BULLETIN DE LA S. M. F.

GEORGES BOULIGAND

Sur la topologie restreinte du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 228-241
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__228_0>

SUR LA TOPOLOGIE RESTREINTE DU SECOND ORDRE;

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Dans mon *Introduction à la géométrie infinitésimale directe* (¹), conformément aux principes que j'avais antérieurement formulés (*voir* les citations de la page 207), j'ai montré l'importance que présente, pour l'étude directe des lignes et des surfaces, le groupe (γ) des homéomorphies admettant une transformation linéaire tangente continue et un jacobien positif au sens strict : à la fin de l'Ouvrage, les deux Notes de M. Georges Durand et de moi-même soulignent bien l'utilité de ces considérations.

Le système des propriétés invariantes par le groupe (γ) constitue la *Topologie restreinte du premier ordre*, qui englobe le contingent et le paratingent ordinaires. Il est instructif de comparer, dans mon Ouvrage ci-dessus, les raisonnements exposés aux nos 67 et 69 (p. 63-67) d'une part, et ceux du no 74 (p. 73-74) d'autre part. Les premiers établissent la covariance du contingent, et les autres celle du paratingent. Pour ces derniers, la continuité de la transformation linéaire tangente joue un rôle indispensable, tandis que cette continuité n'intervient nullement lorsqu'il s'agit de prouver la covariance du contingent. Finalement, le groupe (γ) nous apparaît donc comme un sous-groupe d'un groupe (g_1), qu'on pourrait appeler *groupe du contingent ordinaire :* ce groupe est formé d'homéomorphies admettant une transformation linéaire tangente et un jacobien positif au sens strict.

Cette nuance va se retrouver lorsque nous allons chercher à préciser ce qu'il faut entendre par *Topologie restreinte du second ordre*. Cette autre partie de mon programme antérieur n'ayant pas été traitée dans mon Ouvrage, le présent travail aura pour but de combler cette lacune.

(¹) Paris, Vuibert, 1932.

2. Je ne peux mieux introduire qu'en extrayant cette phrase d'une lettre que M. E. Vessiot voulait bien m'adresser, vers la fin de 1930 : « Ce que vous faites consiste à effectuer ce que j'appellerais, avec S. Lie, des prolongements différentiels successifs d'ensembles considérés comme des multiplicités ponctuelles, en élargissant convenablement le sens du mot différentiel. » En fait, le contingent et le paratingent ordinaires, fournissent-ils, l'un au point de vue de la différentielle au sens classique, et l'autre au point de vue de Stolz, des prolongements du premier ordre de l'ensemble, pouvant se concevoir comme de nouveaux ensembles ponctuels dans un espace auxiliaire, obtenu en adjoignant à un point de l'espace initial une droite, une demi-droite, ou même une portion de droite issue de ce point. Optons pour un espace ayant pour élément ce qu'on pourrait appeler un *point vitesse*. A chaque homéomorphie θ, extraite dans l'espace initial, de l'un des groupes (γ) ou (g_1), est attachée dans l'espace décrit par le point-vitesse (espace que nous appellerons $\mathcal{V}$), une nouvelle homéomorphie Θ, qui sera définie par les six formules

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = g(x, y, z), \qquad Z = h(x, y, z),$$
$$\begin{aligned} U &= uf'_x + vf'_y + wf'_z, \\ V &= ug'_x + vg'_y + wg'_z, \\ W &= uh'_x + vh'_y + wh'_z, \end{aligned}$$

dans le cas où les trois premières équations sont celles qui définissent θ. Il n'est d'ailleurs pas nécessaire que θ soit définie dans la totalité de l'espace initial.

