BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN DIEUDONNÉ

Sur le théorème de Grace et les relations algébriques analogues

Bulletin de la S. M. F., tome 60 (1932), p. 173-196
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1932__60__173_0>

SUR LE THÉORÈME DE GRACE ET LES RELATIONS ALGÉBRIQUES ANALOGUES.

PAR M. J. DIEUDONNÉ.

Nous nous proposons, dans ce travail, d'étudier certaines relations algébriques entre deux groupes de points du plan complexe telles que, de la connaisance des positions de tous les points d'un groupe, on puisse déduire des renseignements sur la position d'un ou plusieurs points de l'autre groupe. Le théorème de Grace fournit l'exemple le plus connu de ces relations; après en avoir donné une démonstration que nous croyons assez différente de celles connues jusqu'ici ([1]), nous établissons un critère permettant de reconnaître si une relation donnée est ou non une *apolarité généralisée* (voir ci-après la définition de ce terme).

Nous étudions ensuite une famille de relations qui comprend, en particulier, la relation de Grace et les relations entre les n pôles d'une fraction rationnelle de la forme

$$f(z) = \frac{a_1}{z - x_1} + \frac{a_2}{z - x_2} + \ldots + \frac{a_n}{z - x_n}$$

et n zéros d'une quelconque de ses dérivées.

1. Le théorème bien connu de Grace peut s'exprimer sous la forme suivante : *étant donnés deux groupes de n points*,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

([1]) *Voir* J. H. GRACE, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 11, 1900, p. 352-357; G. SZEGÖ, *Math. Zeitschrift*, t. 13, 1922, p. 31; J. EGERVÁRY, *Acta Univ. Hung. Francesco-Josephinæ*, t. 1, 1922, p. 39-45. *Voir* également la démonstration de M. COHN (*Math. Zeitschrift*, t. 14, 1922, p. 110-148) qui se rapproche le plus de la démonstration donnée ici.

liés par la relation

$$(1)\qquad s_n - \frac{1}{C_n^1} s_{n-1}\sigma_1 - \frac{1}{C_n^2} s_{n-2}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{C_n^{n-1}} s_1\sigma_{n-1} + (-1)^n\sigma_n = 0$$

où $s_1, s_2 \ldots s_n, \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ *désignent les fonctions symétriques élémentaires des* x_i *et* y_i *respectivement, tout domaine circulaire fermé* (¹) *qui contient tous les* x_i *contient aussi au moins un des* y_i.

On peut se proposer d'examiner la nature de ce théorème en étudiant le problème général suivant : *étant donnés un groupe de n points* $x_1, \ldots, x_n$, *et un groupe de m points* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *liés par une relation algébrique symétrique en* x_i *et* y_i

$$(2)\qquad \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n;\ \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) = 0,$$

quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire cette relation pour que tout domaine circulaire fermé contenant tous les x_i *contienne au moins un des* y_i (²)? Si le polynome $\varphi(s_1, \ldots, s_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ est de degré h par rapport à chaque x_i, de degré k par rapport à chaque y_i, nous dirons pour abréger que la relation (2) est une *apolarité généralisée* du *type* $(n, m; h, k)$.

2. Faisons d'abord la remarque suivante, qui est presque évidente : *Il est impossible qu'une relation d'apolarité dépende algébriquement d'un paramètre* λ *pouvant prendre toute valeur arbitrairement donnée.* Donnons en effet aux x_i et y_i des valeurs telles qu'il existe une circonférence séparant ces deux groupes de points; (2) devient une équation algébrique en λ. En prenant pour λ la valeur λ_0 d'une des racines de cette équation, la relation (2) correspondant à cette valeur de λ ne serait pas une apolarité contrairement à l'hypothèse.

(¹) Rappelons qu'un *domaine circulaire fermé* (Kreisbereich) est un domaine fermé dont la frontière est une circonférence ou une droite : c'est donc l'intérieur d'un cercle, l'extérieur d'un cercle ou un demi-plan.

(²) Une telle relation est évidemment *réciproque*, car si un domaine circulaire fermé contenait tous les y_i et aucun x_i, le domaine circulaire *ouvert* complémentaire contiendrait tous les x_j et aucun y_i, et il en serait de même d'un domaine circulaire fermé contenu dans le domaine ouvert et en différant assez peu.

On déduit de cette remarque la conséquence suivante. Soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m) \equiv \varphi(s_1, \ldots, s_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_m);$$

faisons sur les x_i et y_i la *même* transformation homographique dépendant d'un paramètre arbitraire λ.

$$x' = \frac{a(\lambda)x + b(\lambda)}{c(\lambda)x + d(\lambda)}, \qquad y' = \frac{a(\lambda)y + b(\lambda)}{c(\lambda)y + d(\lambda)}$$

et soit

$$\begin{aligned} f(x'_1, \ldots, x'_n; y'_1, \ldots, y'_m) &\equiv F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m; \lambda) \\ &\equiv \Phi(s_1, \ldots, s_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_m; \lambda). \end{aligned}$$

D'après la définition même, $\Phi = 0$ est une relation d'apolarité généralisée. Elle doit donc être indépendante de λ. Or, étant donnée une transformation homographique quelconque

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

le faisceau de transformations dépendant d'un paramètre λ

$$x' = \frac{[a + (1-a)\lambda]x + (1-\lambda)b}{(1-\lambda)cx + [d + (1-d)\lambda]}$$

contient la transformation identique et la transformation donnée. Il s'ensuit que *toute relation d'apolarité est invariante par une transformation homographique arbitraire.*

3. Le résultat précédent nous amène à exprimer les conditions pour qu'une relation de la forme (2) soit invariante par une homographie quelconque. Comme toute homographie est un produit de transformations élémentaires des trois types

$$x' = \lambda x, \qquad x' = \frac{1}{x}, \qquad x' = x + \lambda,$$

les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\varphi = 0$ soit invariante par l'homographie sont les suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} &f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n; \lambda y_1, \lambda y_2, \ldots, \lambda y_m) \\ &\quad \equiv \lambda^p f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

autrement dit, φ doit avoir tous ses termes de *même poids total p* par rapport aux s et aux σ;

$$(\text{II})\qquad s_n^h \sigma_m^k f\left(\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}; \frac{1}{y_1}, \ldots, \frac{1}{y_m}\right) \equiv f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$$

d'où l'on tire en particulier

$$p = \frac{nh+mk}{2};$$

$$(\text{III})\qquad f(x_1+\lambda, \ldots, x_n+\lambda; y_1+\lambda, \ldots, y_m+\lambda) \equiv f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m).$$

