M. LEGAUT

Sur les courbes gauches algébriques et leurs systèmes de points doubles apparents

Bulletin de la S. M. F., tome 54 (1926), p. 69-100
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1926__54__69_0>

SUR LES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES ET LEURS SYSTÈMES DE POINTS DOUBLES APPARENTS;

PAR M. MARCEL LÉGAUT.

1. *Introduction.* — Ce travail a pour objet l'étude des relations entre une courbe gauche algébrique, sans points multiples, et son système de points doubles apparents dans une projection faite d'un point général.

Dans son Mémoire fondamendal sur « la classification des courbes gauches algébriques » Halphen a déjà montré l'importance d'un nombre attaché à ce système; le degré minimum des courbes qui passent par ces points. La connaissance de ce nombre, jointe à celle du degré de la courbe, lui a permis de donner une limite supérieure de l'ordre minimum des surfaces contenant la courbe gauche.

Nous nous proposons de donner ici une démonstration plus géométrique de ce résultat. En outre, profitant de l'étude des systèmes de points faite dans le tome XVI des *Annales de Toulouse*, nous préciserons ces propriétés et nous montrerons comment elles peuvent être généralisées [1].

Pour mieux montrer la nature de ce travail, et pour préparer le lecteur à ses méthodes, rappelons quelques considérations sur les systèmes de points du plan [2].

Parmi les courbes algébriques qui passent par le système de points A, il y en a une au moins dont le degré est minimum. Nous l'appellerons *première courbe minima de* A. De même les

---

[1] Pour comprendre les démonstrations de ce Mémoire, il est nécessaire de connaître les passages suivants de l'exposé indiqué ci-dessus : Chap. I, Chap. II, § 1-3, 12, Chap. III, § 8, 9. Dans la mesure où cela est possible, nous rappelons ces résultats dans des notes.

[2] Quelques simplifications ont été apportées, dans ce rapide exposé, à la définition des caractéristiques. Le lecteur fera aisément les transpositions nécessaires, en particulier à propos de l'énoncé du théorème I.

courbes de degré minimum qui passent par A sans contenir *nécessairement* la courbe précédente seront dites *deuxièmes courbes minima de* A. Une de ces dernières recoupe la première courbe minima, en dehors de A, suivant un nouveau système A_1, dit *premier réduit de* A.

En suivant le même procédé on peut *réduire* A_1 à un nouveau système A_2, ...

Il est alors aisé de voir que cette opération répétée un nombre suffisant de fois est vraiment une *réduction* de A, car elle permet de le ramener à un système de points, *intersection totale de deux courbes*, système mieux connu.

On conçoit que la connaissance de la réduction de A, en particulier des degrés des courbes minima de ses réduits successifs, permette de caractériser d'une certaine manière A.

Parmi les nombres que l'on peut ainsi attacher à un système de points, signalons les *caractéristiques*. Si n_j et m_j $(n_j \leqq m_j)$ sont les degrés des courbes minima du $j^{\text{ième}}$ réduit A_j de A, ces nombres sont donnés par les expressions suivantes :

$$h_{2i} = M - M_1 + M_2 + \ldots + n_{2i}, \qquad h_{2i+1} = M - M_1 + M_2 - \ldots - n_{2i+1},$$
$$k_{2i} = M - M_1 + M_2 + \ldots + m_{2i}, \qquad k_{2i+1} = M - M_1 + M_2 - \ldots - m_{2i+1}$$
$$(M_j = n_j + m_j).$$

Il y a lieu de distinguer les caractéristiques d'indice pair, dites *caractéristiques paires* des autres dites *caractéristiques impaires*.

Les premières ont un rôle important dans l'équation générale des courbes de degré l qui passent par le système A. Nœther a déjà donné cette expression dans le cas particulier important où A est l'intersection totale de deux courbes. Voici comment ce théorème se généralise.

Théorème I (1). — *L'équation générale des courbes de degré l passant par un système de points* A, *de caractéristiques paires h_0, k_0, ..., h_{2i}, k_{2i}, ... est donnée par l'expression suivante :*

$$C_l = \Sigma(A_{2i} C_{h_{2i}} + B_{2i} C_{k_{2i}}).$$

(1) Le théorème I est démontré dans les *Annales de Toulouse*, Chap. III, § 8. Le théorème II y est contenu implicitement. Nous aurons l'occasion d'en indiquer brièvement la démonstration dans le texte (§ 8).

A_{2i} et B_{2i} sont des polynomes arbitraires en x et y, de degré $l - h_{2i}$, $l - k_{2i}$, identiquement nuls si ces nombres sont négatifs.

$C_{h_{2i}}$ et $C_{k_{2i}}$ sont les équations de courbes de degré h_{2i} et k_{2i} passant par A, *indépendantes* de la valeur de l, et telles que *chacune d'elles ne puisse pas s'exprimer à l'aide d'une combinaison linéaire des polynomes* $C_{h_{2i}}$, $C_{n_{2i}}$ *de degré inférieur*. Nous dirons que dans ces conditions les expressions $C_{h_{2i}}$, $C_{k_{2i}}$ forment un *système de polynomes caractéristiques pairs indépendants* (¹).

Cette propriété des caractéristiques paires peut leur servir inversement de définition. *Ce sont les degrés d'un système de polynomes caractéristiques pairs indépendants* (²). Cette définition, moins géométrique que la précédente, est importante car elle peut être généralisée plus facilement, ainsi que nous le verrons bientôt.

Les caractéristiques impaires h_{2i+1}, k_{2i+1} servent, de leur côté, à donner l'expression générale des *combinaisons linéaires de* $C_{h_{2i}}$, $C_{k_{2i}}$ identiquement nulles.

Théorème II (³). — *Si le système de points* A *admet les caractéristiques paires* h_{2i}, k_{2i} *et les caractéristiques impaires* h_{2i+1}, k_{2i+1}, *l'expression générale des combinaisons linéaires de degré* l *des polynomes* $C_{h_{2i}}$, $C_{k_{2i}}$, *identiquement nulles, est*

$$N_l = \Sigma(A_{2i+1} N_{h_{2i+1}} + B_{2i+1} N_{k_{2i+1}}),$$

A_{2i+1} et B_{2i+1} sont des polynomes arbitraires en x et y, de degré $l - h_{2i+1}$, $l - k_{2i+1}$, identiquement nuls si ces nombres sont négatifs.

$N_{h_{2i+1}}$ et $N_{k_{2i+1}}$ sont des combinaisons linéaires identiquement nulles, de degré h_{2i+1}, k_{2i+1}, des polynomes caractéristiques pairs, *indépendantes* de l et telles que chacune d'elles *ne puisse pas s'exprimer formellement par une combinaison linéaire des expressions* N *de degré inférieur*. Nous dirons que dans ces

(¹) Lorsque l n'est pas supérieur à la plus grande caractéristique paire de A, il est nécessaire d'employer tous les polynomes caratéristiques pairs indépendants de degré convenable pour obtenir l'équation générale des courbes C_l.

(²) La définition algébrique des polynomes caractéristiques pairs indépendants montre bien que leurs degrés ne dépendent pas de l'arbitraire qui demeure dans leur choix.

(³) Voir la note de la page précédente.

conditions les expressions $N_{h_{2i+1}}$ et $N_{k_{2i+1}}$ forment *un système de combinaisons caractéristiques impaires indépendantes.*

Comme précédemment, on peut dire que les *caractéristiques impaires d'un groupe de points sont les degrés d'un système de combinaisons caractéristiques impaires indépendantes* [1].

La méthode qui nous a permis d'attacher un système de nombres entiers à un groupe de points peut aussi être appliquée à une courbe gauche. Il suffit de considérer les surfaces contenant la courbe gauche au lieu des courbes passant par le système de points. Cependant les résultats sont alors moins simples. La réduction de la courbe gauche ne la ramène pas en général à une autre courbe, intersection totale de deux surfaces [2].

La généralisation de la définition géométrique des caractéristiques, à partir des degrés des *surfaces minima* des *courbes réduites* présente ainsi une difficulté. Nous n'obtenons de cette façon qu'une partie des nombres qu'il est intéressant d'attacher à la courbe C. Au contraire, lorsque nous aurons démontré que l'équation générale des surfaces de degré l, contenant C, est une *combinaison linéaire d'un nombre fini* de polynomes, nous pourrons nous servir de la seconde définition plus algébrique et obtenir un système complet de nombres caractéristiques pairs. Certains d'entre eux auront la signification géométrique précédente, les autres en seront privés.

D'une façon tout à fait analogue, si nous montrons que l'expression générale des combinaisons linéaires *identiquement nulles* de degré l, des polynomes caractéristiques pairs, est *fonction linéaire* de combinaisons analogues en nombre *fini*, indépendantes de l, nous pourrons définir un système complet de caractéristiques impaires.

Dans la première partie de ce travail, nous commençons par établir un théorème reliant le degré de la première surface minima d'une courbe à la *répartition* des caractéristiques paires

---

(1) On peut conclure de ce dernier théorème que lorsque l est inférieur à la plus petite caractéristique impaire de A, les polynomes A_{2i} et B_{2i}, relatifs à une courbe donnée C_l, sont déterminés d'une façon unique.