Cela posé, considérons le cas où l'homéomorphie Θ appartiendrait, dans l'espace $\mathcal{V}$, au groupe (G_1) jouant pour ce dernier le rôle de (g_1) vis-à-vis de l'espace initial. Il faut et il suffit, à cet effet, que les dérivées premières de f, g, h soient elles-mêmes dérivables : aucune condition nouvelle n'est introduite par le jacobien de cette transformation à un nombre double de dimensions, car ce jacobien est précisément le carré de celui de θ. La dérivabilité des $f'_x, \ldots, h'_z$ entraîne ici l'inclusion de θ dans (γ).

Et cela nous amène à reconnaître l'existence de deux groupes. L'un de ces groupes est le sous-groupe (g_2) de (γ) formé des homéomorphies définies par des fonctions f, g, h douées de dérivées secondes, le jacobien étant toujours strictement positif.

Le second groupe est un sous-groupe de (g_2) et s'en déduit en supposant les dérivées secondes continues : soit (γ_2).

La topologie restreinte du second ordre s'attachera soit à l'étude du champ d'invariance de (g_2), soit à celle du champ d'invariance de (γ_2), l'option se faisant suivant la nature des problèmes en vue desquels on requiert la théorie des transformations.

3. La question primordiale est d'analyser les champs d'invariance des notions qu'à la suite du contingent et paratingent ordinaires j'ai introduites d'après le mode de définition ramenant aux ensembles limites ou d'accumulation, notions qui ne peuvent visiblement appartenir à la Topologie restreinte du premier ordre. En présentant mon Ouvrage, M. Elie Cartan a fait observer dans sa Préface, que le second paratingent a son champ d'invariance limité à la géométrie projective. Ce fait essentiel, dont je vais reprendre la démonstration, me servira de point de départ, pour l'exposé d'une première série de résultats, qui ont été obtenus simultanément par M. Elie Cartan et par moi-même au cours d'un important échange de vues. Les conclusions principales en sont les suivantes :

1° Impossibilité d'étendre le champ d'invariance du contingent d'osculation au delà de la géométrie projective.

2° Nécessité, pour lier le contingent circulaire au groupe (g_2), de modifier le point de vue adopté par M. G. Rabaté dans la définition de cette notion.

Nous serons ainsi conduits à des remarques relatives à la pluralité des modes de définition du contingent circulaire : le fait de s'attacher à tel ou à tel champ d'invariance détermine une option entre ces divers modes (*cf.* n° **10**).

Je montrerai, à la suite de cet exposé (n° **12** et suivants) que le point de vue des transformations prolongées par recours à l'espace auxiliaire $\mathcal{V}$ élargit encore la pluralité mentionnée; elle ouvre la porte à une nouvelle définition du contingent circulaire, dérivant de la considération d'un contingent ordinaire dans l'espace $\mathcal{V}$. Sous cette autre forme qu'on pourrait rendre indépendante de $\mathcal{V}$, on retrouve les mêmes problèmes que ci-dessus, et l'on est conduit à des résultats identiques : l'étroite liaison entre les groupes (g_2)

et (G_1) contribuera dans une certaine mesure à nous rendre ici ces résultats plus intuitifs.

4. Je reviens au champ d'invariance du second paratingent. D'une surface dont le second paratingent est vide, une transformation du groupe correspondant doit conduire à une nouvelle surface dont le second paratingent est vide. L'absolue convexité devra donc se conserver par une telle transformation ([1]). Si l'équation $Z = f(x, y)$ représente une portion de surface absolument convexe, il en sera de même pour l'équation $Z = \lambda f(x, y)$ quelle que soit la valeur du paramètre λ, le sens de la concavité changeant avec le signe de λ. La surface $z = 0$ est la limite de deux familles à un paramètre de surfaces absolument convexes qui tendent vers elle de part et d'autre. Pareillement sa transformée sera la limite de deux familles à un paramètre de surfaces absolument convexes tendant aussi vers elle de part et d'autre. Cette limite, si elle n'était plane, serait convexe et devrait présenter le même sens de concavité que chacune des deux familles de surfaces dont elle est la limite. Comme ces sens se contrarient, on voit qu'à un plan, il correspond toujours un plan. Il en résulte bien que notre transformation appartient au groupe projectif.

