BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VESSIOT

Contribution à la géométrie conforme. Théorie des surfaces. I

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 139-179

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__139_0>

CONTRIBUTION A LA GÉOMÉTRIE CONFORME. THÉORIE DES SURFACES;

PAR M. E. VESSIOT.

INTRODUCTION ET RÉSUMÉ.

1. Ce Mémoire fait suite aux recherches que j'ai consacrées, depuis plusieurs années, à la géométrie conforme. Après les cercles et systèmes de ∞^1 cercles (1), les systèmes de ∞^1 sphères et les courbes gauches (2), étudiés dans les Mémoires précédents, je m'occupe dans ce travail de la théorie générale des surfaces (3).

On sait que A. Tresse a le premier déterminé (4) les invariants différentiels du troisième ordre que les surfaces possèdent vis-à-vis des transformations conformes. P. Calapso a, plus tard, repris la recherche générale des invariants en question des ordres supérieurs, en cherchant à les exprimer au moyen des coefficients des deux formes quadratiques fondamentales de Gauss et des dérivées de ces coefficients (5). Plus récemment, G. Thomsen en a fait (6) une étude systématique approfondie en partant de l'expression générale des deux formes qui, égalées à zéro, donnent les lignes minima et les lignes de courbure de la surface. Il emploie les coordonnées pentasphériques et les méthodes du calcul tensoriel; et il fait intervenir encore, pour arriver au système complet des invariants, la sphère harmonique et la forme quadratique qui donne les directions (bissectrices de celles des lignes de courbure)

(1) E. VESSIOT, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 2, 1923, p. 99.

(2) E. VESSIOT, *Journal de l'École Polytechnique*, 2e série, 25e cahier (1926).

(3) Les résultats en ont été résumés dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 182, 22 mars 1926, p 752.

(4) A. TRESSE, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 114, 1892, p. 948; *Acta mathematica*, t. 18, 1894, Chap. 2, n° 1 (*Thèse* de Paris).

(5) P. CALAPSO, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 22, 1906, p. 197.

(6) G. THOMSEN, *Grundlagen der Konformen Flächentheorie* (*Thèse*, Hamburg, 1923).

des tangentes à l'intersection de cette sphère et de la surface [1].

Il m'a paru nécessaire de donner à la théorie des fondements plus géométriques, de manière à faire apparaître la signification et le caractère des invariants. J'ai, de plus, en introduisant un pentasphère orthogonal covariant [2], précisé la nature du problème consistant à rechercher les surfaces, équivalentes entre elles au point de vue conforme, qui sont définies par des équations intrinsèques. Je me suis occupé aussi des rapports de la théorie avec celle de l'équation de Laplace, dans la voie ouverte autrefois par Darboux.

2. La méthode que j'ai employée repose sur l'introduction de deux transformations infinitésimales covariantes, opérant sur les points de la surface. Dans le paragraphe I, j'expose cette méthode en l'appliquant à la geométrie euclidienne des surfaces; je montre comment elle donne, en particulier, les formules de Codazzi et la formule de Gauss sur la courbure totale. Dans le paragraphe II, j'aborde la géométrie conforme : les deux transformations infinitésimales fondamentales, $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$, ont respectivement pour trajectoires les lignes de courbure des deux familles; et l'on achève de les définir par la condition que la sphère de courbure normale principale simplement tangente à la ligne de courbure trajectoire varie le long de cette ligne avec une *vitesse angulaire* [3] égale à 1. Je montre comment on peut définir aussi ces mêmes transformations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ en ne faisant intervenir que les seules lignes minima de la surface. La relation de crochet

$$(\mathfrak{U}f, \mathfrak{V}f) = \mathrm{I}\,\mathfrak{V}f - \mathrm{J}\,\mathfrak{U}f \tag{1}$$

---

(1) On trouvera d'autres indications bibliographiques dans la Thèse de G. Thomsen. J'ai eu aussi connaissance, par l'envoi d'une rédaction autographiée que m'a fait l'auteur, de recherches de M. Takasu, intitulées *Ueber konforme Flächen Krümmungen*, et datées du 31 janvier 1925.

(2) Dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 182, 26 avril 1926, p. 1008), M. Demoulin a fait connaître qu'il avait fait une étude analogue, dont il avait donné une exposition dans une conférence faite le 10 mars 1922 à la Société mathématique de Belgique (voir *Mathesis*, supplément de décembre 1922). Le pentasphère employé par M. Demoulin n'est pas le même que celui auquel j'ai été conduit (*voir* plus loin, n° 25).

(3) Le *déplacement angulaire* infinitésimal d'une sphère est l'angle de cette sphère avec la sphère infiniment voisine.

fournit immédiatement deux invariants I et J, qui sont ceux de Tresse. Je donne plus loin (nos 20, 20 *bis*, 20 *ter*) des interprétations géométriques de ces invariants : j'indiquerai seulement ici que si l'on considère le point courant M de la surface, les sphères de courbure normale principales h et k, et la sphère obtenue en faisant varier infiniment peu l'une d'elles le long de la ligne de courbure correspondante, le rapport anharmonique de ces quatre éléments, divisé par la variation angulaire de l'autre sphère de courbure, donne l'un des invariants I, J.

3. Les autres invariants fondamentaux sont introduits au paragraphe III. Les sphères h et k ont pour *dérivées* [1], quand on se déplace le long d'une ligne de courbure, soit le point M, soit celle des sphères de courbure géodésique principales h_1, k_1 qui leur est respectivement associée [2]. Celles-ci donnent, dans les mêmes conditions, deux *dérivées* h_2, k_2 (*dérivées secondes* de h et k), et les quatre sphères h_1, k_1, h_2, k_2 sont deux à deux orthogonales; par les cercles d'intersection (h, h_2) (k, k_2), passe une sphère l : elle est orthogonale aux quatre précédentes. On a ainsi un pentasphère orthogonal covariant II, constitué par h_1, k_1, h_2, k_2, l.

D'autre part, on constate que par le cercle (h_2, k_2) passe une sphère t et une seule tangente en M à la surface. L'angle 2θ des tangentes à l'intersection de t avec la surface est un invariant du quatrième ordre, et tous les invariants du quatrième ordre s'expriment en fonction de θ, de I, J et des quatre invariants obtenus en appliquant à I et J les opérations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$. Les surfaces réelles se séparent en trois classes, suivant que 2θ est réel (non nul), imaginaire, ou nul : les deux premiers cas correspondent au fait que la sphère l est imaginaire, ou réelle, respectivement. Le cas où 2θ est égal à *zéro* (ou à π) est celui où l'une des sphères h_2, k_2 se réduit à un point. Il est étudié au n° 26 : le pentasphère II doit être alors remplacé par un autre. Le tore, suivant qu'il coupe, ou non, son axe, ou qu'il lui est tangent, donne des exemples des trois cas.

---

(1) La sphère *dérivée* d'une sphère donnée qui se déplace est la sphère qui la coupe à angle droit le long du cercle caractéristique.

(2) Ce résultat avait été trouvé, sous une autre forme, par Darboux (*voir* n° 12).

Au paragraphe IV sont calculées les formules de variation du pentasphère II, pour les déplacements le long de l'une ou l'autre des lignes de courbure qui se croisent en un point. Les *rotations*, dont trois sont nulles dans chaque cas, s'expriment en fonction de I, J, θ, de $\mathfrak{U}(\theta)$, $\mathfrak{V}(\theta)$ et des deux invariants du quatrième ordre

$$(2) \qquad I_1 = \mathfrak{V}(I) - 2IJ, \qquad J_1 = \mathfrak{U}(J) - 2IJ.$$

Je donne, au n° **20**, une interprétation géométrique de ces invariants I_1 et J_1.

4. On a une définition semi-intrinsèque de la surface si l'on se donne, en fonctions des paramètres u, v des lignes de courbure, les transformations fondamentales $\mathfrak{U}f = \frac{1}{U}\frac{\partial f}{\partial u}$, $\mathfrak{V}f = \frac{1}{V}\frac{\partial f}{\partial v}$. Les invariants I, J, I_1, J_1 s'expriment au moyen des dérivées de U, V, car

$$(3) \qquad I = -\mathfrak{U}(\log V), \qquad J = -\mathfrak{V}(\log U).$$

Il semble qu'il faudrait encore se donner θ, mais il se déduit aussi de U et V. Le pentasphère II est, en effet, défini par les équations $\overline{\mathfrak{U}}f = 0$, $\overline{\mathfrak{V}}f = 0$, dont les premiers membres sont les *prolongements* de $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$ relatifs aux variations des éléments du pentasphère. Les conditions d'intégrabilité de ce système, dont l'étude est faite au paragraphe V, sont, en plus de (2) et (3),

$$(4) \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{U}(\cos 2\theta) - I\cos 2\theta - I_2 = 0, \qquad \frac{1}{2}\mathfrak{V}(\cos 2\theta) - J\cos 2\theta + J_2 = 0,$$

avec

$$(5) \qquad I_2 = 2\mathfrak{V}(I_1) - 4JI_1 + I, \qquad J_2 = 2\mathfrak{U}(J_1) - 4IJ_1 + J;$$

et elles ont elles-mêmes, pour condition d'intégrabilité, l'équation

$$(6) \qquad (J_1 - I_1)\cos 2\theta = \mathfrak{U}(J_2) + \mathfrak{V}(I_2) - 3IJ_2 - 3JI_2.$$

Celle-ci donne $\cos 2\theta$, si l'on excepte le cas $I_1 = J_1$, qui est celui des surfaces isothermiques [1]. Pour ces surfaces, $\cos 2\theta$ est

[1] Sous des formes équivalentes, les équations (4) et (6) avaient été déjà obtenues par P. Calapso (*loc. cit*), et se retrouvent aussi dans la Thèse de G. Thomsen.

donné, à une constante près, par l'intégration des équations (4); de plus, le second membre de (6) doit être nul, ce qui donne l'équation aux dérivées partielles en U et V qui caractérise les surfaces isothermiques : en y faisant, ce qui est loisible, $V = -U$, on retrouve ainsi l'équation donnée par Rothe (¹) et Calapso (²) (n° 30).

Si l'on revient au cas général, on voit que U et V sont assujetties uniquement à satisfaire à un système de deux équations aux dérivées partielles du cinquième ordre. C'est donc de ce système que dépend la représentation générale des surfaces au moyen des paramètres des lignes de courbure (n° 29).

Dès que U et V sont données, la détermination de la famille de surfaces, équivalentes au point de vue conforme, définie par ces fonctions, s'obtient par l'intégration du système de Lie, ayant le groupe orthogonal à cinq variables pour groupe associé, qui se déduit immédiatement des équations $\overline{\mathfrak{U}}f = 0$, $\overline{\mathfrak{V}}f = 0$. Car, ayant trouvé h_1, k_1, h_2, k_2, l par cette intégration, on a ensuite les formules vectorielles

$$(7) \qquad h = -\frac{1}{\cos\theta}(h_2 + il\sin\theta), \qquad k = -\frac{1}{\sin\theta}(k_2 - il\cos\theta),$$

et le vecteur (*normé*) qui définit le point courant de la surface est $\mu_0 = k - h$.

J'étudie ensuite (n° 32) la représentation entièrement intrinsèque des surfaces et la détermination complète de tous les invariants à partir des invariants fondamentaux I, J et θ (n° 33).

Comme application, j'examine les cas les plus simples de relations entre les invariants, en particulier le cas des surfaces qui admettent une transformation infinitésimale conforme (n^os 34 à 38); je trouve, pour déterminer celles de ces surfaces qui sont isothermiques, une équation différentielle ordinaire du troisième ordre.

5. Le paragraphe VI contient l'étude des courbes tracées sur une surface. La forme quadratique covariante, fondamentale,

(¹) ROTHE, *Thèse*, Berlin, 1897.

(²) P. CALAPSO, *Circolo matematico di Palermo*, t. 17, 1903, p. 275.

proportionnelle au carré de l'élément d'arc, est le carré scalaire de μ_0, qui s'écrit [1].

$$d\mu_0^2 = dh^2 + dk^2 = U^2 du^2 + V^2 dv^2. \tag{8}$$

La sphère de courbure normale est (formule vectorielle)

$$n = h \cos^2 \omega + k \sin^2 \omega, \tag{9}$$

ω étant l'angle de la courbe avec la ligne de courbure $v = \text{const.}$; et la sphère de courbure géodésique est (formule vectorielle)

$$g = h_1 \cos \omega - k_1 \sin \omega + \mu \frac{d\omega}{\sqrt{d\mu^2}}, \tag{10}$$

μ étant l'un quelconque des vecteurs qui représentent le point courant de la surface. Les formules (9) et (10) sont en relation directe avec les formules classiques de géométrie euclidienne qui donnent les courbures correspondantes; et la formule qui en découle pour le produit scalaire $g.dn$,

$$g.dn = -\sqrt{d\mu_0^2}.\sin \omega \cos \omega, \tag{11}$$

conduit à la formule de O. Bonnet sur la torsion géodésique.

