BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LUCAS

# Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 5 (1877), p. 178-190

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__178_0>

*Sur les développements en séries des irrationnelles du second degré et de leurs logarithmes népériens;* par M. Édouard Lucas.

(Séance du 11 juillet 1877.)

Les développements des fractions en séries par la formule de Maclaurin donnent lieu à un très-grand nombre de formules pour le développement des irrationnelles du second degré, et des fonctions symétriques des racines des équations du second degré à coefficients commensurables. Nous montrerons ultérieurement l'importance de ces développements, dans leur application à la théorie des nombres premiers.

**1.** Désignons par $a$ et $b$ les deux racines de l'équation

$$x^2 = Px - Q, \tag{1}$$

dont les coefficients sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et premiers entre eux; nous ne considérerons que le cas des racines réelles. Soient, de plus, les *fonctions numériques simplement périodiques*,

$$U_n = \frac{a^n - b^n}{a - b}, \quad V_n = a^n + b^n; \tag{2}$$

on a, en désignant par $\sqrt{\Delta}$ la différence des racines de l'équation (1),

$$\left\{\begin{aligned} V_n &= 2Q^{\frac{n}{2}} \cos\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right), \\ U_n &= \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} Q^{\frac{n}{2}} \sin\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right), \\ \frac{U_n}{V_n} &= \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{tang}\left(\frac{n\sqrt{-1}}{2} \log \frac{a}{b}\right). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Ces relations indiquent l'identité des fonctions $U_n$ et $V_n$ avec les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires. On a ainsi les formules de récurrence

$$\left\{\begin{aligned} U_{n+2} &= PU_{n+1} - QU_n, \\ V_{n+2} &= PV_{n+1} - QV_n, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

qui correspondent exactement à celles de Thomas Simpson :

$$\sin(n+2)z = 2\cos z \sin(n+1)z - \sin nz,$$
$$\cos(n+2)z = 2\cos z \cos(n+1)z - \cos nz.$$

On a de même

$$(5)\qquad \begin{cases} 2U_{m+n} = U_m V_n + U_n V_m, \\ 2V_{m+n} = V_m V_n - \Delta U_m V_n; \end{cases}$$

ces égalités correspondent aux *formules d'addition* qui donnent $\sin(y+z)$ et $\cos(y+z)$; on a aussi

$$(6)\qquad \begin{cases} V_n^2 - \Delta U_n^2 = 4Q^n, \\ U_n^2 - U_{n-1}U_{n+1} = +Q^{n-1}, \\ V_n^2 - V_{n-1}V_{n+1} = -Q^{n-1}\Delta; \end{cases}$$

ces égalités correspondent aux formules

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
$$\sin^2 x - \sin(x-y)\sin(x+y) = \sin^2 y,$$
$$\cos^2 x - \cos(x-y)\cos(x+y) = \sin^2 y.$$

**2.** La première des formules (6) conduit, par la théorie de la division des fonctions numériques, à la résolution de l'équation de Pell. On a encore

$$(7)\qquad \begin{cases} U_{n+r}^2 - Q^r U_n^2 = U_r U_{2n+r}, \\ V_{n+r}^2 - Q^r V_n^2 = \Delta U_r U_{2n+r}; \end{cases}$$

la première des formules (7) a été appliquée par M. Günther, pour $r=1$, à la résolution de l'équation indéterminée

$$y^2 - Qx^2 = kz,$$

en nombres entiers [1]; il serait facile de généraliser ces considérations.

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de M. Resal, pages 331-341; octobre 1876.