Pour que cette dernière condition soit vérifiée, il faut et il suffit que

$$\frac{d}{d\lambda} f(x_1+\lambda, \ldots, x_n+\lambda; y_1+\lambda, \ldots, y_m+\lambda) \equiv 0,$$

quels que soient $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ et λ. Il suffit d'ailleurs que cette relation ait lieu identiquement en x_i et y_i pour une valeur *fixe* de λ, par exemple $\lambda = 0$; en effet, si l'on a identiquement

$$\left[\frac{d}{d\lambda} f(x_1+\lambda, \ldots, x_n+\lambda; y_1+\lambda, \ldots, y_m+\lambda)\right]_{\lambda=0} \equiv 0,$$

on aura aussi pour une valeur λ_0 arbitraire

$$\left[\frac{d}{d\lambda} f(x_1+\lambda_0+\lambda, \ldots, x_n+\lambda_0+\lambda; y_1+\lambda_0+\lambda, \ldots, y_m+\lambda_0+\lambda)\right]_{\lambda=0} \equiv 0$$

ou

$$\left[\frac{d}{d\lambda} f(x_1+\lambda, \ldots, x_n+\lambda; y_1+\lambda, \ldots, y_m+\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_0} \equiv 0.$$

Nous poserons

$$D\varphi = \left[\frac{d}{d\lambda} f(x_1+\lambda, \ldots, x_n+\lambda; y_1+\lambda, \ldots, y_m+\lambda)\right]_{\lambda=0},$$

on a immédiatement

$$(3)\qquad Ds_p = (n-p+1)\, s_{p-1} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(4)\qquad D\sigma_q = (m-q+1)\, \sigma_{q-1} \qquad (q = 1, 2, \ldots, m),$$

on peut donc encore exprimer la condition (III) sous la forme

$$(\text{IV})\qquad D\varphi = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial s_p} Ds_p + \sum_{q=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_q} D\sigma_q$$
$$= \sum_{p=1}^{n} (n-p+1)\, s_{p-1} \frac{\partial\varphi}{\partial s_p} + \sum_{q=1}^{m} (m-q+1)\, \sigma_{q-1} \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_q} \equiv 0.$$

Comme application, montrons que la relation (1) de Grace est *la seule relation du type* $(n, m; 1, 1)$ *invariante par homographie*. D'après la condition (I) une telle relation est de la forme

$$\varphi \equiv s_p \sigma_q + a_1 s_{p-1} \sigma_{q+1} + \ldots + a_r s_{p-r} \sigma_{q+r} = 0.$$

On a nécessairement $q = 0$, car dans la relation (IV) le terme

$$(m - q + 1) \sigma_{q-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_q} = (m - q + 1) s_p \sigma_{q-1}$$

ne peut se réduire avec aucun autre si $q \neq 0$. Pour la même raison $r = p$. La condition (II) montre ensuite que $p = n = m$. La relation (IV) s'écrit alors

$$\begin{aligned} D\varphi = s_{n-1} + 2 a_1 s_{n-2} \sigma_1 + 3 a_2 s_{n-3} \sigma_2 + \ldots + n a_{n-1} \sigma_{n-1} \\ + n a_1 s_{n-1} + (n-1) a_2 s_{n-2} \sigma_1 + (n-2) a_3 s_{n-3} \sigma_2 + \ldots + a_n \sigma_{n-1} \equiv 0, \end{aligned}$$

d'où

$$a_1 = -\frac{1}{C_n^1}, \qquad a_2 = \frac{1}{C_n^2}, \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{1}{C_n^{n-1}}, \qquad a_n = (-1)^n.$$

On retrouve bien la relation (1).

4. Nous ne considérerons plus désormais que des *relations invariantes par homographie*. Soit

$$(2) \qquad \varphi(s_1, \ldots, s_n; \sigma_1, \ldots, \sigma_m) = 0$$

une telle relation, et supposons que *ce ne soit pas une relation d'apolarité*. Il existe alors deux groupes de points $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m$, *séparés* par une circonférence (Γ). Par une transformation homographique, on peut supposer que (Γ) est le cercle unité, les x_i étant tous extérieurs à (Γ), les y_i tous intérieurs. De plus, on peut supposer qu'un des x_i est différent de tous les autres. En effet, laissons fixes dans (2) tous les x_i et tous les y_i à l'exception de x_1 et y_1 ; on obtient alors une relation algébrique entre x_1 et y_1. Ou bien cette relation est identiquement nulle, auquel cas on peut donner à x_1, y_1 des valeurs arbitraires sans que (2) cesse d'être vérifiée; ou bien il n'en est pas ainsi, et lorsque x_1 varie arbitrairement dans un voisinage assez petit de sa position initiale, il en est de même de y_1 [1]. On peut donc faire varier x_1 de manière qu'il soit distinct de tous les autres x_i, et que les x_i et y_i soient encore séparés par la circonférence unité.

Faisons maintenant une transformation homographique qui transforme en lui-même l'intérieur du cercle unité, et fasse correspondre à x_1 le point à l'infini. Si l'on écrit la relation (2) sous la forme

$$x_1^h \Big[A_0(x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) + \frac{1}{x_1} A_1(x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{x_1^h} A_h(x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \Big] = 0,$$

on voit que, puisque les x_i et y_i autres que x_1 restent finis, on a nécessairement

$$(5) \qquad A_0(x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) = 0.$$

Ainsi, si la relation (2) n'est pas une apolarité, il est possible de trouver un groupe de $(n-1)$ points $x_2, \ldots, x_n$ extérieurs au cercle unité, et un groupe de m points $y_1, \ldots, y_m$ intérieurs à ce cercle, vérifiant la relation (5).

Ce procédé semble conduire à une méthode de récurrence pour établir que la relation (2) est une apolarité; malheureusement la relation (5) n'est pas invariante par homographie, car si elle vérifie bien les conditions (I) et (IV) elle ne vérifie pas la condition (II).

5. Montrons toutefois comment, pour la relation (1), on peut arriver ainsi à une démonstration très simple du théorème de Grace.

La relation (5) s'écrit ici

$$(6) \qquad s'_{n-1} - \frac{1}{C_n^1} s'_{n-2}\sigma_1 + \frac{1}{C_n^2} s'_{n-3}\sigma_2 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{C_n^{n-1}} \sigma_{n-1} = 0,$$

$s'_1, s'_2, \ldots, s'_{n-1}$ étant les fonctions symétriques élémentaires

[1] Il se pourrait encore que la relation entre x_1 et y_1 ait la forme $\psi(x_1)\chi(y_1) = 0$. Si y_1 est confondu avec une des racines de $\chi(y_1) = 0$ on peut encore faire varier x_1 arbitrairement sans que (2) cesse d'être vérifiée; si c'est x_1 qui est confondu avec une racine de $\psi(x_1) = 0$, on raisonnera sur les y_i au lieu de raisonner sur les x_i.