(2) Il peut en effet arriver que les surfaces minima d'une courbe réduite soient aussi surfaces minima de la courbe réduite suivante. La figure ainsi constituée est ce que j'appelle un *doublet*.

ou impaires de son système de points doubles apparents (§ 3). Puis nous en déduisons le résultat d'Halphen déjà cité (§ 4). Le paragraphe 5 prépare la généralisation annoncée et permet de signaler une critique, qui paraît justifiée, d'un résultat utilisé par Halphen dans son Mémoire. Le théorème sur l'équation générale des surfaces contenant une courbe gauche est au paragraphe 6, en même temps que l'expression des caractéristiques paires de la courbe en fonction de celles de son système de points doubles apparents.

La seconde partie est consacrée à une seconde démonstration du résultat d'Halphen. Cette dernière, quoique plus longue que la précédente, nous a paru intéressante par sa méthode. Elle nous a ainsi donné l'occasion d'indiquer brièvement (§ 8) la démonstration du théorème II signalé dans l'Introduction.

2. *La représentation monoïdale d'une courbe gauche.* — Soit une courbe gauche C, sans points multiples, de degré d. Projetons-la parallèlement à un axe Oz sur un plan xOy. Nous obtenons une courbe plane Γ présentant un système de points doubles α. On peut représenter analytiquement la courbe gauche C en se servant de l'équation $\varphi_d(xy) = 0$ de sa projection L, et d'une fonction $z = \frac{u_1(xy)}{u_0(xy)}$, quotient de deux polynomes de degré n et $n+1$, qui donne la cote du point C correspondant à celui de Γ,

$$\varphi_d(xy) = 0, \qquad z = \frac{u_1(xy)}{u_0(xy)}.$$

Cette représentation est due à Cayley. Halphen s'en sert dans le Mémoire déjà cité.

La courbe C ne passe pas en général par le centre de projection, aussi les zéros de u_0 sur Γ sont aussi des zéros de u_1. Comme en chaque point double de Γ la fonction z doit avoir deux valeurs, il est nécessaire que u_0 et u_1 s'annulent simultanément en tous les points du système α.

La fonction z, définie sur Γ, n'a pas une forme rigoureusement déterminée. On démontre même que si l'on considère un polynome u_0, de degré n, astreint à la *seule condition* de s'annuler en les points du système α, on peut lui faire correspondre un polynome u_1, de degré $n+1$, tel que la fraction $\frac{u_1}{u_0}$ représente la fonction z sur Γ.

En particulier, si l'on prend u_1 comme nouveau dénominateur, on obtiendra un nouveau polynome u_2 de degré $n+2$, etc. On peut ainsi écrire les équations de C de la façon suivante :

$$\varphi_d(xy) = 0, \qquad z = \frac{u_1(xy)}{u_0(xy)} = \frac{u_2}{u_1} = \ldots = \frac{u_m}{u_{m-1}} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

On en conclut

$$z^i = \frac{u_i}{u_0} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Cette dernière remarque rend les polynomes u propres à la recherche des surfaces qui passent par la courbe C. En effet si

$$P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m = 0$$

est l'équation d'une telle surface, on devra aussi avoir l'équivalence

$$P_0 u_m + P_1 u_{m-1} + \ldots + P_m u_0 = 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d)$$

et réciproquement. Dans ces conditions *la recherche des surfaces passant par la courbe est ramenée à celle des combinaisons linéaires des u identiquement nulles sur la courbe* Γ.

Cette remarque est à la base de la méthode du présent travail (1).

I.

3. La courbe u_0, d'équation $u_0 = 0$ recoupe φ_d, en dehors des points doubles α, suivant le système B'. α et $B = \alpha + B'$ constituent l'intersection totale de u_0 et de φ_d. Toutes les courbes u_1, u_2, ... passent par B.

Remarquons aussi que φ_d n'est pas une courbe normale, et que par suite on a l'égalité (2)

$$d = h_1^\alpha + 1.$$

(1) Pour plus de détails sur la représentation monoïdale des courbes gauches, *voir* HALPHEN, *Œuvres*, t. III, p. 278 et suiv. — PICARD, *Analyse*, t. II, p. 571.

(2) Considérons une courbe φ_d, de degré d, présentant le système de points

u_0 est par conséquent la première courbe minima de B. En outre, suivant la manière dont on a construit B à partir de α, d est une caractéristique paire de B ([1]).

Plaçons-nous d'abord dans les circonstances les plus simples.

A. *Supposons que le système α jouisse de la propriété sui-*

---

doubles α. Écrivons de deux manières différentes la dimension ρ_n de la série découpée sur φ_d par toutes les courbes C_n, de degré n du plan.

Si l'on met en évidence la spécialité i_n et le défaut Δ_n de cette série, on a

$$\rho_n = n\,d - p + i_n - \Delta_n,$$

D'autre part suivant le paragraphe 3 du Chapitre I, du Mémoire cité (*Annales de Toulouse*),

$$\rho_n = n\,d - \Pi + \varphi(d-n),$$

où

$$\Pi = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

$$\varphi(d-n) = 0 \quad \text{si} \quad n < d-2,$$

$$\varphi(d-n) = \frac{(d-n-1)(d-n-2)}{2} \quad \text{si} \quad n < d-2.$$

Remarquons que

$$p = \Pi - \alpha,$$

et que i_n, grâce au théorème du Reste, est égal au nombre des adjointes indépendantes d'ordre $d-n-3$,

$$i_n = \varphi(d-n) - (\alpha - s_\alpha^{d-n-3}).$$

L'égalité des deux expressions de ρ_n donne alors

$$\Delta_n = s_\alpha^{d-n-3}.$$

Le défaut de la série découpée sur une courbe φ_d, de degré d, par toutes les courbes C_n, de degré n, du plan est égal à la singularité du système des points doubles α pour les courbes d'ordre $d-n-3$.

Si la courbe φ_d est la projection d'une courbe gauche, la série découpée sur elle par les droites du plan n'est pas complète. On en conclut

$$s_\alpha^{d-4} > 0.$$

Mais d'autre part la singularité de α pour les courbes d'ordre $d-3$ est nulle

$$s_\alpha^{d-3} = 0.$$

Ces deux dernières relations permettent alors d'affirmer

$$d = h_1^\alpha + 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

([1]) Voir *Annales de Toulouse*, t. XVI, Chap. II, § 12.

vante :

$$h_1^\alpha = k_1^\alpha + 1 = h_3^\alpha + 2 = \ldots = k_{2i-1}^\alpha + 2i - 1 > h_{2i+1}^\alpha + 2i \qquad (\mu = 2i+1),$$

ou

$$h_1^\alpha = k_1^\alpha + 1 = h_3^\alpha + 2 = \ldots = h_{2i+1}^\alpha + 2i > k_{2i+1}^\alpha + 2i + 1 \qquad (\mu = 2i+2).$$

Nous dirons alors que la *répartition* des caractéristiques impaires de α est *régulière* et présente une première *discontinuité* entre la $(\mu - 1)^{\text{ième}}$ et la $\mu^{\text{ième}}$ caractéristiques. Dans ces conditions *la courbe* C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à* μ.

Supposons par exemple $\mu = 2i + 1$.

Les hypothèses faites permettent d'affirmer que les degrés $\overline{u}_0$, $\overline{u}_1$, ... $\overline{u}_{2i}$ des polynomes u_0, u_1, ... u_{2i} sont des caractéristiques paires de B. En effet, suivant une remarque précédente et parce que α et β forment l'intersection totale de φ_d et de u_0 on peut écrire (1)

$$h_0^B = \overline{u}_0, \qquad k_0^B = \overline{u}_0 + d - h_1^\alpha = \overline{u}_0 + (h_1^\alpha + 1) - h_1^\alpha = \overline{u}_0 + 1 = \overline{u}_1, \;\ldots.$$

Si aucun de ces u n'est combinaison linéaire des u d'indice inférieur on peut les prendre comme polynomes caractéristiques indépendants. (Dans l'hypothèse contraire la courbe C est évidemment sur une surface de degré inférieur à μ.) Mais

$$k_{2i}^B = \overline{u}_0 + d - h_{2i+1}^\alpha > \overline{u}_0 + (h_1^\alpha + 1) - (h_1^\alpha - 2i) = \overline{u}_0 + 2i + 1 = u_{2i+1}.$$

Par conséquent

$$h_{2i}^B = \overline{u}_{2i} < \overline{u}_{2i+1} < k_{2i}^B.$$

D'après le théorème I (§ 1) on en conclut que u_{2i+1} est une combinaison linéaire des u d'indice inférieur (et à l'occasion de φ_d si $d \leqq \overline{u}_{2i+1}$) (2) ;

$$u_{2i+1} = -a_{2i}u_{2i} - a_{2i-1}u_{2i-1} - \ldots - a_0 u_0 \qquad (\text{div}\,\varphi_d).$$

La courbe C est par suite sur la surface

$$z^\mu + a_{\mu-1}z^{\mu-1} + \ldots + a_0 = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

---

(1) Voir *Annales de Toulouse*, t. XVI, chap. II, § 12.

(2) Dans ces conditions deux caractéristiques paires de B sont égales à d (*Annales de Toulouse*, t. XVI, chap. II, § 12).