Les deux formules (7) donnent immédiatement

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{U_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \dfrac{U_{2r}}{U_r} - U_r^2\left[\dfrac{Q^r}{U_r U_{2r}} + \dfrac{Q^{2r}}{U_{2r}U_{3r}} + \ldots + \dfrac{Q^{(n-1)r}}{U_{(n-1)r}U_{nr}}\right], \\ \dfrac{V_{(n+1)r}}{V_{nr}} = \dfrac{V_r}{V_0} - \Delta U_r^2\left[\dfrac{Q^r}{V_0 V_r} + \dfrac{Q^{2r}}{V_r V_{2r}} + \ldots + \dfrac{Q^{nr}}{V_{(n-1)r}V_{nr}}\right]; \end{cases}$$

et les deux relations

$$(9)\quad \begin{cases} U_{(n+r)}V_n - U_n V_{n+r} = 2Q^n U_r, \\ V_{(n+r)}V_n - \Delta U_n U_{n+r} = 2Q^n V_r \end{cases}$$

donnent ainsi

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{U_{n+kr}}{V_{n+kr}} = \dfrac{U_n}{V_n} + 2Q^n U_r\left[\dfrac{1}{V_r V_{n+r}} + \dfrac{Q^r}{V_{n+r}V_{n+2r}} + \ldots + \dfrac{Q^{(k-1)r}}{V_{n+\overline{k-1}r}V_{n+kr}}\right], \\ \dfrac{V_{n+kr}}{U_{n+kr}} = \dfrac{V_n}{U_n} - 2Q^n U_r\left[\dfrac{1}{U_r U_{n+r}} + \dfrac{Q^r}{U_{n+r}U_{n+2r}} + \ldots + \dfrac{Q^{(k-1)r}}{U_{n+\overline{k-1}r}U_{n+kr}}\right]. \end{cases}$$

Lorsque $n$ augmente indéfiniment dans les égalités (8), le second membre a pour limite la plus grande $a$ des racines de l'équation (1); et, lorsque $k$ augmente indéfiniment, les seconds membres des égalités (10) ont pour limites $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$ et $\sqrt{\Delta}$. On peut ainsi développer la racine carrée d'un nombre entier en séries de fractions ayant pour numérateurs l'unité : c'était un usage familier aux savants de la Grèce et de l'Égypte; ainsi, par exemple, cette valeur approximative

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \varepsilon,$$

rapportée par Columelle au Chapitre V de son Ouvrage *de Re rusticâ;* ainsi encore cette valeur approximative

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{12.34} + \varepsilon,$$

donnée par les auteurs indiens [1]; cette valeur est égale au quotient $\frac{V_8}{U_8}$, en supposant, dans l'équation (1), que $P = 2$ et $Q = -1$.

---

[1] M. CANTOR, *Rendiconti del R. Istituto Lombardo;* Milano, 1877.

3. Les formules qui donnent la somme des sinus ou des cosinus d'arcs en progression arithmétique deviennent

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &U_m + Q^{-\frac{r}{2}} U_{m+r} + Q^{-\frac{2r}{2}} U_{m+2r} + \ldots + Q^{-\frac{nr}{2}} U_{m+nr} \\ &\qquad = U_{m+\frac{nr}{2}} \frac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_{\frac{r}{2}} Q^{\frac{nr}{2}}}, \\ &V_m + Q^{-\frac{r}{2}} V_{m+r} + Q^{-\frac{2r}{2}} V_{m+2r} + \ldots + Q^{-\frac{nr}{2}} V_{m+nr} \\ &\qquad = V_{m+\frac{nr}{2}} \frac{U_{\frac{n+1}{2}r} Q^{\frac{m}{4}}}{U_{\frac{r}{2}} Q^{\frac{nr}{2}}}; \end{aligned}\right.$$

mais on a les formules plus simples

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &U_r + U_{2r} + \ldots + U_{nr} = \frac{U_r + Q^n U_{nr} - U_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}, \\ &V_r + V_{2r} + \ldots + V_{nr} = \frac{V_r + Q^n V_{nr} - V_{(n+1)r}}{1 + Q^r - V_r}. \end{aligned}\right.$$