La sphère osculatrice et sa dérivée sont, respectivement (formules vectorielles),

$$r = -g \sin\alpha + n \cos\alpha, \qquad r_1 = g \cos\alpha + n \sin\alpha, \tag{12}$$

l'angle α sous laquelle la première coupe la surface étant donné par

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}\alpha = \frac{P}{Q}, \qquad P = I \cos^3\omega + J \sin^3\omega + 3 \sin\omega \cos\omega \frac{d\omega}{\sqrt{d\mu_0^2}}, \\ &Q = \frac{1}{\sqrt{d\mu_0^2}} d\left(\frac{d\omega}{\sqrt{d\mu_0^2}}\right) + (J \sin\omega - I \cos\omega) \frac{d\omega}{\sqrt{d\mu_0^2}} + I_1 \cos^2\omega \\ &\qquad - J_1 \sin^2\omega + (\sin^2\theta \cos^2\omega - \cos^2\theta \sin^2\omega) \sin\omega \cos\omega. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

En particulier, les angles sous lesquels la surface est coupée par les sphères osculatrices aux lignes de courbure ont pour tangentes

$$\operatorname{tang}\alpha_1 = \frac{I}{I_1} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tang}\alpha_2 = -\frac{J}{J_1}; \tag{14}$$

[1] On emploie des coordonnées pentasphériques; il s'agit de vecteurs à cinq composantes, dont le carré scalaire est égal à 1 pour une sphère, et à *zéro* pour un point.

formules où les invariants fondamentaux interviennent d'une manière bien simple.

Pour les éléments invariants de la courbe, considérée en elle-même, on trouve : 1° pour la variable canonique s ([1]),

$$ds^2 = \sqrt{P^2 + Q^2} . d\mu_0^2 ; \tag{15}$$

2° pour l'invariant du quatrième ordre ([2]),

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt[4]{P^2 + Q^2}} \left(\frac{-1}{\sqrt{d\mu_0^2}} d(\text{arc tang}\, \alpha) + \sin\omega \cos\omega \right) . \tag{16}$$

Je termine cette étude en donnant (n^{os} 45, 46, 47) les formules qui fournissent n, μ_0, g, les formes quadratiques fondamentales $d\mu_0^2$ et $dn^2 = dg^2 = (n\, dg)^2$ et les éléments fondamentaux $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$ quand on emploie des coordonnées curvilignes quelconques, en représentant le point courant de la surface par un vecteur μ, de de carré scalaire nul, quelconque.

6. Au lieu de fonder la théorie conforme des surfaces sur des formes différentielles ou des transformations infinitésimales covariantes, on peut prendre comme point de départ l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfait le vecteur μ, c'est-à-dire dont les coordonnées pentasphériques du point courant sont cinq intégrales. Dans le paragraphe VIII, j'expose la théorie à ce point de vue, en supposant encore que les lignes de courbure sont prises comme lignes coordonnées sur la surface. On a alors affaire, comme Darboux l'avait montré autrefois, à une équation de Laplace.

Il est remarquable que les sphères de courbure géodésique principales h_1 et k_1 se déduisent alors du vecteur μ par les deux transformations de Laplace. De plus le vecteur canonique $\mu_0 = k - h$ est de la forme $\mu_0 = M\mu$, M étant une solution de l'équation adjointe.

Les équations de Laplace qui correspondent aux divers choix du vecteur μ sont, dans leur ensemble, définies par leurs invariants $\mathbf{h}$

([1]) Voir mon Mémoire du *Journal de l'École Polytechnique*, cahier 25, nouvelle série, n° 21ter.

([2]) Cet invariant est désigné par $\sqrt{J}$ dans le même Mémoire.

et **k** (entendus au sens de Darboux). Celle à laquelle satisfait le vecteur canonique μ_0 est

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \mathrm{JV}\frac{\partial z}{\partial u} + \mathrm{IU}\frac{\partial z}{\partial v} + (\mathrm{I}_1 + \mathrm{J}_1 + 2\mathrm{IJ})\,\mathrm{UV}z = 0,$$

de sorte que les invariants ont pour expressions

$$(18) \qquad \begin{cases} \mathbf{h} = -\mathrm{I}_1\mathrm{UV} = \dfrac{\partial^2 \log \mathrm{V}}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial v}\dfrac{\partial \log \mathrm{V}}{\partial u}, \\[2ex] \mathbf{k} = -\mathrm{J}_1\mathrm{UV} = \dfrac{\partial^2 \log \mathrm{U}}{\partial u\,\partial v} + \dfrac{\partial \log \mathrm{U}}{\partial v}\dfrac{\partial \log \mathrm{V}}{\partial v}. \end{cases}$$

Ces équations, jointes aux équations aux dérivées partielles fondamentales qui lient U et V (*voir* plus haut n° 2), permettent d'aborder le problème fondamental qui se pose ici :

Trouver les relations qui doivent lier les invariants **h** *et* **k** *d'une équation de Laplace pour qu'elle admette cinq solutions liées par la relation quadratique* $\sum_{\alpha=1}^{5} z_\alpha^2 = 0$, *et trouver ces solutions*. Le problème revient en effet à trouver les fonctions U, V correspondantes ; car, une fois qu'elles sont connues, on obtient les z_α, comme nous le montrons (n° 55), par l'intégration d'un système de Lie.

Il y a, naturellement, deux cas à distinguer, suivant que les invariants **h** et **k** sont égaux (cas des surfaces isothermiques) ou inégaux (cas général). La discussion complète du système précédent en U, V, dont dépend la question, nécessiterait des calculs de différentiation pénibles, que je n'ai pas abordés. Je me suis borné à indiquer (n^{os} 56 et 57) la marche à suivre ; dans le cas général de compatibilité, elle fournira sans intégration les fonctions inconnues U et V. S'il y a des cas exceptionnels, la détermination de ces fonctions pourra dépendre d'équations différentielles ordinaires que la méthode indiquée permettra de former.

I. — Résumé de Géométrie euclidienne.

1. La méthode que j'emploierai pour établir les principes de la géométrie conforme des surfaces repose sur l'introduction de transformations infinitésimales de la surface ayant, vis-à-vis du groupe conforme, un caractère d'invariance. Je vais d'abord l'utiliser, en considérant le groupe des déplacements au lieu du groupe conforme, pour retrouver rapidement les formules fondamentales de la géométrie euclidienne des surfaces dont j'aurai besoin.

Les transformations infinitésimales invariantes sont alors, par exemple ([1]), celles qui ont pour trajectoires respectives les deux familles de lignes de courbure de la surface S considérée, le déplacement qui leur correspond étant réglé de manière que la vitesse du point courant M de la surface soit égale à l'unité.

Prenons, pour simplifier, les paramètres u et v des lignes de courbure pour coordonnées de la surface. Désignons par m le vecteur OM, dont l'origine O est un point fixe arbitraire. Le carré scalaire dm^2 de sa différentielle dm est le ds^2 de la surface. Posons, avec les notations usuelles,

$$dm^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2. \tag{1}$$

Les deux transformations infinitésimales en question sont ainsi

$$\mathfrak{X}f = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \mathfrak{Y}f = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{2}$$

Si l'on a une autre transformation infinitésimale invariante $\mathfrak{Z}f$, elle pourra s'écrire

$$\mathfrak{Z}f = \mathrm{A}.\mathfrak{X}f + \mathrm{B}.\mathfrak{Y}f, \tag{3}$$

et A, B seront des invariants. La réciproque est évidente, de sorte que (3) est (A et B étant des invariants quelconques) la formule générale des transformations infinitésimales de la surface invariantes.

On peut, en particulier, prendre pour $\mathfrak{Z}f$ le crochet de $\mathfrak{X}f$ et $\mathfrak{Y}f$, de sorte que la formule

$$(\mathfrak{X}f, \mathfrak{Y}f) = \mathrm{M}.\mathfrak{Y}f - \mathrm{N}.\mathfrak{X}f \tag{4}$$

fournit les deux invariants

$$\mathrm{M} = -\frac{1}{2}\mathfrak{X}(\log \mathrm{G}), \qquad \mathrm{N} = -\frac{1}{2}\mathfrak{Y}(\log \mathrm{E}), \tag{5}$$

dont l'interprétation sera donnée tout à l'heure.

([1]) *Voir* plus loin, n° 5.

2. Appliquées au vecteur m, $\mathfrak{X}f$ et $\mathfrak{Y}f$ donnent deux vecteurs covariants, de carré scalaire égal à 1,

$$a = \mathfrak{X}m, \qquad b = \mathfrak{Y}m\,; \tag{6}$$

ce sont les vecteurs de direction des lignes de courbure. En leur adjoignant leur produit vectoriel

$$c = a \times b, \tag{7}$$

on a une figure type (trièdre trirectangle), de forme invariable, qui est covariante à S, et la détermination de S sera liée à celle de cette figure.

Les formules qui expriment cette dépendance sont celles du *prolongement* de $\mathfrak{X}f$ et $\mathfrak{Y}f$, relativement aux éléments vectoriels m, a, b, c.

Nous avons déjà les variations (6) de m. Les variations de a, b, c, pour $\mathfrak{X}f$ par exemple, pourront s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}a &= R_{1,1}a + R_{1,2}b + R_{1,3}c,\\
\mathfrak{X}b &= R_{2,1}a + R_{2,2}b + R_{2,3}c,\\
\mathfrak{X}c &= R_{3,1}a + R_{3,2}b + R_{3,3}c,
\end{aligned}$$

et, à cause des relations d'orthogonalité qui lient a, b, c, le déterminant des $R_{i,k}$ est un déterminant symétrique gauche, dont les coefficients sont les composantes intrinsèques de la rotation instantanée du trièdre abc.

De même pour $\mathfrak{Y}f$: Les transformations prolongées sont, par suite, les suivantes, où les notations vectorielles s'expliquent d'ellesmêmes :

$$\overline{\mathfrak{X}}f = \mathfrak{X}f + a\frac{\partial f}{\partial m} + H\left(c\frac{\partial f}{\partial a} - a\frac{\partial f}{\partial c}\right) - H_1\left(a\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial a}\right), \tag{8}$$

$$\overline{\mathfrak{Y}}f = \mathfrak{Y}f + b\frac{\partial f}{\partial m} + K\left(c\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial c}\right) + K_1\left(a\frac{\partial f}{\partial b} - b\frac{\partial f}{\partial a}\right). \tag{9}$$

Il manque un terme dans chacune d'elles, et la signification des coefficients qui subsistent est la suivante : $\frac{1}{H}$ et $\frac{1}{K}$ sont les rayons de courbure normale principaux ; $\frac{1}{H_1}$ et $\frac{1}{K_1}$ sont les rayons de courbure géodésique principaux.

Cela tient à ce que les formules d'Olinde Rodrigues [1] peuvent s'écrire

(10) $\mathfrak{X}c = -\mathrm{H}a, \quad \mathfrak{X}b = -\mathrm{H}_1 a, \quad \mathfrak{Y}c = -\mathrm{K}b, \quad \mathfrak{Y}a = -\mathrm{K}_1 b.$

3. Si l'on se donne E, G, H, K, H_1, K_1 en fonction de u et v, la détermination de la surface reviendra à l'intégration du système

(11) $$\overline{\mathfrak{X}}f = 0, \quad \overline{\mathfrak{Y}}f = 0.$$

Les conditions d'intégrabilité, pour que ce système soit *complet*, s'exprimeront en écrivant que les transformations (8) et (9) et leur crochet satisfont à l'identité (4). On obtient ainsi immédiatement

$$\begin{gathered}\mathrm{K}_1 b - \mathrm{H}_1 a = \mathrm{M}b - \mathrm{N}a,\\ \mathfrak{X}(\mathrm{K}) + \mathrm{HK}_1 = \mathrm{MK}, \quad \mathfrak{Y}(\mathrm{H}) + \mathrm{KH}_1 = \mathrm{NH},\\ \mathfrak{X}(\mathrm{K}_1) + \mathfrak{Y}(\mathrm{H}_1) - \mathrm{HK} = \mathrm{MK}_1 + \mathrm{NH}_1.\end{gathered}$$

On conclut de la première de ces relations

(12) $$\mathrm{N} = \mathrm{H}_1, \quad \mathrm{M} = \mathrm{K}_1,$$

ce qui est l'interprétation annoncée pour M et N.