de $x_2, \ldots, x_n$. Déterminons $(n-1)$ points $y'_1, \ldots, y'_{n-1}$ dont les fonctions symétriques élémentaires sont $\sigma'_1, \ldots, \sigma'_{n-1}$, par les conditions

$$\frac{1}{C^1_{n-1}}\sigma'_1 = \frac{1}{C^1_n}\sigma_1, \qquad \frac{1}{C^2_{n-1}}\sigma'_2 = \frac{1}{C^2_n}\sigma_2, \qquad \ldots, \qquad \sigma'_{n-1} = \frac{1}{C^{n-1}_n}\sigma_{n-1}.$$

Si $g(y) \equiv (y-y_1)\ldots(y-y_n) = 0$ est l'équation dont les y_i sont les racines, on voit de suite que les y'_i sont les racines de la dérivée $g'(y) = 0$. D'après le théorème de Gauss-Lucas, les y'_i sont également intérieurs au cercle unité. Or (6) s'écrit

$$(7) \qquad s'_{n-1} - \frac{1}{C^1_{n-1}} s'_{n-2}\sigma'_1 + \frac{1}{C^2_{n-1}} s'_{n-3}\sigma'_2 + \ldots + (-1)^{n-1}\sigma'_{n-1} = 0.$$

Donc, si la relation de Grace n'était pas une apolarité pour $n = n_0$, il en serait de même pour $n = n_0 - 1$. Or pour $n = 1$ cette relation se réduit à

$$x_1 - y_1 = 0,$$

qui est une apolarité; il y a donc contradiction, ce qui démontre le théorème de Grace.

Il est possible d'apporter un petit complément à ce résultat.

Le théorème de Grace montre qu'il est impossible que tous les x_i soient extérieurs au cercle unité et tous les y_i intérieurs; on peut montrer que le résultat subsiste lorsque quelques-uns de ces points sont *sur la circonférence unité*, sauf dans les deux cas suivants :

1° *Tous* les x_i et *tous* les y_i sont sur la circonférence;
2° On a $x_i = y_j$ pour des indices i et j convenables.

Supposons en effet qu'aucun de ces deux cas ne soit réalisé. La proposition est évidente pour $n = 1$; supposons-la vraie pour $n-1$ et montrons qu'elle est vraie pour n.

Soit x_1 un point non situé sur la circonférence unité et qui lui est extérieur (si tous les x_i étaient sur la circonférence, on raisonnerait sur les y_i); on peut toujours supposer ce point distinct des autres points x_i. Par une transformation homographique, on aura encore la relation (6) entre les points $x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$.

Or, d'après le théorème de Gauss-Lucas, un des points y'_i au moins est *intérieur* au cercle unité, sauf si tous les y_i sont confondus en un point de la circonférence. En négligeant d'abord ce cas particulier, on voit que la relation (7) serait vérifiée contrairement aux hypothèses faites (car les points y'_i qui sont sur la circonférence sont confondus avec des points y_i, donc distincts de tous les x_i). D'autre part, si tous les y_i sont confondus en un point, on peut supposer que c'est le point $y = 0$; la relation (1) s'écrit alors

$$s_n = 0.$$

Un des x_i est nul, contrairement à l'hypothése.

C. Q. F. D.

Les deux cas qui restent possibles sont effectivement réalisables. On vient de le voir pour le second; quant au premier, on en a des exemples simples en prenant pour les x_i les racines de $x^n - 1 = 0$ et pour les y_i les racines de $y^n + 1 = 0$ si n est *pair*, les racines de

$$y^n + i\lambda(y^{n-1} + y) - 1 = 0$$

avec λ réel assez petit, si n est *impair*.

Dans le second cas, on peut encore préciser la disposition des points x_i et y_i. On peut en effet appliquer de nouveau sur les x_i ou les y_i le procédé de récurrence qui nous a servi, et cela tant qu'il y a un point non situé sur la circonférence dans les configurations auxquelles on parvient. Supposons qu'on arrive ainsi à une configuration de h points x_i et h points y_i tous situés sur la circonférence; dans la configuration précédente, il y avait au moins un des points non situé sur la circonférence, supposons que ce soit un point x_1 extérieur au cercle; par suite les $(h + 1)$ points y_i de cette configuration sont confondus, sans quoi nous aurions au moins un point y_i intérieur au cercle dans la configuration suivante.

Remarquons maintenant qu'à chaque opération, le nombre total des x_i et y_i confondus en un point de la circonférence diminue d'une unité. Dans la configuration finale à laquelle nous sommes arrivés après $(n - h)$ opérations, les h points y_i sont confondus, donc un au moins des x_i est aussi confondu avec eux. Donc, dans la configuration primitive, *il y a un point de la circonfé-*

rence en lequel sont confondus au moins $(n+1)$ *points* x_i *et* y_i (il n'y en a d'ailleurs qu'un seul) [1].

6. Cherchons maintenant à reconnaître, par un *calcul régulier*, si une relation (2) donnée est ou non une relation d'apolarité.

Cherchons d'abord des *conditions suffisantes* pour que (2) soit une relation d'apolarité.

Supposons, pour cela, que (2) ne soit pas une apolarité; il existe donc deux groupes de points $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$, satisfaisant à (2) et séparés par une circonférence (Γ). Par une homographie, on peut toujours supposer que (Γ) est *l'axe réel*, les x_i étant dans le demi-plan inférieur, les y_i dans le demi-plan supérieur.

Considérons un des points y_i, soit y_1. La relation (2) le définit en fonction algébrique des x_i et y_i restants, sauf si cette relation contient un facteur de la forme $(y_1 - a)$; mais ceci est impossible, car (2) serait vérifiée pour $y_1 = a$ et les x_i et y_i restants arbitraires et aussi à cause de (IV) pour $y_1 = a + \lambda$ et les x_i et y_i restants arbitraires; ce serait donc une identité en $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$, ce qui est absurde. Il se peut d'ailleurs que pour la position considérée de $x_1, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_m$ la fonction

$$y_1 = \psi(x_1, \ldots, x_n; y_2, y_3, \ldots, y_m)$$

ait un *point d'indétermination;* mais il est alors possible de faire varier les x_i et y_i de quantités arbitrairement petites de sorte qu'il n'en soit plus de même pour la nouvelle position de ces points, les x_i et y_i étant toujours séparés par l'axe réel. Autrement dit, si l'équation (2) s'écrit

$$(2') \qquad \begin{aligned} &y_1^k A_0(x_1, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_m) \\ &+ y_1^{k-1} A_1(x_1, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_m) + \ldots = 0, \end{aligned}$$

y_1 étant d'autre part à distance finie, on peut supposer

$$(8) \qquad A_0(x_1, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_m) \neq 0$$

pour la position initiale choisie.

---

[1] Ces compléments au théorème de Grace ont déjà été indiqués par M. Egervary (*loc. cit.*).