Si, dans la relation

$$\Delta U_{r+2k\rho} U_{s+2k\sigma} = V_{r+s+2k(\rho+\sigma)} - Q^{s+2k\sigma} V_{r-s+2k(\rho-\sigma)},$$

nous supposons successivement $k$ égal à 0, 1, 2, ..., $n$, nous obtenons par addition

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n} U_{r+2k\rho} U_{s+2k\sigma} = {} & \frac{U_{r+2n\rho} U_{s+(2n+1)\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r+(2n+1)\rho} U_{s+2n\sigma}}{\Delta Q^{n(\rho+\sigma)} U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}} \\ & + \frac{U_r U_{s-2\sigma} - Q^{\sigma-\rho} U_{r-\rho} U_s}{\Delta U_{\sigma-\rho} U_{\sigma+\rho}}, \end{aligned}\right.$$

et nous trouverions de même les sommations

$$(14)\qquad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{V_{r+2k\rho} V_{s+2k\sigma}}{Q^{k(\rho+\sigma)}} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{k=n} \frac{U_{r+2k\rho} V_{s+2k\sigma}}{Q^{k(\rho+\sigma)}}.$$

On a, en particulier,

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{U_r^2}{Q^r}+\dfrac{U_{2r}^2}{Q^{2r}}+\dfrac{U_{3r}^2}{Q^{3r}}+\ldots+\dfrac{U_{(n+1)r}^2}{Q^{(n+1)r}}=\dfrac{1}{\Delta}\left[\dfrac{U_{(2n+3)r}}{U_rQ^{(n+1)r}}-2n-3\right],\\ \dfrac{U_r^2}{Q^r}+\dfrac{U_{3r}^2}{Q^{3r}}+\dfrac{U_{5r}^2}{Q^{5r}}+\ldots+\dfrac{U_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}}=\dfrac{1}{\Delta}\left[\dfrac{U_{4(n+1)r}}{U_{2r}Q^{(2n+1)r}}-2n-2\right],\\ \dfrac{V_r^2}{Q^r}+\dfrac{V_{2r}^2}{Q^{2r}}+\dfrac{V_{3r}^2}{3r}+\ldots+\dfrac{V_{nr}^2}{Q^{nr}}=2n-1+\dfrac{U_{(2n+1)r}}{U_rQ^{nr}},\\ \dfrac{V_r^2}{Q^r}+\dfrac{V_{3r}^2}{Q^{3r}}+\dfrac{V_{5r}^2}{Q^{5r}}+\ldots+\dfrac{V_{(2n+1)r}^2}{Q^{(2n+1)r}}=2n+2+\dfrac{U_{4(n+1)r}}{U_rQ^{(2n+1)r}}. \end{cases}$$

On obtient encore

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} U_{m+kr}^2=\dfrac{V_{2m+2(n+1)r}-V_{2m}-Q^{2r}(V_{2m+2nr}-V_{2m-2r})}{\Delta(V_{2r}-Q^{2r}-1)}\\ \qquad\qquad -2Q^m\dfrac{Q^{(n+1)r}-1}{\Delta(Q^r-1)},\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} V_{m+kr}^2=\dfrac{V_{2m+2(n+1)r}-V_{2m}-Q^{2r}(V_{2m+2nr}-V_{2m-2r})}{\Delta(V_{2r}-Q^{2r}-1)}\\ \qquad\qquad +2Q^m\dfrac{Q^{(n+1)r}-1}{Q^r-1}; \end{cases}$$

en particulier, pour $P=1$, $Q=-1$ dans l'équation (1),

$$U_1^2+U_2^2+U_3^2+\ldots+U_n^2=U_nU_{n+1},$$

et, par la première des formules (10),

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\frac{1}{1^2}-\frac{1}{1^2+1^2}+\frac{1}{1^2+1^2+2^2}$$
$$-\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2}+\frac{1}{1^2+1^2+2^2+3^2+5^2}-\ldots,$$

