BULLETIN DE LA S. M. F.

ELIE CARTAN

Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité

Bulletin de la S. M. F., tome 59 (1931), p. 88-118

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1931__59__88_0>

SUR LA THÉORIE DES SYSTÈMES EN INVOLUTION ET SES APPLICATIONS A LA RELATIVITÉ;

PAR M. ÉLIE CARTAN.

La théorie de la relativité a introduit des systèmes d'équations aux dérivées partielles dont on s'est contenté en général de démontrer la compatibilité par des raisonnements élémentaires peu rigoureux. Dans le cas particulier du système de 22 équations que M. Einstein a mises en 1929 à la base d'une nouvelle théorie unitaire du champ, ces raisonnements n'étaient pas sans soulever de sérieuses difficultés, qu'il fallait tourner par des moyens très artificiels. En réalité ma théorie des systèmes de Pfaff en involution permet l'étude complète de ces problèmes de compatibilité; elle permet aussi de préciser d'une manière rigoureuse le degré de généralité des solutions d'un système relativiste, quand on ne regarde pas comme distinctes deux solutions qui se déduisent l'une de l'autre par un simple changement des variables indépendantes : dans ce cas, en effet, chaque solution est essentiellement caractérisée par le système des invariants différentiels qui déterminent l'Univers, abstraction faite d'un changement arbitraire de variables, et ce qu'on cherche, c'est précisément le degré de généralité des solutions du système différentiel qui définit ces invariants en fonction d'un nombre fini d'entre eux.

Dans le présent Mémoire, je me propose d'exposer sous une forme tout à fait élémentaire ma théorie des systèmes en involution en mettant ces systèmes non pas, comme dans mes travaux antérieurs, sous la forme de systèmes de Pfaff, mais sous la forme de *systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre*. Sous cette forme, en effet, la théorie se prête beaucoup mieux à la plupart des applications à la Physique mathématique. Elle prend en même temps un aspect de simplicité remarquable. En particulier, pour les systèmes relativistes, le nombre d'identités nécessaires est précisé, et l'on s'aperçoit ainsi qu'il peut être supérieur à celui que font prévoir les raisonnements habituels : c'est précisément ce qui se passe pour le dernier système de M. Einstein.

Il est presque inutile de faire remarquer qu'un système qui n'est pas en involution n'est pas pour cela incompatible. D'après un théorème général, tout système peut être prolongé par dérivations successives de manière à conduire soit à des équations algébriquement incompatibles, soit à un système en involution.

Le seul théorème supposé connu du lecteur est le théorème d'existence de Cauchy-Kowalewski.

I. — Systèmes en involution à deux variables indépendantes.

1. Considérons un système de r équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre à n fonctions inconnues u_1, u_2, ..., u_n de deux variables indépendantes x, y :

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_{1k}\frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n} b_{1k}\frac{\partial u_k}{\partial y} - c_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} a_{rk}\frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n} b_{rk}\frac{\partial u_k}{\partial y} - c_r = 0. \end{array}\right.$$

Les coefficients a_{ik} et c_i sont des fonctions *analytiques* déterminées de x, y, u_1, ..., u_n. *Nous ne nous occuperons du reste que des solutions analytiques de ces équations.*

Supposons d'abord que les équations (1) puissent être résolues par rapport à r des dérivées partielles $\frac{\partial u_k}{\partial y}$, par exemple $\frac{\partial u_1}{\partial y}, \dots, \frac{\partial u_r}{\partial y}$, ce qui exige naturellement $n \geq r$. Dans ce cas le théorème classique de Cauchy-Kowalewski nous apprend que le système donné admet toujours une solution analytique et une seule, telle que les fonctions u_{r+1}, ..., u_n étant arbitrairement données, les fonctions u_1, ..., u_r se réduisent, pour $y = y_0$, à des fonctions données de x.

Si $n > r$, on peut dire que la solution générale du système dépend de $n - r$ fonctions arbitraires de deux variables; si $n = r$, on peut dire qu'elle dépend de n fonctions arbitraires d'une variable, à savoir les fonctions de x auxquelles se réduisent u_1, ..., u_n pour $y = y_0$.

2. Supposons maintenant que les équations (1) ne soient pas résolubles par rapport à r des dérivées partielles $\frac{\partial u_k}{\partial y}$, ou, ce qui revient au même, que l'élimination des $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ conduise à un certain nombre $r_1 > 0$ d'équations ne contenant que les $\frac{\partial u_k}{\partial x}$. Il peut arriver que, par un changement de variables, cette circonstance ne se présente pas, ou que l'élimination envisagée conduise à moins de r_1 équations indépendantes des $\frac{\partial u_k}{\partial y}$. Nous dirons que le choix des variables est *singulier* lorsque l'élimination des $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ conduit à un nombre d'équations indépendantes supérieur à ce qu'il est dans le cas général.

Plaçons-nous alors dans le cas où le choix des variables n'est pas singulier. Nous écrirons les équations du système sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} X_i \equiv \sum_k a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} - c_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r_1), \\ Y_j \equiv \sum_k \left(a_{r_1+j,k} \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{r_1+j,k} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) - c_{r_1+j} = 0 \\ \qquad (j = 1, \ldots, r - r_1). \end{cases}$$

L'hypothèse que le choix des variables n'est pas singulier entraîne des conséquences importantes relativement aux coefficients des équations. Considérons en effet le changement de variables

$$x' = x, \qquad y' = y + mx,$$

m étant une constante. On a

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{\partial u_k}{\partial x'} + m \frac{\partial u_k}{\partial y'}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial y} = \frac{\partial u_k}{\partial y'}.$$

Les équations (2), avec les nouvelles variables, s'écrivent

$$X_i \equiv \sum_k a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x'} + m \sum_k a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y'} - c_i = 0,$$

$$Y_j \equiv \sum_k a_{r_1+j,k} \frac{\partial u_k}{\partial x'} + \sum_k (b_{r_1+j,k} + m a_{r_1+j,k}) \frac{\partial u_k}{\partial y'} - c_{r_1+j} = 0.$$

Si m est suffisamment petit, les Y_j sont linéairement indépendants par rapport aux $\frac{\partial u_k}{\partial y'}$; il faut donc que les r_1 formes

$$\sum_k a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y'} \qquad (i = 1, \ldots, r_1),$$

considérées comme formes linéaires en $\frac{\partial u_1}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial y'}$, dépendent linéairement des $r - r_1$ formes

$$\sum_k (b_{r_1+j,k} + m a_{r_1+j,k}) \frac{\partial u_k}{\partial y'}.$$

Cela a lieu pour toutes les valeurs de m suffisamment petites; en faisant tendre m vers zéro, on arrive au théorème suivant :

Théorème. — *Si le choix des variables n'est pas singulier, il existe entre les coefficients des équations* (2) *des relations de la forme*

$$(3) \qquad a_{ik} = \lambda_{i1} b_{r_1+1,k} + \lambda_{i2} b_{r_1+2,k} + \ldots + \lambda_{i,r-r_1} b_{r,k}$$
$$(i = 1, \ldots, r_1;\ k = 1, \ldots, n).$$

Avant de tirer de ces relations les conséquences importantes qu'elles comportent, faisons la remarque suivante qui nous sera utile dans la suite. Supposons, ce qui est toujours permis, que les équations $Y_j = 0$ soient résolubles par rapport à

$$\frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{r-r_1}}{\partial y}.$$

Il résulte alors des relations (3) que les équations $X_i = 0$ sont résolubles par rapport à r_1 des dérivées correspondantes

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{r-r_1}}{\partial x};$$

nous pourrons supposer qu'elles sont résolubles par rapport aux r_1 premières. Il est clair du reste *a priori* que l'on a $r - r_1 \geqq r_1$, sinon les équations données pourraient être résolues par rapport à plus de $r - r_1$ des dérivées $\frac{\partial u_k}{\partial x}$ et le choix des variables serait singulier.

3. Les relations (3) nous conduisent à considérer les r_1 expressions

$$(4) \qquad \Theta_i = \frac{\partial X_i}{\partial y} - \lambda_{i1}\frac{\partial Y_1}{\partial x} - \lambda_{i2}\frac{\partial Y_2}{\partial x} - \ldots - \lambda_{i,r-r_1}\frac{\partial Y_{r-r_1}}{\partial x}.$$

Si l'on développe ces expressions, on voit immédiatement qu'elles ne contiennent ni les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\,\partial y}$, ni les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}$, mais uniquement les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$, et naturellement aussi les dérivées $\frac{\partial u_k}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_k}{\partial y}$. En tenant compte des équations données et des équations $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, on peut faire disparaître des Θ_i les quantités

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{r-r_1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{r_1}}{\partial x};$$

par suite les Θ_i deviennent des fonctions déterminées

$$\Theta_i = \Theta_i\left(x, y, u_k, \frac{\partial u_{r_1+1}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial x}, \frac{\partial u_{r-r_1+1}}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_{r_1+1}}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right);$$

on peut ajouter la remarque que les seconds membres sont linéaires par rapport aux $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$.

Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Si les r_1 expressions Θ_i, réduites en tenant compte des équations du système et des équations $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, sont identiquement nulles quand on y regarde leurs arguments comme des variables indépendantes, le système donné admet au moins une solution analytique telle que, pour $y = y_0$, les fonctions u_k et leurs dérivées partielles $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ se réduisent respectivement à des fonctions arbitrairement données $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, sous la seule condition que ces fonctions satisfassent aux équations données, dans les coefficients desquelles on fait $y = y_0$.*

En effet, les $r - r_1$ équations $Y_j = 0$ constituent un système de Cauchy-Kowalewski. Si $n = r - r_1$, elles admettent une solution et une seule correspondant aux conditions initiales données. Si $n > r - r_1$, on pourra se donner *arbitrairement* les fonctions

u_{r-r_1+1}, ..., u_n, pourvu que, pour $y = y_0$, elles se réduisent, ainsi que leurs dérivées par rapport à y, aux valeurs qui ont été données. Ces fonctions étant ainsi choisies, les équations $Y_j = 0$ admettront, pour les $r - r_1$ autres fonctions inconnues, une solution et une seule correspondant aux conditions initiales données.

Partons alors d'une solution des équations $Y_j = 0$. Les valeurs des fonctions u_k, portées dans X_i, donneront pour X_i des fonctions déterminées $\overline{X}_i(x, y)$, s'annulant par hypothèse pour $y = y_0$. Or nous avons admis que les quantités Θ_i s'annulaient identiquement en tenant compte des $X_i = 0$, $Y_j = 0$ et $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$. Les fonctions $\overline{X}_i$ satisfont donc à un système d'équations de la forme

$$\frac{\partial \overline{X}_i}{\partial y} - \sum_k \mu_{ik} \frac{\partial \overline{X}_k}{\partial x} - f_i(x, y, \overline{X}_k) = 0;$$

c'est un système de Cauchy-Kowalewski qui admet, par suite, une solution et une seule correspondant aux conditions initiales $\overline{X}_i = 0$ pour $y = y_0$; cette solution est évidemment $\overline{X}_i = 0$. Le théorème énoncé est donc démontré.

4. Le théorème précédent admet une réciproque :

Réciproque. — *Si le système donné admet au moins une solution telle que, pour $y = y_0$, les fonctions u_k et leurs dérivées partielles $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ se réduisent respectivement à des fonctions $\varphi_k(x)$ et $\psi_k(x)$ assujetties à la seule condition que ces fonctions satisfassent aux équations données, les expressions Θ_i, réduites en tenant compte des équations $X_i = 0$, $Y_j = 0$, $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, sont identiquement nulles.*

En effet, d'après ce qui a été dit plus haut, pour satisfaire aux équations (2) où l'on fait $y = y_0$, on peut se donner arbitrairement les fonctions

$$\varphi_{r_1+1}(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x)$$

ainsi que les fonctions

$$\psi_{r-r_1+1}(x), \quad \ldots, \quad \psi_n(x);$$

quant aux fonctions $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{r_1}(x)$, on peut se donner arbitrairement leurs valeurs numériques pour $x = x_0$. Par suite on peut se donner arbitrairement, pour $x = x_0$, les valeurs numériques des fonctions

$$\begin{array}{lll} \varphi_k(x) & (k = 1, 2, \ldots, n), & \\ \varphi'_{r_1+1}(x), & \ldots, & \varphi'_n(x); \\ \varphi''_{r_1+1}(x), & \ldots, & \varphi''_n(x); \\ \psi_{r-r_1+1}(x), & \ldots, & \psi_n(x). \end{array}$$

Il en résulte que si dans l'expression Θ_i on fait $x = x_0$, $y = y_0$, cette expression est nulle quelles que soient les valeurs numériques qu'on donne aux autres arguments. Cette expression Θ_i est donc identiquement nulle et le théorème est démontré.

5. Dire que les Θ_i, réduites en tenant compte des équations $X_i = 0$, $Y_j = 0$, $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, deviennent identiquement nulles, c'est dire qu'il existe, entre les dérivées partielles du premier ordre des premiers membres des équations données, r_1 combinaisons linéaires indépendantes qui deviennent identiquement nulles en tenant compte des équations du système. Nous dirons pour abréger qu'il existe r_1 identités indépendantes entre les dérivées des premiers membres des équations données.

Une remarque importante et immédiate est la suivante : *il ne peut pas exister plus de* r_1 *identités de ce genre*. En effet, soit Θ une combinaison linéaire des $\frac{\partial X_i}{\partial x}, \frac{\partial X_i}{\partial y}, \frac{\partial Y_j}{\partial x}, \frac{\partial Y_j}{\partial y}$ ne contenant, après réduction des termes semblables, aucune dérivée partielle du second ordre. L'absence des dérivées $\frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}$ exige que les coefficients des $\frac{\partial Y_j}{\partial y}$ dans Θ soient tous nuls; l'absence des dérivées $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}$ exige que les coefficients des $\frac{\partial Y_j}{\partial x}$ soient tous nuls; enfin l'absence des dérivées $\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$ exige que les coefficients des $\frac{\partial X_i}{\partial x}$ soient tous nuls. Par suite toute combinaison linéaire des $\frac{\partial X_i}{\partial x}, \frac{\partial X_i}{\partial y}, \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \frac{\partial Y_i}{\partial y}$ d'où s'éliminent toutes les dérivées secondes est bien déterminée quand on se donne les coefficients des $\frac{\partial X_i}{\partial y}$; ces combinaisons sont donc au nombre maximum de r_1 indépendantes.

Le résultat précédent a une très grande importance, parce que l'entier r_1 a une signification intrinsèque *indépendante du choix non singulier des variables indépendantes.* L'existence de r_1 identités permet donc d'appliquer le théorème du n° 4 à n'importe quel choix non singulier des variables indépendantes.

Nous conviendrons de dire que le système donné est *en involution* si les dérivées des premiers membres sont liées par r_1 identités linéairement indépendantes.

Si $n > r - r_1$, on voit qu'on peut se donner arbitrairement $n - r + r_1$ des fonctions inconnues u_k : nous dirons que la solution générale dépend de $n - r + r_1$ fonctions arbitraires de x, y.

Si $n = r - r_1$, toute solution du système est univoquement déterminée par une solution, pour $y = y_0$, des équations $X_i = 0$, puisque les équations $Y_j = 0$ déterminent complètement les valeurs initiales des $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ quand on connaît les valeurs initiales des u_k. Comme on peut satisfaire aux r_1 équations $X_i = 0$ en se donnant arbitrairement, pour $y = y_0$, $n - r_1$ des fonctions inconnues, nous dirons que la solution générale du système dépend de $n - r_1$ fonctions arbitraires de x.

Remarquons que le nombre des éléments arbitraires qui entrent dans la solution générale est le dernier nombre non nul de la suite non croissante

$$[n - r_1, \quad n - r + r_1,$$

et ces éléments arbitraires sont des fonctions d'une ou de deux variables suivant que le nombre considéré est le premier ou le second de la suite.

Il pourrait du reste arriver qu'on ait $n = r - r_1 = r_1$. La solution générale ne dépendrait plus alors que de constantes arbitraires, en nombre égal à n.

6. Un cas important est celui où l'on a $n = r - r_1$. On dit dans ce cas que le système en involution *détermine* les fonctions inconnues; d'une manière plus précise, la connaissance des fonctions inconnues pour $y = y_0$ détermine complètement ces fonctions pour toutes les valeurs de y.

Pour qu'un système soit en involution et détermine les fonctions inconnues, il faut :

1° *que les équations du système soient résolubles par rapport aux n dérivées* $\frac{\partial u_k}{\partial y}$;

2° *qu'il existe entre les dérivées des premiers membres* $r_1 = r - n$ *identités linéairement indépendantes.*

Ces deux conditions sont du reste indépendantes l'une de l'autre. La seconde condition est généralement admise comme nécessaire et suffisante.

7. Considérons une solution particulière du système donné, que nous regarderons comme définissant une surface à deux dimensions de l'espace à $n+r$ dimensions. Considérons sur cette surface une ligne $y=f(x)$. La solution pourra être obtenue par la méthode de Cauchy-Kowalewski indiquée plus haut si le choix des nouvelles variables

$$x' = x, \qquad y' = y - f(x)$$

n'est pas singulier. Dans le cas contraire la courbe sera dite *caractéristique*. Comme on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} - f' \frac{\partial u}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y'},$$

la courbe sera caractéristique si, en revenant à la forme générale (1) des équations du système, les r formes linéaires suivantes en $\frac{\partial u_1}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial y'}$:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (b_{ik} - f' a_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial y'} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

sont au nombre de $r - r_1 - 1$ indépendantes au plus. On peut exprimer ce résultat sous une forme plus symétrique.