Les deux suivantes équivalent alors aux formules de Codazzi; elles donnent H_1 et K_1, au moyen de H et K, sous la forme

(13) $$\mathrm{H}_1 = \frac{\mathfrak{Y}(\mathrm{H})}{\mathrm{H}-\mathrm{K}}, \quad \mathrm{K}_1 = \frac{\mathfrak{X}(\mathrm{K})}{\mathrm{K}-\mathrm{H}}.$$

La dernière devient, aux notations près, la formule de Gauss

(14) $$\mathrm{HK} = \mathfrak{X}(\mathrm{K}_1) + \mathfrak{Y}(\mathrm{H}_1) - \mathrm{H}_1^2 - \mathrm{K}_1^2;$$

car, en associant (5) et (12), on a

(15) $$\mathrm{H}_1 = -\frac{1}{2}\mathfrak{Y}(\log \mathrm{E}), \quad \mathrm{K}_1 = -\frac{1}{2}\mathfrak{X}(\log \mathrm{G}).$$

Enfin l'identité (4) devient ainsi

(16) $$(\mathfrak{X}f, \mathfrak{Y}f) = -\mathrm{H}_1.\mathfrak{X}f + \mathrm{K}_1.\mathfrak{Y}f.$$

---

[1] Pour le déplacement le long d'une ligne de courbure, elles s'appliquent aussi bien à la tangente à la seconde ligne de courbure (qui est normale à la première) qu'à la normale à la surface.

4. Il suffira donc de se donner E, G, H, K, liés par l'équation de Gauss (14) et par les équations de Codazzi (13), où H_1 et K_1 auront les valeurs (15), pour définir la forme d'une surface. Les surfaces, égales entre elles, ainsi définies, s'obtiendront en intégrant le système complet

$$\mathfrak{X}f = 0, \qquad \mathfrak{Y}f = 0, \tag{17}$$

dont les premiers membres sont donnés par les formules (8) et (9); ou, si l'on préfère, le système de Pfaff, complètement intégrable, qui lui est équivalent. La nature des intégrations est, par là, mise en évidence ; les vecteurs initiaux a, b, c et la position initiale de m restent arbitraires.

Ceci laisse subsister un double arbitraire, relativement aux variables u et v, qu'on pourrait remplacer par des fonctions arbitraires

$$u' = \varphi(u), \qquad v' = \psi(v),$$

de l'une et l'autre respectivement.

Si l'on se place au point de vue de la définition intrinsèque stricte des surfaces, on devra laisser de côté les variables u et v et ne considérer que les invariants. Dans le cas général, qui exclut les surfaces de Weingarten, on pourra prendre comme variables H et K supposées indépendantes. Il faudra alors se donner, en fonction de ces variables intrinsèques H et K, les éléments nécessaires pour définir les transformations fondamentales $\mathfrak{X}f$ et $\mathfrak{Y}f$, sous la forme

$$\mathfrak{X}f = \xi_1(H, K)\frac{\partial f}{\partial H} + \xi\,(H, K)\frac{\partial f}{\partial K}, \tag{18}$$

$$\mathfrak{Y}f = \eta\,(H, K)\frac{\partial f}{\partial H} + \eta_1(H, K)\frac{\partial f}{\partial K}, \tag{19}$$

et l'on aura encore à intégrer les équations (17) définies par (8), (9), (18) et (19). Les invariants H_1 et K_1 seront donnés par les formules (13), dans lesquelles

$$\mathfrak{X}(K) = \xi\,(H, K), \qquad \mathfrak{Y}(H) = \eta\,(H, K). \tag{20}$$

La formule de Gauss deviendra une relation linéaire en ξ_1 et η_1, exprimée en fonction de H, K, de ξ, η et de leurs dérivées.

Mais il s'introduira, en plus, de nouvelles conditions d'intégrabilité, car les transformations (20) satisfont à l'identité (16), c'est-à-dire à

$$\mathfrak{X}\eta - \mathfrak{Y}\xi_1 = \frac{\eta(\xi + \xi_1)}{K - H}, \qquad \mathfrak{X}\eta_1 - \mathfrak{Y}\xi = \frac{\xi(\eta + \eta_1)}{K - H}. \tag{21}$$

On a donc encore trois conditions d'intégrabilité liant les quatre fonctions arbitraires qui sont ici ξ, η, ξ_1, η_1.

5. On pourrait ne pas présupposer la théorie des lignes de courbure. L'invariance de dm^2 fournit d'emblée deux types de déplacements sur la surface, qui ont le caractère invariant, à savoir ceux qui ont lieu suivant les lignes de longueur nulle. Or, pour une ligne de longueur nulle, on a un invariant intégral qui est son *pseudo-arc* ([1]), défini, en fonction de la variable t dont dépend le point courant m, par la formule

$$d\sigma^4 = (m''_{t^2})^2 . dt^4. \tag{22}$$

On aura donc deux transformations infinitésimales invariantes, pour la surface considérée, en choisissant celles qui ont les lignes minima de chaque système pour trajectoires, et en réglant le déplacement sur ces lignes de manière que la *pseudo-vitesse* du point courant soit égale à 1.

Les formules de ces transformations sont immédiates si l'on rapporte la surface à ses lignes minima. Soit alors, en effet,

$$dm^2 = 2F . d\alpha\, d\beta. \tag{23}$$

Il faut faire intervenir les carrés scalaires

$$(m''_{\alpha^2})^2 = L^2, \qquad (m''_{\beta^2}) = N^2; \tag{24}$$

et l'on peut remarquer que L et N sont les coefficients de $d\alpha^2$ et $d\beta^2$ dans la seconde forme de Gauss, prise sous forme invariante ([2]),

$$C . d^2 m = L\, d\alpha^2 + 2M\, d\alpha\, d\beta + N\, d\beta^2. \tag{25}$$

Cela posé, les transformations en question sont

$$\mathfrak{A}f = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \mathfrak{B}f = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\partial f}{\partial \beta}. \tag{26}$$

---

(1) J'ai introduit cet élément dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 140, 1905, p. 1381.

(2) *Voir*, par exemple, mes *Leçons de Géométrie supérieure* [Paris, Hermann, 1919, p. 66, formules (16)].

Elles fournissent immédiatement deux vecteurs invariants, de longueurs nulles, qui sont tangents à la surface si on leur donne m pour origine :

$$l = \mathcal{A} m, \qquad n = \mathcal{B} m. \tag{27}$$

Leur produit scalaire

$$ln = \frac{m'_\alpha m'_\beta}{\sqrt{\mathrm{LN}}} = \frac{\mathrm{F}}{\sqrt{\mathrm{LN}}} \tag{28}$$

est, par suite, un invariant. La vérification directe de cette invariance est, du reste, immédiate ; et l'on constaterait facilement, en tenant compte de (23) et (25), que l'expression de cet invariant au moyen des courbures normales principales H et K est, avec des déterminations convenables pour les radicaux,

$$ln = \frac{2}{\mathrm{H} - \mathrm{K}}. \tag{29}$$

Pour une surface réelle, l et n sont imaginaires conjugués (ce qui revient à supposer $\mathrm{H} > \mathrm{K}$) ; et ceci conduit à leur substituer les vecteurs, de longueur égale à 1, invariants aussi et réels,

$$a = \frac{l + n}{\sqrt{2\,ln}}, \qquad b = \frac{l - n}{i\sqrt{2\,ln}}. \tag{30}$$

On a alors

$$a = \mathcal{X} m, \qquad b = \mathcal{Y} m, \tag{31}$$

en posant

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{X} f &= \frac{\mathcal{A} f + \mathcal{B} f}{\sqrt{2\,ln}} = \sqrt{\mathrm{H} - \mathrm{K}}\,\frac{\mathcal{A} f + \mathcal{B} f}{2}, \\ \mathcal{Y} f &= \frac{\mathcal{A} f - \mathcal{B} f}{i\sqrt{2\,ln}} = \sqrt{\mathrm{H} - \mathrm{K}}\,\frac{\mathcal{A} f - \mathcal{B} f}{2i}. \end{aligned} \right. \tag{32}$$

Les trajectoires de ces transformations infinitésimales étant définies par

$$\sqrt{\mathrm{L}}\, d\alpha - \sqrt{\mathrm{N}}\, d\beta = 0, \qquad \sqrt{\mathrm{L}}\, d\alpha + \sqrt{\mathrm{N}}\, d\beta = 0,$$

on constate que ce sont les lignes de courbure ; et, puisque

$$a^2 = b^2 = 1$$

dans les formules (31), les transformations (32) sont les mêmes que les transformations de même nom introduites au n° 1.

Dès lors, la théorie se développera comme précédemment.

II. — Les transformations infinitésimales invariantes.

6. Passons au point de vue de la géométrie conforme. On emploiera les coordonnées pentasphériques. Un point sera donc représenté par un vecteur à cinq composantes de carré scalaire nul, ou *vecteur-point*, qui n'est défini qu'à un facteur scalaire près. Une sphère sera représentée par un vecteur qui peut être quelconque; il est cependant commode, pour les questions d'angles par exemple, de choisir ce vecteur de manière que son carré scalaire soit égal à 1 : nous dirons alors que le vecteur est un *vecteur-unité*. Nous emploierons, en général, des minuscules pour les vecteurs quelconques, des minuscules grecques pour les vecteurs-points, des grandes lettres pour les grandeurs scalaires, et des majuscules bâtardes pour les symboles de transformations infinitésimales.

La représentation analytique des éléments invariants aura le caractère invariant vis-à-vis du groupe linéaire homogène orthogonal à cinq variables. Pour interpréter les éléments au moyen de ceux de la géométrie euclidienne, on emploiera des coordonnées pentasphériques *cartésiennes* : j'entends par là celles qui, pour un point λ, sont

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = x, \qquad \lambda_2 = y, \qquad \lambda_3 = z, \\ \lambda_4 = \dfrac{1 - x^2 - y^2 - z^2}{2}, \qquad \lambda_5 = \dfrac{1 + x^2 + y^2 + z^2}{2i}, \end{array}\right.$$

x, y, z étant des coordonnées rectilignes orthogonales.

On a ainsi, non seulement, pour le carré scalaire, $\lambda^2 = 0$, mais aussi

$$(2)\qquad \lambda_4 + i\lambda_5 = 1.$$

Pour deux points, λ et λ', dont la distance est D, on a le produit scalaire

$$(3)\qquad \lambda\lambda' = -\frac{1}{2}D^2 \qquad \text{ou} \qquad D^2 = -2\lambda\lambda'.$$

Pour avoir le vecteur-unité qui représente une sphère, j'introduirai le vecteur exceptionnel

$$(4)\qquad j = \left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right),$$

de composantes

$$j_1 = 0, \qquad j_2 = 0, \qquad j_3 = 0, \qquad j_4 = \frac{1}{2}, \qquad j_5 = \frac{i}{2}.$$

Il est de carré scalaire nul, mais ne représente pas un point, car on a $j_4^2 + j_5^2 = 0$, ce qui est incompatible avec (2), quel que soit le facteur par lequel on essaie de multiplier j.

On a, pour tout point λ, le produit scalaire

$$\lambda j = \frac{1}{2}, \tag{5}$$

de sorte que l'on peut considérer j comme une espèce de point imaginaire qui est à une distance égale à i de tout point de l'espace.

Cela posé, la sphère a, de centre α et de rayon R, est représentée par le vecteur-unité

$$a = \frac{\alpha}{R} + jR, \tag{6}$$

car la condition $a\lambda = 0$ se réduit à

$$\frac{\alpha\lambda}{R} + \frac{R}{2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad R^2 = -2\lambda\alpha,$$

ce qui, d'après (3), est l'équation de la sphère considérée. On a bien, d'autre part, $a^2 = 1$ à cause de $\alpha^2 = 0$, $j^2 = 0$, et de (5).

Dans ces vérifications, R n'intervient que par son carré. On peut donc *orienter* la sphère, en associant au signe positif pour R la normale extérieure, ou, si l'on veut, la face extérieure de la sphère; et au signe négatif pour R la normale intérieure, c'est-à-dire la face interne de la sphère.