5. Dans les transformations du groupe (γ_2), cherchons maintenant celles qui se prêtent à la covariance du contingent d'osculation. Je dis qu'elles conservent les plans. En effet, appliquons une telle transformation à un tore et à ses lignes asymptotiques, au voisinage d'un arc appartenant à l'un des parallèles limites; cet arc joue donc le rôle d'enveloppe : en outre, chaque portion utile de ligne asymptotique est telle que son contingent d'osculation ne comprend qu'un seul demi-plan, situé dans le plan tangent au tore. Cette coïncidence de plans sera conservée par la transformation : donc les images de nos asymptotiques seront des asymptotiques sur la nouvelle surface obtenue. Notons en passant les caractères

---

([1]) J'applique ici les notions et les résultats des n° 116 à 119 et 122 à 123 de mon Ouvrage cité. Le terme d'absolue convexité s'applique à une surface qui délimite un solide convexe lorsque cette surface ne contient aucune portion de droite. (Par solide convexe, on entend un ensemble fermé de points qui inclut tous les segments rectilignes déterminés par ces points pris deux à deux.)

de cette surface. c'est l'image d'une portion régulière de surface algébrique par une homéomorphie prélevée sur le groupe (γ_2); donc notre surface transformée est douée de courbures principales réparties continûment. Cela posé, à notre arc de cercle, tangent aux asymptotiques du tore, il va correspondre sur cette nouvelle surface un arc à courbure continue tangent à toutes les asymptotiques images de celles du tore. Prenons pour origine un point de cet arc. et pour axe des Z la normale en ce point. La surface sera représentée par une équation $Z = f(X, Y)$ où f admet des dérivées continues des deux premiers ordres; soient R, S, T les dérivées secondes. Reprenons la famille d'asymptotiques mise en évidence sur la surface. Leurs projections sur le plan des XY satisfait à l'équation différentielle

$$R\,dX^2 + 2S\,dX\,dY + T\,dY^2 = 0.$$

En chaque point de l'arc enveloppe de ces lignes, nous aurons simultanément. puisque $RT - S^2$ est nul,

$$R\,dX + S\,dY = S\,dX + T\,dY = 0,$$

ce qui montre que le plan tangent conserve, tout le long de cet arc enveloppe, une direction invariable. Cet arc est donc plan, et par suite, la conservation de la planéité est établie (1). Le champ d'invariance du contingent d'osculation se limite donc à la géométrie projective.

6. Des exemples simples montrent d'ailleurs immédiatement les perturbations apportées au paratingent second et au contingent d'osculation par des homéomorphies algébriques non linéaires. Ainsi, les deux surfaces

$$4Z = X^2 + Y^2 \quad \text{et} \quad 4z = x^2 + y^2 - 4xy,$$

se correspondent par la transformation suivante

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z + xy,$$

(1) Nous recourons ici à un principe de démonstration bien classique, mais dans un cas où il est indispensable de reprendre le raisonnement pour constater qu'il s'adapte bien à nos hypothèses.

laquelle est une homéomorphie pour la totalité de l'espace. A l'origine, qui est conservée, l'une des surfaces a son paratingent second formé de deux droites, tandis que celui de l'autre est vide.

Des deux courbes

$$y = x^3, \qquad z = x^4$$

et

$$y = x^3, \qquad z = x^3 + x^4,$$

dont les contingents d'osculation à l'origine sont distincts, la transformation

$$X = x, \qquad Y = y + x^2, \qquad Z = z$$

fait passer à deux courbes ayant même contingent d'osculation. Cet exemple montre encore que la communauté du biparatingent en un point [1] ne peut elle-même être valable dans aucun des champs topologiques restreints considérés ci-dessus. Il suffit d'ailleurs d'une adaptation du raisonnement fait au n° 5 pour montrer que ladite propriété est strictement limitée au champ projectif.

