BULLETIN DE LA S. M. F.

TADIA PEYOVITCH

Sur les semi-invariants

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 208-225
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__208_0>

SUR LES SEMI-INVARIANTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES;

PAR M. TADIA PEYOVITCH

(Belgrade).

INTRODUCTION.

Lorsqu'une équation différentielle d'une certaine forme conserve la même forme pour des changements de fonction et de variable contenant des fonctions indéterminées, il existe des fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements. Ce sont les *invariants* de l'équation différentielle. Certaines fonctions des coefficients d'une équation différentielle ne constituent des invariants de cette équation que relativement à l'un de ces modes de transformation. Ce sont les *semi-invariants*.

La théorie des invariants des équations différentielles a été l'objet de travaux de Laguerre (1), Broschi (2), Halphen (3), Roger-Liouville (4), Appell (5), Elliot (6), Rivereau (7), Forsyth (8), nous-mêmes (9) et des autres.

En ce qui concerne l'idée générale d'invariant et le fait de l'existence des invariants, on pourra consulter l'Ouvrage Sophus-Lie : *Theorie der Transformationsgruppen*, une lettre de

(1) *Œuvres de Laguerre,* t. I, p. 420 et 424.

(2) *Bulletin dc la Société mathématique de France,* t. VII, p. 105.

(3) *Œuvres de Halphen*, t. III.

(4) *Comptes rendus,* 6 septembre 1886, 12 septembre 1887; *American Journal of Mathematics*, t. X, p. 283; *Journal de l'École Polytechnique,* 59e cahier, 1889.

(5) *Comptes rendus*, 20 juin et 4 juillet 1887; *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1889 p. 361,.

(6) *Comptes rendus,* 24 mars 1890; *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1890.

(7) *Thèse de doctorat,* Gauthier-Villars, 1890; *Annales de l'École Normale,* 1892.

(8) *Philosophical transactions,* t. 179, 1888.

(9) *Enseignement Mathématique,* t. 23, 1923, p. 174; *Glas Srpske Kraljevske Akademie,* t. 111, 1924; *Nouvelles Annales de Mathématiques*, (va paraître).

Halphen à Sylvester, une Note de M. Goursat ([1]) et Thèse de doctorat de M. Vessiot : *Sur l'intégration des équations linéaires* ([2]).

Dans son célèbre Mémoire : *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables*, Chap. III. Halphen (*loc. cit*) a étudié la théorie des invariants des équations différentielles linéaires sur la base qu'une équation se change en une nouvelle équation de même espèce par toute transformation telle que

$$y = v(x)\eta, \qquad \xi = u(x),$$

η étant la nouvelle inconnue et ξ la nouvelle variable, quelles que soient les fonctions $v(x)$ et $u(x)$. On peut utiliser quelquefois cette transformation pour simplifier une équation linéaire. Comme on dispose de deux fonctions arbitraires $u(x)$ et $v(x)$, il semble qu'on peut en profiter pour faire disparaître deux coefficients; mais cette réduction, possible en théorie, est le plus souvent illusoire. Par exemple, on peut choisir les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ de façon à ramener une équation linéaire du second ordre à la forme réduite $\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = 0$; mais la détermination effective de ces fonctions offre les mêmes difficultés que le problème même de l'intégration.

Laguerre a étudié les semi-invariants des équations linéaires qui sont relatifs aux changements de fonction ([3]).

Dans ce Mémoire, nous nous occuperons des *semi-invariants* des équations différentielles linéaires relativement aux changements de variable indépendante et de leurs applications possibles.

I. — Quelques généralités sur les semi-invariants.

1. Nous commençons par rappeler quelques généralités sur les semi-invariants, qui sont d'ailleurs bien connues.

Les équations différentielles linéaires et homogènes, comme on le sait, conservent la même forme quand on fait le changement de

([1]) *Comptes rendus*, 3 décembre 1888.
([2]) *Thèse de doctorat*, Gauthier-Villars, 1892.
([3]) *Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 424.

variable indépendante

$$\frac{d\xi}{dx} = u(x), \tag{1}$$

où ξ est la nouvelle variable; la fonction $u(x)$ est indéterminée. Soit donc

$$f(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0 \tag{2}$$

une équation; la transformée sera

$$\varphi(y) = \frac{d^n y}{d\xi^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \alpha_2 \frac{d^{n-2} y}{d\xi^{n-2}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{d\xi} + \alpha_n y = 0,$$

où

$$\alpha_1 = \frac{\frac{n(n-1)}{2} u' + a_1 u}{u^2} \qquad \left(u' = \frac{du}{dx}\right),$$

. . . .