4. Pour la *multiplication des fonctions numériques,* on a d'abord

$$(17)\qquad U_{2n}=U_nV_n,\quad 2V_{2n}=V_n^2-\Delta U_n^2,$$

et, à cause de la première des relations (6),

$$(18) \qquad V_{2n} = V_n^2 - 2Q^n.$$

On a ensuite les formules

$$(19) \qquad \begin{cases} U_{3n} = \Delta U_n^3 + 3Q^n U_n, \\ U_{5n} = \Delta^2 U_n^5 + 5Q^n \Delta U_n^3 + 5Q^{2n} U_n, \\ U_{7n} = \Delta^3 U_n^7 + 7Q^n \Delta^2 U_n^5 + 14Q^{2n} \Delta U_n^3 + 7Q^{3n} U_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et aussi

$$(20) \qquad \begin{cases} V_{3n} = V_n^3 - 3Q^n V_n, \\ V_{4n} = V_n^4 - 4Q^n V_n^2 + 2Q^{2n}, \\ V_{5n} = V_n^5 - 5Q^n V_n^3 + 5Q^{2n} V_n, \\ V_{6n} = V_n^6 - 6Q^n V_n^4 + 9Q^{2n} V_n^2 - 2Q^{3n} V_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

qui correspondent à des développements bien connus; on en déduit inversement

$$(21) \qquad \begin{cases} V_n = \sqrt{2Q^n + V_{2n}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + V_{4n}}}, \\ V_n = \sqrt{2Q^n + \sqrt{2Q^{2n} + \sqrt{2Q^{4n} + V_{8n}}}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ces formules sont analogues à celles qui donnent $\cos\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{16}$, ...; on trouvera de même des formules semblables à celles qui donnent les expressions de $\cos\frac{\pi}{3.2^r}$, $\cos\frac{\pi}{5.2^r}$, $\cos\frac{\pi}{15.2^r}$, etc.

On peut exprimer les puissances de $U_n$ et de $V_n$ en fonctions linéaires des termes dont les rangs sont des multiples de $n$, par des formules analogues à celles qui donnent les puissances de $\sin z$ et de $\cos z$ développées suivant les sinus et les cosinus des multiples de l'arc $z$. On a ainsi

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta U_n^2 &= V_{2n} - 2Q^n,\\
\Delta^2 U_n^4 &= V_{4n} - 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n},\\
\Delta^3 U_n &= V_{6n} - 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} - 20Q^{3n},\\
\Delta^4 U_n^8 &= V_{8n} - 8Q^n V_{6n} + 28Q^{2n} V_{4n} - 56Q^{3n} V_{2n} + 70Q^{4n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
\Delta U_n^3 &= U_{3n} - 3Q^n U_n,\\
\Delta^2 U_n^5 &= U_{5n} - 5Q^n U_{3n} + 10Q^{2n} U_n,\\
\Delta^3 U_n^7 &= U_{7n} - 7Q^n U_{5n} + 21Q^{2n} U_{3n} - 35Q^{3n} U_n,\\
\Delta_4 U_n^9 &= U_{9n} - 9Q^n U_{7n} + 36Q^{2n} U_{5n} - 84Q^{3n} U_{3n} + 126Q^{4n} U_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

et

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
V_n^2 &= V_{2n} + 2Q^n,\\
V_n^3 &= V_{3n} + 3Q^n V_n.\\
V_n^4 &= V_{4n} + 4Q^n V_{2n} + 6Q^{2n},\\
V_n^5 &= V_{5n} + 5Q^n V_{3n} + 10Q^{2n} V_n,\\
V_n^6 &= V_{6n} + 6Q^n V_{4n} + 15Q^{2n} V_{2n} + 20Q^{3n},\\
V_n^7 &= V_{7n} + 7Q^n V_{5n} + 21Q^{2n} V_{3n} + 35Q^{3n} V_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