7. Nous venons de voir que ni le paratingent second, ni le contingent d'osculation ne procèdent de la Topologie du second ordre. Mais il en est autrement du contingent circulaire, comme j'ai pu l'établir d'une manière rigoureuse, à la suite de mon échange de vues avec M. E. Cartan. Celui-ci a remarqué que les cercles du contingent circulaire dont le rayon est nul peuvent être considérés avec leurs demi-plans, sans que cela mette en cause la covariance du contingent par rapport au groupe (g_2). Par contre, il résulte immédiatement de ce qui précède le fait suivant : cette covariance exige qu'on assimile un cercle de rayon infini à la droite qui en est la limite, sans se préoccuper de la position du demi-plan de ce cercle : sinon, la communauté de contingent circulaire en un point et pour une demi-tangente, supposée réalisée pour deux ensembles, entraînerait la communauté de contingent d'osculation. En adoptant le point de vue de M. G. Rabaté, qui consiste à introduire indifféremment les cercles de rayon nul et les cercles de rayon infini avec leurs plans, on ne pourrait donc transgresser les limites du champ projectif.

---

(1) *Voir* mon Ouvrage cité, p. 162.

8. La question étant ainsi préparée, je commencerai par établir le théorème suivant :

Si l'on effectue sur un ensemble ponctuel une transformation du groupe (g_2), *à chaque cercle de rayon non nul du contingent circulaire relatif au point* A *et à la demi-tangente* AT, *correspond un cercle de rayon non nul du contingent circulaire de l'ensemble transformé.*

Soit $P = \mathfrak{T}(M)$ une transformation de (g_2) faisant passer du point M au point P; la détermination de $\mathfrak{T}$ se fait au moyen de fonctions f, g, h des coordonnées de M, admettant des dérivées secondes continues. Sur l'ensemble E des points M, prélevons une suite de points M_i tendant vers le point A, dans la direction du vecteur unitaire $\overrightarrow{AT}$, en donnant un cercle et un seul du contingent circulaire relatif à l'élément semi-linéaire $\left(A, \overrightarrow{AT}\right)$, cercle dont le vecteur de courbure en A est $\frac{\vec{N}}{\mathcal{R}}$, nous aurons dès lors

$$\overrightarrow{AM_i} = |AM_i|\vec{T} + \frac{\overline{AM_i}^2}{2\mathcal{R}}\left(\vec{N} + \vec{\varepsilon_i}\right),$$

les $\vec{\varepsilon_i}$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{i}$.

Soit $\mathcal{L}$ le symbole de la transformation linéaire tangente relative au point A et à son transformé $B = \mathfrak{T}(A)$. Soit $P_i = \mathfrak{T}(M_i)$. Le vecteur $\overrightarrow{BP_i}$ sera la somme géométrique :

1° Du vecteur $|AM_i|\,\mathcal{L}\left(\vec{T}\right)$;

2° Du vecteur $\frac{\overline{AM_i}^2}{2\mathcal{R}}\,\mathcal{L}\left(\vec{N}\right)$;

3° D'un vecteur $\frac{\overline{AM_i}^2}{2}\,\mathfrak{Q}\left(\vec{T}\right)$ où $\mathfrak{Q}$ est un opérateur faisant passer d'un premier vecteur à un second ayant ses composantes entières, homogènes et du second degré par rapport à celles du premier; les coefficients de ces formes quadratiques sont les dix-huit dérivées secondes de f, g, h;

4° D'un vecteur infiniment petit, synthétisant les erreurs commises du fait qu'on a utilisé l'expression approchée de $\overrightarrow{AM_i}$ répondant à la formule ci-dessus, en même temps que la suivante de la transformation $\mathfrak{T}$:

$$\overrightarrow{BP} = \mathfrak{T}(M) - \mathfrak{T}(A) = \mathcal{L}\left(\overrightarrow{AM}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{Q}\left(\overrightarrow{AM}\right) + \overline{AM}^2 \vec{\eta}$$

(où $\vec{\eta}$ est un vecteur infiniment petit avec $\overline{AM}$), de manière à n'écrire explicitement, dans le développement de $\overrightarrow{BP}_i$ que les termes en $|AM_i|$ et $\overline{AM}_i^2$.