La ligne définie par l'équation différentielle

$$\alpha\, dx + \beta\, dy = 0$$

est caractéristique si les r formes linéaires

$$\sum_{k=1}^{k=n} (\alpha a_{ik} + \beta b_{ik}) \xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

en $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ *sont au nombre de* $r - r_1 - 1$ *indépendantes au plus.*

8. Appliquons les considérations précédentes à quelques exemples simples. Si nous considérons une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre

$$\frac{\partial z}{\partial y} - f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

nous pouvons la ramener au système de deux équations linéaires aux deux fonctions inconnues z et p :

$$\frac{\partial z}{\partial x} - p = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} - f(x, y, z, p) = 0.$$

Sous cette forme ce système *n'est pas en involution ;* on sait bien du reste que, pour $y = y_0$, on peut se donner arbitrairement $z = \varphi(x)$ et $p = \varphi'(x)$, mais qu'on ne peut pas se donner arbitrairement $\frac{\partial p}{\partial y}$. Nous ajouterons aux deux équations précédentes la suivante, qui est évidente :

$$\frac{\partial p}{\partial y} - f'_x - f'_z p - f'_p \frac{\partial p}{\partial x} = 0.$$

Nous avons ici

$$n = 2, \qquad r = 3, \qquad r_1 = 1 ;$$

il existe d'autre part une identité

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} - p\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - f\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - f_x - f'_z p - f'_p \frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0.$$

Le système est donc en involution et il *détermine* les deux fonctions inconnues, la solution générale dépendant de $n - r_1 = 1$ fonction arbitraire d'une variable.

Les caractéristiques sont données en exprimant que les trois formes

$$\alpha\xi_1, \quad \beta\xi_1, \quad (\beta - \alpha f'_p)\xi_2$$

se réduisent à $r - r_1 - 1 = 1$ au plus ; il faut donc $\beta = \alpha f'_p$. Par suite les caractéristiques sont les lignes satisfaisant à

$$dy = f'_p\, dx,$$

résultat classique.

Prenons maintenant un système de deux équations à deux fonctions inconnues

$$a_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{11}\frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{12}\frac{\partial u_2}{\partial y} - c_1 = 0.$$

$$a_2\frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} + b_{21}\frac{\partial u_1}{\partial y} + b_{22}\frac{\partial u_2}{\partial y} - c_2 = 0.$$

L'entier $r - r_1 = 2 - r_1$ est le nombre des formes linéaires en ξ_1, ξ_2

$$(a_{11}\alpha + b_{11}\beta)\xi_1 + (a_{12}\alpha + b_{12}\beta)\xi_2,$$

$$(a_{21}\alpha + b_{21}\beta)\xi_1 + (a_{22}\alpha + b_{22}\beta)\xi_2,$$

qui sont linéairement indépendantes. En général ce nombre est 2 ; on a alors $r_1 = 0$, et par suite le système est en involution, il détermine les fonctions inconnues, la solution générale dépendant de $n - r_1 = 2$ fonctions arbitraires d'une variable.

On montre facilement que l'entier r_1 est égal à 1 si le système donné est de la forme

$$X \equiv a\frac{\partial u_1}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial x} - c_1 = 0,$$

$$Y \equiv a\frac{\partial u_1}{\partial y} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} - c_2 = 0;$$

l'existence d'une identité est alors nécessaire pour qu'il soit en involution; mais il ne détermine pas les fonctions inconnues. L'identité est de la forme

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0;$$

il est bien entendu qu'elle doit avoir lieu quelles que soient les valeurs numériques des arguments $x, y, u_1, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}$, *mais à condition que ces valeurs numériques satisfassent aux équations données.*

II. — Les systèmes en involution à trois variables indépendantes.

9. Prenons maintenant un système de r équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables indépen-

dantes x, y, z. Supposons que, pour un choix arbitraire des variables indépendantes, le système puisse être résolu par rapport à $r - r_2$ des dérivées $\frac{\partial u_k}{\partial z}$, et que les r_2 équations indépendantes résultant de l'élimination des $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ puissent être résolues par rapport à $r_2 - r_1$ des dérivées $\frac{\partial u_k}{\partial y}$, de sorte qu'il existe r_1 combinaisons linéaires indépendantes du système qui ne contiennent que les $\frac{\partial u_k}{\partial x}$. Le choix des variables sera alors dit *singulier* si les premiers membres des équations admettent moins de $r - r_2$ combinaisons linéairement indépendantes par rapport aux $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ ou si, en admettant exactement $r - r_2$, les r_2 combinaisons linéaires qui ne contiennent plus les $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ admettent elles-mêmes moins de $r_2 - r_1$ combinaisons indépendantes par rapport aux $\frac{\partial u_k}{\partial y}$.

Le choix des variables étant supposé non singulier, nous pourrons écrire les équations du système sous la forme

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &X_i = \sum_k a_{ik}\frac{\partial u_k}{\partial x} - d_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r_1),\\ &Y_j = \sum_k \left(a_{r_1+j,k}\frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{r_1+j,k}\frac{\partial u_k}{\partial y}\right) - d_{r_1+j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, r_2 - r_1),\\ &Z_h = \sum_k \left(a_{r_2+h,k}\frac{\partial u_k}{\partial x} + b_{r_2+h,k}\frac{\partial u_k}{\partial y} + c_{r_2+h,k}\frac{\partial u_k}{\partial z}\right) - d_{r_2+h} = 0\\ &\qquad\qquad (h = 1, \ldots, r - r_2).\end{aligned}\right.$$

Nous avons démontré précédemment l'existence de relations

$$(6)\quad \begin{gathered} a_{ih} = \lambda_{i1} b_{r_1+1,h} + \lambda_{i2} b_{r_1+2,h} + \ldots + \lambda_{i,r_2-r_1} b_{r_2 h}\\ (i = 1, \ldots, r_1;\ h = 1, \ldots, n).\end{gathered}$$

Il en existe d'autres. Considérons en effet le changement de variables

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z + my + nx,$$

m et n étant des constantes. Les coefficients de $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ dans X_i, Y_j et Z_h deviennent respectivement

$$na_{ik}, \quad na_{r_1+j,k} + mb_{r_1+j,k}, \quad na_{r_2+h,k} + mb_{r_2+h,k} + c_{r_2+h,k}.$$

Les $r - r_2$ expressions Z_h continuent, si m et n sont suffisamment petits, à être linéairement indépendantes par rapport aux $\dfrac{\partial u_k}{\partial z}$. Un raisonnement analogue à celui qui a été fait précédemment montre l'existence de relations de la forme

$$(7)\quad \left\{ \begin{array}{ll} a_{ik} = \mu_{i1} c_{r_2+1,k} + \ldots + \mu_{i,r-r_2} c_{rk} & (i = 1, \ldots, r_1;\ k = 1, \ldots, n), \\ a_{r_1+j,k} = \nu_{j1} c_{r_2+1,k} + \ldots + \nu_{j,r-r_2} c_{rk} & (j = 1, \ldots, r_2 - r_1;\ k = 1, \ldots, n), \\ b_{r_1+j,k} = \rho_{j1} c_{r_2+1,k} + \ldots + \rho_{j,r-r_2} c_{rk} & (j = 1, \ldots, r_2 - r_1;\ k = 1, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Cela posé, considérons les $r_1 + r_2$ expressions

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \Theta_i \equiv \dfrac{\partial X_i}{\partial y} - \displaystyle\sum_{j=1}^{j=r_2-r_1} \lambda_{ij} \dfrac{\partial Y_j}{\partial x} & (i = 1, \ldots, r_1), \\ \Phi_i \equiv \dfrac{\partial X_i}{\partial z} - \displaystyle\sum_{h=1}^{h=r-r_2} \mu_{ih} \dfrac{\partial Z_h}{\partial x} & (i = 1, \ldots, r_1), \\ \Psi_j \equiv \dfrac{\partial Y_j}{\partial z} - \displaystyle\sum_{h=1}^{h=r-r_2} \left(\nu_{jh} \dfrac{\partial Z_h}{\partial x} + \rho_{jh} \dfrac{\partial Z_h}{\partial y} \right) & (j = 1, \ldots, r_2 - r_1). \end{array} \right.$$

Les Θ_i développées ne contiennent que les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$, les Φ_i développées ne contiennent que les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}$, les Ψ_j développées ne contiennent que les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}$.