5. En désignant par $p$ et $n$ deux nombres quelconques, on a l'identité

$$\frac{z - z^{p^n}}{(1-z)(1-z^{p^n})} + \frac{z^{p^n} - z^{p^{n+1}}}{(1-z)(1-z^{p^{n+1}})} = \frac{z - z^{p^{n+1}}}{(1-z)(1-z^{p^{n+1}})};$$

si l'on fait successivement $n$ égal à 1, 2, 3, ..., $n$, on obtient en faisant l'addition, et en posant $z = \dfrac{b^r}{a^r}$,

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{Q^r U_{(p-1)r}}{U_r U_{pr}} + \frac{Q^{pr} U_{(p-1)pr}}{U_{pr} U_{p^2 r}} + \frac{Q^{p^2 r} U_{(p-1)p^2 r}}{U_{p^2 r} U_{p^3 r}} + \ldots\\
&\qquad\qquad + \frac{Q^{p^n r} U_{(p-1)p^n r}}{U_{p^n r} U_{p^{n+1} r}} = \frac{Q^r U_{(p^{n+1}-1)r}}{U_r U_{p^{n+1} r}}.
\end{aligned}\right.$$

On calcule les numérateurs et les dénominateurs de ces fractions au moyen des formules de multiplication; lorsque $n$ augmente indéfiniment, le second membre de la formule précédente a pour limite l'expression $\dfrac{b^r}{U_r}$, et l'on a, par exemple,

$$\frac{b^r}{U_r} = \frac{Q^r}{U_{2r}} + \frac{Q^{2r}}{U_{4r}} + \frac{Q^{3r}}{U_{8r}} + \frac{Q^{4r}}{U_{16r}} + \ldots \tag{25}$$

et ainsi

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2207} + \ldots,$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2^2.3} + \frac{5}{2^3.3.17} + \frac{1}{2^4.3.17.577} + \ldots;$$

il est aisé de généraliser la formule (24) qui donne des développements très-rapidement convergents. Cette formule revient au calcul des réduites d'une fraction continue périodique dont les rangs sont en progression géométrique. C'est, en quelque sorte, la *combinaison du calcul logarithmique et du calcul par les fractions continues*. Ainsi le dénominateur de la trentième fraction du developpement de $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ a environ *cent millions* de chiffres.

Les formules de duplication

$$U_n V_n = U_{2n} \quad \text{et} \quad \Delta U_n^2 + V_n^2 = 2 V_{2n}$$

donnent

$$\frac{\Delta U_n}{V_n} = \frac{V_n}{U_n} + 2\frac{V_{2n}}{U_{2n}};$$

en changeant successivement $n$ en $2n$, $4n$, $8n$, ... et ajoutant, on obtient

$$\Delta\left(\frac{U_n}{V_n} + 2\frac{U_{2n}}{V_{2n}} + \ldots + 2^p\frac{U_{2^p n}}{V_{2^p n}}\right) = 2^{p+1}\frac{V_{2^{p+1}n}}{U_{2^{p+1}n}} - \frac{V_n}{U_n}, \tag{26}$$

et, en divisant par $2^p$ et faisant croître $p$ indéfiniment,

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{\dfrac{U_n}{V_n} + 2\dfrac{U_{2n}}{V_{2n}} + 2^2\dfrac{U_{4n}}{V_{4n}} + 2^3\dfrac{U_{8n}}{V_{8n}} + \ldots}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots}; \tag{27}$$

cette formule correspond à la formule connue

$$\frac{1}{x} - 2\cot x = \tang x + \frac{1}{2}\tang\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\tang\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\tang\frac{x}{2^n} + \ldots$$

6. Soit $F(x)$ une fonction développable en série convergente pour toutes les valeurs de la variable dont le module est inférieur à l'unité ; par exemple,

