pendant cette période un système de forces appliquées au solide (C) et vérifiant en chaque instant la condition précédente, n'altérerait en rien la nature du mouvement ou l'état de repos du corps (C) par rapport au système de référence.

Ce qui précède paraîtra peut-être au premier abord inutilement compliqué, mais on reconnaîtra qu'il n'en est pas ainsi en considérant qu'il nous a fallu tenir compte de ce que, selon les principes universellement admis, une force finie et instantanée reste sans influence sur le mouvement d'un système matériel.

déterminée de la force F en deux forces non concentrées F_1 et F_2 dont les ensembles des points d'application coïncident respectivement avec les ensembles (E_1) et (E_2) et, si l'on désigne par (S_1) et (S_2) deux systèmes finis de forces concentrées, respectivement statiquement équivalents aux forces F_1 et F_2, le système $(S_1) + (S_2)$ sera statiquement équivalent à la force F.

Cela posé, l'adoption de la définition suivante s'impose d'elle-même.

Définition. — Étant donnée une force non concentrée F et un axe ω, on entend par *projection orthogonale* de la force F sur l'axe ω et par *moment* de cette force par rapport à cet axe respectivement la somme des projections sur l'axe considéré des forces appartenant à un système fini (S) de forces concentrées statiquement équivalent à la force F et la somme des moments par rapport à cet axe des forces qui constituent le système (S).

Dans les numéros qui vont suivre nous exposerons un procédé général pour définir une force non concentrée appliquée à un corps continu, nous indiquerons de quelle façon l'action réciproque de deux corps continus, lorsque cette action se manifeste par des forces non concentrées appliquées à ces corps, peut être définie avec précision et nous présenterons enfin quelques applications de ces idées générales, ce qui nous donnera l'occasion de définir la force d'inertie d'un corps continu dans le cas le plus général et d'appliquer le principe de d'Alembert à l'établissement des équations du mouvement d'un tel corps.

3. Considérons un corps continu (C) et supposons que l'ensemble des points d'application d'une force non concentrée F coïncide avec l'ensemble de tous les points du corps (C). Cela posé, désignons par O un point quelconque du corps (C) et par (C_0) un ensemble de points du corps (C) tel que cet ensemble ait un volume déterminé non nul v_0, et que la distance de tout point de l'ensemble (C_0) au point O soit inférieure à une longueur non nulle δ. En vertu du postulat III énoncé au numéro précédent, la force F pourra être considérée comme se composant d'une force non concentrée F_0 dont l'ensemble des points d'application serait constitué par l'ensemble (C_0) et d'une force non concentrée F' dont l'ensemble

des points d'application coïnciderait avec l'ensemble de ceux des points du corps (C) qui ne font pas partie de l'ensemble (C_0). En vertu du postulat I du numéro précédent et de la théorie bien connue des forces concentrées il existera une force R_0 appliquée an point O et un couple E_0 tels que l'ensemble de la force R_0 et du couple E_0 constitue un système fini de forces concentrées, statiquement équivalent à la force non concentrée F_0.

Supposons, en nous plaçant dans les conditions qui sont ordinairement vérifiées dans la pratique, qu'il existe deux vecteurs bien déterminés R et E, susceptibles d'être définis par les formules suivantes :

$$R = \lim_{\delta=0} \frac{R_0}{v_0}, \qquad E = \lim_{\delta=0} \frac{E_0}{v_0},$$

et donnons au vecteur R le nom de *tension de la force non concentrée* F au point O et au vecteur E celui de *moment* de cette force en ce même point O. Il est évident que, pour définir une force non concentrée F dont l'ensemble des points d'application coïncide avec l'ensemble des points d'un corps (C) de volume non nul, il suffit de faire connaître la tension R et le moment E de la force F en chacun des points du corps considéré; si l'on rapporte alors le corps (C) à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (U) et si l'on désigne par R_x, R_y, R_z et par E_x, E_y, E_z respectivement les valeurs des projections orthogonales sur les axes du système de coordonnées (U) des vecteurs R et E relatifs au point (x, y, z), on aura, en vertu de la définition donnée au numéro précédent, ainsi que des postulats qui y ont été énoncés, pour les projections orthogonales X, Y, Z de la force F sur les axes du système (U), les formules suivantes :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= \iiint_{(C)} R_x \, dx \, dy \, dz, \\ Y &= \iiint_{(C)} R_y \, dx \, dy \, dz, \\ Z &= \iiint_{(C)} R_z \, dx \, dy \, dz, \end{aligned} \right.$$