Laissons maintenant $y_1, y_2, \ldots, y_m, x_3, x_4, \ldots, x_n$ *fixes* et faisons varier x_1 et x_2 de façon que (2) soit constamment vérifiée. Comme il n'y a en général ([1]) qu'un nombre fini de points (x_1, x_2) communs aux courbes (2) et

$$A_0(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_2, \ldots, y_m) = 0,$$

on peut toujours amener l'un des points x_1, x_2 à être sur l'axe réel, l'autre étant dans le demi-plan inférieur ou sur l'axe réel, ces deux points étant distincts et vérifiant la condition (8). Si x_1, par exemple, est resté dans le demi-plan inférieur, on peut recommencer l'opération en ne faisant varier cette fois que x_1 et x_3; sinon, on fera varier seulement x_3 et x_4, et ainsi de suite. On peut ainsi amener tous les x_i, *sauf un au plus*, en des points distincts situés sur l'axe réel, et vérifiant toujours la condition (8).

Si tous les x_i sont sur l'axe réel, on opère de même avec $y_2, y_3, \ldots, y_m$; s'il reste un x_i dans le demi-plan inférieur, soit x_1, on opérera sur x_1 et y_2, puis sur x_1 et y_3 si x_1 reste encore dans le demi-plan inférieur lorsque y_2 est venu sur l'axe réel, et ainsi de suite. On a finalement réduit les deux groupes de points $x_1, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m$ à l'un des trois types suivants :

a. Tous les x_i et y_i, à l'exception de y_1, sont des points distincts de l'axe réel.

b. Tous les x_i et y_i, à l'exception de x_1 et y_1, sont des points distincts de l'axe réel: x_1 est dans le demi-plan inférieur, y_1 dans le demi-plan supérieur.

c. Tous les points x_i et y_i, à l'exception de y_1 et y_2, sont des points distincts de l'axe réel; y_1 et y_2 sont dans le demi-plan supérieur.

Dans ces trois cas, la condition (8) est satisfaite, autrement dit l'équation (2′) en y_1 n'est pas identiquement nulle.

---

(1) Exceptionnellement les deux courbes pourraient avoir une partie commune $\chi(x_1, x_2) = 0$. Mais comme, à l'origine, le point (x_1, x_2) n'est pas sur cette courbe, d'après (8), on peut toujours s'arranger pour déplacer x_1 et x_2 sans jamais la rencontrer.

7. Il résulte de cette analyse que les trois conditions suivantes sont *suffisantes* pour que (2) soit une relation d'apolarité :

A. *L'équation* (2') *en* y_1 *a toutes ses racines réelles, quelles que soient les valeurs réelles prises par* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $y_2, y_3, \ldots, y_m$, *et n'annulant pas simultanément tous les coefficients.*

B. *Lorsque, dans la même équation, supposée toujours non identiquement nulle, on donne à* x_1 *une valeur quelconque située dans le demi-plan supérieur, les autres* x_i *et* y_i *ayant des valeurs réelles arbitraires, toutes les racines sont également dans le demi-plan supérieur.*

C. *Lorsque enfin, on y donne à* y_2 *une valeur quelconque du demi-plan supérieur, les autres* x_i *et* y_i *étant réels et arbitraires, toutes les racines sont dans le demi-plan inférieur.*

Il est bien aisé d'ailleurs de voir que ces conditions sont également *nécessaires*. En effet, supposons qu'il existe un système de valeurs réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_2, y_3, \ldots, y_m$ pour lesquelles l'équation (2') admet une racine imaginaire y_1, sans être identiquement nulle. En déplaçant alors les x_i et y_i de quantités suffisamment petites, de sorte que les x_i soient tous dans le demi-plan inférieur, les y_i dans le demi-plan supérieur, la racine y_1 se déplace également d'une quantité aussi petite que l'on veut, et l'on peut donc s'arranger pour qu'elle reste dans le demi-plan supérieur; il existe alors un système de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et un système de valeurs de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ qui sont séparés par l'axe réel et vérifient (2); cette relation n'est donc pas une apolarité.

On voit de même que les conditions (B) et (C) sont nécessaires.

8. On sait que, pour qu'une équation de degré k ait toutes ses racines réelles, ses coefficients doivent être réels et vérifier les $(k-1)$ inégalités déduites du théorème de Sturm. Pour que la condition (A) soit vérifiée, il faudra donc que les coefficients de la relation (2) soient *réels* et tels que $(k-1)$ formes en $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_2, y_3, \ldots, y_m$ qu'on peut former explicitement à partir de la relation (2), soient *définies positives*.

On peut obtenir des conditions de même nature pour (B) et (C). Supposons en effet que (A) soit vérifiée. Il est alors évident que la relation (2) où les x_i et y_i autres que x_1 et y_1 sont réels et *fixes*, établit entre x_1 et y_1 une correspondance telle que lorsque x_1 décrit le demi-plan supérieur, toutes les racines y_1 décrivent des domaines à un ou plusieurs feuillets, ne pouvant avoir comme frontières que *des segments de l'axe réel;* de plus, si l'on suppose la condition (A) également vérifiée quand on y permute les x_i et les y_i, tout point de l'un quelconque de ces domaines situé sur l'axe réel est nécessairement un point frontière. Si donc il existe un de ces domaines ayant des points dans le demi-plan inférieur, il se compose nécessairement de ce demi-plan tout entier, recouvert une ou plusieurs fois. Comme d'ailleurs la correspondance entre x_1 et y_1 est conforme, sauf en un nombre fini de points, on peut trouver au moins un segment de l'axe réel tel que, lorsque x_1 le parcourt dans le sens positif, une des racines y_1 se déplace sur l'axe réel dans le sens négatif; autrement dit, on peut trouver un point x_1 de l'axe réel tel qu'en ce point

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}} < 0.$$

Pour voir si la condition (B) est vérifiée, il suffit donc de former l'équation de degré k ayant pour racines les quantités $\dfrac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}}$ relative à chaque racine de (2′), et de voir ensuite si cette équation n'a que des racines *négatives ou nulles* quels que soient $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_2, y_3, \ldots, y_m$ réels.

On obtient cette fois $(2k-1)$ inégalités contenant ces variables. On opérera de même pour la condition (C).

9. On voit ainsi que le problème posé se ramène à chercher si une forme réelle donnée est définie positive; si les termes de la forme sont donnés à des coefficients numériques près, une application répétée du théorème de Sturm permettra de reconnaître, après un calcul plus ou moins long, pour quelles valeurs de ces coefficients la forme est bien définie positive. Par contre, lorsqu'il

s'agit de montrer qu'une famille de relations, dépendant d'un entier arbitraire n, ne se compose que d'apolarités, la méthode précédente ne semble pas pouvoir conduire à des résultats simples. C'est ainsi que pour la relation de Grace, la condition (A) est bien vérifiée d'elle-même, mais les conditions (B) et (C) conduisent à reconnaître si deux formes en x_i et y_i sont positives, ce qui ne paraît pas immédiat.