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + \ldots ;$$

on aura, par conséquent, en supposant $z$ positif,

$$F\left(\frac{z}{1+z}\right) = A_0 + A_1 \frac{z}{1+z} + A_2 \frac{z^2}{(1+z)^2} + \ldots + A_n \frac{z^n}{(1+z)^n} + \ldots$$

$$F\left(\frac{1}{1+z}\right) = A_0 + A_1 \frac{1}{1+z} + A_2 \frac{1}{(1+z)^2} + \ldots + A_n \frac{1}{(1-z)^n} + \ldots ;$$

donc, par addition et soustraction, en faisant $z = \frac{b^r}{a^r}$ (avec la condition de $r$ *pair,* lorsque les racines $a$ et $b$ sont de signes contraires),

$$(28)\quad \left\{ \begin{aligned} & F\left(\frac{a^r}{V_r}\right) + F\left(\frac{Q^r}{V_r}\right) = 2A_0 + A_1 \frac{V_r}{V_r} + A_2 \frac{V_{2r}}{V_r^2} + A_3 \frac{V_{3r}}{V_r^3} + \ldots, \\ & F\left(\frac{a^r}{V_r}\right) - F\left(\frac{Q^r}{V_r}\right) = \sqrt{\Delta}\left(A_1 \frac{U_r}{V_r} A_2 + \frac{U_{2r}}{V_r^2} + A_3 \frac{U_{3r}}{V_r^3} + \ldots\right). \end{aligned} \right.$$

Si l'on suppose $z = -\frac{b^r}{a^r}$, on obtient deux développements analogues aux précédents ; mais, bien que ces développements soient beaucoup moins rapidement convergents que ceux du n° 5, leur étude paraît plus importante au point de vue de l'*Arithmétique supérieure,* dans les recherches concernant les lois de la dissémination des nombres premiers dans les séries à termes commensurables.

Le développement du binôme $(1-x)^m$ donne ainsi, pour $m$ quelconques, les développements

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{V_{mr}}{V^m} = V_0 - \frac{m}{1}\frac{V_r}{V_r} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{V_{2r}}{V_r^2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{V_{3r}}{V_r^3} + \ldots, \\ & \frac{U_{mr}}{V_r^m} = \frac{m}{1}\frac{U_r}{V_r} - \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{U_{2r}}{V_r^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{U_{3r}}{V_r^3} + \ldots, \end{aligned} \right.$$

que l'on peut déduire directement de la formule de Bernoulli ;

pour $m = -1$, on a

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{V_r^2}{Q^r} = V_0 + \dfrac{V_r}{V_r} + \dfrac{V_{2r}}{V_r^2} + \dfrac{V_{3r}}{V_r^3} + \dots \\ \dfrac{U_{2r}}{Q^r} = \dfrac{U_r}{V_r} + \dfrac{U_{2r}}{V_r^2} + \dfrac{U_{3r}}{V_r^3} + \dfrac{U_{4r}}{V^4} + \dots; \end{cases}$$

par exemple, pour $P = 1$ et $Q = -1$,

$$9 = 2 + \frac{3}{3} + \frac{7}{9} + \frac{18}{27} + \frac{47}{81} + \dots$$

$$3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{8}{27} + \frac{21}{81} + \frac{55}{243} + \dots;$$

les numérateurs de ces deux séries de fractions sont donnés par la relation de récurrence

$$N_{n+2} = 3N_{n+1} - N_n.$$

On obtiendra des formules analogues en supposant $m = \pm \frac{1}{2}$; le développement de $(1 + x)^m \pm (1 - x)^m$ donne aussi d'autres formules.