Alors le produit scalaire aa' relatif à deux sphères orientées est égal au cosinus de l'angle formé par les normales dirigées correspondantes, que l'on peut appeler l'angle des sphères orientées a et a'.

D'autre part, les équations (5) et (6) entraînent la formule

$$aj = \frac{1}{2R}. \tag{7}$$

7. Pour obtenir des transformations infinitésimales de la surface, invariantes vis-à-vis du groupe conforme, la voie la plus rapide et

la plus géométrique est de partir des lignes de courbure. Je reprends les notations du n° **1**, mais je désignerai par μ le vecteur à cinq coordonnées qui représente maintenant le point M, tel qu'il est fourni en coordonnées pentasphériques cartésiennes. A cause de $\mu_4 + i\mu_5 = 1$, on aura

$$d\mu_4^2 + d\mu_5^2 = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad d\mu^2 = dm^2,$$

le dm^2 étant celui du n° **1** ([1]). Donc

$$d\mu^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2. \tag{8}$$

Soit h la sphère de courbure normale principale qui a un contact du second ordre avec la ligne de courbure $v = \text{const.}$; elle sera orientée, son rayon étant $\frac{1}{\mathrm{H}}$, où H est tel qu'il a été défini au n° **2**; cela revient à dire que la direction normale qui correspond à cette orientation est celle qui est opposée au vecteur c du n° **2**. La seconde sphère de courbure normale principale sera, de même, désignée par k. Désignant encore par ξ et η les centres respectifs des deux sphères, on a donc

$$h = \xi\mathrm{H} + \frac{1}{\mathrm{H}}j, \qquad k = \eta\mathrm{K} + \frac{1}{\mathrm{K}}j. \tag{9}$$

Comme on a ainsi $h^2 = 1$, $k^2 = 1$, $hk = 1$, on a $(k - h)^2 = 0$. Donc le vecteur

$$\mu_0 = k - h$$

est un *point* qui, appartenant au faisceau défini par h et k, n'est autre que M; et l'on a, P étant un facteur scalaire,

$$k - h = \mu_0 = \mathrm{P}\mu.$$

Pour calculer P, il suffit de multiplier les deux membres extrêmes de cette équation vectorielle par j. Comme on a (n° **5**)

$$jk = \frac{1}{2}\mathrm{K}, \qquad jh = \frac{1}{2}\mathrm{H}, \qquad j\mu = \frac{1}{2},$$

([1]) Pareille simplification, ne faisant intervenir que les trois premières coordonnées pentasphériques cartésiennes, se présentera dans tous les calculs analogues, et nous la ferons dorénavant sans justification nouvelle. Par exemple, pour deux points variables λ et μ, on aura $d\lambda\,d\mu = dl\,dm$, l et m étant les vecteurs aux trois coordonnées cartésiennes proprement dites qui définissent les points définis par λ et μ en coordonnées pentasphériques cartésiennes.

on conclut $P = K - H$. Donc

$$(10) \qquad \mu_0 = k - h = (K - H)\mu.$$

Comme h et k sont des vecteurs covariants à M, on a ainsi une représentation de M par le vecteur μ_0 covariant.

8. Lorsque M se déplace sur les courbes $v = \text{const.}$, la sphère h est tangente à la sphère infiniment voisine, et sa *vitesse angulaire* ([1]) est nulle, mais il n'en est pas ainsi pour k. On peut donc définir une transformation infinitésimale $\mathfrak{U}f$ de la surface par la double condition qu'elle ait pour trajectoires les lignes de courbure considérées et que dans le déplacement le long de ces lignes la sphère k ait une vitesse angulaire égale à 1.

Ce sera une première transformation infinitésimale invariante vis-à-vis du groupe conforme. On en aura une seconde $\mathfrak{V}f$ en prenant les courbes $u = \text{const.}$ pour trajectoires et la vitesse angulaire de h égale à l'unité le long de ces courbes.

Remarquons que, d'après (10),

$$(\mathfrak{U}\mu_0)^2 = (\mathfrak{U}k - \mathfrak{U}h)^2 = (\mathfrak{U}k)^2 - 2\,\mathfrak{U}h\,\mathfrak{U}k + (\mathfrak{U}h)^2.$$

Or $(\mathfrak{U}h)^2$ est nul; donc $\mathfrak{U}h$ représente un point, commun à h et à $h + \mathfrak{U}h.du$, c'est-à-dire le point de contact M de h avec la sphère infiniment voisine. Donc $\mathfrak{U}h\,\mathfrak{U}k$ est égal à $\mu\,\mathfrak{U}k$, à un facteur près, ce qu'on peut écrire $\mathfrak{U}(\mu k) - k\,\mathfrak{U}\mu$; et les deux termes de cette différence sont nuls, car μk est nul puisque k passe par μ et $k\,\mathfrak{U}\mu$ est nul, parce que $\mathfrak{U}\mu$ étant une sphère normale à (S) en M ([2]), k, qui est tangente à (S) est normale à cette sphère. Il reste donc

$$(\mathfrak{U}\mu_0)^2 = (\mathfrak{U}k)^2, \qquad \text{et de même} \qquad (\mathfrak{V}\mu_0)^2 = (\mathfrak{V}h)^2;$$

et les conditions qni définissent $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ peuvent s'écrire, respectivement,

$$(11) \qquad (\mathfrak{U}\mu_0)^2 = 1, \qquad (\mathfrak{V}\mu_0)^2 = 1.$$

([1]) La *vitesse angulaire* d'une sphère s qui dépend d'un paramètre θ est la limite du rapport obtenu en divisant par $\Delta\theta$ l'angle de s avec $s + \Delta s$. *Voir* mon mémoire du *Journal de Mathématiques* (nouvelle série, t. 2), p. 134.

([2]) Quand un point λ dépend d'un paramètre, la sphère $d\lambda$ passe par le point et est normale à son déplacement (*voir* même mémoire, p. 150).

Ceci posé, on a, X et Y étant des facteurs scalaires à déterminer,

$$\mathfrak{U}f = \mathrm{X}\,\mathfrak{X}f, \qquad \mathfrak{V}f = \mathrm{Y}\,\mathfrak{Y}f, \tag{12}$$

et, d'après (10), il vient, μ^2 et $\mu\,d\mu$ étant nuls,

$$(\mathfrak{X}\mu_0)^2 = [(\mathrm{K}-\mathrm{H})\mathfrak{X}\mu + \mu\,\mathfrak{X}(\mathrm{K}-\mathrm{H})]^2 = (\mathrm{K}-\mathrm{H})^2(\mathfrak{X}\mu)^2,$$

ce qui devient, d'après la nóte du n° 9, et l'équation (6) du n° 2,

$$(\mathrm{K}-\mathrm{H})^2(\mathfrak{X}\mu)^2 = (\mathrm{K}-\mathrm{H})^2(\mathfrak{X}m)^2 = (\mathrm{K}-\mathrm{H})^2.$$

On trouve donc, pour satisfaire à (11),

$$\mathrm{X}^2 = \mathrm{Y}^2 = \frac{1}{(\mathrm{K}-\mathrm{H})^2},$$

et l'on a ainsi les deux transformations cherchées

$$\mathfrak{U}f = \frac{1}{\mathrm{K}-\mathrm{H}}\mathfrak{X}f = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}(\mathrm{K}-\mathrm{H})}\frac{\partial f}{\partial u}, \tag{13}$$

$$\mathfrak{V}f = \frac{1}{\mathrm{H}-\mathrm{K}}\mathfrak{Y}f = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}(\mathrm{H}-\mathrm{K})}\frac{\partial f}{\partial v}. \tag{13 bis}$$

9. Remarquons qu'elles s'étaient présentées au n° 3, dans les formules (13), et récrivons les formules (13) et (15) de ce n° 3, sous la forme

$$\mathrm{H}_1 = \mathfrak{V}(\mathrm{H}) = \frac{1}{2}(\mathrm{K}-\mathrm{H})\,\mathfrak{V}(\log\mathrm{E}), \tag{14}$$

$$\mathrm{K}_1 = \mathfrak{U}(\mathrm{K}) = \frac{1}{2}(\mathrm{H}-\mathrm{K})\,\mathfrak{U}(\log\mathrm{G}). \tag{14 bis}$$

Elles permettent de calculer les coefficients I et J de l'identité

$$(\mathfrak{U}f, \mathfrak{V}f) = \mathrm{I}\,\mathfrak{V}f - \mathrm{J}\,\mathfrak{U}f. \tag{15}$$

On trouve, sans difficulté,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathfrak{U}(\mathrm{H})}{\mathrm{K}-\mathrm{H}} = \frac{\mathrm{H}'_u}{\sqrt{\mathrm{E}}(\mathrm{H}-\mathrm{K})^2}, \qquad \mathrm{J} = \frac{\mathfrak{V}(\mathrm{K})}{\mathrm{H}-\mathrm{K}} = \frac{\mathrm{K}'_v}{\sqrt{\mathrm{G}}(\mathrm{H}-\mathrm{K})^2}. \tag{16}$$

Ce sont deux invariants (n° 1) du troisième ordre, et l'on reconnaît les invariants de Tresse ([1]).

Nous avons de plus le moyen d'en déduire des invariants nou-

([1]) *Thèse*, imprimée dans le tome 18 des *Acta mathematica*, Chap. II, n° 1.

veaux en leur appliquant les opérations invariantes $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$; on obtient ainsi quatre invariants distincts du quatrième ordre. D'après les principes généraux de Lie (*voir* n° 33), il resterait à en trouver un cinquième. Mais cette question sera reprise plus loin par une méthode géométrique.

10. Je vais auparavant montrer comment on peut arriver aux transformations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ sans présupposer la théorie des lignes de courbure. Nous partons, comme au n° 5, des lignes minima. Nous avons donc ici

$$d\mu^2 = 2F\,d\alpha\,d\beta, \tag{17}$$

ce qui conduit à introduire, au lieu de μ, le vecteur ϖ défini par

$$\mu = \sqrt{F}\varpi, \tag{15}$$

pour lequel (17) est remplacée par la formule canonique

$$d\varpi^2 = 2\,d\alpha\,d\beta. \tag{19}$$

Cette forme se conserve par les transformations

$$\alpha' = \Phi(\alpha), \qquad \beta' = \Psi(\beta), \qquad \varpi' = \sqrt{\Phi'\Psi'}\,\varpi, \tag{20}$$

pour lesquelles on a des équations de la forme

$$\frac{\partial\varpi'}{\partial\alpha'} = \frac{\sqrt{\Psi'}}{\sqrt{\Phi'}}\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha} + A\varpi, \qquad \frac{\partial^2\varpi'}{\partial\alpha'^2} = \frac{\sqrt{\Psi'}}{\Phi'\sqrt{\Phi'}}\frac{\partial^2\varpi}{\partial\alpha^2} + B\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha} + C\varpi.$$

Or on a

$$\varpi^2 = 0, \qquad \left(\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha}\right)^2 = 0,$$

d'où

$$\varpi\frac{\partial\varpi}{\partial\alpha} = 0, \qquad \varpi\frac{\partial^2\varpi}{\partial\alpha^2} = 0, \qquad \frac{\partial\varpi}{\partial\alpha}\frac{\partial^2\varpi}{\partial\alpha^2} = 0.$$

Donc on a

$$\left(\frac{\partial^2\varpi'}{\partial\alpha'^2}\right)^2 = \frac{\Psi'}{\Phi'^3}\left(\frac{\partial^2\varpi}{\partial\alpha^2}\right)^2. \tag{21}$$

On voit ainsi que les quantités

$$P = \sqrt[4]{\left(\frac{\partial^2\varpi}{\partial\alpha^2}\right)^2}, \qquad Q = \sqrt[4]{\left(\frac{\partial^2\varpi}{\partial\beta^2}\right)^2} \tag{22}$$

donnent lieu, pour les transformations (20), aux formules de transformation

$$(23) \qquad P' = \frac{\sqrt[4]{\Phi'\Psi'}}{\Phi'} P, \qquad Q' = \frac{\sqrt[4]{\Phi'\Psi'}}{\Psi'} Q.$$

On en conclut que

$$(24) \qquad \mu_0 = 2PQ\varpi = 2\frac{PQ}{\sqrt{F}}\mu$$

est une représentation invariante de M, et que les deux transformations

$$(25) \qquad \mathfrak{P}f = \frac{1}{P\sqrt{2PQ}}\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \mathfrak{Q}f = \frac{1}{Q\sqrt{2PQ}}\frac{\partial f}{\partial \beta}$$

sont invariantes.