Nous terminerons ces généralités sur les apolarités en donnant un exemple très simple d'une apolarité du type (2, 2; 2, 2); il s'agit de la relation

$$(9)\qquad \left(s_2-\frac{1}{2}s_1\sigma_1+\sigma_2\right)^2+\lambda(s_1^2-4s_2)(\sigma_1^2-4\sigma_2)$$
$$=\frac{1}{4}[(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(x_1-y_2)(x_2-y_1)]^2$$
$$+\lambda(x_1-x_2)^2(y_1-y_2)^2=0.$$

On voit immédiatement que cette relation est invariante par homographie, quel que soit λ. Si $y_1=y_2$, elle donne $x_1=y_1$ ou $x_2=y_1$. Si $y_1\neq y_2$, on peut, par une homographie, supposer $y_1=0$, $y_2=\infty$; il reste la relation entre x_1 et x_2,

$$\lambda(x_1-x_2)^2+\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2=0$$

ou encore, en posant

$$\frac{x_2}{x_1}=t,$$

$$(10)\qquad t^2\left(\frac{1}{4}+\lambda\right)+2t\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)+\left(\frac{1}{4}+\lambda\right)=0.$$

La condition pour que (9) soit une apolarité est bien évidemment que x_1 et x_2 soient en ligne droite avec l'origine et séparés par ce point; autrement dit, l'équation (10) doit avoir ses racines réelles et négatives. La condition de réalité donne

$$\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)^2-\left(\frac{1}{4}+\lambda\right)^2=-\lambda\geqq 0\qquad\text{ou}\qquad\lambda\leqq 0$$

et comme les deux racines sont toujours de même signe, il faut et il suffit, pour qu'elles soient négatives, que

$$\left(\frac{1}{4}-\lambda\right)\left(\frac{1}{4}+\lambda\right)\geqq 0\qquad\text{ou}\qquad\lambda\geqq-\frac{1}{4}.$$

On obtient ainsi une famille d'apolarités dépendant du paramètre réel λ compris entre $-\frac{1}{4}$ et o.

Cet exemple nous montre que *les conditions* (B) *et* (C) *ne sont pas, en général, des conséquences de la condition* (A), puisque ici cette dernière est vérifiée dès que $\lambda \leqq 0$.

10. Nous allons maintenant considérer les relations invariantes par homographie, du type suivant :

$$(11)\qquad D_k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} (x_1-y_1)^k & (x_1-y_2)^k & \ldots & (x_1-y_n)^k \\ (x_2-y_1)^k & (x_2-y_2)^k & \ldots & (x_2-y_n)^k \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (x_n-y_1)^k & (x_n-y_2)^k & \ldots & (x_n-y_n)^k \end{vmatrix} = 0,$$

k étant un entier positif ou négatif. Pour $0 \leqq k \leqq n-2$, cette relation est identiquement nulle; c'est en effet un polynome de degré k en x_1, qui admet les $n-1$ racines $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Pour $k \geqq n-1$, on a une forme de degré kn par rapport à l'ensemble des x_i et y_i, divisible par les déterminants de Vandermonde

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i \neq j}(x_i - x_j) \qquad \text{et} \qquad V(y_1, \ldots, y_n) = \prod_{i \neq j}(y_i - y_j).$$

Après suppression de ces facteurs, il reste donc une relation de degré total $[k-(n-1)]n$, de degré $k-(n-1)$ par rapport à chacune des variables. Cette relation

$$(12)\qquad R_k(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = 0$$

est d'ailleurs, comme la relation (11), invariante par toute homographie. Pour $k = n-1$, R_{n-1} est une constante, pour $k = n$, c'est une relation du type $(n, n; 1, 1)$, donc c'est la relation de Grace à un facteur numérique près.

Pour $k = -l < 0$, on peut écrire

$$D_k = \frac{V(x_1, \ldots, x_n)V(y_1, \ldots, y_n)}{\prod_{i,j}(x_i - y_j)^l} S_l(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n),$$

S_l étant un polynome de degré $n(n-1)(l-1)$ par rapport à l'ensemble des variables, de degré $(n-1)(l-1)$ par rapport à chacune d'elles. La relation

$$S_l(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = 0 \tag{13}$$

est donc également invariante par toute homographie. Pour $n = l = 2$, S_l est encore une relation linéaire par rapport à chaque variable, c'est donc la relation de Grace correspondante.

On peut remarquer de suite que pour $n = 2$ et $k > 2$ ou $l > 2$, les relations (12) et (13) ne sont pas des apolarités; en y faisant en effet $y_1 = 0$, $y_2 = \infty$, (12) s'écrit

$$\frac{x_1^k - x_2^k}{x_1 - x_2} = 0$$

et (13)

$$\frac{x_1^l - x_2^l}{x_1 - x_2} = 0$$

et ces équations donnent pour $\frac{x_2}{x_1}$ des racines imaginaires.

11. Nous allons étudier tout d'abord la relation

$$S_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = 0. \tag{15}$$

Elle s'introduit naturellement dans le problème suivant : *Chercher les régions décrites par les zéros de la dérivée de la fonction rationnelle*

$$f(z) = \frac{a_1}{z - x_1} + \frac{a_2}{z - x_2} + \ldots + \frac{a_n}{z - x_n}, \tag{16}$$

lorsqu'on se donne les n pôles $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les coefficients a_i restant arbitraires. En effet, si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont n zéros de l'équation $f'(z) = 0$, en éliminant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ entre les n équations linéaires

$$f'(y_1) = 0, \quad f'(y_2) = 0, \quad \ldots, \quad f'(y_n) = 0,$$

on obtient la relation $D_{-2} = 0$, d'où la relation (15) en divisant par les déterminants de Vandermonde [car on peut supposer les x_i tous distincts, et il est facile de voir qu'en général les $(2n-2)$ racines de $f'(z) = 0$ sont distinctes (¹)]. On voit donc

(¹) Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, il suffit de prendre tous les x_i réels et les zéros de $P(z)$

que l'on peut se donner arbitrairement $(n-1)$ des zéros de $f'(z)$, soit $y_2, y_3, \ldots, y_n$; les $(n-1)$ autres sont alors racines de l'équation (15) en y_1, qui, en général, ne sera pas identiquement nulle.

Montrons d'abord que, lorsque $n > 2$, *la relation* (15) *n'est jamais une apolarité;* nous allons voir en effet qu'elle ne vérifie pas la condition (A). Cette condition peut ici se formuler de la manière suivante : si la fonction (16) a ses pôles réels, ainsi que $(n-1)$ des racines de sa dérivée, les $(n-1)$ autres racines de la dérivée sont aussi réelles. Nous allons former un exemple où il n'en sera pas ainsi: il suffit de prendre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ réels et distincts, et de considérer la fonction

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^k}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)}$$

où $k = \frac{n}{2}$ si n est pair, $k = \frac{n-1}{2}$ si n est impair.