Pour étudier maintenant le problème dans les circonstances les plus générales, il suffit de supposer qu'avant la première discontinuité dans la répartition des caractéristiques, on a eu l'occasion de rencontrer plusieurs caractéristiques égales, ou *coïncidences*.

B. *Supposons qu'il existe une seule coïncidence avant la première discontinuité.*

Nous allons démontrer que C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à* $\mu + 1$.

En supposant comme précédemment que $u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}, \mu - 1$ sont des polynomes caractéristiques indépendants, on peut encore écrire

$$(1) \quad -u_\mu = a_0 u_0 + a_1 u_1 + \ldots + a_\alpha u_\alpha + b_\alpha v_\alpha + \ldots + a_{\mu-1} u_{\mu-1} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d),$$

où v_α est un deuxième polynome caractéristique, de même degré que u_α, correspondant à la coïncidence.

En multipliant les deux membres de l'équivalence par z, on obtient

$$(2) \quad -u_{\mu+1} = a_0 u_1 + a_1 u_2 + \ldots + a_\alpha u_{\alpha+1} + \ldots + a_{\mu-1} u_\mu + b_\alpha v_\alpha z \quad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Comme la courbe v_α passe par le système de points doubles de φ_d, on peut l'employer pour la représentation de C et lui faire correspondre un polynome $v_{\alpha+1}$ tel que

$$z = \frac{v_{\alpha+1}}{v_\alpha} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

La courbe $v_{\alpha+1}$, comme v_α, passe par le système B. On peut donc écrire

$$v_{\alpha+1} = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_\alpha u_\alpha + \beta_\alpha v_\alpha + \alpha_{\alpha+1} u_{\alpha+1} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

En remplaçant $v_\alpha z$ par l'expression de $v_{\alpha+1}$, dans l'équivalence (2), on obtient

$$(3) \quad -u_{\mu+1} = b_\alpha \alpha_0 u_0 + (a_0 + b_\alpha \alpha_1) u_1 + \ldots + b_\alpha \beta_\alpha v_\alpha + \ldots + a_{\mu-1} u_\mu \quad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

L'élimination de v_α se fait alors immédiatement entre (1) et (3), de telle sorte que

$$-u_{\mu+1}+\beta_\alpha u_\mu=(b_\alpha\alpha_0-a_0\beta_\alpha)u_0+(a_0+b_\alpha\alpha_1-a_1\beta_\alpha)u_1+\ldots+a_{\mu-1}u_\mu$$
$$(\operatorname{div}\varphi_d).$$

Identité qui démontre le théorème annoncé.

C. Dans le cas général il existe c coïncidences avant la première discontinuité, et l'on démontre que la *courbe* C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à* $\mu+c$.

Comme dans le cas particulier précédent il s'agit d'éliminer les polynomes caractéristiques v_α, v_β, v_γ, ... qui s'introduisent dans l'expression de u_μ à l'occasion des coïncidences. On y arrive de la façon suivante. En multipliant successivement l'équivalence analogue à (1) par z, z^2, ..., z^c et en remplaçant au fur et à mesure zv_α, zv_β, zv_γ, ... par les expressions des polynomes $v_{\alpha+1}$, $v_{\beta+1}$, $v_{\gamma+1}$, ... on obtient $c+1$ équivalences. Il suffit alors de montrer qu'en multipliant ces équivalences par des expressions entières de *degré convenable*, on peut par addition membre à membre faire disparaîtrs les v.

Donnons, pour simplifier, l'expression de ces facteurs dans le cas de trois coïncidences. On a dans ces conditions

$$\begin{aligned}
v_{\alpha+1}&=\alpha_0u_0+\ldots+\beta_\alpha v_\alpha+\ldots+\beta_\beta v_\beta+\ldots+\beta_\gamma v_\gamma+\ldots,\\
v_{\beta+1}&=\alpha'_0u_0+\ldots+\beta'_\alpha v_\alpha+\ldots+\beta'_\beta v_\beta+\ldots+\beta'_\gamma v_\gamma+\ldots,\\
v_{\gamma+1}&=\alpha''_0u_0+\ldots+\beta''_\alpha v_\alpha+\ldots+\beta''_\beta v_\beta+\ldots+\beta''_\gamma v_\gamma+\ldots,
\end{aligned}$$

où nécessairement si l'on n'a pas $\bar v_\alpha=\bar v_\beta=\bar v_\gamma$ certains coefficients écrits ci-dessus sont nuls.

Les trois facteurs X_3, X_2, X_1, de degré 3, 2, 1, multipliant respectivement les équivalences u_μ, zu_μ, z^2u_μ sont donnés par les expressions suivantes :

$$X_3=(-1)^3\begin{vmatrix}\beta_\alpha & \beta_\beta & \beta_\gamma\\ \beta'_\alpha & \beta'_\beta & \beta'_\gamma\\ \beta''_\alpha & \beta''_\beta & \beta''_\gamma\end{vmatrix},$$

$$X_2=(-1)^2\left[\begin{vmatrix}\beta_\beta & \beta_\alpha\\ \beta'_\beta & \beta'_\alpha\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta'_\alpha & \beta'_\gamma\\ \beta''_\alpha & \beta''_\gamma\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta''_\gamma & \beta''_\alpha\\ \beta_\gamma & \beta_\alpha\end{vmatrix}\right],$$

$$X_1=(-1)^1(\beta_\alpha+\beta'_\beta+\beta''_\gamma).$$

En ajoutant ces trois équivalences ainsi multipliées, à la quatrième $z^3 u_\mu$, on obtient la relation cherchée entre les u.

On conçoit aisément l'expression des facteurs dans le cas général. Il est important de remarquer que ces facteurs sont *indépendants* des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-1}$ de l'équivalence donnant u_μ.

Résumons ces résultats en remarquant que la discontinuité, dans le cas général, a lieu entre la $(\mu + c - 1)^{\text{ième}}$ caractéristique et la $(\mu + c)^{\text{ième}}$.

Théorème. — *Si dans la suite des caractéristiques impaires de α, la première discontinuité a lieu entre la $(m - 1)^{\text{ième}}$ et la $m^{\text{ième}}$ (cette dernière pouvant d'ailleurs ne pas exister), quelle que soit la disposition des $m - 1$ premières caractéristiques, la courbe* C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à m.*

Remarque. — Puisque tous les polynomes u passent par $B = \alpha + B'$, ils contiennent tous en particulier le système α des points doubles de φ_d. Tout ce que nous venons de dire en considérant le système B peut s'entendre aussi avec le système α, de sorte que l'on peut énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si dans la suite des caractéristiques paires de α, la première discontinuité a lieu entre la $m^{\text{ième}}$ et la $(m+1)^{\text{ième}}$ (cette dernière pouvant d'ailleurs ne pas exister), quelle que soit la disposition des m premières caractéristiques, la courbe* C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à m.*

4. On peut déduire immédiatement de ce résultat une proposition importante découverte par Halphen.

Si le système de points doubles apparents α de la courbe gauche C *vérifie l'inégalité*

$$(1) \qquad n_{2i-1} + k^{\alpha}_{2i-2} - k^{\alpha}_{2i-1} + 1 < 0,$$

cette courbe est sur une surface de degré inférieur ou égal à $m = 2i$.

En effet, le degré n_{2i-1} de la première courbe minima du $(2i-1)^{\text{ième}}$ réduit de α, α_{2i-1}, peut s'exprimer en fonction des caractéristiques de α (¹)

$$n_{2i-1} = \mathrm{H}_0 - \mathrm{H}_1 - \ldots - h^{\alpha}_{2i-1} \qquad (\mathrm{H}_j = h^{\alpha}_j + k^{\alpha}_j).$$

On a de même

$$n_{2i} = \mathrm{H}_0 - \mathrm{H}_1 + \ldots + h^{\alpha}_{2i}.$$

Remplaçons n_{2i-1} par sa valeur dans l'inégalité précédente, et faisons apparaître n_{2i}. On obtient

$$n_{2i} + k^{\alpha}_{2i-1} - h^{\alpha}_{2i} + 1 < 0.$$

Or n_{2i} n'est certainement pas négatif, il est donc néeessaire que

$$h^{\alpha}_{2i} > k^{\alpha}_{2i-2} + 1.$$

Il y a ainsi une discontinuité entre la $2i^{\text{ième}}$ et la $(2i+1)^{\text{ième}}$ caractéristique paire de α. La courbe C est donc sur une surface de degré inférieur ou égal à $m = 2i$. C. Q. F. D.

Montrons maintenant comment on obtient le résultat d'Halphen.

La présence de coïncidences dans les caractéristiques paires de α diminue H_0, H_2, ..., k^{α}_{2i-2}. De même les coïncidences des caractéristiques impaires augmentent H_1, H_3, ..., k^{α}_{2i-1}. On voit ainsi que le premier membre de l'inégalité (1) est maximum si l'on suppose qu'il n'existe pas de coïncidences parmi les caractéristiques. Par conséquent, si l'inégalité que nous obtenons en faisant cette hypothèse est vérifiée, il en sera de même *a fortiori* des inégalités correspondant aux cas où il se présente des coïncidences.