Pour leur substituer des transformations qui soient réelles sur une surface réelle, on posera

$$(26) \qquad \mathfrak{U}f = \frac{\mathfrak{P}f + \mathfrak{Q}f}{2}, \qquad \mathfrak{V}f = \frac{\mathfrak{P}f - \mathfrak{Q}f}{2i}.$$

Comme on a, en vertu de $\frac{\partial \mu_0}{\partial \alpha}\frac{\partial \mu_0}{\partial \beta} = 4P^2Q^2$,

$$(\mathfrak{P}\mu_0)^2 = 0, \qquad (\mathfrak{Q}\mu_0)^2 = 0, \qquad \mathfrak{P}\mu_0 \mathfrak{Q}\mu_0 = 2,$$

ces transformations satisfont à

$$(27) \qquad (\mathfrak{U}\mu_0)^2 = (\mathfrak{V}\mu_0)^2 = 1.$$

Elles sont dès lors identiques à (13) et (13 *bis*). En effet, d'après (18) et (22), et les équations (24) du n° 5, on a

$$P^4 = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \alpha^2}\right)^2 = \frac{1}{F}(m''_{\alpha_2})^2 = \frac{L^2}{F},$$
$$Q^4 = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \beta^2}\right)^2 = \frac{1}{F}(m''_{\beta_2})^2 = \frac{N^2}{F},$$

d'où, en ayant égard aux formules du n° 5, et avec des déterminations convenablement choisies pour les radicaux,

$$2PQ = \frac{2\sqrt{LN}}{\sqrt{F}} = \sqrt{F}(K - H), \qquad \frac{P}{\sqrt{L}} = \frac{Q}{\sqrt{N}}.$$

Cela permet de conclure que le vecteur (24) est identique au vecteur (10), puis que les trajectoires des transformations (26) sont bien les lignes de courbure. Les relations (11) achèvent dès lors de prouver l'identité des nouvelles transformations $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$ avec les anciennes.

III. — Les dérivées des sphères de courbures principales et le pentasphère fondamental.

11. Je cherche les *dérivées* [1] des sphères h et k relatives aux déplacements u et v (c'est-à-dire obtenus en faisant varier soit u, soit v). On obtient ces éléments nouveaux (qui sont évidemment covariants) sous forme covariante en appliquant à h et k les opérations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$. Nous avons déjà remarqué que $\mathfrak{U}h$ et $\mathfrak{V}k$ ne diffèrent pas du point M. On a donc des identités de la forme

$$\mathfrak{U}h = X\mu, \qquad \mathfrak{V}k = Y\mu, \tag{1}$$

où X et Y sont des coefficients scalaires à déterminer. A cet effet, je multiplie par le vecteur j (n° 6) les deux membres des équations vectorielles (1). En tenant compte de la définition [équation (16), n° 9] des invariants I et J, cela donne immédiatement

$$I(K - H) = X, \qquad J(H - K) = Y,$$

et les formules (1) deviennent ainsi, en introduisant le vecteur canonique μ_0 pour M [équation (10), n° 7],

$$\mathfrak{U}h = I\mu_0, \qquad \mathfrak{V}h = -J\mu_0. \tag{2}$$

12. Considérons maintenant la dérivée h'_v. En différentiant $h\mu = 0$, qui exprime que h passe en M, on a

$$h\mu'_v + \mu h'_v = 0.$$

Or μ'_v est une sphère normale à (S) en M : donc elle est nor-

[1] Lorsqu'une sphère s dépend d'un paramètre t, sa *dérivée* par rapport à ce paramètre est la sphère s' qui passe par le cercle caractéristique de s et lui est normale : elle est représentée par le vecteur $\frac{ds}{dt}$, si le vecteur s qui représente la sphère donnée est un vecteur-unité (*voir* mon mémoire du 25e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, p. 54).

male à h, et $h\mu'_v$ est nul; nous concluons donc

(3) $$\mu h'_v = 0,$$

c'est-à-dire que h'_v passe en M. En différentiant (3), il vient

(4) $$\mu'_u h'_v + \mu h''_{uv} = 0.$$

Or, suivant la remarque qui a servi au numéro précédent; on a une identité de la forme

$$h'_u = R\mu,$$

R étant un certain vecteur scalaire; et l'on en tire

$$h''_{uv} = R\mu'_v + R'_v\mu.$$

D'où l'on conclut, la sphère μ'_v passant par μ et étant orthogonale à μ'_u,

(5) $$\mu h''_{uv} = 0, \qquad \mu'_u h''_{uv} = 0.$$

L'identité (4) donne donc

(6) $$\mu'_u h'_v = 0.$$

En différentiant celle-ci, il vient

$$\mu''_{u^2} h'_v + \mu'_u h''_{uv} = 0;$$

d'où, à cause de (5),

(7) $$\mu''_{u^2} h'_v = 0.$$

Les équations (3), (5), (7) prouvent que la sphère h'_v a un contact du second ordre en M avec les lignes de courbure $v = \text{const.}$ Comme elle est, par définition, orthogonale à h, elle est orthogonale à la surface. C'est donc la sphère de courbure géodésique de la ligne de courbure $v = \text{const.}$

Ainsi, *quand on se déplace le long d'une ligne de courbure, la sphère de courbure normale principale qui lui est simplement tangente a pour dérivée la sphère de courbure géodésique principale* [1] *qui est orthogonale à cette ligne de courbure.*

---

[1] J'appelle *sphères de courbure géodésique principales*, celles qui ont un

Cela revient à dire que la surface canal, enveloppe des sphères de courbure normale principale considérées, est engendrée par les cercles osculateurs aux lignes de courbure de l'autre système. Sous cette forme, le théorème est connu (¹).

13. Je désignerai par h_1 le vecteur-unité qui représente la sphère h'_ν, orientée de manière que la direction de la normale qui correspond à cette orientation soit opposée au vecteur b (n° 2), de sorte que l'on aurait, en coordonnées pentasphériques cartésiennes,

$$h_1 = \xi_1 H_1 + \frac{1}{H_1} j. \tag{8}$$

Comme $(\mathfrak{V} h)^2$ est égal à 1, d'après la définition de $\mathfrak{V} f$, on a, au signe près, $h_1 = \varepsilon \mathfrak{V} h$. En multipliant par j, et ayant égard à la formule (14) du n° 9, on voit que $\varepsilon = 1$. On a donc les formules

$$h_1 = \mathfrak{V} h, \qquad k_1 = \mathfrak{U} k. \tag{9}$$

14. Je passe aux dérivées de h_1 et k_1, c'est-à-dire aux *dérivées secondes* de h et k. On sait que h_1 est, pour le déplacement u, tangente en M à son infiniment voisine, de sorte que $\mathfrak{U} h_1$ ne diffère de μ que par un facteur. Écrivons donc les formules

$$\mathfrak{U} h_1 = X \mu, \qquad \mathfrak{V} k_1 = Y \mu; \tag{10}$$

et cherchons les facteurs scalaires X et Y.

Multipliant les équations (10) par j, on a d'abord

$$X = \mathfrak{U}(H_1), \qquad Y = \mathfrak{V}(K_1). \tag{11}$$

Puis, d'après les équations (14) et (15) du n° 9,

$$\mathfrak{U}(H_1) = \mathfrak{U}\mathfrak{V}(H) = \mathfrak{V}\mathfrak{U}(H) + I\mathfrak{V}(H) - J\mathfrak{U}(H);$$

et en tirant $\mathfrak{U}(H)$ de (16), on trouve, toutes réductions faites,

$$\mathfrak{U}(H_1) = (K - H)[\mathfrak{V}(I) - 2IJ]; \tag{12}$$

---

contact du second ordre avec les lignes de courbure, et qui sont orthogonales à la surface.

(¹) *Voir*, par exemple, Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, 2ᵉ édition, p. 77.

et, de même,

(12 *bis*) $$\mathfrak{V}(K_1) = (H - K)[\mathfrak{U}(J) - 2IJ).$$

Les formules (10) prennent ainsi la forme, analogue à (2),

(13) $$\mathfrak{U}h_1 = I_1\mu_0, \qquad \mathfrak{V}k_1 = -J_1\mu_0,$$

où interviennent deux invariants du quatrième ordre

(14) $$I_1 = \mathfrak{V}(I) - 2IJ, \qquad J_1 = \mathfrak{U}(J) - 2IJ.$$

15. Les deux autres dérivées, $\mathfrak{V}h_1 = \mathfrak{V}\mathfrak{V}h = \mathfrak{V}^{(2)}h$, que je représenterai par h_2, et $\mathfrak{U}k_1 = \mathfrak{U}\mathfrak{U}k = \mathfrak{U}^{(2)}k$, que je désignerai par k_2, sont des éléments nouveaux. Je vais montrer que ces sphères h_2 et k_2 sont orthogonales à h_1 et k_1, et orthogonales entre elles.

En effet, on tire d'abord de $h_1k_1 = 0$,

$$h_1\mathfrak{U}k_1 + k_1\mathfrak{U}h_1 = 0;$$

mais, d'aprés (13), $k_1\mathfrak{U}h_1$ est nul, k_1 passant par M. Donc $h_1\mathfrak{U}k_1$ l'est aussi, c'est-à-dire que h_1 et k_2 sont orthogonales. On verrait de même que k_1 et h_2 le sont. Reste à constater qu'il en est encore ainsi pour h_2 et k_2; c'est-à-dire que le produit $\mathfrak{V}h_1\,\mathfrak{U}k_1$ est nul. Or

$$\mathfrak{V}h_1\,\mathfrak{U}k_1 = \mathfrak{V}(h_1\mathfrak{U}k_1) - h_1\mathfrak{V}\mathfrak{U}k_1,$$

et tout revient à prouver que $h_1\mathfrak{V}\mathfrak{U}k_1 = 0$.

Nous nous servons, à cet effet, de l'interversion des opérations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$, donnée par la formule (15) du n° 9, et écrivons

$$\mathfrak{V}\mathfrak{U}k_1 = \mathfrak{U}\mathfrak{V}k_1 - I\mathfrak{V}k_1 + J\mathfrak{U}k_1.$$

En faisant intervenir (13), et la propriété $h_1\mathfrak{U}k_1 = 0$, déjà acquise, il reste, puisque $h_1\mu_0$ est nul,

$$h_1\mathfrak{V}\mathfrak{U}k_1 = -J_1h_1\mathfrak{U}\mu_0,$$

et le second membre est nul, en vertu du contact de h_1 avec la courbe $v =$ const.

Ainsi *les dérivées premières et secondes de h, par rapport à v, et les dérivées premières et secondes de k, par rapport à u, forment un tétrasphère orthogonal.*

16. Il reste à s'assurer que h_2 et k_2 ne se réduisent pas, en général, à des points. Je calculerai, par exemple, à cet effet, le carré de la vitesse angulaire de h_1, c'est-à-dire $(\mathcal{V}h_1)^2$.