En vertu du théorème de Rolle, la dérivée a $(n-1)$ zéros réels, et admet par ailleurs les points $\pm i$ comme zéros multiples d'ordre $k-1$. Ainsi, lorsque n est pair, il est possible que $n-1$ zéros de la dérivée soient réels et $n-2$ imaginaires conjugués; le dernier zéro est nécessairement réel. Lorsque n est impair, on voit qu'on peut avoir $(n-3)$ zéros imaginaires conjugués, mais on n'aperçoit pas de suite si les deux derniers zéros sont nécessairement réels ou non: cependant, en prenant dans l'exemple précédent

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{\frac{n-1}{2}} = -1, \qquad x_{\frac{n+1}{2}} = \ldots = x_{n-1} = 1, \qquad x_n = 0,$$

on voit que ces deux zéros peuvent aussi être imaginaires ([1]). Remarquons encore que, dans les exemples précédents, on peut donner aux x_i et aux y_i réels des déplacements réels suffisamment

---

situés sur l'axe réel et non entrelacés avec les x_i; l'application du théorème de Rolle à $f(z)$ ou à $\frac{1}{f(z)}$ montre alors que les $(2n-2)$ zéros de $f'(z)$ sont réels et distincts.

([1]) Les x_i ne sont plus distincts ici, mais il est clair que lorsque q points x_i viennent se confondre en un seul point, $q-1$ zéros de la dérivée viennent aussi en ce point (on considère donc ce point comme pôle d'ordre $2q$ et zéro d'ordre $q-1$ pour la dérivée).

petits, mais *d'ailleurs arbitraires*, sans que les y_i restants cessent d'être imaginaires, en vertu de la continuité des racines de l'équation (15) en fonction des paramètres.

Il s'ensuit que, lorsque les x_i sont réels et fixes, les valeurs réelles des $(n-1)$ points y_i telles que les $(n-1)$ zéros restants de la dérivée ne soient pas tous réels, *ne peuvent être liées par aucune relation d'égalité de la forme*

$$(17) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_2, y_3, \ldots, y_n) = 0.$$

Il suffirait, en effet, en supposant que les y_i vérifient une telle relation, de les déplacer de quantités très petites δy_i qui ne satisfassent pas à la relation

$$\delta\varphi = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \delta y_i = 0,$$

pour que la relation (17) cesse d'être vérifiée.

12. Les propriétés que nous venons d'établir paraissent être d'un caractère essentiellement négatif; il est cependant possible, comme nous allons le voir, d'en tirer des conséquences relatives à la disposition des points y_i par rapport aux x_i.

Nous allons démontrer en effet la proposition suivante :

Si les points x_1, x_2, ..., x_n sont distincts et situés sur une même circonférence (Γ), *la dérivée de la fonction* (16) *a toujours un zéro au moins dans chaque domaine circulaire fermé limité par* (Γ).

Ce théorème a déjà été établi, *dans le cas particulier où* $n=3$ par M. Biernacki [1], en suivant d'ailleurs une méthode toute différente de celle que nous allons employer.

Nous supposerons, contrairement à ce que nous voulons démontrer, que les $(2n-2)$ zéros de la dérivée, $y_1, y_2, \ldots, y_{2n-2}$ sont par exemple tous intérieurs au cercle (Γ) et nous montrerons qu'il en résulte une contradiction.

Les rapports mutuels des a_i sont en général déterminés lors-

---

(1) *Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires* (Thèse) (*Bulletin de l'Académie polonaise des sciences et des lettres*, série A, 1927, p. 677).

qu'on se donne $(n-1)$ des zéros y_i, soit $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ par exemple; pour qu'il n'en soit pas ainsi, il est nécessaire que les deux relations

$$(18) \quad \begin{cases} S_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0, \\ S_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n \quad ; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

soient simultanément vérifiées. Ces deux relations en $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ne se réduisent d'ailleurs pas à une seule, sauf pour des positions particulières de $x_1, \ldots, x_n$ [1], puisqu'elles dépendent chacune d'une variable x_i qui n'entre pas dans l'autre. Donc, si l'on se donne arbitrairement $(n-2)$ des y_i, ces équations (18) ne seront pas compatibles.

Partons donc de la fonction $f(z)$ telle que les zéros de la dérivée $y_1, \ldots, y_{2n-2}$ soient intérieurs à (Γ); en faisant au besoin varier légèrement les a_i, ce qui fait varier aussi peu qu'on veut les y_i, on peut supposer que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ ne satisfont pas à (18). Fixons alors $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ et faisons varier y_1. Les points $y_n, \ldots, y_{2n-2}$ varient en fonction de y_1, étant racines de l'équation en y

$$(19) \qquad S_2(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y) = 0.$$

Nous ferons varier y_1 jusqu'au moment où l'un des n points $y_1, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-2}$ atteint la circonférence (Γ). Je dis d'abord qu'il y a *au plus* $(n-2)$ *de ces points qui atteignent la circonférence*. En effet, s'il y en avait $(n-1)$, de deux choses l'une : ou bien ces points déterminent les rapports des a_i; en supposant alors, par une homographie, que (Γ) est l'axe réel, ces rapports seraient réels, et les y_i restants deux à deux symétriques par rapport à l'axe réel, ce qui est contraire à l'hypothèse; ou bien en supposant par exemple que ces $(n-1)$ points sont $y_1, y_n, \ldots, y_{2n-3}$ on aurait simultanément

$$(18') \quad \begin{cases} S_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}; y_1, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-3}) = 0, \\ S_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_n \quad ; y_1, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-3}) = 0. \end{cases}$$

---

[1] Plus précisément, le raisonnement est valable sauf pour des valeurs de x_i vérifiant une ou plusieurs *équations* algébriques; mais il est clair que, si le théorème est vrai en général, il est encore vrai pour ces positions particulières des x_i; il suffit, pour le voir, de raisonner par continuité.

En se rappelant que $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-3}$ sont racines de (19), on voit que ces deux relations entraîneraient une égalité de la forme

$$(20) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n; y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}) = 0$$

et nous pouvons toujours supposer qu'on a choisi $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ de manière à ne pas vérifier cette relation ([1]).

Supposons donc qu'il y ait $h \leq n-2$ points sur la circonférence : en changeant les notations, nous appellerons ces points $y_1, y_2, \ldots, y_h$; soient $y_{h+1}, \ldots, y_{n-1}$, $(n-h-1)$ des points y_i restants [intérieurs à (Γ)]. Montrons d'abord qu'on peut amener $y_1, y_2, \ldots, y_h$ d'une manière continue à être *aussi voisins que nous voulons* de h points pris *arbitrairement* sur la circonférence, de manière qu'aucun des points y_i ne sorte de la circonférence.

Fixons en effet $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$, et faisons varier y_1 le long de (Γ) jusqu'à la position que nous voulons lui faire prendre. Si, dans ce déplacement, aucun des points $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-2}$ ne vient sur (Γ), nous fixerons ensuite $y_1, y_3, \ldots, y_{n-1}$ et ferons varier y_2 et ainsi de suite.