Les coefficients α_i de φ s'expriment en fonction des coefficients a_i de f, de fonction $u(x)$ et de ses dérivées par rapport à x. Si l'on y remplace x par sa valeur en ξ tirée de l'équation (1), ces coefficients seront des fonctions de ξ.

Donnons à la fonction $u(x)$ la valeur particulière U, telle que l'équation φ prenne une forme spéciale. Cette valeur U sera déterminée par une équation

$$\lambda(U) = 0. \tag{3}$$

Cette forme réduite d'équation doit être telle qu'on ne puisse l'obtenir qu'à l'aide de l'équation (3). Cela aura lieu, par exemple, lorsqu'un coefficient de φ devient nul. Si, de plus, les coefficients restants sont des *semi-invariants*, l'équation obtenue s'appellera *équation canonique* (Halphen) :

2. Si l'équation (3) admet une solution unique, l'équation réduite est une équation canonique dont les coefficients sont des *semi-invariants absolus*, car la réduction n'est possible que d'une manière. On peut le démontrer comme il suit :

Soit $Y\,(Y = y)$ fonction de la variable t, Y', Y'', ..., $Y^{(n)}$ ses dérivées par rapport à t; le changement de variable

$$\frac{dt}{dx} = U(x)$$

transforme l'équation $f(y) = 0$ en une équation réduite $F(Y) = 0$. Faisons ensuite la substitution (1), qui transforme $f(y) = 0$ en $\varphi(y) = 0$, et opérons sur φ comme sur f, c'est-à-dire posons

$$\frac{dt_0}{dx} = U_0(\xi),$$

où Y_0 ($Y_0 = y$) est une fonction de t_0, dont les dérivées par rapport à t_0 sont $Y'_0, Y''_0, \ldots, Y_0^{(n)}$ et où la fonction $U_0(\xi)$ vérifie l'équation (3), nous obtiendrons une équation réduite $F_0(Y_0) = 0$ de même forme que F. Il faut prouver que F et F_0 sont identiques, c'est-à-dire que les coefficients de F, fonctions de x, sont égaux aux coefficients de F_0, fonctions de ξ; x et ξ étant liées par relation (1).

Des différentes formules des substitutions précédentes on déduit

$$\frac{dt_0}{dx} = u(x)\,U_0(\xi);$$

cette formule transforme $f(y) = 0$ en $F_0(Y_0) = 0$. Remplaçons dans $U_0(\xi)$, ξ par sa valeur en x tirée de (1), on obtient, en substituant dans f, ce que devient F_0 lorsqu'on y fait le même changement. Mais alors uU_0 est une fonction de x qui va prendre à f la forme réduite considérée; cette fonction vérifie donc l'équation (3), et l'on aura identiquement

$$uU_0 = U.$$

Il en résulte que les coefficients de F_0 sont égaux aux coefficients de F. Ces coefficients sont des *semi-invariants absolus* pour toute la transformation de la forme (1).

On obtiendra une équation canonique en déterminant $u(x)$ de façon que l'on fait disparaître le second terme de l'équation (2). La fonction $u(x)$ aura alors la valeur particulière

$$U = e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int a_1\,dx};$$

la fonction U_0 est

$$U_0 = e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int \alpha_1\,d\xi} = \frac{1}{u}U.$$

On aura donc

$$U = u U_0;$$

les variables canoniques t et t_0 sont liées par relation

$$\frac{dt_0}{dt} = \frac{u U_0}{U} = 1.$$

3. Si l'équation (3) ne détermine U qu'à un facteur constant près, les coefficients de l'équation réduite sont des *semi-invariants relatifs* dont nous allons déterminer la forme.

Soit $F = 0$ et $F_0 = 0$ les deux équations réduites, telles que l'on ait

$$u U_0 = \frac{1}{k} U,$$

où k est une constante. On transforme F en F_0 par le changement de variable

$$\frac{dt_0}{dt} = \frac{1}{k}.$$

On en tire

$$Y' = \frac{1}{k} Y'_0, \qquad Y'' = \frac{1}{k^2} Y''_0, \qquad \ldots, \qquad Y^{(n)} = \frac{1}{k^n} Y_0^{(n)}.$$

Le terme de I_i de $F = 0$ donne comme terme de $F_0 = 0$ $k^i I_i$. On voit que les coefficients de F_0 sont égaux à ceux de F multipliés par une puissance de k égale à leurs poids.