10. Faisons ici encore une remarque analogue à celle du n° 2. Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que les équations $Z_h = 0$ soient résolubles par rapport aux dérivées

$$(9)\quad \frac{\partial u_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_{r-r_2}}{\partial z}.$$

Les dernières relations (7) montrent qu'alors les équations $Y_j = 0$ sont résolubles par rapport à $r_2 - r_1$ des dérivées correspondantes $\dfrac{\partial u_1}{\partial y}, \ldots, \dfrac{\partial u_{r-r_2}}{\partial y}$; nous supposerons qu'elles le sont par rapport aux $r_2 - r_1$ premières

$$(10)\quad \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{r_2-r_1}}{\partial y}.$$

Les relations (6) montrent enfin que les équations $X_i = 0$ sont résolubles par rapport à r_1 des dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_{r_2-r_1}}{\partial x}$; nous supposerons qu'elles le sont par rapport à

$$(11) \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial u_{r_1}}{\partial x}.$$

Si maintenant nous tenons compte des équations $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, nous voyons que nous pouvons faire disparaître des Θ_i les r_1 premières dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial x^2}$; nous pourrons ensuite utiliser les équations (5) elles-mêmes pour faire disparaître les dérivées (9), (10) et (11). Finalement, après ces réductions, l'expression Θ_i ne dépendra que des arguments

$$x, \; y, \; z, \; u_k, \quad \frac{\partial u_{r_1+k}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{r_2-r_1+k}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{r-r_2+k}}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_1+k}}{\partial x^2}.$$

Si nous tenons compte des équations $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial Y_j}{\partial x} = 0$, nous pourrons faire disparaître des Φ_i les dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \ldots,$ $\frac{\partial^2 u_{r_1}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u_{r_2-r_1}}{\partial x \partial y}$; nous pourrons ensuite utiliser, comme pour les Θ_i, les équations (5) elles-mêmes. Après ces réductions, les expressions Φ_i ne dépendront que des arguments

$$x, \; y, \; z, \; u_k, \quad \frac{\partial u_{r_1+k}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{r_2-r_1+k}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{r-r_2+k}}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_1+k}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_2-r_1+k}}{\partial x \partial y}.$$

Par un procédé analogue nous pourrons réduire les expressions Ψ_j de manière à ne les faire dépendre que des arguments

$$x, \; y, \; z, \; u_k, \quad \frac{\partial u_{r_1+k}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{r_2-r_1+k}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{r-r_2+k}}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2 u_{r_1+k}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_2-r_1+k}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_2-r_1+k}}{\partial y^2}.$$

11. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

Théorème. — *Si les $r_1 + r_2$ expressions Θ_i, Φ_i, Ψ_j, réduites en tenant compte des équations $\frac{\partial X_i}{\partial x} = \frac{\partial Y_j}{\partial x} = \frac{\partial Y_j}{\partial y} = X_i = Y_j = Z_h = 0$, deviennent identiquement nulles, le système donné admet au* *moins une solution analytique telle que, pour $z = z_0$, les fonctions u_k et leurs dérivées partielles $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ se réduisent à des fonctions données $\varphi_k(x, y)$ et $\psi_k(x, y)$, sous la seule condition que ces fonctions satisfassent aux équations données, dans les coefficients desquelles on fait $z = z_0$.*

Remarquons d'abord que les équations $X_i = Y_j = 0$ forment un système en involution de deux variables indépendantes x, y. Cela posé, supposons que les fonctions $\varphi_k(x, y)$ et $\psi_k(x, y)$ satisfassent, pour $z = z_0$, aux équations données, regardées comme équations aux dérivées partielles par rapport aux fonctions inconnues $u_k = \varphi_k(x, y)$ et comme équations linéaires par rapport aux fonctions inconnues $\frac{\partial u_k}{\partial z} = \psi_k(x, y)$. Les équations $Z_h = 0$ constituent alors un système de Cauchy-Kowalewski. Si $n = r - r_2$, elles admettent une solution et une seule correspondant aux conditions initiales données. Si $n > r - r_2$, on pourra se donner *arbitrairement* les fonctions $u_{r-r_2+1}, \ldots, u_n$, pourvu que pour $z = z_0$ elles se réduisent, ainsi que leurs dérivées par rapport à z, aux valeurs qui ont été données : ces fonctions étant choisies, les équations $Z_h = 0$ admettront une solution et une seule satisfaisant aux conditions initiales données.

Portant dans X_i et Y_j les valeurs des u_k correspondant à une solution des équations $Z_h = 0$, nous obtiendrons des fonctions déterminées $\overline{X}_i(x, y, z)$ et $\overline{Y}_j(x, y, z)$ qui, par hypothèse, s'annulent pour $z = z_0$. Or, d'après les hypothèses faites sur les Φ_i et Ψ_j, ces expressions s'annulant identiquement en tenant compte de $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Y_j}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial Y_j}{\partial y} = 0$, on voit que les fonctions $\overline{X}_i$ et $\overline{Y}_j$ satisfont à un système de Cauchy-Kowalewski de la forme

$$\frac{\partial \overline{X}_i}{\partial z} - \sum_k A_{ik} \frac{\partial \overline{X}_k}{\partial x} - \sum_k B_{ik} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial x} - \sum_k C_{ik} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial y} - f_i(x, y, z, \overline{X}_i, \overline{Y}_j) = 0,$$

$$\frac{\partial \overline{Y}_j}{\partial z} - \sum_k A'_{jk} \frac{\partial \overline{X}_k}{\partial x} - \sum_k B'_{jk} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial x} - \sum_k C'_{jk} \frac{\partial \overline{Y}_k}{\partial y} - \varphi_j(x, y, z, \overline{X}_i, \overline{Y}_j) = 0.$$

Ce système admet une solution et une seule correspondant aux conditions initiales $\overline{X}_i = 0$, $\overline{Y}_j = 0$ pour $z = z_0$: cette solution est manifestement $\overline{X}_i \equiv 0$, $\overline{Y}_j \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer.

12. Le théorème précédent admet une réciproque.

Réciproque. — *Supposons que le système donné jouisse des propriétés suivantes :*

1° *Si l'on fait* $z = z_0$ *dans les coefficients des équations données et si l'on y regarde les quantités* u_k *et* $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ *comme des fonctions inconnues de* x, y, *le système admet au moins une solution telle que, pour* $y = y_0$, *les fonctions* u_k, *leurs dérivées partielles* $\frac{\partial u_k}{\partial y}$ *et les fonctions* $\frac{\partial u_k}{\partial z}$ *se réduisent à des fonctions données de* x, *assujetties à la seule condition que ces fonctions de* x *satisfassent aux équations données, dans les coefficients desquelles on remplace* y *par* y_0;

2° *Si* $u_k = \varphi_k(x, y)$ *et* $\frac{\partial u_k}{\partial z} = \psi_k(x, y)$ *constituent une solution quelconque satisfaisant aux conditions précédentes, il existe au moins une solution* $u_k(x, y, z)$ *telle que, pour* $z = z_0$, *la fonction* $u_k(x, y, z)$ *se réduise à* $\varphi_k(x, y)$ *et sa dérivée par rapport à* z *à* $\psi_k(x, y)$;

S'il en est ainsi, les $r_1 + r_2$ *expressions* Θ_i, Φ_i, Ψ_j *deviennent identiquement nulles en tenant compte des équations*

$$\frac{\partial X_i}{\partial x} = \frac{\partial Y_j}{\partial x} = \frac{\partial Y_j}{\partial y} = X_i = Y_j = Z_h = 0.$$

La première partie de la réciproque ne fait en somme intervenir que les équations $X_i = 0$, $Y_j = 0$, dans les coefficients desquelles on fait $z = z_0$; elle exprime que le système ainsi obtenu est en involution. Comme cela doit avoir lieu quel que soit z_0, cela prouve que les expressions Θ_i deviennent identiquement nulles quand on tient compte des équations $\frac{\partial X_i}{\partial x} = 0$, $X_i = 0$, $Y_j = 0$.

Passons à la seconde partie de la réciproque. D'après ce qui a été dit plus haut, on obtient une solution du système en se donnant arbitrairement :

1° Les fonctions $u_{r-r_2+1}(x, y, z), \ldots, u_n(x, y, z)$;
2° Pour $z = z_0$, les fonctions $u_{r_2-r_1+1}(x, y), \ldots, u_{r-r_2}(x, y)$;
3° Pour $z = z_0$, $y = y_0$, les fonctions $u_{r_1+1}(x), \ldots, u_{r_2-r_1}(x)$;
4° Pour $z = z_0$, $y = y_0$, $x = x_0$, les valeurs $u_1, \ldots, u_{r_1}$.

Par suite on peut se donner arbitrairement, pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, les valeurs numériques des quantités

$$u_k, \quad \frac{\partial u_{r_1+k}}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_{r_2-r_1+k}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_{r-r_2+k}}{\partial z},$$
$$\frac{\partial^2 u_{r_1+k}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_2-r_1+k}}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u_{r_2-r_1+k}}{\partial y^2}.$$

Comme les constantes x_0, y_0, z_0 peuvent être prises arbitrairement, il en résulte que les expressions réduites des Φ_i et Ψ_j s'annulent pour des valeurs numériques arbitraires de leurs arguments.