Je pars pour cela de la formule (8) (n° **13**), qui donne, en différentiant et prenant les carrés scalaires des deux membres,

$$(15)\qquad (\mathcal{V}h_1)^2 = H_1^2(\mathcal{V}\xi_1)^2 + \mathcal{V}(H_1)\,\mathcal{V}\left(\frac{1}{H_1}\right).$$

On s'est servi de $j^2 = 0$, $\xi_1^2 = 0$, $j\xi_1 = \frac{1}{2}$, d'où $j\mathcal{V}\xi_1 = 0$, et $\xi_1\mathcal{V}\xi_1 = 0$. Pour calculer $(\mathcal{V}\xi_1)^2$, on peut, d'après la note du n° **7**, remplacer ξ_1 par le vecteur cartésien correspondant, qui est, avec les notations du n° **2**,

$$x_1 = m + \frac{1}{H_1}b.$$

On a, d'après les formules (6) et (9) de ce n° **2**,

$$\mathcal{Y}x_1 = b\left[1 + \mathcal{Y}\left(\frac{1}{H_1}\right)\right] + \frac{1}{H_1}(K_1 a + Kc),$$

d'où l'on tirera $(\mathcal{Y}x_1)^2$. Tenant compte ensuite de la définition de $\mathcal{V}f$ [équation (13 *bis*), n° **8**], il vient

$$(16)\qquad (\mathcal{V}h_1)^2 = \frac{1}{(H-K)^2}[H_1^2 + K_1^2 + K^2 - 2(H-K)\mathcal{V}(H_1)].$$

De même, on trouve

$$(16\ bis)\qquad (\mathcal{U}k_1)^2 = \frac{1}{(H-K)^2}[H_1^2 + K_1^2 + H^2 - 2(K-H)\mathcal{U}(K_1)].$$

On obtient ainsi les expressions de deux invariants nouveaux du quatrième ordre; mais, si l'on tient compte de la formule de Gauss [équation (14), n° **3**] on constate que leur somme est égale à 1. Nous poserons

$$(17)\qquad \begin{cases} A^2 = (\mathcal{V}h_1)^2 = \dfrac{K^2 + H_1^2 + K_1^2 - 2(H-K)\mathcal{V}(H_1)}{(H-K)^2}, \\[2ex] B^2 = (\mathcal{U}k_1)^2 = \dfrac{H^2 + H_1^2 + K_1^2 - 2(K-H)\mathcal{U}(K_1)}{(H-K)^2}, \end{cases}$$

de sorte que l'on aura

$$(18)\qquad A^2 + B^2 = 1.$$

Au lieu de A et B, nous pourrons introduire l'invariant unique défini par

$$(19) \qquad \cos\theta = A, \qquad \sin\theta = B.$$

On fixera arbitrairement les déterminations pour A et B, qui ne sont données que par leurs carrés, et l'on pourra supposer que h_2 et k_2 satisfont aux formules

$$(20) \qquad \mathcal{V} h_1 = A h_2, \qquad \mathcal{U} k_1 = B k_2.$$

Nous avons ainsi cinq invariants du quatrième ordre, $\mathcal{U}(I)$, $\mathcal{V}(I)$, $\mathcal{U}(J)$, $\mathcal{V}(J)$, θ; et nous verrons (n° 33), que tous les autres invariants de cet ordre s'expriment au moyen de ces invariants et de I et J; et que tous les invariants d'ordre supérieur sont des fonctions des sept invariants précédents et de ceux qui s'en déduisent par l'application répétée des opérations $\mathcal{U}f$ et $\mathcal{V}f$. Nous constaterons, de plus, que θ s'exprime lui-même, dans le cas général [1], en fonction de I et J et des invariants d'ordres 4, 5 et 6 qui dérivent de I et J par les opérations $\mathcal{U}f$ et $\mathcal{V}f$.

Ceci montre que A et B ne peuvent être nuls (respectivement) que pour des classes particulières de surfaces; c'est-à-dire que h_2 et k_2 sont en général des sphères de rayon non nul. J'examinerai plus loin (n° 26) le cas d'exception $AB = 0$.

17. Je cherche maintenant la sphère l orthogonale aux quatre sphères précédentes h_1, k_1, h_2, k_2. Nous aurons ainsi associé à chaque point M de la surface un pentasphère orthogonal covariant II, qui jouera en géométrie conforme le même rôle que jouait le trièdre a, b, c du n° 2 pour la géométrie euclidienne. Comme μ_0 est, ainsi que h_2 et k_2, une sphère orthogonale à h_1 et k_1, la sphère l appartiendra au réseau défini par h_2, k_2, μ_0, c'est-à-dire que l'on aura, pour le vecteur-unité l, une expression de la forme

$$(21) \qquad l = X h_2 + Y k_2 + Z \mu_0.$$

Pour calculer les coefficients (scalaires) X, Y, Z, j'aurai besoin des produits scalaires $\mu_0 h_2$, $\mu_0 k_2$. Cherchons, par exemple, $\mu_0 h_2$.

---

[1] Les surfaces isothermiques sont celles qui font exception.

On a

$$\mu_0 h_2 = (k-h)h_2 = \frac{1}{A}(k-h)\mathcal{V}h_1.$$

Or $(k-h)h_1 = 0$, donc

$$(k-h)\mathcal{V}h_1 = -h_1\mathcal{V}(k-h) = -h_1[-J\mu_0 - h_1] = 1.$$

Il vient, par suite,

$$(22) \qquad \mu_0 h_2 = \frac{1}{A}; \qquad \text{et, de même,} \qquad \mu_0 k_2 = -\frac{1}{B}.$$

Si donc nous multiplions l'équation (21) par h_2 et par k_2, nous obtenons

$$(23) \qquad Z = -XA = YB.$$

On a de plus la condition $l^2 = 1$, c'est-à-dire

$$X^2 + Y^2 + \frac{2XZ}{A} - \frac{2YZ}{B} = 1,$$

ou, à cause de (23) et de (18),

$$(24) \qquad Z^2 = -A^2B^2.$$

On pourra donc prendre $z = -iAB$, d'où

$$(25) \qquad l = i(Bh_2 - Ak_2 - AB\mu_0).$$

18. Les formules (22) mettent en évidence une sphère covariante, qui est tangente à la surface en M, à savoir

$$(26) \qquad t = Ah_2 + Bk_2.$$

Car elle passe par M, puisqu'on a $\mu_0 t = 0$ d'après (22), et elle est orthogonale à h_1 et k_1, comme le sont h_2 et k_2. On a, de plus, $t^2 = A^2 + B^2 = 1$.

Ceci permet de trouver les expressions de h et k en fonction des sphères du *pentasphère* orthogonal Π formé par h_1, k_1, h_2, k_2 et l. Pour h par exemple, on a

$$(27) \qquad \varepsilon h = t + T\mu_0,$$

T étant un facteur scalaire. Multipliant par h_2 et k_2, nous avons

$$A\,hh_2 = h\mathcal{V}h_1 = \mathcal{V}(hh_1) - h_1\mathcal{V}h = -h_1^2 = -1,$$
$$B\,hk_2 = h\mathcal{U}k_1 = \mathcal{U}(hk_1) - k_1\mathcal{U}h = -k_1 I\mu_0 = 0.$$

Il vient donc

$$-\frac{\varepsilon}{A} = A + \frac{T}{A}, \qquad o = B - \frac{T}{B};$$

d'où l'on conclut

$$T = B^2, \qquad \varepsilon = -1;$$

et, en portant dans (27),

$$(28) \qquad h = -t - B^2 \mu_0.$$

On trouvera de même

$$(28\ bis) \qquad k = -t + A^2 \mu_0.$$

Mais on a, d'après (25),

$$(29) \qquad \mu_0 = \frac{h_2}{A} - \frac{k_2}{B} + i\frac{l}{AB},$$

de sorte que les formules (28) et (28 *bis*) deviennent

$$(30) \qquad h = -\frac{1}{A}(h_2 + iBl), \qquad k = -\frac{1}{B}(k_2 - iAl).$$

On remarquera que, d'après ces résultats, h appartient au faisceau (h_2, l) et k au faisceau (k_2, l).

Donc, *la cinquième sphère du pentasphère* Π *est définie par les deux cercles suivant lesquels les sphères principales h et k sont coupées par leurs dérivées secondes h_2 et k_2.*

19. Les sphères h, k, h_1 et k_1 sont toujours réelles pour une surface réelle; la relation $A^2 + B^2 = 1$ prouve que l'une au moins des sphères h_2 et k_2 est réelle, car elles ont toutes deux des équations à coefficients réels, de sorte que leur réalité dépend seulement des signes de A^2 et B^2. La sphère l a également une équation à coefficients réels; comme cinquième sphère d'un pentasphère orthogonal, elle est, par suite, imaginaire si h_2 et k_2 sont toutes deux réelles, et réelle dans le cas contraire.

L'exemple du tore montre que les deux cas sont possibles. Soient O le centre, S le sommet du cône circonscrit au tore le long du parallèle du point M : h_1 est la sphère de centre S qui passe par le parallèle, et son cercle caractéristique est son intersection (C) par le plan équatorial. Ce plan équatorial est plan radical commun pour le système des sphères h_1; le cercle caractéristique (C) est donc le même pour toutes ces sphères, qui sont orthogonales à toutes les sphères ayant pour grands cercles les demi-méridiens du tore; et d'après les propriétés des sphères orthogonales, ce cercle (C) est réel ou non suivant que le méridien du tore ne coupe pas l'axe ou le coupe. Donc h_2 est réelle dans le premier cas et imaginaire dans le second. De plus, k_1 est le plan méridien, k_2 le plan perpendiculaire à k_1 mené par l'axe; de sorte que l est la sphère (fixe) qui a le cercle (C) pour grand cercle.

Si, du reste, on désigne par R le rayon du demi-méridien, par D la distance de son centre à l'axe, par u l'angle du demi-plan méridien de M avec un demi-plan méridien origine, par v l'angle du rayon du cercle méridien (aboutissant en M) avec le plan équatorial, on a, pour les éléments analytiques invariants que nous avons introduits,

$$\mathfrak{U}f = \frac{R}{D}\frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \mathfrak{V}f = \frac{D + R\cos v}{D}\frac{\partial f}{\partial v},$$

d'où $(\mathfrak{U}f, \mathfrak{V}f)$ étant nul, $I = J = 0$. On trouve ensuite, sans difficulté,

$$A^2 = \frac{D^2 - R^2}{D^2}, \qquad B^2 = \frac{R^2}{D^2}, \qquad \sin\theta = \frac{R}{D},$$

ce qui confirme les résultats relatifs à la réalité de h_2.

Nous voyons donc que les surfaces (réelles) se séparent en deux classes au point de vue conforme, d'après la réalité des sphères h_2 et k_2, c'est-à-dire d'après la réalité des enveloppes des sphères h_1 et k_1, obtenues par les variations respectives de v et u.

20. Voici comment on peut interpréter les invariants fondamentaux que nous avons été conduits à introduire. Les invariants A et B sont les rapports des variations angulaires infinitésimales des sphères h_1 et h, k_1 et k quand on se déplace respectivement le long des lignes de courbure pour lesquelles ces variations ne sont pas d'ordre supérieur au premier; cela résulte immédiatement de leur définition (n° 16), rapprochée de celle de $\mathfrak{V}f$ et de $\mathfrak{U}f$ (n° 8).

Pour interpréter I, je suppose un déplacement $\mathfrak{U}f.du$, le long de la ligne de courbure $v=$ const. La sphère k éprouve la variation angulaire du ; cherchons l'angle φ de h avec $h+\Delta h$. Il est donné par

$$\cos\varphi = h\left[h + \mathfrak{U}h.du + \mathfrak{U}^{(2)}h.\frac{du^2}{2} + \mathfrak{U}^{(3)}h.\frac{du^3}{6} + \mathfrak{U}^{(4)}h.\frac{du^4}{24} + \ldots\right].$$

Comme $\mathfrak{U}h$ représente le point M, la propriété de contact de h avec la ligne de courbure donne

$$h\mathfrak{U}^{(2)}h = 0, \qquad h\mathfrak{U}^{(3)}h = 0.$$

On en conclut, en appliquant l'opération $\mathfrak{U}f$, deux fois à la première de ces relations, et une fois à la seconde,

$$[\mathfrak{U}^{(2)}h]^2 + 2\mathfrak{U}h\,\mathfrak{U}^{(3)}h + h\mathfrak{U}^{(4)}h = 0, \qquad \mathfrak{U}h\,\mathfrak{U}^{(3)}h + h\mathfrak{U}^{(4)}h = 0,$$

d'où

$$h\mathfrak{U}^{(4)}h = [\mathfrak{U}^{(2)}h]^2.$$

Donc

$$-1 + \cos\varphi = [\mathfrak{U}^{(2)}h]^2\frac{du^4}{24} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi^2 = -[\mathfrak{U}^{(2)}h]^2\frac{du^4}{12} + \ldots. \tag{31}$$

Or l'équation (2) donne, en tenant compte de $\mu_0 = k - h$,

$$\mathfrak{U}^{(2)}h = \mu_0\mathfrak{U}(\mathrm{I}) + \mathrm{I}\mathfrak{U}k - \mathrm{I}\mathfrak{U}h = \mu_0[\mathfrak{U}(\mathrm{I}) - \mathrm{I}^2] + \mathrm{I}k_1\,; \tag{32}$$

d'où

$$[\mathfrak{U}^{(2)}h]^2 = \mathrm{I}^2. \tag{33}$$

La partie principale de φ est donc

$$\varphi = -i\mathrm{I}\frac{du^2}{2\sqrt{3}} + \ldots; \tag{34}$$

de sorte que I *est égal au produit par* $2i\sqrt{3}$ *de la limite du quotient de l'angle de h avec sa voisine par le carré de l'angle de k avec sa voisine, quand on se déplace le long de la ligne de courbure avec laquelle k a un contact du second ordre.*

On a des interprétations toutes pareilles pour J (sphères k et h), pour I_1 (sphères k_1 et h), et pour J_1 (sphères k_1 et h), en considérant respectivement les déplacements v, u et v.