Le développement de $\log(1 - x)$ donne les formules

$$(31)\quad \begin{cases} \log \dfrac{V_r^2}{Q^r} = \dfrac{V_r}{V_r} + \dfrac{1}{2}\dfrac{V_{2r}}{V_r^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{V_{3r}}{V_r^3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{V_{4r}}{V_r^4} + \dots, \\ \log \dfrac{b^{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta}\left(\dfrac{U_r}{V_r} + \dfrac{1}{2}\dfrac{U_{2r}}{V_r^2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{U_{3r}}{V_r^3} + \dfrac{1}{4}\dfrac{U_{4r}}{V_r^4} + \dots\right); \end{cases}$$

et celui de $\log \dfrac{1 - x}{1 + x}$ donne.

$$(32)\quad \log \frac{b^{2r}}{Q^r} = 2\sqrt{\Delta}\left(\frac{U_r}{V_r} + \frac{1}{3}\frac{\Delta U_r^3}{V_r^3} + \frac{1}{5}\frac{\Delta^2 U_r^5}{V_r^5} + \frac{1}{7}\frac{\Delta^3 U_r^7}{V_r^7} + \dots\right).$$

La formule connue (¹)

$$\frac{1}{2}\log\frac{z + h}{z - h} = hz\left[\frac{1}{z^2 - h^2} - \frac{2}{3}\frac{h^2}{(z^2 - h^2)^2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{h^4}{(z^2 - h^2)^3} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{h^6}{(z^2 - h^2)^4} + \dots\right],$$

(¹) HERMITE, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, t. I, p. 272.

dans laquelle on fait

$$z+h=a^r,\quad z-h=b^r,\quad z^2-h^2=Q^r,\quad h^2=\frac{\Delta U_r^2}{4},$$

donne

$$(33)\quad \log\frac{a^{2r}}{Q^r}=\frac{\sqrt{\Delta}U_r}{2}\left(\frac{1}{Q^r}-\frac{2}{3}\frac{\Delta U_r^2}{2^2Q^{2r}}+\frac{2.4}{3.5}\frac{\Delta^2U_r^4}{2^3Q^{3r}}-\frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{\Delta^3U_r^6}{2^4Q^{4r}}+\ldots\right);$$

on suppose, pour la convergence, $\Delta U_r^2 \overline{\gtrless} 4Q^r$; on a ainsi, à la limite de convergence,

$$\log(1+\sqrt{2})=\sqrt{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2.4}{3.5}-\frac{2.4.6}{3.5.7}+\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}-\ldots\right).$$

Les développements de arc $\sin z$ et de $(\text{arc}\sin z)^2$ donnent de même

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}&\log\frac{a^{2r}}{Q^r}=\frac{\sqrt{\Delta}U_r}{Q^{\frac{r}{2}}}\left[1-\frac{1}{1.2.3}\frac{\Delta U_r^2}{2^2Q^r}+\frac{(1.3)^2}{1.2.3.4.5}\frac{\Delta^2U_r^4}{2^4Q^{2r}}-\ldots\right],\\&\frac{1}{4}\log^2\frac{a^{2r}}{Q^r}=\frac{\Delta U_r^2}{2^2Q^r}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\frac{\Delta^2U_r^4}{2^4Q^{2r}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2.4}{3.5}\frac{\Delta^3U_r^6}{2^6Q^{3r}}-\ldots,\end{aligned}\right.$$

et à la limite de convergence

$$\log(1+\sqrt{2})=1-\frac{1}{1.2.3}+\frac{(1.3)^2}{1.2.3.4.5}-\frac{(1.3.5)^2}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots,$$

$$\log^2(1+\sqrt{2})=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2.4}{3.5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2.4.6}{3.5.7}+\ldots\quad(^1).$$

La formule remarquable de M. Scholtz (²) conduit au développement

$$(35)\quad\left\{\begin{aligned}\log^3\frac{a^{2r}}{Q^r}=\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}U_r^3}{Q^{\frac{3r}{2}}}\Bigg\{1&-\frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\frac{\Delta U_r^2}{2^2Q^r}\\&+\frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)\frac{\Delta^2U_r^4}{2^4Q^{2r}}-\ldots\\&\pm\frac{3.5.7\ldots(2n-1)3}{4.6.8\ldots2n.(2n+1)}\left[1+\frac{1}{3^2}+\ldots\right.\\&\left.+\frac{1}{(2n-1)^3}\right]\frac{\Delta^{n-1}U_r^{2n-2}}{2^{2n-2}Q^{(n-1)r}}+\ldots\Bigg\}\end{aligned}\right.$$

---

(¹) LAISANT, *Essai sur les fonctions hyperboliques*. Paris, Gauthier-Villars, 1874; p. 26.

