BULLETIN DE LA S. M. F.

A. RAUCH

Sur les directions de divergence des fonctions entières

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 246-252

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__246_0>

SUR LES DIRECTIONS DE DIVERGENCE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. RAUCH.

1. Appelons direction de divergence ou de convergence de l'ordre apparent λ d'une fonction entière $f(z)$ une direction d'argument θ telle que l'intégrale $\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(re^{i\theta})|}{r^{\lambda+1}} dr$ diverge ou converge respectivement.

M. Valiron ([1]) définit comme suit l'ordre apparent de $f(z)$ dans une direction D : l'ordre apparent de $f(z)$ dans la direction D est égal à

$$\overline{\lim_{B=0}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} M(r, B)}{\log r},$$

où $M(r, B)$ désigne le maximum de $f(z)$ pour $|z| = r$ et où z appartient à un angle B de bissectrice D. Il démontre le théorème suivant ([1]) :

Les côtés D des angles formés par les directions pour lesquelles l'ordre apparent est plus grand que λ sont tels que, $r_n(x, A)$ étant la suite des zéros de $f(z) - x$ situés dans l'angle A de bissectrice D, la série

$$\sum \frac{1}{r_n(x, A)^{\delta}}$$

diverge quel que soit $\delta < \lambda$ et pour tout x sauf un au plus.

Cela nous a conduit à la proposition suivante :

I. *Les cotés D des angles formés par les directions de divergence de l'ordre apparent λ sont tels que*

$$\sum \frac{1}{r_n(x, A)^{\lambda}}$$

([1]) *Sur les directions de Borel des fonctions entières* (*Annali di Matematica*, 4e série, t. 9, 1931, p. 273-285). Voir aussi, *Comptes rendus*, t. 194, 1932, p. 1306, théorème II; et t. 196, 1933, p. 1458.

diverge quel que soit l'angle A *de bissectrice* D *et pour tout* x *sauf un au plus.*

Supposons que

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(re^{i\theta'})| \, dr}{r^{\lambda+1}}$$

converge et que

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |f(re^{i\theta''})| \, dr}{r^{\lambda+1}} \qquad (|\theta'' - \theta'| = \alpha)$$

diverge. Divisons l'angle α en quadrilatères par les cercles

$$z = (1 + \alpha)^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Soit $C(n)$ le cercle concentrique au plus petit cercle contenant le quadrilatère

$$(1 + \alpha)^n \leqq |z| \leqq (1 + \alpha)^{n+1}$$

et de rayon double. Soit $R(n)$ son rayon. On a

$$R(n) = \text{const.}\, \alpha (1 + \alpha)^n,$$

soit $N(n)$ le nombre des zéros de $F(F - 1)$, où

$$F = \frac{f - a}{b - a},$$

a et b étant des constantes. Par conséquent

$$I' = \int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |F(re^{i\theta'})| \, dr}{r^{\lambda+1}}$$

converge et

$$I'' = \int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log} |F(re^{i\theta''})| \, dr}{r^{\lambda+1}}$$

diverge.

Appliquons avec M. Milloux [1] le théorème de Boutroux-Cartan [2] : $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_p$ étant p points distincts ou non d'un

---

(1) *Sur les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52, 1928, p. 189-255).

(2) *Sur les systèmes de fonctions holomorphes à variétés linéaires, lacunaires et leurs applications* (thèse 1928).

plan et h un nombre quelconque positif, on a

$$\mathrm{MP}_1\,\mathrm{MP}_2\ldots\mathrm{MP}_p > h^p,$$

pour tout point M, sauf peut être pour des points qui peuvent être enfermés dans des cercles en un nombre au plus égal à p dont la somme des rayons est $2eh$.

Nous prenons comme points P les zéros de $F(F-1)$ du cercle $C(n)$ et $2eh = \frac{R(n)}{100}$. Appelons $B(n)$ la région du cercle $C(n)$ extérieure aux cercles de Cartan; d'après le choix de h on voit que sur la demi-droite d'argument θ' se trouve un ensemble de points de $B(n)$ de mesure const. $R(n) =$ const. $\alpha(1+\alpha)^n$ de sorte que si $|F(z)|$ atteint en z'_n le minimum de ses valeurs pour

$$(1+\alpha)^n \leqq |z| \leqq (1+\alpha)^{n+1}, \qquad \arg z = \theta', \qquad z \text{ dans } B(n),$$

on a

$$\int^{\infty} \frac{\overset{+}{\log}\,|F(re^{i\theta'})|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

$$= \sum \int_{(1+\alpha)^n}^{(1+\alpha)^{n+1}} \frac{\overset{+}{\log}\,|F(re^{i\theta'})|\,dr}{r^{\lambda+1}}$$

$$\sum \int_{B(n)} \frac{\overset{+}{\log}\,|F(re^{i\theta'})|\,dr}{r^{\lambda+1}} > \text{const.} \sum \frac{\alpha \overset{+}{\log}\,|F(z'_n)|}{|z'_n|^{\lambda}},$$

de sorte que

$$\sum \alpha \frac{\overset{+}{\log}\,|F(z'_n)|}{|z'_n|^{\lambda}} \tag{1}$$

converge.