13. Remarquons maintenant qu'il ne peut exister plus de $r_1 + r_2$ combinaisons linéaires indépendantes des $\frac{\partial X_i}{\partial x}, \frac{\partial X_i}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial Z_h}{\partial z}$, qui ne contiennent aucune des dérivées secondes des fonctions u_k. Considérons en effet une combinaison linéaire Θ pour laquelle les coefficients des $\frac{\partial X_i}{\partial y}, \frac{\partial X_i}{\partial z}, \frac{\partial Y_j}{\partial z}$ soient tous nuls; la considération successive des $\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial y\,\partial z}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x\,\partial z}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}$ montre que tous les autres coefficients sont nuls. Par suite toute combinaison linéaire Θ jouissant de la propriété énoncée a ses coefficients parfaitement déterminés par ceux des $\frac{\partial X_i}{\partial y}, \frac{\partial X_i}{\partial z}, \frac{\partial Y_j}{\partial z}$; le nombre de celles qui sont linéairement indépendantes est donc au plus $r_1 + r_2$.

Cela montre *a fortiori* que le nombre des *identités* linéairement indépendantes qui existent entre les dérivées des premiers membres des équations données est au plus $r_1 + r_2$. Par suite si ce nombre maximum est atteint, c'est que les propriétés énoncées dans le théorème du n° 11 ont lieu pour tout choix non singulier des variables indépendantes. Nous dirons alors que le système est en involution.

La condition d'involution est donc l'existence de $r_1 + r_2$ identités linéairement indépendantes entre les dérivées des premiers membres des équations du système.

Le degré d'arbitraire de la solution générale est, d'après ce qui a été dit plus haut, le dernier nombre non nul de la suite non croissante

$$n - r_1, \quad n - r_2 + r_1, \quad n - r + r_2,$$

et les éléments arbitraires sont des fonctions d'une, deux ou trois variables suivant que ce nombre est le premier, le second ou le troisième de la suite. Si $n - r_1$ était nul, la solution générale dépendrait seulement de n constantes arbitraires.

Le système *détermine* les fonctions inconnues si $n = r - r_2$. Par suite *pour qu'un système soit en involution et détermine les fonctions inconnues, il faut et il suffit :*

1° *Que, pour un choix non singulier des variables, les équations soient résolubles par rapport aux n dérivées partielles* $\frac{\partial u_k}{\partial z}$;

2° *Qu'il existe entre les dérivées des premiers membres $r_1 + r - n$ identités linéairement indépendantes.*

On voit que le nombre d'identités nécessaires peut être *supérieur* à l'excès $r - n$ du nombre des équations sur celui des inconnues.

14. On peut regarder toute solution du système donné comme définissant une variété à trois dimensions dans l'espace à $n + 3$ dimensions. Dans une variété intégrale, une surface définie par une relation

$$z = f(x, y)$$

est *caractéristique*, s'il est impossible d'obtenir la variété par application du théorème du n° 11 en faisant jouer, par un choix non singulier convenable des variables, à l'équation $z - f(x, y) = 0$ le rôle de l'équation $z' = 0$. Si une surface est définie par

$$\alpha\, dx + \beta dy + \gamma\, dz = 0,$$

la condition pour que cette surface soit caractéristique est que les premiers membres des équations du système, quand on y remplace respectivement

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial z}$$

par

$$\alpha\xi_k, \quad \beta\xi_k, \quad \gamma\xi_k,$$

deviennent des formes linéaires en $\xi_1, \ldots, \xi_n$ au nombre de $r - r_2 - 1$ indépendantes au plus.

Il peut exister également des *lignes* caractéristiques. Si une telle ligne est définie par

$$\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz = 0,$$
$$\alpha'\, dx + \beta'\, dy + \gamma'\, dz = 0,$$

c'est que les r formes linéaires en ξ_k, ξ'_k obtenues en remplaçant

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_k}{\partial z}$$

par

$$\alpha\xi_k + \alpha'\xi'_k, \quad \beta\xi_k + \beta'\xi'_k, \quad \gamma\xi_k + \gamma'\xi'_k$$

sont au nombre de $r - r_1 - 1$ indépendantes au plus.

15. Prenons le seul exemple du système

$$\mathrm{X} \equiv \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} - a = 0,$$
$$\mathrm{Y} \equiv \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} - b = 0,$$
$$\mathrm{Z} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} - c = 0,$$
$$\mathrm{T} \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - h = 0,$$

à trois fonctions inconnues u, v, w; les coefficients a, b, c, h seront supposés, pour simplifier, des fonctions données de x, y, z. On a ici

$$r = 4, \qquad r_2 = 1, \qquad r_1 = 0.$$

La condition d'involution exige l'existence d'une identité, dont le premier membre est nécessairement

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial z};$$

on arrive ainsi à la condition

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0.$$

Comme les équations sont résolubles par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, le système *détermine* les fonctions inconnues et la solution générale dépend de deux fonctions arbitraires de deux variables.

Les caractéristiques à deux dimensions s'obtiennent en exprimant que les quatre formes

$$\gamma\xi_2 - \beta\xi_3, \quad \alpha\xi_3 - \gamma\xi_1, \quad \beta\xi_2 - \alpha\xi_1, \quad \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3$$

se réduisent à deux indépendantes au plus, ce qui donne

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0;$$

on obtient ainsi les intégrales de l'équation

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Il n'y a pas de caractéristique à une dimension.

III. — Cas général.

16. Bornons-nous à indiquer ce qui se passe pour quatre variables indépendantes x, y, z, t. Si r est le nombre des équations du système, n le nombre des fonctions inconnues, on désignera par r_3 le nombre des combinaisons linéairement indépendantes des premiers membres qui ne contiennent que les dérivées par rapport à x, y, z; par r_2 le nombre des combinaisons qui ne contiennent que les dérivées par rapport à x, y; par r_1 le nombre des combinaisons qui ne contiennent que les dérivées par rapport à x. Naturellement ces entiers r_1, r_2, r_3 se rapportent à un choix *arbitraire* des variables. Le choix des variables sera dit non singulier si ces entiers conservent les mêmes valeurs que dans le cas général.

On définira les systèmes en involution d'une manière analogue aux cas précédents et l'on démontrera que la condition d'involution est l'existence de $r_1 + r_2 + r_3$ identités entre les dérivées partielles des premiers membres des équations du système.

Le degré d'arbitraire de la solution générale est le dernier nombre non nul de la suite non croissante

$$n - r_1, \quad n - r_2 + r_1, \quad n - r_3 + r_2, \quad n - r + r_3.$$

Si $n = r - r_3$, le système détermine les fonctions inconnues; on voit alors que le nombre d'identités linéairement indépendantes est

$$r_1 + r_2 + r - n \geqq r - n;$$

la solution générale dépend dans ce cas de

$$n - r_3 + r_2 = 2n - r + r_2$$

fonctions arbitraires de trois variables.

Il peut exister ici des caractéristiques à trois dimensions, à deux dimensions et à une dimension.

17. Prenons comme exemple le système suivant, qui se présente dans l'hydrodynamique d'un milieu continu supposé sans pression ni tension, mais soumis aux attractions newtoniennes :

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,\\
F_2 &\equiv \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0,\\
F_3 &\equiv \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0,\\
F_4 &\equiv \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + 4\pi\rho = 0,\\
F_5 &\equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,\\
F_6 &\equiv \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - X = 0,\\
F_7 &\equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} - Y = 0,\\
F_8 &\equiv \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - Z = 0.
\end{aligned}
$$

Il y a sept fonctions inconnues; X, Y, Z désignent les composantes de l'accélération newtonienne; ρ désigne la densité du milieu; u, v, w désignent les composantes de la vitesse.

Si nous rangeons les variables dans l'ordre t, x, y, z, nous avons un choix non singulier des variables, avec

$$n = 7, \qquad r = 8, \qquad r_3 = 1, \qquad r_2 = 0, \qquad r_1 = 0.$$

L'entier $r_1 + r_2 + r_3$ étant égal à 1, la condition d'involution se traduit par une identité, qui est ici évidente :

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0.$$

Le système *détermine* donc les fonctions inconnues et la solution générale dépend de $n - r_3 + r_2 = 6$ fonctions arbitraires de t, x, y.

Les caractéristiques à 3 dimensions s'obtiennent en exprimant que les formes linéaires

$$\gamma\xi_2 - \beta\xi_3, \quad \alpha\xi_3 - \gamma\xi_1, \quad \beta\xi_1 - \alpha\xi_2, \quad \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\xi_3,$$
$$(\delta + \alpha u + \beta v + \gamma w)\xi_4 + \rho(\alpha\xi_5 + \beta\xi_6 + \gamma\xi_7),$$
$$(\delta + \alpha u + \beta v + \gamma w)\xi_5, \quad (\delta + \alpha u + \beta v + \gamma w)\xi_6, \quad (\delta + \alpha u + \beta v + \gamma w)\xi_7$$

sont au nombre de $r - r_3 - 1 = 6$ indépendantes au plus. Si la quantité $\delta + \alpha u + \beta v + \gamma w$ n'est pas nulle, cela exige que les quatre premières formes soient au nombre de deux indépendantes au plus, ce qui donne, au moins dans le domaine réel,

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Si au contraire $\delta + \alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, il n'y a que quatre formes indépendantes au plus.