Dans cette dernière hypothèse, on a les relations

$$h^{\alpha}_0 = k^{\alpha}_0 - 1 + h^{\alpha}_2 - 2 = \ldots = k^{\alpha}_{2i-2} - (2i-1),$$
$$h^{\alpha}_1 = k^{\alpha}_1 + 1 = h^{\alpha}_3 + 2 = \ldots = k^{\alpha}_{2i-1} + (2i-1).$$

Nous obtenons ainsi, en remplaçant $2i$ par m et h^{α}_1 par $d-1$, l'inégalité

$$(m+1)(h^{\alpha}_0 + m) < md. \tag{2}$$

On a de même la proposition analogue.

Si le système des points doubles apparents α de la courbe

(¹) *Annales de Toulouse*, Chap. I, § 12.

gauche C *vérifie l'inégalité*

$$n_{2i} + h_{2i}^{\alpha} - h_{2i+1}^{\alpha} + 1 < 0,$$

cette courbe est sur une surface de degré inférieur ou égal à $m = 2i + 1$.

Et l'on déduit encore de ce deuxième théorème la même inégalité (2). On peut donc conclure :

Théorème. — *Lorsque le système des points doubles apparents* α *de la courbe* C *vérifie l'inégalité*

$$(m+1)(h_0^{\alpha} + m) < md,$$

cette courbe se trouve sur une surface de degré inférieur ou égal à m.

C'est le résultat trouvé par Halphen (¹).

Nous venons de le démontrer d'une façon assez indirecte. Nous en donnerons au paragraphe 10 une démonstration plus naturelle mais plus longue.

5. *a.* Dans le paragraphe 3 l'hypothèse de la discontinuité entre la $(m-1)^{\text{ième}}$ et la $m^{\text{ième}}$ caractéristique impaire de α nous a seulement permis d'assurer que u_μ était une combinaison linéaire des polynomes caractéristiques pairs de B, de degré inférieur. Si dans d'autres circonstances nous savons que u_μ peut s'exprimer de cette façon, le procédé d'élimination des v, employé précédemment, restera encore applicable. Par conséquent, si l'on a une combinaison identiquement nulle des u et des v (²),

$$N = u_\mu - (u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}) - (v_\alpha v_3 \ldots) \equiv 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d),$$

où les polynomes v sont au nombre de b, on peut en déduire l'existence d'une combinaison identiquement nulle, de degré $\overline{u}_0 + \mu + b$,

(¹) Halphen, *Œuvres*, t. III, p. 401.

(²) Nous désignerons par le symbole $(u_0 u_1 \ldots u_h)_l$ une combinaison linéaire de $u_0 u_1 \ldots u_h$ de degré l, dont les coefficients sont des polynomes en x et y. Lorsque le degré n'aura pas d'intérêt dans la question traitée nous supprimerons l'indice.

ne contenant plus que les u,

$$(u_0 u_1 \ldots u_\mu \ldots u_{\mu+b})_{\overline{n}_0, \mu+b} \equiv 0 \qquad (\text{div}\, \varphi_d).$$

b. Soit u_μ le premier polynome u qui puisse s'exprimer à l'aide d'une combinaison linéaire d'un système de polynomes caractéristiques de degré inférieur. D'après ce qui précède nous savons que l'on peut prendre les polynomes u, d'indice inférieur à μ, comme des polynomes caractéristiques pairs indépendants du système B. Mais il est important de remarquer qu'il n'en est plus de même pour le polynome u_μ, ni pour les suivants. Ces derniers sont en effet des combinaisons linéaires des précédents. Ils ne peuvent donc pas être pris, le cas échéant, comme de nouveaux polynomes caractéristiques indépendants.

Supposons que l'on ait

$$u_\mu = (u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}) + (v_\alpha v_\beta \ldots) \qquad (\text{div}\, \varphi_d).$$

En multipliant les deux membres de cette équivalence par z et en remplaçant $z u_i$ par u_{i+1} on obtient

$$u_{\mu+1} = (u_1 u_2 \ldots u_\mu) + (z v_\alpha z v_\beta \ldots) \qquad (\text{div}\, \varphi_d).$$

Et comme u_μ, $z v_\alpha = v_{\alpha+1}$, $z v_\beta = v_{\beta+1}$ $(\text{div}\, \varphi_d)$ peuvent s'exprimer en fonction de $u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1} v_\alpha v_\beta \ldots$, on en conclut

$$u_{\mu+1} = (u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}) + (v_\alpha v_\beta \ldots) \qquad (\text{div}\, \varphi_d).$$

La démonstration du cas général se ferait ainsi de proche en proche [1].

---

[1] On en conclut en particulier que le premier membre de l'inégalité

$$f(xy) = P_0 u_m + P_1 u_{m-1} + \ldots + P_m u_0 + G \varphi_d = 0$$

qui identifié à zéro exprime la condition pour que la surface

$$P_0 z^m + P_1 z^{m-1} + \ldots + P_m = 0$$

contienne la courbe C *n'est pas l'équation générale* des courbes de degré l passant par le système B, lorsque l est assez petit (en particulier quand l est inférieur à la plus grande caractéristique paire de B). Il manque en effet certains polynomes caractéristiques v qui ne sont pas remplaçables par des polynomes u, même d'indice supérieur à $\mu - 1$.

Cette remarque ne parait pas avoir attiré l'attention d'Halphen. Elle semble *c*. Soit $u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}$, $v_\alpha v_\beta \ldots \varphi_d$ un système de polynomes caractéristiques pairs indépendants de B. Cherchons toutes les combinaisons linéaires N de ces polynomes identiquement nulles.

Si i_1 est la plus petite caractéristique impaire de B, il existe une telle combinaison N_{i_1},

$$N_{i_1} = (u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}, v_\alpha v_\beta \ldots)_{i_1} = 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

La combinaison N_{i_1+1} que l'on obtient en multipliant N_{i_1} par z et en remplaçant $v_\alpha z = v_{\alpha+1}$, $v_\beta z = v_{\beta+1}$, ... par leurs expressions en fonction de $u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}$, $v_\alpha v_\beta \ldots$ est aussi un polynome identiquement nul, où entrent $u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}$, $v_\alpha v_\beta \ldots$ par l'intermédiaire de $u_0 u_1 \ldots u_\mu$, $v_\alpha v_\beta \ldots$ (1).

Si nous supposons qu'il n'y a pas deux caractéristiques impaires de B égales à i_1, on peut assurer que N_{i_1+1} est indépendant de N_{i_1}. En effet si l'on avait

$$N_{i_1+1} = A_1 . N_{i_1} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d),$$

on en conclurait que la courbe C est dans le plan $z = A_1$.

---

mettre en doute un résultat dont il se sert surtout à la fin de son Mémoire. Précisons cette difficulté :

Pour écrire que ce polynome est identiquement nul, il suffit d'imposer à la courbe $f(xy) = 0$ un nombre de conditions arbitraires égal au nombre des paramètres homogènes dont dépend cette courbe. Halphen, dans l'application de cette méthode, suppose que $f(xy) = 0$ est l'équation générale des courbes de ce degré passant par B. Il obtient ainsi un nombre N'_m de conditions supérieur au nombre véritable N_m. De l'inégalité qu'il obtient

(1) $\qquad N'_m \geqq md + 1 - p \qquad$ (où p est le genre de la courbe),

on ne peut pas conclure

(2) $\qquad N_m \geqq md + 1 - p.$

D'autre part, lorsque $p < \frac{md+1}{2}$, Weyr a montré que $N_m \leqq md + 1 - p$. Halphen en conclut alors que dans les mêmes conditions :

$$N_m = md + 1 - p.$$

Ce résultat est contestable à cause de la distinction nécessaire, pour les premières valeurs de m, entre N_m et N'_m.

Pour plus de détails, *voir* HALPHEN, *Œuvres*, t. III, p. 293-295 et 299.

(1) Comme au paragraphe 3, on ne remplace pas explicitement u_α par son expression en fonction de $u_0 u_1 \ldots u_{\mu-1}$, $v_\alpha v_\beta \ldots$.

Soit H_0 le degré de la première surface minima de la courbe C. Si $i_1, i_1+1, \ldots, i_1+H_0-2$ représentent chacun une caractéristique impaire de B, on peut assurer que les combinaisons linéaires successives $N_{i_1}, N_{i_1+1}, \ldots, N_{i_1+H_0-1}$ sont indépendantes, car C n'est pas sur une surface de degré inférieur à H_0. Mais en revanche on est certain que $N_{i_1+H_0}$ n'est pas indépendante des précédentes, car si

$$(z^{H_0} z^{H_0-1} \ldots 1) = 0$$

est l'équation de cette première surface minima, en multipliant les deux membres de l'égalité par N_{i_1}, on obtient

$$(N_{i_1} N_{i_1+1} \ldots N_{i_1+H_0}) = 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Soit i_2 le degré de la première combinaison N_{i_2} qui ne peut pas s'exprimer linéairement avec des polynomes issus de N_{i_1}. On en déduit une nouvelle suite $N_{i_2} N_{i_2+1} \ldots$ de combinaisons indépendantes de toutes les précédentes et dont les degrés sont les caractéristiques impaires suivantes de B. On peut continuer *de même* jusqu'à épuisement complet des caractéristiques impaires de B. Nous aurons ainsi réparti les combinaisons caractéristiques impaires indépendantes de B suivant un nombre fini de *suites* d'au plus H_0 termes.