et pour les moments L, M, N de cette force par rapport aux axes du système (U) les expressions que voici :

$$(2)\quad \begin{cases} L = \displaystyle\iiint_{(C)} E_x\, dx\, dy\, dz + \iiint_{(C)} \{ y R_z - z R_y \}\, dx\, dy\, dz, \\ M = \displaystyle\iiint_{(C)} E_y\, dx\, dy\, dz + \iiint_{(C)} \{ z R_x - x R_z \}\, dx\, dy\, dz, \\ N = \displaystyle\iiint_{(C)} E_z\, dx\, dy\, dz + \iiint_{(C)} \{ x R_y - y R_x \}\, dx\, dy\, dz. \end{cases}$$

On reconnaîtra, sans qu'il y ait lieu d'insister, que des considérations tout à fait analogues aux précédentes sont applicables tant au cas où l'ensemble des points d'application d'une force non concentrée constituerait une portion de surface (satisfaisant à des conditions de régularité que l'on énoncera aisément) qu'au cas où cet ensemble constituerait une ligne (suffisamment régulière).

4. Avant de passer à des exemples particuliers, indiquons de quelle façon on peut énoncer, en adoptant les principes exposés aux numéros précédents, les postulats fondamentaux sur lesquels repose la dynamique (et par suite la théorie de l'équilibre) des corps continus.

Postulat I (*principe de l'égalité de l'action et de la réaction*). Lorsqu'un corps (C_1) exerce sur un autre corps (C_2) une action qui se manifeste au moyen d'un système de forces (S_2), appliquées au corps (C_2), le corps (C_1) subit une action du corps (C_2) (dite *réaction* de ce corps) qui se manifeste au moyen d'un système de forces (S_1), appliquées au corps (C_1), système de forces tel que l'ensemble (S_1) + (S_2) des systèmes (S_1) et (S_2) constitue un système statiquement neutre.

Postulat II. — Si l'on sépare d'un corps continu (C) une portion quelconque (C′) au moyen d'une section, on n'altérera en rien l'état de repos ou de mouvement du corps (C′) si, sans changer en rien les forces qui l'aurait sollicité au cas où il n'aurait pas été séparé du reste du corps (C), on lui appliquait une force non concentrée T, convenablement déterminée et dont l'ensemble des points d'application serait constitué par la surface de séparation (Σ) du corps (C′) du reste du corps (C). Nous dirons que la force T représente l'*effort* (ou l'action) exercé sur le corps (C′) suivant la surface (Σ) par le reste du corps (C).

Postulat III. — Étant donné un corps matériel (C) (solide ou susceptible de subir n'importe quelles déformations) il correspond à chaque instant t une fonction positive ρ, définie en chaque point du corps (C) et que nous appellerons *densité* de ce corps à l'instant t au point auquel elle se rapporte, jouissant des propriétés suivantes :

1° Si l'on désigne par (C′) une portion déterminée quelconque du corps (C) [ou le corps (C) lui-même] et si, à une époque t, on envisage l'intégrale

$$\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz,$$

étendue au domaine constitué par l'ensemble des points du corps (C′) à l'époque considérée, la valeur de l'intégrale précédente, que nous appellerons *masse* du corps (C′), sera indépendante du choix de l'époque t;

2° Si, en conservant la définition précédente du symbole (C′), on donne le nom de *force d'inertie du corps* (C′) à une époque t à la force non concentrée dont l'ensemble des points d'applications coïncide avec l'ensemble des points de ce corps, dont le moment en chaque point du corps (C′), au sens défini au numéro précédent, est nul et dont la tension en chaque point A du même corps est représentée par le vecteur

$$-\rho w,$$

où ρ désigne la densité du corps (C′) au point A à l'époque t, et w l'accélération du point A à l'époque considérée, par rapport à un système de référence appelé improprement par certains auteurs *système de référence fixe* et que nous appellerons système de référence *galiléen*, alors le système de forces obtenu en adjoignant à l'ensemble des forces appliquées réellement au corps (C′) [ensemble considéré comme comprenant, au cas où le corps (C′) ne serait qu'une partie du corps (C), l'effort exercé par le reste (C″) du corps (C) sur la partie (C′) de ce corps suivant la surface de séparation des corps (C′) et (C″)] serait un système statiquement neutre.