Il y a donc deux espèces de variétés caractéristiques à trois dimensions :

1° Celles qui sont définies par $dt = 0$: ce sont les sections à temps constant;

2° Les variétés satisfaisant à une relation de la forme

$$\alpha(dx - u\,dt) + \beta(dy - v\,dt) + \gamma(dz - w\,dt) = 0 :$$

ce sont les variétés engendrées par des lignes fluides dépendant de deux paramètres et suivies pendant toute la durée.

L'existence des caractéristiques de première espèce est liée à la propagation instantanée de la gravitation.

Les caractéristiques à deux dimensions sont les variétés engendrées par des lignes fluides dépendant d'un paramètre, et les caractéristiques à une dimension sont les lignes fluides elles-mêmes.

IV. — Applications à la théorie unitaire du champ.

18. Nous allons appliquer la théorie générale à l'étude des systèmes d'équations aux dérivées partielles qu'on peut mettre à la base de la théorie unitaire du champ fondée, suivant la conception de M. Einstein, sur la notion d'espace riemannien à parallélisme absolu. Nous ne nous occuperons pas de l'aspect géométrique du problème [1].

Un espace riemannien à parallélisme absolu est défini analytiquement par 16 fonctions $h_{s\alpha}$ des 4 variables indépendantes x^α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). L'indice *latin* s prend les quatre valeurs 1, 2, 3, 4, de telle sorte que les quantités $\sum_\alpha h_{s\alpha}\, dx^\alpha$ représentent les projections, sur les axes d'un repère rectangulaire attaché au point (x^α), du vecteur infiniment petit joignant ce point au point infiniment voisin ($x^\alpha + dx^\alpha$); tous ces repères sont, par convention, parallèles entre eux. Les indices grecs α, β, ... se rapporteront aux variables indépendantes.

Conformément aux conventions classiques, nous supprimerons les signes de sommation; nous désignerons par une virgule la dérivation ordinaire, le symbole $T_{,\alpha}$ désignant la dérivée de T par rapport à x^α.

Nous désignerons par h le déterminant des 16 quantités $h_{s\alpha}$ et par h_s^α le quotient par h du mineur relatif à $h_{s\alpha}$.

La *torsion* de l'espace se définit analytiquement, soit par les quantités $\Lambda^s_{\alpha\beta} = -\Lambda^s_{\beta\alpha}$ définies par les 24 relations

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{H}_{s\alpha\beta} \equiv h_{s\alpha,\beta} - h_{s\beta,\alpha} - \Lambda^s_{\alpha\beta} = 0,$$

soit par les quantités $\Lambda^\gamma_{\alpha\beta} = -\Lambda^\gamma_{\beta\alpha}$ définies par

$$\Lambda^\gamma_{\alpha\beta} = h^\gamma_s \Lambda^s_{\alpha\beta}.$$

L'élimination des $h_{s\alpha}$ entre les équations (I) donne les relations

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{L}^s_{\alpha\beta\gamma} \equiv \Lambda^s_{\alpha\beta,\gamma} + \Lambda^s_{\beta\gamma,\alpha} + \Lambda^s_{\gamma\alpha,\beta} = 0.$$

On a du reste entre les dérivées des expressions $\mathcal{H}_{s\alpha\beta}$ et $\mathcal{L}^s_{\alpha\beta\gamma}$, dans lesquelles on regarde les $h_{s\alpha}$ et les $\Lambda^s_{\alpha\beta}$ comme des fonctions arbitraires, indépendantes les unes des autres, les $16 + 4 = 20$

---

[1] *Voir* A. EINSTEIN, *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie* (*Math. Ann.*, t. 102, 1930, p. 685-697); *et* E. CARTAN, *Notice historique sur la notion du parallélisme absolu* (*Math. Ann.*, t. 102, 1930, p. 698-706).

identités

$$
\text{(III)} \qquad \begin{cases} \mathcal{H}_{s\alpha\beta,\gamma} + \mathcal{H}_{s\beta\gamma,\alpha} + \mathcal{H}_{s\gamma\alpha,\beta} + \mathcal{L}^s_{\alpha\beta\gamma} = 0, \\ \mathcal{L}^s_{\alpha\beta\gamma,\delta} - \mathcal{L}^s_{\alpha\beta\delta,\gamma} + \mathcal{L}^s_{\alpha\gamma\delta,\beta} - \mathcal{L}^s_{\beta\gamma\delta,\alpha} = 0. \end{cases}
$$

Dans ces identités, s prend les valeurs 1, 2, 3, 4; dans les premières, α, β, γ sont trois quelconques des indices 1, 2, 3, 4; dans les dernières, α, β, γ, δ sont, à l'ordre près, les indices 1, 2, 3, 4.

Nous regarderons dans ce qui suit les équations (I) et (II) comme des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre aux $16 + 24 = 40$ fonctions inconnues $h_{s\alpha}$ et $\Lambda^s_{\alpha\beta}$. Entre les dérivées des premiers membres de ces équations existent donc les 20 identités (III). Or si l'on désigne par r', r'_1, r'_2, r'_3 les entiers relatifs au système considéré, on voit immédiatement que les équations sont résolubles par rapport aux dérivées prises par rapport à x^4 des 24 fonctions

$$
h_{s\alpha} (s = 1, 2, 3, 4;\ \alpha = 1, 2, 3) \quad \text{et} \quad \Lambda^s_{\alpha\beta} \qquad (s = 1, 2, 3, 4;\ \alpha, \beta = 1, 2, 3),
$$

l'élimination de ces dérivées conduisant aux $r'_3 = 16$ équations

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{s\alpha\beta} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, 4;\ \alpha, \beta = 1, 2, 3), \\
&\mathcal{L}^s_{123} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}
$$

Les 16 équations précédentes sont résolubles par rapport aux dérivées prises par rapport à x^3 des 12 fonctions

$$
h_{s\alpha} (s = 1, 2, 3, 4;\ \alpha = 1, 2) \quad \text{et} \quad \Lambda^s_{12} \qquad (s = 1, 2, 3, 4),
$$

l'élimination de ces dérivées conduisant aux $r'_2 = 4$ équations

$$
\mathcal{H}_{s12} = 0 \qquad (s = 1, 2, 3, 4).
$$

Enfin ces quatre équations sont résolubles par rapport aux quatre dérivées h_{s12}; on a donc $r'_1 = 0$.

La somme $r'_1 + r'_2 + r'_3 = 0 + 4 + 16 = 20$ est précisément le nombre des identités (III).

Si maintenant nous ajoutons aux équations (I) et (II) de nouvelles équations en nombre r et si nous désignons par

$$
r_1 + r'_1, \quad r_2 + r'_2, \quad r_3 + r'_3
$$

les nombres relatifs au système total, nous voyons que ce système total sera en involution s'il admet $r_1 + r_2 + r_3$ nouvelles identités indépendantes de (III). D'ailleurs pour avoir $r - r_3$, il suffira, en imaginant les $\Lambda^s_{\alpha\beta.4}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) tirées des équations (II), de chercher combien de dérivées $\Lambda^s_{\alpha 4.4}$ on pourra tirer des nouvelles équations données. On procédera d'une manière analogue pour avoir r_2 et r_1.

19. Avant d'aller plus loin, il importe de rappeler une des conditions formulées par M. Einstein, c'est que les équations mises à la base de la théorie doivent déterminer les 16 fonctions inconnues $h_{s\alpha}$, *à une transformation arbitraire près effectuée sur les variables indépendantes*. Cette condition n'est évidemment pas très précise. Nous pouvons la préciser *en partie* de la manière suivante.

Les quatre quantités $h_{s\alpha} dx^\alpha$ sont, comme nous l'avons dit, les composantes, rapportées à des repères rectangulaires tous parallèles entre eux, du vecteur infiniment petit qui joint deux points infiniment voisins. Imaginons une solution des équations du champ. On pourra toujours choisir les variables indépendantes de manière que les lignes tangentes en chacun de leurs points au quatrième axe du repère soient les lignes

$$x^1 = \text{const.}, \qquad x^2 = \text{const.}, \qquad x^3 = \text{const.};$$

cela donne

$$h_{14} = 0, \qquad h_{24} = 0, \qquad h_{34} = 0.$$

On peut ensuite prendre $\int h_{44}\, dx^4$, où l'on regarde x^1, x^2, x^3 comme des paramètres, pour nouvelle variable x^4, ce qui donne

$$h_{44} = 1.$$

Le nombre des fonctions inconnues est ainsi réduit de quatre unités.