20 *bis*. On a une interprétation, exempte d'imaginaires, en considérant le couple (h, k_1). Sa *vitesse de rotation* (¹) $k\mathcal{U}h$, est nulle; mais si l'on passe aux infiniment petits du second ordre, l'angle de k_1 avec la sphère $h + \Delta h$ considérée ci-dessus a pour complément l'angle ψ défini par

$$\sin\psi = k_1 \left[h + \mathcal{U}h.du + \mathcal{U}^{(2)}h.\frac{du^2}{2} + \ldots\right],$$

dont la partie principale, $k_1 \mathcal{U}^{(2)} h.\frac{du^2}{2}$, est égale, d'après (32), à I.

Donc I *est le double de la limite du quotient de l'angle de* k_1 *avec* $h + \Delta h$, *par le carré de l'angle de* k *avec* $k + \Delta k$, *pour un déplacement le long de la ligne* $v =$ const.

On a, pour J, une interprétation toute pareille.

20 *ter*. Une autre interprétation de I, de caractère réel également, est la suivante. Pour le déplacement $\mathcal{U}f.du$ considéré, la sphère $h + \Delta h$ fait, à des infiniment petits près d'ordre supérieur à 1, partie d'un même faisceau avec h, k et μ_0. Comme on a, d'après (2), dans les conditions dites,

$$\mu_0 = k - h, \qquad h + \Delta h = h + \mathcal{U}h.du = h(1 - \mathrm{I}\,du) - k.\mathrm{I}\,du,$$

le rapport anharmonique de ces quatre éléments du faisceau

$$(h, k, h + k.\mathrm{I}\,du, h - k)$$

est égal à $-\mathrm{I}\,du$.

Donc I *est égal, au signe près, au quotient du rapport anharmonique* $(h, k, h + \Delta h, \mathrm{M})$ (*où* Δh *correspond à un déplacement infinitésimal* du), *par la variation angulaire correspondante de* k.

21. L'angle θ, introduit par les équations (19), est lui-même susceptible d'une définition remarquable, qu'on obtient en remarquant que les équations (28) et (28 *bis*) donnent, par élimination de μ_0,

$$(35) \qquad -t = \mathrm{A}^2 h + \mathrm{B}^2 k = h\cos^2\theta + k\sin^2\theta.$$

(¹) *Voir* mon mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1923, p. 132.

Or si, ω étant un angle quelconque, on considère la sphère [tangente à (S) en M], $h\cos^2\omega + k\sin^2\omega$, son rayon R s'obtient en multipliant par $2j$ (n° 6), c'est-à-dire qu'il est donné par

$$\frac{1}{R} = H\cos^2\omega + K\sin^2\omega. \tag{36}$$

Or ceci définit, d'après la formule d'Euler sur la courbure normale des courbes tracées sur une surface, le rayon de la sphère, tangente à (S) en M, dont l'intersection avec (S) a, pour directions de ses deux branches en M, celles qui font l'angle ω avec la tangente à la ligne de courbure $v =$ const. ([1]).

Donc la sphère $h\cos^2\omega + k\sin^2\omega$ *est celle des sphères tangentes à la surface en* M *pour laquelle l'angle des tangentes en* M *aux deux branches de son intersection avec la surface est égal à* 2ω.

De ce résultat général, nous concluons donc que l'*invariant* θ *est égal à l'angle formé en* M *par la tangente à la ligne de courbure* $v =$ const., *avec les tangentes à l'intersection de la surface par la sphère t, qui est celle des sphères tangentes à la surface en* M *faisant partie du faisceau défini par les dérivées secondes* (h_2 *et* k_2) *des sphères de courbure normale principales.*

IV. — Les formules de variation du pentasphère fondamental.

22. Nous avons maintenant à prolonger $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ relativement aux éléments h_1, h_2, k_1, k_2, l du pentasphère fondamental II.

Si l'on considère en général un pentasphère orthogonal x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 soumis à une transformation infinitésimale $\mathfrak{W}f$, on pourra poser

$$\mathfrak{W}x_i = \sum_{j=1}^{5} W_{ji}x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5), \tag{1}$$

et il résulte des conditions d'orthogonalité que l'on aura

$$W_{ji} = x_j\,\mathfrak{W}x_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 5), \tag{2}$$

de sorte que les W_{ji} sont les *rotations* instantanées (*voir* la note du n° 20 *bis*) des couples respectifs (x_j, x_i).

---

[1] *Voir* mon mémoire du *Journal de Mathématiques*, p. 100.

Les relations d'orthogonalité $x_i x_j = \varepsilon_{ij}$ entraînent les relations

$$W_{ji} + W_{ij} = 0,$$

de sorte que le déterminant des W_{ji} est un déterminant symétrique gauche. On peut ainsi écrire, pour la transformation des cinq sphères,

$$(3) \qquad \mathfrak{W}'f = \sum_{i,j} W_{ij}\left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i}\right),$$

la sommation étant étendue aux 10 combinaisons des indices i, j. Cette formule met en évidence les rotations infinitésimales

$$(4) \qquad \mathfrak{X}_{ij} f = x_i \frac{\partial f}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et $\mathfrak{W} f$ prend ainsi la forme de la transformation infinitésimale générale du groupe orthogonal.

Nous aurons à remplacer ici $\mathfrak{W} f$ successivement par $\mathfrak{U} f$ et $\mathfrak{V} f$, et à poser

$$(5) \qquad x_1 = h_1, \qquad x_2 = k_1, \qquad x_3 = h_2, \qquad x_4 = k_2, \qquad x_5 = l.$$

Les vecteurs ainsi introduits étant covariants et les opérations $\mathfrak{U} f$ et $\mathfrak{V} f$ étant invariantes, les rotations (2), produits scalaires de vecteurs covariants, seront des invariants.

Pour les calculer, il nous suffira de nous rappeler les formules suivantes obtenues dans les précédents paragraphes :

(6) $\mu_0 = k - h$ [Équation (10), n° 7],

(7) $\mathfrak{U} h = I \mu_0, \qquad \mathfrak{V} k = -J \mu_0$ [Equations (2), n° 11],

(8) $\mathfrak{V} h = h_1, \qquad \mathfrak{U} k = k_1$ [Équations (9), n° 13],

(9) $\mathfrak{U} h_1 = I_1 \mu_0, \qquad \mathfrak{V} k_1 = -J_1 \mu_0$ [Équations (15), n° 14],

(10) $\mathfrak{V} h_1 = A h_2, \qquad \mathfrak{U} k_1 = B k_2$ [Équations (20), n° 16],

(11) $\mu_0 = \dfrac{h_2}{A} - \dfrac{k_2}{B} + i \dfrac{l}{AB}$ [Équation (29), n° 18],

(12) $h = -\dfrac{1}{A}(h_2 + iBl), \qquad k = -\dfrac{1}{B}(k_2 - iAl)$ [Équations (30), n° 18].

23. Occupons-nous d'abord de $\mathfrak{U} f$, pour lequel nous avons à chercher les coefficients U_{ij} du prolongement

$$(13) \qquad \mathfrak{U}' f = \sum_{ij} U_{ij} \mathfrak{X}_{ij} f.$$

Nous avons déjà les deux formules, conséquences de (9), (10), (11),

$$(14)\qquad \mathfrak{U}h_1 = \frac{I_1}{AB}(Bh_2 - Ak_2 + il), \qquad \mathfrak{U}k_1 = Bk_2,$$

qui nous donnent sept des rotations

$$(15)\qquad U_{2,1} = 0, \qquad U_{3,1} = \frac{I_1}{A}, \qquad U_{4,1} = -\frac{I_1}{B}, \qquad U_{5,1} = i\frac{I_1}{AB},$$

$$(16)\qquad U_{3,2} = 0, \qquad U_{4,2} = B, \qquad U_{5,2} = 0.$$

Les formules qui restent à trouver seront donc de la forme

$$(19)\qquad \begin{cases} \mathfrak{U}h_2 = -\dfrac{I_1}{A}h_1 - U_0 k_2 - U_1 l, \\ \mathfrak{U}k_2 = \dfrac{I_1}{B}h_1 - Bk_1 + U_0 h_2 - U_2 l, \\ \mathfrak{U}l = -i\dfrac{I_1}{AB}h_1 + U_1 h_2 + U_2 k_2, \end{cases}$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$(18)\qquad U_0 = U_{3,4}, \qquad U_1 = U_{3,5}, \qquad U_2 = U_{4,5},$$

Nous déterminerons ces coefficients en exprimant que les relations (7) et (8) en $\mathfrak{U}h$ et $\mathfrak{U}k$, sont vérifiées moyennant les équations (11), (12) et (17). On trouve ainsi, sans difficulté, en identifiant les résultats de ce calcul par rapport à h_1, k_1, h_2, k_2, l,

$$(19)\qquad U_0 = \frac{\mathfrak{U}(A) - IA}{B}, \qquad U_1 = -i\frac{U_0}{A}, \qquad U_2 = -i\frac{\mathfrak{U}(A)}{B^2}.$$

En résumé, *pour $\mathfrak{U}f$, trois des rotations sont nulles, à savoir :*

$$(20)\qquad U_{1,2} = h_1\mathfrak{U}k_1 = 0, \qquad U_{3,2} = h_2\mathfrak{U}k_1 = 0, \qquad U_{5,2} = l\mathfrak{U}k_1 = 0;$$

et les sept autres sont :

$$(21)\qquad U_{3,1} = h_2\mathfrak{U}h_1 = \frac{I_1}{A}, \qquad U_{4,1} = k_2\mathfrak{U}h_1 = -\frac{I_1}{B}, \qquad U_{5,1} = l\mathfrak{U}h_1 = \frac{iI_1}{AB},$$

$$(22)\qquad U_{4,2} = k_2\mathfrak{U}k_1 = B,$$

$$(23)\qquad \begin{cases} U_{3,4} = h_2\mathfrak{U}k_2 = \dfrac{\mathfrak{U}(A) - IA}{B}, \qquad U_{3,5} = h_2\mathfrak{U}l = \dfrac{\mathfrak{U}(A) - IA}{iAB}, \\ U_{4,5} = k_2\mathfrak{U}l = \dfrac{\mathfrak{U}(A)}{iB^2}. \end{cases}$$

Si l'on introduit l'angle θ, par $A = \cos\theta$, $B = \sin\theta$, on a

$$(24)\quad \begin{cases} U_{3,1} = \dfrac{I_1}{\cos\theta}, \qquad U_{4,1} = -\dfrac{I_1}{\sin\theta}, \qquad U_{3,1} = i\dfrac{I_1}{\cos\theta\sin\theta}, \\ U_{4,2} = \sin\theta, \\ U_{3,4} = -\mathfrak{U}(\theta) - I\cdot\cot\theta, \qquad U_{3,5} = i\left[\dfrac{\mathfrak{U}(\theta)}{\cos\theta} + \dfrac{I}{\sin\theta}\right], \\ \qquad U_{4,5} = i\dfrac{\mathfrak{U}(\theta)}{\sin\theta}. \end{cases}$$

23 *bis*. — On trouve de même le prolongement de $\mathfrak{V}f$,

$$(25)\qquad \mathfrak{V}'f = \sum_{ij} V_{ij}\mathfrak{X}_{ij}f.$$

Ayant déjà les formules, conséquences de (9), (10), (11),

$$(26)\qquad \mathfrak{V}h_1 = A h_2, \qquad \mathfrak{V}k_1 = -\frac{J_1}{AB}(Bh_2 - Ak_2 + il),$$

on peut poser

$$(27)\quad \begin{cases} \mathfrak{V}h_2 = -Ah_1 + \dfrac{J_1}{A}k_1 - V_0k_2 - V_1 l, \\ \mathfrak{V}k_2 = -\dfrac{J_1}{B}k_1 + V_0h_2 - V_2 l, \\ \mathfrak{V}l \;= i\dfrac{J_1}{AB}k_1 + V_1h_2 + V_2k_2, \end{cases}$$

et l'on détermine les rotations inconnues V_0, V_1, V_2, en portant ces valeurs dans les équations (7) et (8) [les équations (11) et (12) étant utilisées dans ce calcul], et en exprimant que les relations ainsi obtenues sont des identités en h_1, k_1, h_2, k_2 et l. On trouve ainsi

$$(28)\qquad V_0 = -\frac{\mathfrak{V}(B) - JB}{A}, \qquad V_1 = i\frac{\mathfrak{V}(B)}{A^2}, \qquad V_2 = -i\frac{V_0}{B},$$

ce qui s'écrit encore, en fonction de θ,

$$(29)\quad V_0 = -\mathfrak{V}(\theta) + I\,\text{tang}\,\theta, \qquad V_1 = i\frac{\mathfrak{V}(\theta)}{\cos\theta}, \qquad V_2 = i\left[\frac{\mathfrak{V}(\theta)}{\cos\theta} - \frac{J}{\sin\theta}\right].$$