Le calcul ainsi conduit nous fournit une expression de $\overrightarrow{BP}_i$ qui se présente sous la même forme que celle de $\overrightarrow{AM}_i$; il se trouve donc déterminé de la sorte un cercle et un seul du contingent circulaire relatif à l'élément semi-linéaire $\left[B, \mathcal{L}\left(\vec{T}\right)\right]$ pour l'ensemble transformé de l'ensemble initial.

Chaque cercle de rayon non nul du contingent circulaire de l'ensemble initial donne lieu à un cercle de rayon non nul du contingent circulaire de l'ensemble transformé, et la réciproque a lieu, parce que l'inverse d'une transformation de (g_2) appartient à ce même groupe.

La covariance du système des cercles de rayon non nul du contingent circulaire de par le groupe (g_2) est donc établie.

9. Occupons-nous maintenant des cercles de rayon nul. Les raisonnements et calculs du n° 8 nous amènent à cette conclusion supplémentaire : à une suite de cercles de rayons non nuls, mais évanescents, du contingent circulaire relatif à l'élément semi-linéaire $\left(A, \overrightarrow{AT}\right)$, correspond une suite de cercle de rayons non nuls mais évanescents, du contingent circulaire relatif à l'ensemble transformé et relatif à l'élément linéaire $\left[B, \mathcal{L}\left(\vec{T}\right)\right]$. Cela résulte immédiatement du fait que le vecteur $\mathcal{L}\left(\frac{\vec{N}}{\mathcal{R}}\right)$ (non colinéaire à T, puisque le jacobien n'est pas nul) croît indéfiniment avec $\frac{1}{\mathcal{R}}$.

Un cercle de rayon nul de contingent circulaire donne donc, après la transformation, un nouveau cercle de rayon nul. Mais le point spécial est ici de justifier la remarque énoncée par M. Elie

Cartan, remarque en vertu de laquelle les demi-plans des cercles de rayon nul peuvent être ralliés au contingent circulaire sans en compromettre la covariance dans (g_2) [1]. Envisageons donc maintenant une suite de cercles de la figure initiale, tangents en A à AT; supposons que leurs rayons tendent vers zéro, en même temps que leurs demi-plans vers un demi-plan bien déterminé. A ces cercles, correspondront dans la figure tranformée une suite de cycles à courbure continue, tendant vers le second cercle de rayon nul. Ces cycles bordent des rondelles de surfaces, transformées des disques bordés par nos cercles : dans l'espace auxiliaire **II** analogue à celui des points-vitesses (plus précisément : associé dualistiquement à lui), dont l'élément fondamental synthétise un point et un plan ϖ le contenant, c'est-à-dire est un *élément de contact*, les rondelles précédentes sont des continus dont le diamètre (adéquat à la distance de deux éléments de contact) tend vers zéro, de manière que ces continus convergent vers un point de l'espace **II**. Et ce point est justement notre cercle de rayon nul avec son plan. Ce plan contient naturellement la demi-tangente transformée de $\overrightarrow{AT}$ et la discrimination du demi-plan utile ne soulève aucune difficulté.

10. La remarque de M. Elie Cartan étant ainsi justifiée, nous apercevons la précision maxima qu'on peut apporter à la détermination du contingent circulaire sans mettre en cause sa covariance dans (g_2). On y agrégera les demi-plans des cercles de rayon nul et l'on exclura les demi-plans des cercles de rayon infini. En agrégeant les uns et les autres, à l'exemple de M. G. Rabaté qui s'est occupé le premier des propriétés du contingent circulaire, on se restreint comme nous l'avons montré, au champ projectif.