5. Pour faciliter l'intelligence des idées générales exposées ci-dessus, donnons deux exemples de détermination d'une force non concentrée par la méthode exposée au n° 3 (p. 112).

Considérons en premier lieu un corps solide pesant (C) de dimensions assez petites et se trouvant dans un voisinage assez restreint d'un point P situé à la surface de la terre. Soit (U) un système de coordonnées cartésiennes rectangulaire, invariablement lié au corps (C) et soient α, β, γ les cosinus directeurs, par rapport au système (U), de la verticale en P, dirigée vers le bas. En se servant de la terminologie définie au n° 3 (p. 112), on pourra définir la gravité du corps (C) de la façon suivante : c'est une force non concentrée G dont l'ensemble des points d'application coïncide avec l'ensemble des points du corps (C); en chaque point du corps considéré le moment E de la force G est nul et la tension de cette force est représentée par un vecteur dont les projections orthogonales sur les axes du système de coordonnées (U) ont pour valeurs

$$\mu\alpha\rho, \quad \mu\beta\rho, \quad \mu\gamma\rho,$$

où ρ représente la densité du corps (C) au point considéré et μ une constante. En se reportant aux formules (1) et (2) (p. 113 et 114), on reconnaîtra que la force non concentrée G est statiquement équivalente à une force concentrée F appliquée en un point [appelé centre de gravité du corps (C)] dont les coordonnées x_0, y_0, z_0 sont déterminées par les formules suivantes :

$$x_0 = \frac{\int\int\int_{(C)} \rho x \, dx \, dy \, dz}{m}, \qquad y_0 = \frac{\int\int\int_{(C)} \rho y \, dx \, dy \, dz}{m},$$

$$z_0 = \frac{\int\int\int_{(C)} \rho z \, dx \, dy \, dz}{m},$$

où l'on a posé

$$m = \int\int\int_{(C)} \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Quant aux projections orthogonales de la force F sur les axes du système de coordonnées (U), leurs valeurs F_x, F_y, F_z seront déterminées au moyen des formules suivantes :

$$F_x = \alpha\mu m, \qquad F_y = \alpha\mu m, \qquad F_z = \alpha\mu m.$$

Comme second exemple, considérons un aimant placé dans un champ magnétique uniforme.

L'effet du champ magnétique considéré sur l'aimant se manifestera au moyen d'une force non concentrée dont l'ensemble des points d'application coïnciderait avec l'ensemble des points de l'aimant et, en se servant de la terminologie définie au n° 3, on pourrait définir cette force comme il suit : en chaque point P de l'aimant la tension de la force considérée est nulle et, si après avoir rapporté le champ magnétique et l'aimant à un système de coordonnées cartésiennes rectangulaire (U), on désigne par α, β, γ et par A, B, C respectivement les valeurs des projections orthogonales sur les axes du système (U) de la force magnétique constante qui règne dans le champ magnétique considéré et celles des projections orthogonales sur les mêmes axes de l'aimantation de l'aimant en un point déterminé, les projections orthogonales sur les axes du système (U) du moment au point considéré de la force qu'il s'agit de définir auront les valeurs suivantes :

$$B\gamma - C\beta, \quad C\alpha - A\gamma, \quad A\beta - B\alpha.$$

En se reportant maintenant au passage cité, p. 110, des leçons de H. Poincaré, on reconnaîtra que la polémique dont il est question dans ce passage ne se serait sûrement pas produite si la notion de force non concentrée avait été dégagée à cette époque.

6. Pour achever de mettre en évidence combien la notion de force non concentrée est maniable, montrons comment les actions mutuelles de deux corps (C_1) et (C_2), lorsqu'elles se manifestent au moyen de forces non concentrées F_1 et F_2 appliquées respectivement aux corps considérés peuvent être définies.