Le théorème II de l'Introduction donne alors l'expression générale des combinaisons N identiquement nulles

$$\begin{aligned} N = \quad & (a_{10} N_{i_1} + a_{11} N_{i_1+1} + \ldots + a_{1j_1} N_{i_1+j_1}) \\ & + (a_{20} N_{i_2} + a_{21} N_{i_2+1} + \ldots + a_{2j_2} N_{i_2+j_2}) + \ldots. \end{aligned}$$

(On a supposé que les j_1 premières combinaisons de la suite issue de N_{i_1} sont indépendantes, etc.)

Remarques. — I. Nous avons limité dans chaque parenthèse la suite des polynomes N à ceux qui sont indépendants. On peut *a fortiori* y introduire aussi quelques-uns de ceux qui dépendent linéairement des précédents.

II. Les polynomes $N_{i_1+1}, \ldots, N_{i_1+j_1}$ se déduisent de N_{i_1} comme dans le paragraphe 3 nous avons déduit $u_{\mu+1}$ de u_μ. Par conséquent si N_{i_1} contient dans son expression β_1 polynomes v, pour avoir une combinaison linéaire de $N_{i_1} N_{i_1+1} \ldots$ formellement indépendantes des v, il sera nécessaire d'en prendre β_1.

III. Les suites issues de N_{i_1}, N_{i_2}... n'ont entre elles aucune relation particulière, dans le cas général. Le procédé d'élimination des v, indiqué au paragraphe 3, ne peut pas par conséquent s'appliquer à l'expression entière de N; comme il est nécessaire d'avoir des coefficients entiers a de degré convenable, il faudra utiliser cette méthode pour chacune des suites.

Rappelons que ces polynomes a ne dépendent que des v. En outre quel que soit son degré, la combinaison $(N_{i_1} \ldots N_{i_1+\beta_1-1})$ doit nécessairement contenir formellement au moins un polynome v, si tous ses coefficients ne sont pas identiquement nuls (1).

6. Nous sommes maintenant en mesure d'aborder l'étude des surfaces contenant la courbe gauche C.

Comme nous l'avons indiqué (§ 2), elle se ramène à celle des combinaisons linéaires des u identiquement nulles à l'exclusion des polynomes caractéristiques v. Le paragraphe 5, a, nous a montré comment on pouvait les déduire des combinaisons linéaires des polynomes caractéristiques pairs indépendants de B.

Soit $\overline{u_0}+H_0$ le degré minimum des combinaisons linéaires des u seulement identiquement nulles

$$(u_0 u_1 \ldots u_{H_0})_{\overline{u_0}+H_0} = 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Il lui correspond la première surface minima F_{H_0} de la courbe gauche C.

Toute autre combinaison de même nature, de degré $\overline{u_0}+l$, peut s'écrire de la façon suivante :

$$(u_0 u_1 \ldots u_l)_{\overline{u_0}+l} = A_0(xyz)(u_0 u_1 \ldots u_{H_0})_{\overline{u_0}+H_0} + (u_0 u_1 \ldots u_{H_0-1})_{u_0+l}$$
$$(\operatorname{div} \varphi_d).$$

Il suffit en effet d'absorber successivement (par un mécanisme analogue à celui de la division) $u_l u_{l-1} \ldots u_{H_0}$, dans des expressions

$$\alpha_i z^i (u_0 u_1 \ldots u_{H_0})_{\overline{u_0}+H_0} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Par conséquent le problème revient à la recherche des combi-

(1) Pour faire disparaître les β_1 polynomes v, il faudrait résoudre un système linéaire de β_1 équations à $\beta_1 - 1$ inconnues. Il serait nécessaire en outre que les solutions trouvées soient des polynomes de degré convenable.

naisons identiquement nulles $(u_0 u_1 \ldots u_{\mathrm{II}_0-1})_{\overline{u_0}+l}$ de degré $\overline{u_0}+l$. Suivant le paragraphe 5, c, nous pouvons donc écrire

$$(u_0 u_1 \ldots u_{\mathrm{II}_0-1})_{\overline{u_0}+l} = (a_{1,0} \mathrm{N}_{i_1} + a_{1,1} \mathrm{N}_{i_1+1} + \ldots + a_{1,j_1} \mathrm{N}_{i_1+j_1}) + (a_{2,0} \mathrm{N}_{i_2} + a_{2,1} \mathrm{N}_{i_2+1} + \ldots + a_{2,j_2} \mathrm{N}_{i_2+j_2}) + \ldots \quad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Les polynomes a doivent être choisis de façon que les expressions v disparaissent explicitement du deuxième membre de l'équivalence. Or d'après la remarque III du paragraphe 5, c, il est nécessaire qu'il en soit de même pour chacune des parenthèses.

Si la combinaison N_{i_1} contient β_1 polynomes v, il sera nécessaire que $\overline{u_0}+l$ ne soit pas inférieur à $i_1+\beta_1$ pour qu'il existe des coefficients non nuls $a_{1,0}\ldots$ qui fassent disparaître les v de la première parenthèse. Soit

$$\mathrm{P}_{i_1+\beta_1} = (\mathrm{N}_{i_1} \mathrm{N}_{i_1+1} \ldots \mathrm{N}_{i_1+\beta_1})_{i_1+\beta_1} = 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d),$$

la combinaison de degré $i_1+\beta_1$ qui ne contienne plus de polynomes v.

Toute autre combinaison des N_{i_1}, de degré i_1+l_1 peut s'écrire, comme nous l'avons déjà vu,

$$(\mathrm{N}_{i_1} \mathrm{N}_{i_1+1} \ldots \mathrm{N}_{i_1+l_1}) = \mathrm{B}_0(xyz) \mathrm{P}_{i_1+\beta_1} + (\alpha_{1,0} \mathrm{N}_{i_1} + \ldots + \alpha_{1,\beta_1-1} \mathrm{N}_{i_1+\beta_1-1}) \quad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Mais pour que la deuxième combinaison du deuxième membre ne contienne par explicitement les polynomes v, il est nécessaire que tous les coefficients α soient nuls de sorte que

$$(\mathrm{N}_{i_1} \mathrm{N}_{i_1+1} \ldots \mathrm{N}_{i_1+l_1})_{i_1+l_1} = \mathrm{B}_0(xyz) \mathrm{P}_{i_1+\beta_1} \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Nous pouvons raisonner de même avec la suite des combinaisons issues de N_{i_2}, ... On obtient ainsi l'équivalence

$$(u_0 u_1 \ldots u_{\mathrm{II}_0-1})_{\overline{u_0}+l} = \mathrm{B}_0(xyz)(\mathrm{P}_{i_1+\beta_1} + \mathrm{A}_2(xyz) \mathrm{P}_{i_2+\beta_2} + \ldots \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Si l'on remplace cette combinaison par son expression dans l'équivalence (1) on a

$$(u_0 u_1 \ldots u_l)_{\overline{u_0}+l} = \mathrm{A}_0(xyz)(u_0 u_1 \ldots u_{\mathrm{II}_0})_{\overline{u_0}+\mathrm{II}_0} + \mathrm{B}_0(xyz) \mathrm{P}_{i_1+\beta_1} + \mathrm{A}_2(xyz) \mathrm{P}_{i_2+\beta_2} + \ldots \qquad (\operatorname{div} \varphi_d).$$

Il lui correspond l'*équation générale des surfaces* F_l *de degré* l

contenant la courbe C

$$F_l = A_0 F_{H_0} + B_0 F_{K_0} + A_2 F_{H_2}, \ldots.$$

Le deuxième membre de cette expression ne contient qu'un *nombre fini* de polynomes $F_{H_{2i}} F_{K_{2i}}$, équations de surfaces contenant la courbe. *Les degrés de ces derniers*, selon l'Introduction, *seront les caractéristiques paires de la courbe gauche* C.

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation générale des surfaces de degré l contenant une courbe gauche* C *de caractéristiques paires*

$$H_0 K_0 \ldots, H_{2i} K_{2i} \ldots$$

est donnée par l'expression suivante :

$$F_l = \Sigma(A_{2i} F_{H_{2i}} + B_{2i} F_{K_{2i}}).$$

A_{2i} et B_{2i} sont des polynomes arbitraires en x, y et z, de degré $l - H_{2i}$, $l - K_{2i}$, identiquement nuls si ces nombres sont négatifs.

$F_{H_{2i}}$ et $F_{K_{2i}}$ sont les équations de surfaces de degré H_{2i} et K_{2i}, contenant C, *indépendantes de la valeur de l*, et telles que *chacune d'elles ne puisse pas s'exprimer à l'aide d'une combinaison linéaire des polynomes* $F_{H_{2j}}$, $F_{K_{2j}}$ *de degré inférieur.*

L'existence d'un nombre fini de caractéristiques paires implique celle d'un nombre fini de caractéristiques impaires de la courbe C (selon la définition algébrique de l'Introduction). On obtient en effet la dimension du système complet des surfaces de degré l contenant C, en faisant la différence entre la somme des nombres des paramètres dont dépendent respectivement les polynomes A_{2i}, B_{2i} et la somme analogue relative aux polynomes A_{2i+1}, B_{2i+1} qui entrent dans l'expression générale des combinaisons linéaires identiquement nulles des polynomes $F_{H_{2i}}$, $F_{K_{2i}}$. On voit ainsi que le nombre des caractéristiques paires est supérieur d'une unité à celui des caractéristiques impaires.