Étant donnée la famille des cercles tangents en un point à une même droite, la conception de M. G. Rabaté conduisait à définir la distance de deux de ses éléments d'après le processus suivant (ou quelque autre, topologiquement équivalent) :

---

[1] Il est essentiel de noter que si $\mathcal{R}$ croit indéfiniment, le terme $\mathcal{L}\left(\frac{\overrightarrow{N}}{\mathcal{R}}\right)$ tend vers zéro; par suite les demi-plans des cercles de rayon infini du contingent initial n'ont aucune influence sur les demi-plans des cercles correspondants du contingent final qui ne sont d'ailleurs pas en général de rayon infini.

Prendre l'inverse du plan des centres des cercles par rapport à un point de la tangente commune situé hors de ce plan, et projeter orthographiquement la sphère obtenue sur le cylindre droit circonscrit parallèlement à la tangente commune.

En vue de la covariance du contingent circulaire relativement à (g_2), nous devrons opter pour une autre définition de la distance : elle consiste à conserver une des moitiés de notre sphère, celle dont le pôle sera l'image de tout cercle de rayon infini, et à ne projeter orthographiquement que l'autre moitié sur le même cylindre que précédemment. Le champ de covariance est donc ici intimement lié au choix d'une définition de la distance.

11. Le raisonnement qui nous a permis d'établir l'invariance du contingent circulaire, dans les conditions ci-dessus spécifiées, relativement à (g_2), est parallèle, en ce qui concerne les cercles de rayon non nul, à celui qui démontre la covariance du contingent ordinaire relativement à (g_1) [1]. En tenant compte de la continuité des dérivées secondes, nous pourrons construire un autre raisonnement qui soit, au même point de vue, l'homologue de celui qui nous donne la covariance du paratingent ordinaire dans (γ). Et cela nous fait prévoir la covariance par rapport à (γ_2) :

1° Du paratingent circulaire obtenu comme ensemble limite des cercles circonscrits à trois points de l'ensemble infiniment voisins d'un même point d'accumulation;

2° Du paracontingent circulaire, obtenu comme ensemble limite de cercles passant par un point d'accumulation et deux points de l'ensemble infiniment voisins.

Bien entendu, les cercles de rayon nul pourront encore être agrégés avec leurs plans à ces ensembles, sans que la covariance soit troublée, mais les cercles de rayon infini devront être pris indépendamment de leurs plans.

Mais au lieu de m'attacher à ce prolongement facile, je préfère attirer l'attention sur ce fait : chacune des notions précédentes peut être définie à un autre point de vue, qui ne donne pas un

(1) *Loc. cit.* n°s 67-69 (p. 63-67).

résultat équivalent à celui que nous avions jusqu'à présent. C'est ce que je montrerai dans le cas du contingent circulaire.

12. Je rappelle d'abord qu'en géométrie infinitésimale classique il y a deux manières de définir le cercle de courbure d'une ligne analytique plane autour d'un point régulier. La première est celle qui consiste à prendre la limite d'un cercle tangent à la courbe au point donné et passant par un point infiniment voisin. La seconde est celle qui fait apparaître le rayon de courbure comme la limite du rapport d'un arc infiniment petit de la courbe à l'arc du cercle unitaire pour lequel est conservé l'angle des tangentes aux extrémités. Lorsque l'on considère des lignes de plus en plus générales, on montre de suite que l'existence d'un cercle de courbure unique, au sens de la seconde définition, entraîne l'unicité (et l'identité) du cercle de courbure, au sens de la première définition. Mais la réciproque n'a pas lieu, et cela tient à l'irréversibilité de la règle de l'Hospital [1].