Si, au cours de la variation de y_1, un certain nombre des y_i intérieurs viennent sur la circonférence, on montre d'abord comme ci-dessus ([2]) qu'il ne peut pas y en avoir plus de $(n-h-2)$. Si k est le nombre de points qui se trouvent sur (Γ), on recommence à raisonner sur ces k points comme sur les

---

([1]) En effet, la relation (20) ne peut être identiquement nulle en $y_2, y_3, \ldots y_{n-1}$, sinon les deux relations (18') seraient compatibles *quels que soient* y_2, $y_3, \ldots, y_{n-1}$. Prenons alors *arbitrairement* $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-3}$ et déterminons y_1 par la condition que l'*une* des équations (18') soit vérifiée. $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ sont alors déterminés comme racines de l'équation en y

$$S_2(x_1, \ldots, x_n; y_1, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-3}, y) = 0.$$

Mais, d'après l'hypothèse, pour ces valeurs de $y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$, la seconde équation (18') est également vérifiée; ces deux équations seraient donc compatibles quels que soient $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-3}$, contrairement à ce qu'on a vu plus haut.

([2]) Il faut pour cela que $y_2, \ldots, y_{n-1}$ aient été choisis de manière à ne pas vérifier une relation de la forme (20), ce qui explique la nécessité de faire peut-être varier légèrement les points situés sur la circonférence autour des positions que nous voulons leur faire prendre, ces variations étant aussi petites que l'on veut d'ailleurs.

h points du début, et ainsi de suite; on n'est arrêté ainsi qu'un nombre fini de fois, puisqu'il ne peut venir que $(n - 2)$ points au plus sur (Γ).

Supposons donc qu'on ait amené les h points à occuper des positions aussi voisines que l'on veut de positions arbitraires sur (Γ). Laissant fixes alors ces h points, et $(n - h - 2)$ points y_i intérieurs, nous ferons varier le $(n - 1)^{\text{ième}}$ point jusqu'à ce qu'un au moins des y_i vienne sur la circonférence, et ainsi de suite.

Nous arrivons finalement à la configuration suivante : $(n - 2)$ points $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ occupent sur la circonférence des positions aussi voisines que nous voulons de positions arbitraires; les autres points y_i sont intérieurs à (Γ).

Prenons alors un de ces points intérieurs, soit y_{n-1} et faisons-le varier; je dis que tant que ce point n'atteint pas (Γ), aucun des autres points $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-2}$ ne peut atteindre (Γ). Il suffit pour le voir de raisonner encore comme ci-dessus en supposant que $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ ont été choisis de sorte que les relations (18) ne soient pas compatibles. Nous pouvons donc faire tendre y_{n-1} vers une position arbitraire de (Γ) sans que $y_n, \ldots, y_{2n-2}$ sortent du cercle. De plus, lorsque y_{n-1} atteindra ce point arbitraire de la circonférence, *tous les points* $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n-2}$ *atteindront la circonférence en même temps*, puisque, les relations (18) étant incompatibles, ils devraient, dans le cas contraire, être deux à deux symétriques par rapport à (Γ).

Nous sommes donc arrivés à la conclusion suivante : étant donnés $(n - 1)$ points arbitraires sur (Γ), nous pouvons donner à $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ des valeurs situées sur (Γ) et aussi voisines que nous voulons des points choisis, telles que les y_i restants soient tous sur (Γ). Ceci est en contradiction avec ce qui a été démontré au n° **11**, d'où la conclusion.

On peut ajouter à la proposition que nous venons de démontrer le complément suivant, qui résulte de la démonstration faite : *Si* $h \leq n - 2$ *zéros de la dérivée sont sur la circonférence* (Γ), *il y a au moins un autre zéro dans chaque domaine circulaire fermé limité par* (Γ).

13. Le résultat précédent ne peut être amélioré. Cela résulte d'un exemple donné par M. Biernacki (*loc. cit.*, p. 673) : la fraction rationnelle a la forme

$$f(z) = \frac{(z-a)(z-b)^{n-1}}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots(z-x_n)},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ et b étant sur (Γ), a un point intérieur.

M. Biernacki montre alors que $(n-1)$ zéros de $f'(z)$ sont extérieurs à (Γ), un zéro est intérieur, les $(n-2)$ autres étant en b. En donnant à b un déplacement aussi petit que l'on veut de manière à l'amener à l'extérieur de (Γ), on aura donc une fraction rationnelle dont la dérivée n'admet qu'un seul zéro à l'intérieur de (Γ) et sur la circonférence.

14. On peut remarquer que la démonstration du n° 12 s'applique à toute relation (2), à coefficients réels, invariante par homographie et telle que :

1° La condition (A) n'est pas vérifiée ;

2° Si, lorsqu'on se donne $(m-1)$ des points y_i, l'équation qui détermine le dernier de ces points a k racines, tout groupe de m points y_i extrait de cet ensemble de $m+k-1$ points satisfait à la relation (2), les x_i conservant les mêmes valeurs.

Il est évident que toutes les relations $R_k = 0$ et $S_l = 0$ satisfont à la deuxième de ces conditions. Pour $k \geq n+1$, on peut voir aisément que la relation (12) satisfait aussi à la première. En effet, d'après un théorème de Sylvester ([1]), *lorsque les a_i et les x_i sont réels, l'équation algébrique*

$$(21)\qquad f_k(z) = a_1(z-x_1)^k + a_2(z-x_2)^k + \ldots + a_n(z-x_n)^k = 0,$$

a au plus autant de racines réelles qu'il y a de variations dans la suite

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_{n-1},\quad a_n,\quad (-1)^k a_1.$$

Il en résulte immédiatement que si $(k-n)$ est *pair*, il y a au plus n racines réelles, et si $(k-n)$ est *impair*, il y en a au plus $(n-1)$. On peut donc, non seulement étendre ici le résultat

---

([1]) *Voir*, par exemple, Pólya et Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, t. II, p. 60, n° 79. Les x_i sont rangés par ordre de grandeur croissante.

du n° 12, mais, comme on le voit aisément en reprenant la démonstration, établir le théorème suivant :

Lorsque les x_i sont tous situés sur une même circonférence (Γ), *l'équation* (21) *a toujours au moins* $E\left(\frac{k-n+1}{2}\right)$ *racines dans chaque domaine circulaire fermé limité par* (Γ) (¹).

Il n'existe pas pour la relation (13) de propriété aussi simple que le théorème de Sylvester, comme le montre déjà le cas $l = 2$ que nous avons traité, et dans lequel les $(2n-2)$ points y_i peuvent être tous réels.