De même, on voit que si $|F(z)|$ atteint en x''_n le maximum de ses valeurs pour

$$(1+\alpha)^n \leqq |x| \leqq (1+\alpha)^{n+1}, \qquad \arg x = \theta'',$$

$$\int_{(1+\alpha)^n}^{(1+\alpha)^{n+1}} \frac{\overset{+}{\log}\,|F(re^{i\theta''})|\,dr}{r^{\lambda+1}} \leqq \text{const.} \frac{\alpha \overset{+}{\log}\,|F(x''_n)|}{|x''_n|^{\lambda}},$$

de sorte que

$$\sum \frac{\alpha \overset{+}{\log}\,|F(x''_n)|}{|x''_n|^{\lambda}}$$

diverge. Mais x''_n n'est pas forcément un point de $B(n)$. Or en tenant compte de la valeur de h, on voit que dans le cercle de centre x''_n et de rayon $\frac{R(n)}{90}$ se trouve au moins une circonférence concentrique faisant partie de $B(n)$. Si $|F(z)|$ atteint au point z''_n de cette dernière le maximum de ses valeurs sur ce cercle, on a

$$|F(z''_n)| \geqq |F(x''_n)|.$$

Par conséquent

$$(2)\qquad \sum \frac{\alpha \overset{+}{\log} |F(z''_n)|}{|z''_n|^{\lambda}}$$

diverge. Nous pouvons ensuite tracer une courbe $L(n)$ allant du point z'_n au point z''_n en évitant les cercles de Cartan, qui a pour longueur const. $R(n)$. En chaque point $M(z_n)$ de la courbe $L(n)$ on a

$$\begin{aligned} N(|z - z_n| = \rho;\ f = x) &= \log \frac{\rho^p}{MP_1\, MP_2 \ldots MP_p} < \log\left(\frac{\rho}{h}\right)^p = p \log \frac{\rho}{h} \\ &= \text{const. } p \log \frac{200\, e\, \rho}{R(n)} < \text{const. } N(n) \log \frac{200\, e\, \rho}{R(n)}, \end{aligned}$$

où le cercle $|z - z_n| = \rho$ est intérieur à $C(n)$ et où $P_1, P_2, \ldots, P_p$ sont les points du cercle $|z - z_n| = \rho$ en lesquels $f(z) = a$ ou b. Nous pouvons toujours supposer $\frac{\rho}{R(n)} = \text{const.}$, de sorte que

$$N(|z - z_n| = \rho;\quad f = a) + N(|z - z_n| = \rho;\quad f = b) < \text{const. } N(n).$$

Or d'après une inégalité fondamentale de M. Valiron, on a

$$\begin{aligned} &T\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{\mu},\ F\right) \\ &\quad < \text{const.} \Bigg[N(|z - z_n| = \rho;\ F = 0) \\ &\qquad + N(|z - z_n| = \rho;\ F = 1) + \log \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu}} \\ &\qquad + \overset{+}{\log} |F(z_n)| + \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho\, |F'(z_n)|} + \text{const.} \Bigg]. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\log M\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{2\mu};\ F\right) \leqq 3\, T\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{\mu};\ F\right) \\ &\quad < \text{const.} \left[N(n) + \overset{+}{\log} |F(z_n)| + \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho\, |F'(z_n)|} + \text{const.} \right]. \end{aligned}$$

En supposant maintenant les constantes ρ, μ choisies de façon que le cercle $|z - z_n| = \frac{\rho}{2\mu}$ contienne le point z''_n, on obtient

$$(3) \quad \overset{+}{\log} |F(z''_n)| \leqq \log M\left(|z - z_n| = \frac{\rho}{2\mu};\ F\right)$$
$$\leqq \text{const.}\left[N(n) + \overset{+}{\log} |F(z_n)| + \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho\,|F'(z_n)|} + \text{const.}\right].$$

Si l'on a en tout point de la courbe $L(n)$

$$\rho\,|F'(z)| < 1,$$

on en déduit

$$\overset{+}{\log} |F(z''_n)| < \overset{+}{\log} |F(z'_n)|\ \text{const.}$$

L'ensemble correspondant des termes de la série (2) a donc une somme finie, car la série (1) converge. En supprimant ces termes dans (1) et (2), il nous reste la série convergente

$$(1') \qquad \sum{}' \alpha \frac{\overset{+}{\log} |F(z'_n)|}{|z'_n|^{\lambda}}$$

et la série divergente

$$(2') \qquad \sum{}' \alpha \frac{\overset{+}{\log} |F(z''_n)|}{|z''_n|^{\lambda}}.$$