Cela fait prévoir deux modes de définition pour les éléments différentiels du second ordre. En ce qui concerne le contingent circulaire, les n^{os} 7 à 10 se rapportent au premier de ces modes. Nous allons maintenant définir et étudier cette même notion suivant le second mode.

13. A titre préliminaire, il est commode de revenir sur l'homéomorphie Θ attachée, dans l'espace $\mathcal{V}$, à l'homéorphie θ de l'espace initial. Les six formules qui définissent Θ déterminent la loi suivant laquelle se transforment simultanément les trois coordonnées du point primitif et les trois composantes de sa vitesse. Dans l'espace $\mathcal{V}$ il faudrait introduire, pour la vitesse d'un point, six composantes dont trois seraient celles de la vitesse primitive, les trois autres déterminant l'accélération correspondante. Prenons dans l'espace initial une trajectoire, en restant dans le champ des conditions admises en géométrie infinitésimale classique, et considérons (au même point de vue) ses modes de description. Si l'on

[1] C'est ce que j'ai montré explicitement, dans le cas du contingent d'osculation, qu'on peut définir, d'une manière tout à fait parallèle aux considérations ci-dessus, de deux manières (*loc. cit.*, p. 117-118).

passe d'un premier horaire à un second, on substitue à la vitesse de l'espace initial un vecteur colinéaire et la même circonstance se produira dans l'espace transformé; à l'accélération de l'espace initial se subtitue un vecteur coplanaire à cette accélération et à la vitesse, et il en sera de même à la suite de la transformation ponctuelle. Dans cette mutation d'horaire, on voit intervenir la courbure, à la faveur de la propriété suivante :

Le rapport de l'accélération normale au carré de la vitesse est indépendant de l'horaire sur la trajectoire considérée;

et le cercle de courbure a la faveur de cette autre propriété :

La donnée simultanée d'une vitesse et d'une accélération pour un point en un même instant détermine une trajectoire circulaire unique sur laquelle cette vitesse et cette accélération soient compatibles.

Notons maintenant ce point : l'accélération étant la dérivée géométrique de la vitesse, la courbure obtenue par ce processus est celle qui se définit en recourant à l'angle des tangentes aux extrémités (dont une fixe) d'un arc infiniment petit. La mise en œuvre de considérations cinématiques, en même temps qu'elle concrétise l'espace $\mathcal{V}$, envisagé à titre auxiliaire pour préciser l'idée de Topologie du second ordre, offre donc l'avantage, pour une courbe usuelle, de nous mener au cercle de courbure, entendu selon le second mode : et il va nous suffire d'une extension pour atteindre à ce point de vue, le contingent circulaire.

14. Considérons un ensemble ponctuel e fermé et borné. Soit φ un sous-ensemble de e, donnant l'image d'un sous-ensemble du segment $(0, 1)$ d'un axe auxiliaire (*axe des temps*) par une transformation continue attachant à la totalité de ce segment un arc rectifiable c, lequel inçlura φ.

A l'espace initial (x, y, z) baignant e, adjoignons un espace (x, y, z, t) *composé* du précédent et de l'espace unidimensionnel des temps [1]. L'arc c de l'espace (x, y, z) est la projection sur celui-ci d'un arc C sans point multiple de l'espace $(x, y,$

[1] *Loc. cit.* n° 35, p. 30.