Rappelons que V_o, V_1, V_2 sont les trois rotations

$$(30)\qquad V_0 = V_{3,4}, \qquad V_1 = V_{3,5}, \qquad V_2 = V_{4,5}.$$

Par conséquent, *pour* $\mathcal{V}f$, *trois des rotations sont nulles, à savoir :*

$$(31)\qquad V_{2,1}=k_1\mathcal{V}h_1=0,\qquad V_{4,1}=h_2\mathcal{V}h_1=0,\qquad V_{5,1}=l\mathcal{V}h_1=0;$$

et les sept autres sont :

$$(32)\qquad V_{3,1}=h_2\mathcal{V}h_1=A,$$

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} &V_{3,2}=h_2\mathcal{V}k_1=-\frac{J_1}{A},\qquad V_{4,2}=k_2\mathcal{V}k_1=\frac{J_1}{B},\\ &V_{5,2}=l\mathcal{V}k_1=-\frac{iJ_1}{AB};\end{aligned}\right.$$

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} &V_{3,4}=h_2\mathcal{V}k_2=\frac{-\mathcal{V}(B)+JB}{A},\qquad V_{3,5}=h_2\mathcal{V}l=\frac{i\mathcal{V}(B)}{A^2},\\ &V_{4,5}=k_2\mathcal{V}l=i\,\frac{\mathcal{V}(B)-JB}{AB}.\end{aligned}\right.$$

En introduisant l'angle θ, au lieu de A et B, on aurait les formules

$$(32\ bis)\qquad V_{3,1}=\cos\theta;$$

$$(33\ bis)\qquad V_{3,2}=-\frac{J_1}{\cos\theta},\qquad V_{4,2}=\frac{J_1}{\sin\theta},\qquad V_{5,2}=\frac{iJ_1}{\cos\theta\sin\theta},$$

$$(34\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &V_{3,4}=-\mathcal{V}(\theta)+J\,\mathrm{tang}\,\theta,\qquad V_{3,5}=i\frac{\mathcal{V}(\theta)}{\cos\theta},\\ &V_{4,5}=i\left[\frac{\mathcal{V}(\theta)}{\sin\theta}-\frac{J}{\cos\theta}\right].\end{aligned}\right.$$

24. On peut substituer au pentasphère Π le pentasphère orthogonal Π' formé de h_1, de k_1 de l, et des deux sphères (prises dans le faisceau h_2, k_2)

$$(35)\qquad t=Ah_2+Bk_2,\qquad s=Bh_2-Ak_2,$$

dont la première, tangente à la surface, a été introduite au n° **18**; c'est, on se le rappelle, la sphère du faisceau h_2, k_2 qui est tangente à la surface.

On peut écrire aussi

$$(36)\qquad t=h_2\cos\theta+k_2\sin\theta,\qquad s=h_2\sin\theta-k_2\cos\theta;$$

et l'on a

$$(37)\qquad \mu_0=\frac{s+il}{AB},\qquad h=-t-B^2\mu_0,\qquad k=-t+A^2\mu_0.$$

On déduit, sans difficulté, les formules de variation de Π' de celles qui concernent Π; et l'on trouve

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{U} h_1 &= \frac{I_1}{\sin\theta\cos\theta}(s+il),\\
\mathfrak{U} k_1 &= -s\sin\theta\cos\theta + t\sin^2\theta,\\
\mathfrak{U} s &= -\frac{I_1}{\sin\theta\cos\theta}h_1 + k_1\sin\theta\cos\theta + R_0 t + R_1\\
\mathfrak{U} t &= -\sin^2\theta k_1 - R_0(s+il),\\
\mathfrak{U} l &= -i\frac{I_1}{\sin\theta\cos\theta}h_1 - R_1 s + iR_0 l
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$
(39)\qquad R_0 = 2\mathfrak{U}(\theta) + I\cot\theta,\qquad R_1 = i[\mathfrak{U}(\log\sin 2\theta) + I];
$$

et, d'autre part,

$$
(40)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{V} h_1 &= s\sin\theta\cos\theta + t\cos^2\theta,\\
\mathfrak{V} k_1 &= -\frac{J_1}{\sin\theta\cos\theta}(s+il),\\
\mathfrak{V} s &= -h_1\sin\theta\cos\theta + \frac{J_1}{\sin\theta\cos\theta}k_1 + S_0 t + S_1 l,\\
\mathfrak{V} t &= -\cos^2\theta h_1 - S_0(s+il),\\
\mathfrak{V} l &= i\frac{J_1}{\sin\theta\cos\theta}k_1 - S_1 s + iS_0 l
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$
(41)\qquad S_0 = 2\mathfrak{V}(\theta) - J\tan\theta,\qquad S_1 = i[\mathfrak{V}(\log\sin 2\theta) - J].
$$

25. On pourrait facilement définir d'autres pentasphères orthogonaux covariants. Ainsi les formules (12) montrent que les deux tétrasphères, où figurent respectivement h et k,

$$
(h,\ h_1,\ k_1,\ k_2),\quad (k,\ h_1,\ k_1,\ h_2)
$$

sont orthogonaux; et les sphères qui leur sont respectivement orthogonales sont, respectivement, d'après les mêmes formules,

$$
h' = \frac{1}{A}(iBh_2 - l),\qquad k' = \frac{1}{B}(iAk_2 + l).
$$

On peut aussi faire intervenir la *sphère harmonique* [1]

$$
(42)\qquad q = \frac{k+h}{2} = -\frac{1}{2AB}[Bh_2 + Ak_2 - i(A^2 - B^2)l],
$$

[1] C'est, comme on sait, la conjuguée harmonique de M par rapport à h et k

et lui associer par exemple les sphères (¹)

$$(43)\qquad \begin{cases} \dfrac{k_1+h_1}{\sqrt{2}}, & \dfrac{k_1-h_1}{\sqrt{2}}, \quad A h_2 - B k_2, \\ \dfrac{i}{2AB}[(A^2-B^2)(Bh_2+Ak_2)-il]. \end{cases}$$

On remarquera que les irrationalités qui interviennent dans le calcul de $\mathfrak{U}f$, $\mathfrak{V}f$, de h et de k quand on prend des coordonnées quelconques sur la surface, sont conjuguées; de sorte que les sphères q, $\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1+h_1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1-h_1)$, s, t, l sont à coefficients rationnels, ainsi que les deux autres sphères qui interviennent dans le tétrasphère (43).

Le pentasphère Π' pourra, à ce point de vue, être modifié en y substituant $\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1+h_1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(k_1-h_1)$ à k_1 et h_1; il se composera ainsi de quatre sphères à coefficients rationnels.

26. Je reviens maintenant au cas d'exception signalé au n° 16, $AB=0$; je pourrai supposer $B=0$, $A=1$, puisque $A^2+B^2=1$. On pourra donc poser, η désignant un point, et h_2 un vecteur-unité,

$$(44)\qquad \mathfrak{U}k_1=\eta, \qquad \mathfrak{V}h_1=h_2,$$

et l'on aura, d'après le n° 15,

$$(45)\qquad h_1\eta=h_1h_2=k_1\eta=k_1h_2=h_2\eta=0.$$

---

dans le faisceau des sphères tangentes à la surface. M. Lebel paraît avoir remarqué le premier que les tangentes au point double de son intersection avec la surface sont les bissectrices des tangentes aux lignes de courbure (*Thèse* de Paris, 1921, p. 46). Cette propriété est un cas particulier de celle que nous avons indiquée au n° 21 pour une sphère tangente quelconque. M. Thomsen (*Thèse* de Hambourg, 1923) fait jouer à cette sphère harmonique, dans ses principes de géométrie conforme, un rôle fondamental; il paraît considérer la propriété en question, qui lui sert à définir ses « Schnittangentenkurven », comme nouvelle. Il donne à la sphère harmonique le nom de « Zentralkugel ».

(¹) On a, d'après (12), $h(Ah_2-B\dot{k}_2)=-1$, $k(Ak_2-Bk_2)=1$, de sorte que la sphère Ah_2-Bk_2 est tangente à h et k. Le pentasphère défini ici est donc celui de M. Demoulin (*C. R. Acad. Sci.*, t. 182, p. 1008).

On trouve ensuite, en appliquant les opérations $\mathfrak{U}f$ et $\mathfrak{V}f$ aux identités $hh_1 = hk_1 = kh_1 = kk_1 = 0$,

$$(46) \qquad hh_2 = -1, \qquad h\eta = 0, \qquad kh_2 = 0, \qquad k\eta = -1.$$

Si l'on considère alors la sphère

$$(47) \qquad t = h_2 + \eta,$$

on voit que $t^2 = 1$, que $ht = kt$, $h_1 t = 0$, $k_1 t = 0$. C'est donc une sphère tangente à (S) en M, et l'on a une identité de la forme

$$h = \varepsilon t + \mathrm{T}\mu_0 = \varepsilon t + \mathrm{T}(k - h), \qquad \varepsilon^2 = 1.$$

En multipliant par η et h_2, et tenant compte de (46), on trouve

$$\mathrm{T} = 0, \qquad \varepsilon = -1.$$

Donc, t se confond avec h, et l'on a

$$(48) \qquad \eta = -h - h_2.$$

Ainsi, dans ce cas, on a l'identité

$$(49) \qquad \mathfrak{U}k_1 + \mathfrak{V}h_1 + h = 0.$$

On constate de plus, sans difficulté, que les cinq sphères

$$(\Omega) \qquad k, \; h_1, \; k_1, \; h_2 \quad \text{et} \quad g = i(h - k + h_2) = i(h_2 - \mu_0)$$

forment un pentasphère orthogonal, et l'on a

$$(50) \qquad \mu_0 = k - h = h_2 + ig.$$

Pour la variation $\mathfrak{U}f$, on a, d'après les formules précédentes,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{U}k &= k_1,\\
\mathfrak{U}h_1 &= \mathrm{I}_1 h_2 + i\mathrm{I}_1 g,\\
\mathfrak{U}k_1 &= -k + ig,\\
\mathfrak{U}h_2 &= -\mathrm{I}_1 h_1 + \mathrm{Z}g,\\
\mathfrak{U}g &= -i\mathrm{I}_1 h_1 - ik_1 - \mathrm{Z}h_2,
\end{aligned}$$

et il n'y a qu'à déterminer Z au moyen de $\mathfrak{U}h = \mathrm{I}\mu_0$; ce qui donne $\mathrm{Z} = -i\mathrm{I}$.

On a donc les formules

$$(51)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{U}k &= k_1,\\ \mathfrak{U}h_1 &= \mathrm{I}_1(h_2+ig),\\ \mathfrak{U}k_1 &= -k+ig,\\ \mathfrak{U}h_2 &= -\mathrm{I}_1 h_1 - i\mathrm{I}g,\\ \mathfrak{U}g &= -i(\mathrm{I}_1 h_1 + k_1 - \mathrm{I}h_2). \end{aligned}\right.$$

En opérant de même pour la variation $\mathfrak{V}f$, on trouve

$$(52)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{V}k &= -\mathrm{J}(h_2+ig),\\ \mathfrak{V}h_1 &= h_2,\\ \mathfrak{V}k_1 &= -\mathrm{J}_1(h_2+ig),\\ \mathfrak{V}h_2 &= \mathrm{J}k - h_1 + \mathrm{J}_1 k_1 - i\mathrm{J}g,\\ \mathfrak{V}g &= i(\mathrm{J}k + \mathrm{J}_1 k_1 + \mathrm{J}h_2). \end{aligned}\right.$$

Après intégration de ce système, la surface sera donnée par $\mu_0 = h_2 + ig$, et la sphère h par $h = k - \mu_0$.

(*A suivre.*)