BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BAIRE

Sur l'origine de la notion de semi-continuité

Bulletin de la S. M. F., tome 55 (1927), p. 141-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1927__55__141_0>

SUR L'ORIGINE DE LA NOTION DE SEMI-CONTINUITÉ;

PAR M. RENÉ BAIRE.

Puisque la notion de semi-continuité a été utilisée dans plusieurs branches de l'Analyse, étude des discontinuités des fonctions, intégration, calcul des variations, théorie du potentiel, ceux qui aiment connaître l'origine des notions mathématiques apprendront peut-être avec intérêt dans quelles circonstances j'ai été amené à cette idée.

Je me proposais (fin 1896) d'étudier les fonctions de deux variables continues par rapport à chacune d'elles sans l'être par rapport à leur ensemble. Soient une telle fonction $f(x, y)$ et un rectangle de côtés parallèles aux axes. Sur le segment du rectangle parallèle à l'axe des y, d'abscisse x_0, la fonction $f(x_0, y)$, continue par rapport à y, admet un maximum qui est fonction de x_0; soit $M(x_0)$. Elle l'atteint en un point (x_0, y_0). La fonction $f(x, y_0)$, en tant que fonction de x, est continue; elle prend, dans le voisinage de la valeur x_0, des valeurs voisines de $M(x_0)$, donc supérieures à $M(x_0) - \varepsilon$, ε étant arbitrairement petit et positif. Par conséquent, si $|h|$ est assez petit, le nombre $M(x_0 + h)$, qui n'est pas inférieur à $f(x_0 + h, y_0)$, est supérieur ou égal à $M(x_0) - \varepsilon$. L'inégalité

$$M(x_0 + h) \geqq M(x_0) - \varepsilon$$

est vérifiée pour $|h| < \alpha$, α étant un certain nombre positif.

La fonction $M(x)$ possède ainsi l'une des deux propriétés dont l'ensemble constitue la continuité; je l'ai appelée la *semi-continuité inférieure*.

On a donc la proposition suivante :

Si $f(x, y)$ est, dans un rectangle parallèle aux axes, continue par rapport à chacune des variables, la borne supérieure des valeurs de $f(x, y)$ sur un segment du rectangle parallèle à Oy est, en tant que fonction de x, semi-continue inférieurement.

D'ailleurs, cette fonction $M(x)$ n'est pas nécessairement continue : il suffit de considérer la fonction $f(x, y)$ définie par les égalités

$$f(x, y) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0,$$

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad \text{pour} \quad 0 < |x| \leqq 1, \ 0 < |y| \leqq 1.$$

On a

$$M(x) = 1 \quad \text{pour} \quad x \neq 0,$$
$$M(0) = 0.$$

Des propositions analogues s'obtiennent en permutant x et y, ou en considérant le minimum au lieu du maximum.

Ces propositions ne paraissent pas présenter un grand intérêt par elles-mêmes; je ne les ai jamais publiées; c'est d'une façon tout à fait différente que j'ai utilisé par la suite la notion de semi-continuité pour la solution du problème rappelé plus haut (*voir* ma Thèse).

Ce que j'ai voulu indiquer ici, c'est que je n'ai pas eu *a priori* l'idée de disjoindre les deux inégalités de la continuité, j'y ai été conduit par l'examen d'une fonction qui s'introduisait naturellement dans mes recherches et dont j'ai *observé* la propriété de semi-continuité.