Nous allons cependant montrer que, lorsque les a_i et les x_i sont tous réels, *le nombre des racines réelles de l'équation*

$$(22) \qquad \varphi_l(z) \equiv \frac{a_1}{(z-x_1)^l} + \frac{a_2}{(z-x_2)^l} + \ldots + \frac{a_n}{(z-x_n)^l} = 0,$$

a une limite supérieure $\psi(n)$ *indépendante de* l.

Désignons en effet par $\psi(n, l)$ cette limite, et écrivons l'équation (22) sous la forme

$$(23) \qquad F(z) \equiv a_2 \frac{(z-x_1)^l}{(z-x_2)^l} + a_3 \frac{(z-x_1)^l}{(z-x_3)^l} + \ldots + a_n \frac{(z-x_1)^l}{(z-x_n)^l} = -a_1.$$

Il est clair qu'entre deux racines réelles consécutives de l'équation (23), il y a au moins un pôle de $F(z)$ ou un zéro d'ordre impair de $F'(z)$; or on a

$$F'(z) = l(z-x_1)^{l-1}\left[\frac{a_2(x_1-x_2)}{(z-x_2)^{l+1}} + \frac{a_3(x_1-x_3)}{(z-x_3)^{l+1}} + \ldots + \frac{a_n(x_1-x_n)}{(z-x_n)^{l+1}}\right].$$

On a donc, si l est *pair*,

$$\psi(n, l) \leqq \psi(n-1, l+1) + n + 1$$

(¹) Si l'on voulait seulement montrer qu'il y a *une* racine au moins de cette équation dans chacun de ces domaines, on pourrait y parvenir plus simplement de la manière suivante : si l'équation (21) avait toutes ses racines dans le demi-plan supérieur par exemple, lorsque les x_i sont tous réels, on en déduirait, d'après un théorème d'Hermite et Biehler (*voir* Pólya et Szegö, *loc. cit.*, t. I, p. 88, n° 25) que l'équation

$$\alpha_1(z-x_1)^k + \alpha_2(z-x_2)^k + \ldots + \alpha_n(z-x_n)^k = 0 \qquad \text{où} \qquad \alpha_i = \mathcal{R}\, a_i$$

aurait toutes ses racines réelles, contrairement au théorème de Sylvester.

et si l est *impair*

$$\psi(n, l) \leqq \psi(n-1, l+1) + n$$

En se rappelant d'autre part que

$$\psi(2, l) \leqq 2 \qquad (\text{si } l \text{ est } pair),$$
$$\psi(2, l) \leqq 1 \qquad (\text{si } l \text{ est } impair),$$

on obtient aisément, par récurrence, les résultats suivants :

$$\psi(n, l) \leqq \frac{n^2 + 2n - 4}{2} \qquad (\text{si } n \text{ est } pair \text{ et } l\ pair);$$

$$\psi(n, l) \leqq \frac{n^2 + 2n - 6}{2} \qquad (\text{si } n \text{ est } pair \text{ et } l\ impair);$$

$$\psi(n, l) \leqq \frac{n^2 + 2n - 5}{2} \qquad (\text{si } n \text{ est } impair).$$

On peut donc prendre dans tous les cas

$$\psi(n) = \frac{(n-1)(n+3)}{2};$$

il est d'ailleurs vraisemblable que la limite exacte est plus petite; il serait intéressant de la déterminer.

Ce résultat montre donc que, dès que $l > \frac{n+3}{2}$, l'équation (22) ne peut avoir toutes ses racines réelles; on en déduit comme ci-dessus que, *lorsque les x_i sont tous sur une même circonférence* (Γ), *la dérivée* $(l-1)^{\text{ième}}$ *de la fonction rationnelle* (16) *a toujours au moins* $E\left[\left(\frac{l}{2} - \frac{n+3}{4}\right)(n-1)\right]$ *racines dans chaque domaine circulaire limité par* (Γ), ***dès** que* $l > \frac{n+3}{2}$.

Lorsque $l \leqq \frac{n+3}{2}$ on peut généraliser la proposition du n° **12** établie pour la dérivée première. Il suffit de montrer que l'équation (22) peut avoir $(n-1)$ racines réelles sans que toutes les autres racines soient réelles.

Lorsque l est *impair*, on voit immédiatement, en prenant tous les a_i positifs, que l'équation (22) a exactement $(n-1)$ racines réelles.

Lorsque l est *pair*, on peut remarquer que $\varphi_l(z)$ est, à un facteur près, la dérivée $(l-1)^{\text{ième}}$ de toute fraction rationnelle de la forme

$$f(z) = b_0 z^{l-2} + b_1 z^{l-3} + \ldots + b_{l-2} + \frac{a_1}{z - x_1} + \frac{a_2}{z - x_2} + \ldots + \frac{a_n}{z - x_n}$$
$$= \frac{P(z)}{(z - x_1)(z - x_2)\ldots(z - x_n)},$$

$P(z)$ étant un polynome de degré $n + l - 2$ au plus. Si ce polynome est choisi de façon à n'avoir aucune racine réelle, il est clair que les a_i seront alternativement de signes contraires, si l'on suppose les x_i rangés par ordre de grandeurs croissantes le long de l'axe réel. Par suite, toute dérivée d'ordre impair de $f(z)$ aura au moins un zéro entre deux x_i consécutifs, en particulier il en sera ainsi pour $\varphi_l(z)$; si de plus, on prend

$$P(z) = (z^2 + 1)^{\frac{l}{2} + E\left(\frac{n}{2}\right) - 1}$$

on voit que la dérivée $(l-1)^{\text{ième}}$ de $f(z)$ aura des zéros d'ordre

$$\frac{l}{2} + E\left(\frac{n}{2}\right) - l = E\left(\frac{n}{2}\right) - \frac{l}{2}$$

aux points $\pm i$; nous aboutissons donc bien à la conclusion cherchée si $l \leqq n - 2$. Comme on peut supposer $l < \frac{n+3}{2}$, il ne reste à examiner que les cas où $n \leqq 6$, avec $l \geqq n - 1$ est pair; or, d'après les formules données plus haut pour $\psi(n, l)$ on a

$$\begin{array}{lll} \text{pour } n = 6, & \psi(n, l) \leqq 22, & l(n-1) \geqq 30; \\ \text{pour } n = 5, & \psi(n, l) \leqq 15, & l(n-1) \geqq 16; \\ \text{pour } n = 4, & \psi(n, l) \leqq 10, & l(n-1) \geqq 12; \end{array}$$

pour $n = 3$, on peut supposer $l \geqq 4$, le cas de $l = 2$ ayant été traité ci-dessus; on a alors

$$\psi(n, l) \leqq 5, \qquad l(n-1) \geqq 8.$$

Dans tous ces cas, l'équation (22) a toujours au moins une racine imaginaire.

On peut donc dire que *lorsque les x_i sont tous situés sur une même circonférence* (Γ), *toutes les dérivées de la fraction rationnelle* (16) *ont au moins un zéro dans chaque domaine circulaire fermé limité par* (Γ),