On peut aller plus loin. Déterminons une fonction $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ par l'équation

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} h_{11}(x^1, x^2, x^3, \varphi) & h_{12}(x^1, x^2, x^3, \varphi) & h_{13}(x^1, x^2, x^3, \varphi) \\ h_{21}(x^1, x^2, x^3, \varphi) & h_{22}(x^1, x^2, x^3, \varphi) & h_{23}(x^1, x^2, x^3, \varphi) \\ h_{41}(x^1, x^2, x^3, \varphi) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^1} & h_{42}(x^1, x^2, x^3, \varphi) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^2} & h_{43}(x^1, x^2, x^3, \varphi) + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^3} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation exprime que si l'on se déplace sur la variété

$$x^4 = \varphi(x^1, x^2, x^3),$$

les trois formes en dx^1, dx^2, dx^3

$$h_{1\alpha}\,dx^\alpha, \quad h_{2\alpha}\,dx^\alpha, \quad h_{4\alpha}\,dx^\alpha$$

ne sont pas linéairement indépendantes. Nous pouvons supposer, par un changement évident de variables, que $\varphi = 0$ est une solution de l'équation considérée.

Plaçons-nous alors dans la variété $x^4 = 0$. Nous pouvons supposer que les lignes

$$x^1 = \text{const.}, \qquad x^2 = \text{const.}$$

sont celles qui, en chacun de leurs points, sont perpendiculaires aux deux premiers axes du repère rectangulaire attaché à ce point, ce qui revient à supposer

$$h_{13} = h_{23} = 0;$$

on pourra ensuite, comme il a été fait plus haut, supposer

$$h_{33} = 1,$$

et par suite, en tenant compte de l'équation (1), on voit que, *pour* $x^4 = 0$, *on peut supposer*

$$h_{13} = 0, \qquad h_{23} = 0, \qquad h_{33} = 1, \qquad h_{43} = 0.$$

Le nombre des fonctions inconnues qui entrent dans les équations du système sera donc réduit, quand on fera $x^4 = 0$, *de 8 unités.*

Nous pourrons ainsi déterminer sans ambiguïté le degré d'arbitraire d'un système en involution donné, abstraction faite du choix particulier des variables, à condition toutefois que les éléments arbitraires soient des fonctions de *trois* variables au moins, puisque le choix de la section à trois dimensions $x^4 = 0$ n'est pas unique et fait intervenir des fonctions arbitraires de deux variables, celles qui entrent dans la solution générale de l'équation (1).

20. Nous avons déjà vu (n° 18) quelle sera la condition d'involution d'un système donné formé de r équations autres que (1)

et (II); c'est l'existence de $r_1 + r_2 + r_3$ identités nouvelles. La condition pour que le système *détermine* les fonctions inconnues, au sens de la théorie de la relativité, sera uniquement que les nouvelles équations soient résolubles par rapport aux n dérivées $\Lambda^s_{\alpha 4, 4}$, ce qui donne

$$r - r_3 = 12.$$

Par suite, *pour qu'un système donné soit en involution et détermine les fonctions inconnues, il faut et il suffit :*

1° *Que les équations du système autres que* (I) *et* (II) *soient résolubles par rapport aux* 12 *dérivées* $\Lambda^s_{\alpha 4, 4}$;

2° *Qu'il existe entre les dérivées des premiers membres de ces équations*

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r - 12$$

identités linéairement indépendantes.

On remarquera que les raisonnements habituels conduisent seulement, comme condition nécessaire et suffisante, à l'existence de $r - 12$ identités.

Le degré de généralité de la solution, qui est, dans le cas général, de $n - r_3 + r_2$, s'obtiendra ici en remplaçant respectivement

$$n, \quad r_3, \quad r_2$$

par

$$40 - 8, \quad r_3 + 16, \quad r_2 + 4,$$

ce qui donne

$$20 - r_3 + r_2 = 32 - r + r_2$$

fonctions arbitraires de trois variables.

21. Appliquons ce qui précède aux 22 équations indiquées par M. Einstein. Nous désignerons, avec lui, par $T_{;\alpha}$ la dérivée covariante par rapport à x^α. Il est essentiel de remarquer que la dérivée covariante $T_{;\alpha}$ est la somme de la dérivée ordinaire par rapport à x^α et de termes faisant intervenir linéairement les dérivées *par rapport à la même variable* x^α des fonctions $h_{s\lambda}$. On a par exemple

$$\Lambda^\gamma_{\alpha\beta;\delta} = \Lambda^\gamma_{\alpha\beta,\delta} - h^\rho_s \left(h_{s\alpha,\delta} \Lambda^\gamma_{\rho\beta} + h_{s\beta,\delta} \Lambda^\gamma_{\alpha\rho} \right) + h^\gamma_s h_{s\rho,\delta} \Lambda^\rho_{\alpha\beta}.$$

On a entre les deux dérivées covariantes secondes $T_{;\alpha;\beta}$ et $T_{;\beta;\alpha}$

d'un tenseur T la relation

$$\mathrm{T}_{;\alpha;\beta}-\mathrm{T}_{;\beta;\alpha}-\Lambda^{\rho}_{\alpha\beta}\mathrm{T}_{;\rho}=0.$$

Avec ces notations, les équations (II), qui ne sont autres que les identités de Bianchi, prennent la forme

$$\text{(II')}\quad \mathcal{L}^{\delta}_{\alpha\beta\gamma}\equiv\Lambda^{\delta}_{\alpha\beta;\gamma}+\Lambda^{\delta}_{\beta\gamma;\alpha}+\Lambda^{\delta}_{\gamma\alpha;\beta}+\Lambda^{\rho}_{\alpha\beta}\Lambda^{\delta}_{\gamma\rho}+\Lambda^{\rho}_{\beta\gamma}\Lambda^{\delta}_{\alpha\rho}+\Lambda^{\rho}_{\gamma\alpha}\Lambda^{\delta}_{\beta\rho}=0.$$

Le système de M. Einstein, qui contient 22 équations, est le suivant :

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}_{\alpha\beta}\equiv\Lambda^{\rho}_{\alpha\beta;\rho}=0,\\ &\mathcal{G}^{\beta}_{\alpha}\equiv\Lambda^{\beta}_{\alpha\rho;\underline{\rho}}+\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}\Lambda^{\beta}_{\rho\sigma}=0,\end{aligned}\right.$$

où l'on désigne par $\Lambda^{\beta}_{\alpha\underline{\rho}}$ la quantité $g^{\rho\sigma}\Lambda^{\beta}_{\alpha\sigma}$.

Le calcul de r_3 se fait immédiatement. En effet l'expression $\mathcal{G}^{\beta}_{\alpha}$ contient $g^{44}\Lambda^{\beta}_{\alpha 4;4}$. Par suite si $g^{44}\neq 0$, ce qui est le cas pour un choix arbitraire des variables, les équations (IV) sont résolubles par rapport aux 12 dérivées covariantes $\Lambda^{\beta}_{\alpha 4;4}$. On a donc

$$r_3=r-12=10.$$

On voit en passant que *les caractéristiques à trois dimensions du système sont les variétés tangentes en chacun de leurs points à l'hypercône* $ds^2=0$ *relatif à ce point.*

22. Les $r_3=10$ équations qui ne contiennent plus aucune dérivée par rapport à x^4 sont, comme on le voit facilement,

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}-\mathcal{L}^{4}_{\alpha\beta 4}=0\qquad(\alpha,\beta=1,2,3),$$
$$\mathcal{G}^{4}_{\alpha}-g^{4\rho}\mathcal{F}_{\alpha\rho}=0\qquad(\alpha=1,2,3),$$
$$g^{4\rho}\mathcal{G}^{\alpha}_{\rho}\equiv\mathcal{G}^{\alpha}_{\underline{4}}=0\qquad(\alpha=1,2,3,4).$$

On constate facilement que les deux équations

$$\mathcal{F}_{12}-\mathcal{L}^{4}_{124}-\mathcal{L}^{3}_{123}=0,$$
$$g^{3\rho}(\mathcal{G}^{4}_{\rho}-g^{4\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma})-g^{4\rho}\mathcal{G}^{3}_{\rho}\equiv\mathcal{G}^{4}_{\underline{3}}-\mathcal{G}^{3}_{\underline{4}}-\mathcal{F}_{\underline{34}}=0$$

ne contiennent aucune des dérivées par rapport à x^4 et x^3; ce sont du reste les seules qui jouissent de cette propriété, comme on le voit en supposant par exemple tous les $g^{\alpha\beta}$ nuls pour $\alpha\neq\beta$, avec $g^{\alpha\alpha}=1$.

On a donc $r_2 = 2$. Quant à r_1, on voit immédiatement qu'il est nul.

23. Les valeurs trouvées pour r_1, r_2, r_3, à savoir

$$r_1 = 0, \qquad r_2 = 2, \qquad r_3 = 10,$$

montrent que le système est en involution s'il existe

$$r_1 + r_2 + r_3 = 12$$

identités linéairement indépendantes. Sa solution générale dépend alors de

$$32 - r + r_2 = 12$$

fonctions arbitraires de 3 variables.