Il est aisé de trouver, dans le *cas général*, l'expression de ces nombres H_{2i}, K_{2i} en fonction du degré de la courbe C et des caractéristiques du système α des points doubles apparents de C, dans une projection arbitraire.

Soit i le plus petit nombre, supérieur à $h_0^{\gamma} = \overline{u_0}$, qui ne soit pas caractéristique paire de B. Il correspond à la première discontinuité dans la répartition de ces caractéristiques. Si β est le nombre des coïncidences des caractéristiques paires de B inférieures à i, on a

$$H_0 = i + \beta - \overline{u_0}.$$

Soient i_1 la plus petite caractéristique impaire de B et $\beta_1 - \beta$ le nombre des caractéristiques paires de B comprises entre i et i_1. On a

$$K_0 = i_1 + \beta_1 - \overline{u_0}.$$

De même si i_2 est la première caractéristique impaire de la deuxième suite et $\beta_2 - \beta$ le nombre de caractéristiques paires de B comprises entre i et i_2,

$$H_2 = i_2 + \beta_2 - \overline{u_0}, \quad \ldots.$$

Il faut maintenant introduire les caractéristiques de α dans ces expressions. Remarquons que α et B constituent l'intersection totale des courbes φ_d et u_0. A toute caractéristique impaire de B$\bar{i}$ correspond une caractéristique paire $\bar{p}$ de α par la relation ([1]),

$$\bar{i} = \overline{u_0} + d - \bar{p}.$$

Par conséquent, comme les caractéristiques impaires de B, les caractéristiques paires de α se répartissent en un nombre fini de suites décroissantes, de termes initiaux $p \geqq p_1 \geqq p_2 \ldots$ tels que

$$\begin{aligned} i - \overline{u_0} &= d - p, \\ i_1 - \overline{u_0} &= d - p_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On voit aussi que β est le nombre des coïncidences des caractéristiques impaires de α supérieures à p, que $\beta_1 - \beta$ est celui des caractéristiques impaires de α comprises entre p et p_1, ... On obtient ainsi les relations cherchées

$$\begin{aligned} H_0 &= d + \beta - p, \\ K_0 &= d + \beta_1 - p_1, \\ H_2 &= d + \beta_2 - p_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

([1]) Voir *Annales de Toulouse*, t. XVI, Chap. II, § 12.

Remarque. — Ces résultats ont une valeur générale de même portée que celle qui appartient aux calculs précédents. Il serait intéressant de savoir si l'introduction de ces nombres caractéristiques suffit à exclure cette restriction, et dans le cas contraire si l'on peut complètement exclure ce qu'on appelle les cas particuliers en attachant à la courbe C un système fini de nombres.

II.

7. Nous nous proposons dans cette seconde partie d'établir une inégalité entre le degré d'une courbe gauche C et le degré de la première courbe minima de son système de points doubles apparents α, qui permette de donner une limite supérieure du degré de la première surface minima de C. Considérons d'abord les deux cas particuliers où cette dernière surface est un plan ou une quadrique.

A. Cherchons le degré minimum des surfaces contenant la courbe C, dont l'équation est de la forme

$$a_1 z + a_0 = 0,$$

où a_1 et a_0 sont des polynomes en x et y.

Si nous nous servons de la représentation monoïdale de la courbe C en prenant pour u_0 l'équation de la première courbe minima de $\alpha(\overline{u_0} = h_0^\alpha)$, on aura l'équivalence correspondante

$$a_1 u_1 + a_0 u_0 = 0 \qquad (\text{div}\, \varphi_d).$$

Comme la courbe u_1 ne passe pas par tous les points d'intersection de φ_d et de u_0, car en les points α, u_1 n'est pas tangente à u_0 (autrement on verrait aisément à l'aide du théorème du Reste que la courbe est plane), il est nécessaire de faire passer a_1 par ces points α. Si l'on prend $a_1 \equiv u_0$ on aura une surface cherchée de degré minimum $h_0^\alpha + 1$.

Ce degré doit être évidemment indépendant de la représentation de la courbe.

Prenons alors u_1 pour dénominateur de l'expression de z. On devra avoir l'équivalence

$$u_0 u_2 + a_0 u_1 = 0 \qquad (\text{div}\, \varphi_d). \tag{1}$$

Si d, degré de la courbe C, est supérieur au degré $2h_0^\alpha + 2$ du premier membre de (1), l'équivalence devient une égalité, d'où l'on conclut que u_1 contient u_0 en facteur. Mais alors la courbe C est nécessairement plane.

THÉORÈME (¹). — *Lorsqu'une courbe* C, *sans points multiples, est gauche on a nécessairement*

$$h_0^\alpha \geqq \frac{d}{2} - 1.$$

On peut aussi énoncer le corollaire suivant :

Lorsqu'une courbe plane C, *présentant le système de points doubles* α, *satisfait à l'inégalité*

$$2h_0^\alpha \leqq d - 3,$$

elle n'est pas la projection d'une courbe gauche sans points multiples.

B. Proposons-nous le même problème pour les surfaces contenant la courbe C, dont l'équation est de la forme

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0,$$

où a_0, a_1, a_2 sont des polynomes en x et y.

Nous devons avoir, en correspondance avec cette surface, l'équivalence

$$a_2 u_2 + a_1 u_1 + a_0 u_0 = 0 \qquad (\operatorname{div} \varphi_d). \tag{2}$$

Comme précédemment supposons que le degré du premier membre soit inférieur à d, de façon que l'équivalence devienne une égalité

$$-a_2 u_2 = a_0 u_0 + a_1 u_1.$$

Si u_2 *ne passe pas par l'intersection totale de* u_0 *et de* u_1 (dans le cas contraire u_2 est une combinaison de u_0 et de u_1, et la courbe est sur une quadrique), il est nécessaire que a_2 passe par les points B_1 où u_0 et u_1 se recoupent, à l'extérieur de u_2, c'est-à-dire de B : B_1 et B forment ainsi l'intersection totale des deux

---

(¹) HALPHEN, p. 288.

courbes u_0 et u_1. Le degré de la première courbe minima de B_1 est alors (voir *fig.* 2)

$$\nu = \overline{u_0} + \overline{u_1} - h_1^{\text{B}}.$$

Supposons par exemple $k_0^\alpha = h_0^\alpha + 1$.

Si u_0 est la première courbe minima de α ($\overline{u_0} = h_0^\alpha$) on a

$$h_1^{\text{B}} = \overline{u_0} + d - k_0^\alpha = d - 1,$$

de sorte que

$$\nu = 2h_0^\alpha + 2 - d.$$

Par conséquent, lorsque nous nous trouvons dans les conditions indiquées, c'est-à-dire lorsque

$$(2h_0^\alpha + 2 - d) + h_0^\alpha + 2 < d \qquad \text{ou} \qquad 3h_0^\alpha + 4 < 2d,$$

nous obtiendrons la surface de degré minimum, dont l'équation a la forme considérée, en prenant pour a_2 la première courbe minima de B_1. Son degré sera

$$2h_0^\alpha + 4 - d.$$

Remarque. — Nous pouvons assurer que ce résultat reste exact, lorsque $3h_0 + 4 = 2d$, car même dans ce cas, malgré la présence de l'équivalence, nous ne pouvons pas prendre pour a_2 un polynome de degré inférieur à ν (¹).

Le degré que nous avons obtenu est indépendant de la représentation de C.

Faisons alors $\overline{u_0} = h_0^\alpha + 2$. Le degré de la première courbe minima du système B_1 correspondant change. Il est égal à

$$2h_0^\alpha + 3 - d.$$

Il est donc nécessaire, avec les hypothèses faites, que l'équivalence (2) ne devienne pas une égalité lorsqu'on prend pour a_2 la première courbe minima de B_1. Par conséquent, et en tenant compte de la remarque précédente, on doit avoir

$$(2h_0^\alpha + 3 - d) + h_0^\alpha + 2 + 2 > d \qquad \text{ou} \qquad 3h_0^\alpha + 7 > 2d.$$

Si au contraire

$$3h_0^\alpha < 2d - 6,$$

(¹) Seulement le polynome a_2 n'est plus nécessairement l'équation de la première courbe minima de B_1.

il est nécessaire que l'hypothèse que nous avons rejetée au début soit vérifiée : u_2 est une combinaison linéaire de u_0 et u_1 et la courbe est sur une quadrique.

Si nous avions supposé $k_0^\alpha = h_0^\alpha$ (¹), on aurait trouvé l'inégalité correspondante

$$3h_0^\alpha < 2d - 4.$$

On peut donc énoncer la proposition suivante, déjà donnée par Halphen :

Théorème. — *Lorsqu'une courbe gauche* C *satisfait à l'inégalité*

$$3h_0^\alpha < 2d - 6,$$

elle est sur une surface du second degré.

8. Nous nous proposons maintenant de généraliser la méthode que nous venons d'appliquer aux deux cas particuliers précédents.