(²) J. BERTRAND, *Traité de Calcul différentiel*, p. 424.

et à la limite de convergence

$$\log^3(1+\sqrt{2}) = 1 - \frac{3.3}{4.5}\left(1+\frac{1}{3^2}\right) + \frac{3.5.3}{4.6.7}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right) - \ldots.$$

**7.** Les quantités $a^r$ et $b^r$ sont les racines de l'équation

$$z^2 - z\mathrm{V}_r + \mathrm{Q}^r = 0;$$

si l'on développe l'une des racines par la formule de Lagrange, on a ainsi

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned} b^r &= \frac{\mathrm{Q}^r}{\mathrm{V}_r} + \frac{\mathrm{Q}^{2r}}{\mathrm{V}_r^3} + \frac{4}{2}\frac{\mathrm{Q}^{3r}}{\mathrm{V}_r^5} + \frac{5.6}{2.3}\frac{\mathrm{Q}^{4r}}{\mathrm{V}_r^7} + \ldots, \\ \log b^r &= \log\frac{\mathrm{Q}^r}{\mathrm{V}_r} + \frac{\mathrm{Q}^r}{\mathrm{V}_r^2} + \frac{3}{2}\frac{\mathrm{Q}^{2r}}{\mathrm{V}_r^4} + \frac{5.4}{2.3}\frac{\mathrm{Q}^{3r}}{\mathrm{V}_r} + \ldots, \\ \frac{b^{2r}}{3} &= \frac{\mathrm{Q}^{2r}}{2\mathrm{V}_r^2} + \frac{\mathrm{Q}^{3r}}{\mathrm{V}_r^4} + \frac{5}{2}\frac{\mathrm{Q}^{4r}}{\mathrm{V}_r^6} + \frac{7.6}{2.3}\frac{\mathrm{Q}^{5r}}{\mathrm{V}_r^8} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

L'équation précédente donne

$$b^r = \frac{\mathrm{V}_r - \sqrt{\mathrm{V}_r^2 - 4\mathrm{Q}^r}}{2},$$

et par le développement du radical par la formule du binôme

$$(37)\qquad b^r = \frac{1}{2}\frac{2\mathrm{Q}^r}{\mathrm{V}_r} + \frac{1}{2.4}\frac{2^3\mathrm{Q}^{2r}}{\mathrm{V}_r^3} + \frac{1.3}{2.4.6}\frac{2^5\mathrm{Q}^{3r}}{\mathrm{V}_r^5} + \ldots;$$

en particulier à la limite de convergence

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} + \ldots.$$

On a encore

$$(38)\qquad b^r = \frac{\mathrm{Q}^r}{\mathrm{V}_r} + \frac{\mathrm{Q}^{2r}}{\mathrm{V}_r^3} + \frac{4}{2}\frac{\mathrm{Q}^{3r}}{\mathrm{V}_r^5} + \frac{6.5}{2.3}\frac{\mathrm{Q}^{4r}}{\mathrm{V}_r^7} + \frac{8.7.6}{2.3.4}\frac{\mathrm{Q}^{5r}}{\mathrm{V}_r^9} + \ldots.$$

Si l'on applique la formule de Burmann au développement de $z$ suivant les puissances de $\frac{2z}{1+z^2}$, on obtient pour tout module de $z$

inférieur à l'unité

$$z = \frac{1}{2}\frac{2z}{1+z^2} + \frac{1}{2.4}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^3 + \frac{1.3}{2.4.6}\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)^5 + \ldots,$$

et, si l'on fait $z^2 = \frac{b^r}{a^r}$, on retrouve la formule (37).