Les 12 identités, qui existent effectivement, sont les suivantes :

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_{\alpha\beta;\gamma} + \mathcal{F}_{\beta\gamma;\alpha} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha;\beta} - \mathcal{L}^{\rho}_{\alpha\beta\gamma;\rho} + \Lambda^{\rho}_{\alpha\beta}\mathcal{F}_{\gamma\rho} + \Lambda^{\rho}_{\beta\gamma}\mathcal{F}_{\alpha\rho} + \Lambda^{\rho}_{\gamma\alpha}\mathcal{F}_{\beta\rho} \equiv 0, \\ \mathcal{G}^{\rho}_{\alpha;\rho} - \mathcal{F}_{\alpha\rho;\rho} - \Lambda^{\sigma}_{\alpha\underline{\rho}}\mathcal{F}_{\rho\sigma} \equiv 0, \\ \mathcal{G}^{\alpha}_{\underline{\rho};\rho} + \Lambda^{\alpha}_{\rho\sigma}\,\mathcal{G}^{\sigma}_{\rho} - \frac{1}{2}\Lambda^{\tau}_{\rho\sigma}\mathcal{L}^{\rho\alpha}_{\rho\sigma\tau} \equiv 0. \end{cases}$$

Les quatre premières peuvent s'écrire, beaucoup plus simplement,

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta.\gamma} + \mathcal{F}_{\beta\gamma.\alpha} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha.\beta} \equiv 0.$$

En effet, en posant

$$\varphi_\alpha = \Lambda^{\rho}_{\alpha\rho},$$

on a, d'après les identités de Bianchi $\mathcal{L}^{\rho}_{\alpha\beta\rho} = 0$:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} \equiv \varphi_{\alpha,\beta} - \varphi_{\beta,\alpha}.$$

24. Il existe un autre système de 22 équations, également en involution, avec le même degré d'arbitraire que celui de M. Einstein. Introduisons d'abord les quantités

$$S^\alpha = \frac{1}{h}\left(g_{\beta\rho}\Lambda^{\rho}_{\gamma\delta} + g_{\gamma\rho}\Lambda^{\rho}_{\delta\beta} + g_{\delta\rho}\Lambda^{\rho}_{\beta\gamma}\right),$$

où α, β, γ, δ forment une permutation paire des indices 1, 2, 3, 4. On vérifie les identités telles que

$$\mathcal{G}^{4}_{\underline{3}} - \mathcal{G}^{3}_{\underline{4}} - \mathcal{F}_{\underline{34}} \equiv S_{2,1} - S_{1,2} + \varphi_1 S_2 - \varphi_2 S_1,$$

de sorte que les 22 équations d'Einstein pourraient s'écrire.

$$
\text{(V)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\varphi_{\alpha,\beta} - \varphi_{\beta,\alpha} = 0, \\
&S_{\alpha,\beta} - S_{\beta,\alpha} - \varphi_\alpha S_\beta + \varphi_\beta S_\alpha = 0, \\
&G^{\beta}_{\underline{\alpha}} + \mathcal{G}^{\alpha}_{\underline{\beta}} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

les 10 dernières étant symétriques. On peut d'autre part vérifier, par un calcul assez pénible, que les quantités $G_{\alpha\beta}$ qui s'introduisent dans les anciennes équations de la relativité (tenseur contracté de Riemann) peuvent s'exprimer sous la forme

$$
G_{\alpha\beta} \equiv \mathcal{G}^{\beta}_{\alpha} + \mathcal{G}^{\alpha}_{\beta} - (\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha}) - 2\Lambda^{\sigma}_{\alpha\rho}\Lambda^{\sigma}_{\beta\underline{\rho}} - S_\alpha S_\beta + g_{\alpha\beta} S_\rho S_\rho .
$$

Considérons alors le système des 22 équations

$$
\text{(VI)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\alpha\beta} \equiv \varphi_{\alpha,\beta} - \varphi_{\beta,\alpha} + m(\varphi_\alpha S_\beta - \varphi_\beta S_\alpha) = 0, \\
&\mathcal{S}_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha,\beta} - S_{\beta,\alpha} + n(\varphi_\alpha S_\beta - \varphi_\beta S_\alpha) = 0, \\
&G_{\alpha\beta} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie sans difficulté que les valeurs de r_1, r_2, r_3 sont les mêmes que pour le système d'Einstein, les variétés caractéristiques à trois dimensions étant aussi les mêmes. Il existe encore ici 12 identités linéairement indépendantes, à savoir les 4 identités classiques de l'ancienne théorie de la relativité et les 8 identités

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathcal{F}_{\beta\gamma,\alpha} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha,\beta} \\
&\quad + m(S_\alpha \mathcal{F}_{\beta\gamma} + S_\beta \mathcal{F}_{\gamma\alpha} + S_\gamma \mathcal{F}_{\alpha\beta} - \varphi_\alpha \mathcal{S}_{\beta\gamma} - \varphi_\beta \mathcal{S}_{\gamma\alpha} - \varphi_\gamma \mathcal{S}_{\alpha\beta}) \equiv 0, \\
&\mathcal{S}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathcal{S}_{\beta\gamma,\alpha} + \mathcal{S}_{\gamma\alpha,\beta} \\
&\quad + n(S_\alpha \mathcal{F}_{\beta\gamma} + S_\beta \mathcal{F}_{\gamma\alpha} + S_\gamma \mathcal{F}_{\alpha\beta} - \varphi_\alpha \mathcal{S}_{\beta\gamma} - \varphi_\beta \mathcal{S}_{\gamma\alpha} - \varphi_\gamma \mathcal{S}_{\alpha\beta}) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Le système (VI) est donc en involution, il détermine les variables du champ, sa solution générale dépendant de 12 fonctions arbitraires de 3 variables.

25. Signalons enfin un dernier système en involution, ne comprenant que 15 équations, à savoir

$$
\text{(VII)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha,\beta} - S_{\beta,\alpha} + c(\varphi_{\alpha,\beta} - \varphi_{\beta,\alpha}) = 0, \\
&\Phi_{\alpha\beta} \equiv G_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\rho\underline{\rho}} + a\left(\varphi_{\alpha,\beta} + \varphi_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\varphi_{\rho,\underline{\rho}}\right) \\
&\qquad\qquad + b(S_{\alpha,\beta} + S_{\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta} S_{\underline{\rho},\rho}) - T_{\alpha\beta} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans ces équations a, b, c sont trois constantes numériques, et $T_{\alpha\beta}$ désigne un tenseur symétrique arbitraire formé avec les composantes de la torsion, assujetti à la seule condition que son tenseur contracté soit nul.

Si $a \neq bc$, les équations du système peuvent être résolues par rapport aux 12 dérivées $\Lambda^{\beta}_{\alpha\lambda;\lambda}$ et l'on trouve

$$r_3 = 3, \qquad r_2 = 1, \qquad r_1 = 0.$$

Il existe effectivement $r_1 + r_2 + r_3 = 4$ identités, à savoir

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta,\gamma} + \mathcal{F}_{\beta\gamma,\alpha} + \mathcal{F}_{\gamma\alpha,\beta} \equiv 0.$$

La solution générale dépend de $32 - r + r_2 = 18$ fonctions arbitraires de 3 variables.

Il est probable que les systèmes (IV), (VI) et (VII) sont les seuls systèmes en involution indépendants du choix des variables et du choix des repères rectangulaires, qui soient linéaires par rapport aux dérivées covariantes des $\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}$ et quadratiques par rapport aux $\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta}$, et qui *déterminent* les fonctions inconnues. Mais la discussion de cette question fait intervenir des problèmes d'Algèbre tout à fait étrangers à l'objet de ce Mémoire.

Ajoutons que les équations (IV), (VI) et (VII) pourraient être écrites de manière que les variables indépendantes n'apparaissent pas du tout, en utilisant les composantes du tenseur de torsion par rapport aux repères rectangulaires, équipollents entre eux, attachés aux différents points de l'espace. Ces composantes Λ^{s}_{ij} sont définies par

$$\Lambda^{s}_{ij} = h^{\alpha}_{i}\, h^{\beta}_{j}\, \Lambda^{s}_{\alpha\beta}.$$

En introduisant d'autre part la dérivation covariante $T_{;i}$ définie par

$$dT = \sum_{s} T_{;s}\, h_{s\alpha}\, dx^{\alpha},$$

les équations (II′), (IV), (V), (VI), (VII) conservent la même forme quand on substitue aux indices grecs des indices latins, mais chaque indice peut alors se mettre indifféremment en haut ou en bas. La discussion se fait de la même manière qu'auparavant, mais les quantités $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, etc, n'interviennent nulle part, ou plutôt les quantités g_{ij} et g^{ij} sont nulles pour $i \neq j$, égales à 1 pour $i = j$.