Dans ce but reportons-nous d'abord à la *réduction adjointe* (²) du système du point A. Soit α son premier adjoint. Supposons que l'équation d'une courbe C_l donnée, passant par A, puisse se mettre sous la forme suivante :

$$C_l = u_0 C_n + u_1 C_m + \sum_2 u_i C_{\alpha_i} \tag{1}$$

(où C_n et C_m sont les deux courbes minima de A et C_{α_i} des courbes passant aussi par A).

Soit C_λ la courbe passant par α et *correspondant* à C_l, c'est-à-dire découpant sur C_n, en dehors de α, le même système de points que C_l en dehors de A. La courbe composée $C_l\, C_{n_1}$ passe par l'intersection totale des courbes C_n et C_m. D'après le théorème de Nœther on peut donc écrire

$$C_l . C_{n_1} = A\, C_n + C_\lambda . C_m.$$

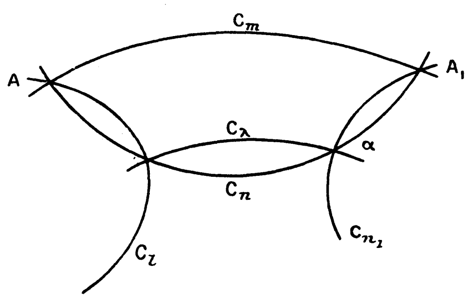
(¹) On n'a pas à supposer $k_0^\alpha > h_0^\alpha + 1$ puisque dans ces conditions la courbe est nécessairement plane (§ 3).

(²) On appelle *adjoint* α du système A, le plus petit système corésiduel à A sur sa première courbe minima C_n. L'adjoint de α est le *deuxième adjoint* de A etc. L'ensemble des adjoints successifs de A constitue sa *réduction adjointe*. On démontre que les adjoints α_{2i} d'indice pair de A sont confondus avec ses réduits de même indice pair A_{2i} (Ouvrage cité : Chap. II, § 2 et 7).

De même, si C_{α_i} est la courbe correspondant à C_{a_i}, on a

$$C_{a_i} C_{n_1} = A_i C_n + C_{\alpha_i} . C_m .$$

Fig. 1.



Multiplions les deux membres de l'égalité (1) par C_{n_1} et substituons à $C_l\, C_{n_1}$, ..., $C_{a_i} C_{n_1}$ les valeurs trouvées. Nous obtenons :

$$A\, C_n + C_\lambda\, C_m = u_0\, C_n\, C_{n_1} + u_1\, C_m\, C_{n_1} + \sum_0 u_i (A_i C_n + C_{\alpha_i} C_m)$$

ou

$$(2) \qquad C_m \left[C_\lambda - u_1 C_{n_1} - \sum_2 u_i\, C_{\alpha_i} \right] = C_n \left[- A + u_0\, C_{n_1} + \sum_2 u_i\, A_i \right].$$

Les polynomes C_n et C_m sont premiers entre eux puisque les courbes C_n et C_m n'ont pas de partie commune. Par conséquent si $\lambda < n$, il est nécessaire que les deux membres de l'égalité (2) soient nuls séparément. On en conclut :

$$C_\lambda = u_1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i\, C_{\alpha_i}.$$

Comme $\lambda + m = l + n_1$, l'inégalité $\lambda < n$ peut s'écrire $l < h_1^A$. On peut donc énoncer :

Théorème. — *Lorsque l est inférieur à h_1^A l'expression de la courbe C_λ, correspondant à C_l, passant par l'adjoint α de* A, *comprend un terme de moins que celle de C_l. Le terme manquant correspond à la courbe C_n qui a permis de construire l'adjoint α.*

Pour étudier C_l, il nous arrivera de considérer C_λ. C'est ce que nous dirons *effectuer l'opération* T *sur la courbe* C_l.

Cette opération T va nous permettre en particulier de trouver l'expression générale N_l des combinaisons linéaires, de degré l, identiquement nulles des polynomes caractéristiques pairs $C_{h_{2i}}\, C_{k_{2i}}$ du système A

$$N_l = u_0\, C_n + u_1\, C_m + \sum_2 u_i\, C_{\alpha_i} \equiv 0$$

$\left(n = h_0^A,\ m = k_0^A;\ \sum_2 u_i\, C_{\alpha_i}\right.$ représente l'ensemble des autres termes de l'expression de $\left.N_l\right)$.

Effectuons l'opération T sur le deuxième membre de cette identité. On obtient

$$n_\lambda = u_0\, C_n\, C_{n_1} + u_1\, C_m\, C_{n_1} + \Sigma\, u_i(A_i\, C_n + C_{\alpha_i}\, C_m) \equiv 0.$$

Et l'on arrive ainsi à l'égalité (2) précédente. Comme nous ne supposons pas ici $l < h_1^A$, on conclut de cette dernière :

$$u_0\, C_{n_1} + \sum_2 u_i\, A_i \ = \ H_1\, C_m,$$

$$u_1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i\, C_{\alpha_i} = -H_1\, C_n,$$

où H_1 est un polynome arbitraire de degré $l - h_1^A$, identiquement nul si ce nombre est négatif. En particulier, lorsque $l = h_1^A$ on a

$$u_0^1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i^1\, A_i = \ C_m,$$

$$u_1^1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i^1\, C_{\alpha_i} = -C_n.$$

Reportons ces expressions de C_n et de C_m dans les égalités précédentes :

$$u_0\, C_{n_1} + \sum_2 u_i\, A_i = H_1 \left[u_0^1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i^1\, A_i\right]$$

$$u_1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i\, C_{\alpha_i} = H_1 \left[u_1^1\, C_{n_1} + \sum_2 u_i^1\, C_{\alpha_i}\right] + K_1\, N_\lambda,$$

où N_λ désigne l'expression générale des combinaisons linéaires des polynomes caractéristiques pairs de α identiquement nulles.

En substituant ces résultats dans l'expression de n_λ on obtient

$$n_\lambda = H_1 [u_0^1 C_{n_1} C_n + u_1^1 C_{n_1} C_m + \Sigma u_i^1 (A_i C_n + C_{\alpha_i} C_m)] + K_1 N_\lambda.$$

Et en revenant au système A

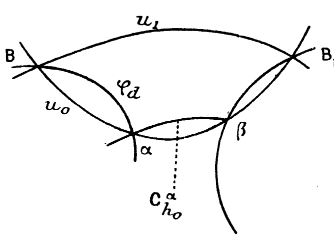
$$N_l = H_1 N_{h_1^A} + K_1 N_l'.$$

$N_{h_1^A}$ est une combinaison linéaire identiquement nulle, de degré h_1^A, des polynomes caractéristiques pairs de A et N_l est l'expression générale des combinaisons analogues de degré l, *où n'entre pas* C_n. Pour trouver son expression, il suffit de chercher celle de N_λ.

On voit ainsi comment on peut trouver successivement les différents polynomes $N_{h_{2i+1}^A}$ $N_{k_{2i+1}^A}$ au moyen desquels, suivant le théorème II (§ 1), on peut exprimer linéairement la combinaison identiquement nulle cherchée N_l.

9. Avant de commencer l'étude du cas général, il nous faut encore relier la réduction du système de points doubles apparents α

Fig. 2.



de la courbe gauche C, à celle du système B déjà rencontré (§ 3). En supposant u_0 différent de la première courbe minima de α, on voit sur la figure que β, adjoint de B, se déduit de α par l'intermédiaire de u_0 et de $C^\alpha_{h_0}$, première courbe minima de α. En se reportant au Chapitre II du travail déjà cité ([1]), on en conclut que l'on peut construire la réduction de β à partir de celle de α.

Sans insister sur ce point, donnons simplement les résultats.

Si $\overline{u}_0 \leqq h^{\alpha}_{2i}$, le $(2i+1)^{\text{ième}}$ réduit α_{2i+1} de α est confondu avec le $2i^{\text{ième}}$ réduit β_{2i} de β,

$$\alpha_{2i+1} \equiv \beta_{2i}.$$

En outre la première courbe minima de β_{2i-1} est confondue avec celle de α_{2i}.

Si $\overline{u}_0 \leqq k^{\alpha}_{2i}$, on a encore

$$\alpha_{2i+1} \equiv \beta_{2i}.$$

10. Soit la courbe gauche algébrique C. Dans une projection générale, elle présente le système de points doubles apparents α. Nous la représenterons comme précédemment par les équations

$$\varphi_d(x, y) = 0, \qquad z = \frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \ldots = \frac{u_m}{u_{m-1}} \qquad (\text{div}\ \varphi_d).$$

Supposons que la courbe C ne soit pas sur une surface de degré inférieur ou égal à m. Nous nous proposons de trouver le degré minimum des surfaces contenant C, dont l'équation soit de la forme

$$a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0 = 0,$$

a_0, a_1, ..., a_m étant des polynomes en x et y.