z, t). Pareillement, l'ensemble $\varphi = ec$ est la projection sur l'espace (x, y, z,) d'un ensemble Φ porté par C. La donnée d'un sous-ensemble φ de c dont les points correspondent à t dans les conditions précédentes d'ordre et de rectificabilité équivaudra pour nous à celle, sur l'ensemble e, d'un *mouvement normal*, l'épithète signifiant que tout rapport d'espace au temps correspondant y demeure borné. Grâce au contingent de l'ensemble Φ, nous aurons la notion collective des éléments limites jouant le rôle d'une vitesse, ce que nous appellerons en abrégé *le collectif des vitesses*, dans le même esprit qu'on applique en géométrie la dénomination du contingent à la collection des demi-tangentes. L'adoption de divers horaires pour le mouvement d'un point sur e, à partir d'un point d'accumulation de cet ensemble et vers les points infiniment voisins, ne changera le collectif des vitesses qu'en multipliant chaque fois toutes celles-ci par un même facteur positif; les demi-droites servant de sustentatrices à ces vitesses, variables en grandeur, feront précisément retrouver le contingent ordinaire de e au point d'accumulation ci-dessus. Cela posé à chaque mouvement normal sur e à partir d'un point d'accumulation de cet ensemble, on peut attacher en ce point, et aussi, aux points d'accumulation infiniment voisins, un collectif de vitesses. Considérons tous les mouvements normaux qui s'effectuent au point de départ, avec l'une de ces vitesses, et aux points d'accumulation infiniment voisins avec des vitesses telles qu'au point origine, on puisse obtenir diverses accélérations. Deux de ces accélérations pourront être distinctes, mais équivalentes, c'est-à-dire donner naissance au même cercle du contingent circulaire Quoi qu'il en soit, nous voyons maintenant comment les considérations cinématiques précédentes nous fournissent une nouvelle définition de ce contingent, facile à mettre d'ailleurs sous une forme purement géométrique.

A cet effet, nous l'énoncerons (à notre habitude) en caractérisant chaque cercle de ce nouveau contingent circulaire par l'existence d'une suite de points convenablement choisie. C'est cette suite qui jouera le rôle de φ. Tous ses points M_i seront des points d'accumulation de e tendant vers un point de celui-ci : soit A. Choisissons un horaire tel que le mobile soit en A, au temps zéro et en M_i au temps $|AM_i|$. Nous aurons donc une vitesse initiale unitaire. Supposons qu'il existe une suite $\left(M_i, \overrightarrow{M_i T_i}\right)$ de points vitesses tels qu'on ait une relation de la forme

$$\overrightarrow{M_i T_i} = \overrightarrow{AT} + |AM| \left(\frac{\vec{N}}{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_i \right),$$

les $\vec{\omega}_i$ étant infiniment petits avec $\frac{1}{i}$; alors, la dérivée géométrique en A du vecteur figurant au premier membre, c'est-à-dire l'accélération, sera $\frac{\vec{N}}{\mathcal{R}}$, ce qui montre que l'on peut adopter finalement la relation ci-dessus pour caractériser les suites génératrices des divers éléments du contingent circulaire. C'est surtout cette forme que nous retiendrons pour la génération du contingent circulaire. d'après le second mode.

Notons cependant que la suite génératrice d'un cercle de rayon non nul est compatible avec une courbe support c à courbure continue et sur laquelle un changement d'horaire est sans effet sur le cercle correspondant du contingent circulaire. Il y a donc identité entre le point de vue initial et le point de vue purement géométrique. Or le premier ramène la définition du contingent circulaire à celle du contingent ordinaire dans l'espace $(\mathcal{V}, t)$. De la covariance de ce dernier dans le groupe G_1, jouant le rôle de g_1 dans cet espace, résulte bien la covariance du contingent circulaire, défini d'après le second mode relativement au groupe g_2.

15. Il nous reste à préciser les relations entre les deux notions du contingent circulaire. L'idée de suite génératrice rend la solution immédiate en nous ramenant au cas d'un cercle de courbure unique. Les points M_i d'une suite génératrice $(M_i, \overrightarrow{M_i T_i})$ d'un cercle du contingent circulaire, second mode, forment une suite génératrice d'un cercle (unique) du contingent circulaire, premier mode, mais la réciproque n'a pas lieu. Et l'on voit ici se prolonger, en géométrie, les effets d'irréversibilité rencontrées à propos de la règle de l'Hospital, en Analyse.