Divisons l'un des corps (C_1) ou (C_2), soit (C_1), en un nombre quelconque de parties. La force F_1 pourra être considérée (postulat III, p. 111) comme l'ensemble de certaines forces non concentrées ayant pour ensembles respectifs de points d'applications les diverses parties du corps (C_1). Désignons par (C'_1) l'une de ces parties du corps (C_1) et par F'_1 la partie correspondante de la force F_1. La force F'_1 représente évidemment l'action du corps (C_2) sur la partie (C'_1) du corps (C_1). En vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction le corps (C'_1) agira sur le corps (C_2) et si l'on désigne par F'_2 la force non concentrée au moyen de laquelle cette action se manifestera, l'ensemble des forces F'_2 et F'_1 constituera un système de forces statiquement neutre (p. 111). Divisons maintenant le corps (C_2) en un nombre quelconque de parties. Il correspondra à cette division du corps (C_2) une décomposition de la force F'_2 définie par le postulat III (p. 111). Désignons par (C'_2) l'une des parties en lesquelles le corps (C_2) aura été divisé par la division précédente et soit F''_2 la partie correspondante de la force F'_2. La force F''_2 représente l'action du corps (C'_1) sur le corps (C'_2). Donc (*principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, p. 111) il existera une force F''_1 formant avec la force F''_2 un système statiquement neutre et représentant l'action du corps (C'_2) sur le corps (C'_1). En résumé la force F_1 est l'ensemble des forces telles que F'_1 et chacune de ces dernières est l'ensemble de toutes les forces telles que la force F''_1. Nous avons donc le théorème suivant : *Si l'on divise chacun des corps* (C_1) *et* (C_2) *en un nombre quelconque de parties, la force* F_1 *qui représente l'action du corps* (C_2) *sur le corps* (C_1) *coïncide avec l'ensemble de toutes les forces dont chacune représente l'action d'une des parties du corps* (C_2) *sur l'une des parties du corps* (C_1).

Voici maintenant le procédé qui se présente de lui-même pour définir dans la pratique une force telle que F_1. Les notations précédentes étant conservées, désignons par O_1 un point quelconque du corps (C_1), par O_2 un point quelconque du corps (C_2), par (C'_1) un ensemble mesurable de points du corps (C_1) tel que la distance au point O_1 de tout point appartenant à l'ensemble (C'_1) soit inférieure à une longueur non nulle δ, par v_1 le volume de l'ensemble (C'_1) et par (C'_2) et v_2 les éléments analogues relatifs au point O_2 et au corps (C_2). L'action du corps (C'_2) sur le corps (C'_1) sera statiquement équivalente (Postulat I, p. 111) à l'ensemble d'une force concentrée R_1 appliquée au point O_1 et à un couple E_1.

Supposons, comme cela arrivera ordinairement dans la pratique, que chacune des expressions

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{R_1}{v_1 \cdot v_2} \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{E_1}{v_1 \cdot v_2}$$

représente un vecteur déterminé et posons

$$T_1 = \lim_{\delta \to 0} \frac{R_1}{v_1 \cdot v_2} \qquad \text{et} \qquad M_1 = \lim_{\delta \to 0} \frac{E_1}{v_1 \cdot v_2}.$$

Il est évident que pour définir la force F_1 il suffirait de faire connaître les vecteurs T_1 et M_1 en fonction des coordonnées des points O_1 et O_2. Remarquons que si l'on désignait par T_2 et M_2 les éléments analogues aux éléments T_1 et M_1, mais relatifs au point O_2, le système de forces concentrées se composant de deux forces appliquées aux points O_1 et O_2 et représentées par les vecteurs T_1 et T_2 ainsi que de deux couples de moments M_1 et M_2 constituerait, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, un système statiquement neutre.

Pour donner au moins une application de ce qui précède remarquons que la loi d'attraction de Newton pour deux corps (C_1) et (C_2) ayant chacun un volume non nul peut, avec les notations précédentes, être énoncée en disant que pour tout système de positions des points O_1 et O_2, on a identiquement

$$M_1 = M_2 = 0,$$

et que les vecteurs T_1 et T_2, situés sur la droite O_1O_2 et dirigés le premier de O_1 vers O_2 et le second de O_2 vers O_1, ont pour longueur commune

$$\mu \frac{\rho_1 \rho_2}{r^2},$$

où l'on a désigné par ρ_1 et ρ_2 les densités des corps (C_1) et (C_2) respectivement en O_1 et O, par r la distance des points O_1 et O_2 et par μ une constante numérique dépendant du choix des unités.

Si l'on avait supposé que les corps (C_1) et (C_2) sont des aimants où des corps où circuleraient des courants électriques on aurait trouvé que les vecteurs M_1 et M_2 ne sont pas nuls en général.