Nous devons avoir, en correspondance avec une telle surface, l'équivalence

$$(1) \qquad a_m u_m + a_{m-1} u_{m-1} + \ldots + a_0 u_0 = 0 \qquad (\text{div}\ \varphi_d).$$

Cette dernière provient comme nous le savons (§ 5) d'une combinaison linéaire des u et de certains polynomes caractéristiques v du système B (précédemment défini)

$$(1') \qquad b_{\mu'} u_{\mu'} - (u_0, u_1, \ldots, u_{\mu'-1}) - (v_\alpha, v_\beta, \ldots) = 0 \qquad (\text{div}\ \varphi_d).$$

Précisons la manière dont (1) se déduit de (1'). En multipliant les deux membres de l'équivalence (1') par z et en remplaçant

$$z v_\alpha = v_{\alpha+1}, \qquad z v_\beta = v_{\beta+1}, \qquad \ldots \qquad (\text{div}\ \varphi_d)$$

---

(1) *Annales de Toulouse*, t. XVI, Chap. II, § 1-4.

par leurs expressions, on obtient

$$(1'') \qquad a_m u_\mu - (u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}) - (v_\alpha, v_\beta, \ldots) = 0 \qquad (\text{div } \varphi_d).$$

Le terme u_μ vient du développement de l'un au moins des polynomes $v_{\alpha+1}$, $v_{\beta+1}$, ... ou coïncide avec $u_{\mu+1}$. *Mais de toute façon lorsqu'on multipliera les deux membres de l'équivalence* (1″) *par* z, z^2, ..., *le coefficient de* $u_{\mu+1}$, $u_{\mu+2}$, ... *sera toujours* a_m puisque $v_{\alpha+1}$, $v_{\beta+1}$, ... ne contiennent pas $u_{\mu+1}$ dans leurs expressions. D'autre part nous pouvons assurer que u_0, u_1, ..., u_μ, v_α, v_β, ... sont des polynomes caractéristiques pairs indépendants de B car autrement on conclurait que la courbe C est sur une surface de degré inférieur ou égal à m (¹). Cette dernière remarque montre en outre que les polynomes v_α, v_β, ... correspondent à des coïncidences des caractéristiques paires de B inférieures à $\overline{u}_\mu$.

Dans ces conditions supposons, pour préciser les idées, que le degré l du premier membre de l'équivalence (1″) est inférieur à d, degré de la courbe C. Nous obtenons $a_m\, u_\mu$ à l'aide d'une combinaison linéaire

$$(2) \qquad a_m u_\mu - (u_0, u_1, \ldots, u_{\mu-1}) - (v_\alpha, v_\beta, \ldots) = 0.$$

Considérons alors la réduction adjointe de B. Appliquons successivement $m - 3$ fois l'opération T au premier membre de cette égalité. En supposant les conditions satisfaites pour que chaque fois un polynome caractéristique disparaisse de l'expression, nous obtenons une nouvelle combinaison identiquement nulle de quatre courbes u_μ^χ, $w_{\mu-1}^\chi$, $w_{\mu-2}^\chi$, $w_{\mu-3}^\chi$ passant par le $(m-3)^{\text{ième}}$ adjoint χ de B

$$(3) \qquad a_m u_\mu^\chi - (w_{\mu-1}^\chi, w_{\mu-2}^\chi, w_{\mu-3}^\chi) = 0.$$

Si nous effectuons encore une fois l'opération T, nous aurons

$$a_m u_\mu^x - (w_{\mu-1}^x, w_{\mu-2}^x) = 0,$$

combinaison linéaire de trois courbes passant par l'adjoint x de χ.

Or u_μ^x ne passe pas par l'intersection totale de $w_{\mu-1}^x$ et $w_{\mu-2}^x$, c'est-à-dire par le premier réduit de x, car autrement u_μ serait une combinaison linéaire des polynomes caractéristiques de degré

(¹) Rappelons que φ_d est aussi un polynome caractéristique de B.

inférieur et la courbe C serait sur une surface de degré égal ou inférieur à m. Il est par conséquent nécessaire, avec les hypothèses faites, que a_m passe par ces points. En prenant pour a_m la première courbe minima du réduit de x, nous obtiendrons, en faisant le raisonnement en sens inverse, l'équivalence (1) de degré minimum et par suite la surface cherchée.

Précisons maintenant les conditions du problème.

Pour que l'opération T diminue chaque fois d'une unité le nombre des termes de la combinaison (2), il faut et il suffit que l_χ, degré de la combinaison (3), vérifie l'inégalité

$$(4)\qquad l_\chi < h_1^\chi.$$

On voit aisément en effet que l'opération T remplit bien alors son objet dans le passage de χ à son adjoint x et qu'il en est de même, *a fortiori*, pour les adjoints précédents.

D'autre part nous avons supposé dans le cours du raisonnement que l, degré de la combinaison (2), était inférieur à d. Nous pourrons même assurer, comme dans les cas particuliers déjà traités, que le degrè minimum des surfaces considérées ne changera pas si l devenait égal à d, car malgré la présence de l'équivalence [substituée à l'égalité (2)] nous ne pouvons pas prendre pour a_m un polynome de degré inférieur au précédent. Le degré l satisfait donc à la seconde inégalité

$$(5)\qquad l \leqq d.$$

A. Supposons $m = 2i$.

χ est le $(2i-3)^{\text{ième}}$ adjoint de B, de sorte que l'inégalité (4) peut s'écrire

$$(4')\qquad l < k_{2i-3}^{\mathrm{B}}.$$

x, l'adjoint de χ, est le $(2i-2)^{\text{ième}}$ adjoint de B, c'est-à-dire le $(2i-2)^{\text{ième}}$ réduit B_{2i-2} de B. Son premier réduit est B_{2i-1} et la première courbe minima de B_{2i-1} est aussi celle de β_{2i-2}.

D'après le paragraphe 9, si $\overline{u}_0 \leqq k_{2i-2}^{\alpha}$, cette première courbe minima est aussi celle de α_{2i-1} dont nous désignerons le degré par n_{2i-1}.

Faisons $\overline{u}_0 = k_{2i-2}^{\alpha}$. Le degré l du premier membre de l'égalité (2) devient

$$l = n_{2i-1} + k_{2i-2}^{\alpha} + \mu.$$

Les inégalités (4′) et (5) peuvent alors s'écrire

(4″) $$n_{2i-1}+k^{\alpha}_{2i-2}+\mu<k^{B}_{2i-3},$$
(5′) $$n_{2i-1}+k^{\alpha}_{2i-2}+\mu\leqq d.$$

Or comme α et B constituent l'intersection totale de φ_d et de u_0 on a la relation

$$k^{B}_{2i-3}=\overline{u}_0+d-k^{\alpha}_{2i-2}.$$

D'où l'on conclut, suivant la valeur de $\overline{u}_0$,

(6) $$d=k^{B}_{2i-3}.$$

L'inégalité (5′) est vérifiée quand (4″) l'est. Cette dernière devient en tenant compte de (6)

$$n_{2i-1}+k^{\alpha}_{2i-2}+\mu-d<0.$$

Or nous savons que $d=h^{\alpha}_{1}+1$. D'ailleurs parmi les n premières caractéristiques paires de B, il y a $m-\mu+1$ coïncidences (auxquelles correspondent les $m-\mu+1$ polynomes v). A cause des relations qui existent entre les caractéristiques paires de B et les caractéristiques impaires de α, on peut dire aussi que les m premières caractéristiques impaires de α présentent $m-\mu+1$ coïncidences, de telle sorte que l'on a

$$k^{\alpha}_{2i-1}=h^{\alpha}_{1}-m+(m-\mu+1)=d-\mu.$$

L'inégalité précédente devient ainsi

$$n_{2i-1}+k^{\alpha}_{2i-2}-k^{\alpha}_{2i-1}<0.$$

Si elle est vérifiée *le degré minimum des surfaces considérées est* $n_{2i-1}+m$.

Faisons maintenant $\overline{u}_0=k^{\alpha}_{2i-2}+1$. Nous devons encore obtenir le le même degré minimum. Mais le raisonnement précédent ne doit plus être applicable car la première courbe minima de β_{2i-2} est cette fois de degré $n_{2i-1}+1$. En remarquant que dans ces conditions $d=k^{B}_{2i-3}-1$, on en conclut

$$(n_{2i-1}+1)+(k^{\alpha}_{2i-2}+1)+\mu\geqq k^{B}_{2i-3}=d+1$$

ou

$$n_{2i-1}+k^{\alpha}_{2i-2}-k^{\alpha}_{2i-1}+1\geqq 0.$$

Si, au contraire, nous avions

$$n_{2i-1} + k_{2i-2}^{\alpha} - k_{2i-1}^{\alpha} + 1 < 0,$$

nous arriverions à une conséquence évidemment absurde puisque *le degré cherché ne doit pas dépendre de la représentation de la courbe* C. Il faut donc en conclure que l'hypothèse initiale n'est pas vérifiée et que C est sur une surface de degré inférieur ou égal à m. On peut ainsi énoncer :

THÉORÈME. — *Si*

$$n_{2i-1} + k_{2i-2}^{\alpha} - k_{2i-1}^{\alpha} + 1 < 0,$$

la courbe gauche C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à* $m = 2i$.

C'est précisément la proposition déjà rencontrée paragraphe 4.

B. Supposons $m = 2i + 1$.

Le raisonnement est le même que précédemment. On arrive au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si*

$$n_{2i} + h_{2i}^{\alpha} - h_{2i+1}^{\alpha} + 1 < 0,$$

la courbe gauche C *est sur une surface de degré inférieur ou égal à* $m = 2i + 1$.

On déduit de ces deux théorèmes l'inégalité cherchée, entre d et h_0^{α}, comme nous l'avons déjà fait au paragraphe 4.