Sur chaque courbe $L(n)$ restante se trouve au moins un point z_n en lequel on a

$$\rho\,|F'(z_n)| > 1.$$

Pour chacun de ces n nous prenons le premier de ces points z_n rencontré à partir de z'_n, de sorte que

$$\overset{+}{\log} F(z_n)| < \overset{+}{\log} |F(z'_n)| + \text{const.}$$

L'inégalité (3) devient ainsi

$$\overset{+}{\log} F(z''_n) < \text{const.}\left[N(n) + \overset{+}{\log} |F(z'_n)| + \text{const.}\right],$$

d'où

$$(4) \quad \frac{\overset{+}{\log} F(z''_n)}{|z''_n|^{\lambda}} < \text{const.}\frac{N(n)}{(1+\alpha)^{\lambda n}} + \text{const.}\frac{\overset{+}{\log} F(z'_n)}{|z'_n|^{\lambda}} + \frac{\text{const.}}{(1+\alpha)^{\lambda n}}.$$

Comme α est une constante on peut la supprimer dans (1') et (2') sans changer les caractères des séries de sorte que, d'après (4),

$$(5) \qquad \sum \frac{N(n)}{(1+\alpha)^{\lambda n}}$$

diverge. On en déduit :

II. *Si deux directions faisant entre elles un petit angle α sont respectivement de convergence et de divergence de l'ordre λ, la série*

$$\sum \frac{1}{r_n(x, \Lambda)^{\lambda}}$$

relative aux modules des racines de $f(z) - x$ situées dans un angle Λ de mesure 3α et admettant même bissectrice que les deux directions, diverge pour toute valeur de x sauf une au plus.

Supposons nos hypothèses vérifiées quel que soit α même si α tend vers zéro d'une façon quelconque; on remplacera α par une fonction $\alpha(n)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, mais pas trop vite de façon que sa suppression dans (1′) et (2′) n'altère pas le caractère des nouvelles séries. Nous avons ainsi une série (5) divergente correspondante à un angle tendant vers zéro, ce qui démontre le théorème I.

En appliquant ensuite les résultats de ma thèse [1] on voit que sur les directions D du théorème I se trouve une suite infinie de centres de cercles de remplissage d'ordre λ de *divergence* pour les zéros de $f(z) - P(z)$, où $P(z)$ est une constante quelconque sauf une au plus ou une fonction méromorphe quelconque de la classe de *convergence* de l'ordre λ sauf deux au plus.

2. Revenons au cas où α est constant. Joignons z'_n et z''_n par un segment de droite $\Gamma(n)$. On a, en supposant que $f'(z)$ atteint au point x_n de $\Gamma(n)$ le maximum de ses valeurs prises sur $\Gamma(n)$,

$$\begin{aligned} |f(z''_n) - f(z'_n)| &= \left| \int_{\Gamma(n)} f'(z)\, dz \right| \leq |z''_n - z'_n|\, |f'(x_n)| \\ &= \text{const.}\ \alpha(1+\alpha)^n\, |f'(x_n)|, \end{aligned}$$

[1] ***Extension de théorèmes relatifs aux directions de Borel des fonctions méromorphes*** (***Journ. de Math.***, t. 12, 1933, p. 109-171).

d'où

$$\overset{-}{\log}|f(z''_n)| \leqq \overset{+}{\log}|f(z'_n)| + \overset{+}{\log} f'(x_n) + n\log(1+\alpha) + \text{const.},$$

ou encore

$$\frac{\overset{-}{\log}|f(z''_n)|}{|z''_n|^{\lambda}} \leqq \text{const.}\,\frac{\overset{+}{\log}|f(z'_n)|}{|z'_n|^{\lambda}}$$

$$+\,\text{const.}\,\frac{\overset{-}{\log}|f'(x_n)|}{|x_n|^{\lambda}} + \frac{\text{const.}\,n\alpha}{(1+\alpha)^{\lambda}{}_{n}} + \frac{\text{const.}}{(1+\alpha)^{\lambda n}}.$$

Or le premier membre est terme général d'une série divergente tandis que le premier et les deux derniers termes du second membre sont termes généraux de séries convergentes, de sorte que

$$\sum \frac{\overset{+}{\log} f'(x_n)|}{|x_n|^{\lambda}} \tag{6}$$

diverge. On voit qu'il en est encore ainsi si $\alpha = \alpha(n)$ tend vers zéro comme plus haut. On en déduit que l'ordre apparent de $f'(z)$ dans les directions (D) du théorème I est au moins λ. Nous retrouverons ainsi la première partie d'un théorème de M. Valiron (¹).

(¹) Déjà cité.