II. — Équations du second ordre.

4. Considérons tout d'abord une équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0, \tag{4}$$

où a_1 et a_2 sont des fonctions quelconques de x. Si l'on fait dans cette équation le changement de variable indépendante

$$\frac{d\xi}{dx} = u(x), \tag{1}$$

elle devient

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \alpha_1 \frac{dy}{d\xi} + \alpha_2 y = 0, \tag{5}$$

où

$$(6)\qquad \alpha_1 = \frac{u' + a_1 u}{u^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{a_2}{u^2} \qquad \left(u' = \frac{du}{dx}\right).$$

Donnons à la fonction $u(x)$ la valeur particulière U qui annule le second terme du premier membre de l'équation (4); on aura donc

$$(7)\qquad \frac{dt}{dx} = \mathrm{U}(x) = e^{-\int a_1\,dx},$$

d'où

$$t = \int \mathrm{U}(x)\,dx;$$

et l'équation (4) prendra la forme *canonique*

$$(8)\qquad \frac{d^2 y}{dt^2} + \mathrm{I}y = 0,$$

où

$$\mathrm{I} = \frac{a_2}{\mathrm{U}^2}.$$

Si nous appelons U_0, I_0, t_0 les fonctions composées avec les coefficients α_1, α_2 et la variable ξ de l'équation (5), comme U, I, t le sont avec a_1, a_2 et la variable x de l'équation (4), nous aurons

$$\mathrm{U}_0 = e^{-\int \alpha_1\,d\xi}, \qquad \mathrm{I}_0 = \frac{\alpha^2}{\mathrm{U}_0^2}, \qquad t_0 = \int \mathrm{U}_0\,d\xi.$$

En remplaçant α_1, α_2 par les valeurs (6) et $d\xi$ par $u(x)\,dx$, on aura

$$\mathrm{U}_0 = \frac{1}{u}\mathrm{U}, \qquad \mathrm{I}_0 = \mathrm{I}, \qquad t_0 = t.$$

Ces équations montrent que U est le *semi-invariant relatif*, I et t des *semi-invariants absolus* pour toute la transformation de la forme (1).

Les dérivées $\frac{d\mathrm{I}}{dt}, \frac{d^2\mathrm{I}}{dt^2}, \ldots$ sont des *semi-invariants absolus*, qui se calculent facilement, par voie récurrente en fonction des coefficients a_1 et a_2. En effet, partons des formules

$$\mathrm{I}_2 = \frac{a_2}{\mathrm{U}^2}, \qquad \frac{dt}{dx} = \mathrm{U}, \qquad \mathrm{U} = e^{-\int a_1\,dx},$$

nous trouverons

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = \frac{\frac{d\mathrm{I}}{dx}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{s_3}{\mathrm{U}^3}, \qquad \frac{d^2\mathrm{I}}{dt^2} = \frac{s_4}{\mathrm{U}^4}, \qquad \ldots,$$

en général

$$(9) \qquad \frac{d^n\mathrm{I}}{dt_n} = \frac{s_{n+2}}{\mathrm{U}^{n+2}},$$

où s_3, s_4, ..., s_{n+2} sont des *semi-invariants relatifs* donnés par la formule de récurrence

$$(10) \qquad s_{n+2} = \frac{ds_{n+1}}{dx} + (n+1)\,a_1\,s_{n+1} \qquad (s_2 = a_2).$$

Les indices 3, 4, ..., $n+2$ désignent les *poids* des *semi-invariants*.

5. L'un des avantages de tels semi-invariants consiste en la possibilité qu'ils offrent de former très facilement, sous la forme explicite, une classe d'équations linéaires du second ordre réductibles, par la substitution (1), aux équations à coefficients constants.

Notamment, *on peut trouver explicitement toutes les équations de cette espèce relatives à la substitution* (7).

Supposons, pour cela, que les coefficients a_1 et a_2 de l'équation (4) soient constants, le *semi-invariant absolu* I est de la forme

$$\mathrm{I} = a_2\,e^{2a_1x},$$

la variable canonique t est donnée par la formule (7)

$$\frac{dt}{dx} = e^{-a_1x}, \qquad t = -\frac{1}{a_1}e^{-a_1x} + \mathrm{C}.$$

On a donc

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{A}}{(\alpha + \beta t)^2}$$

et l'équation canonique (8) prendra la forme

$$(11) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\mathrm{A}}{(\alpha + \beta t)^2}\,y = 0,$$

où A, α, β sont constantes.

Cherchons maintenant la relation nécessaire et suffisante entre les coefficieuts a_1, a_2 et leurs dérivées par rapport à x, pour que l'équation (4) puisse être ramenée à la forme canonique (11).

On devra avoir

$$I = A(\alpha + \beta t)^{-2}, \qquad I' = -2A\beta(\alpha + \beta t)^{-3},$$

d'où

$$\frac{I'^2}{I^3} = \frac{4\beta^2}{A} = B \qquad (B = \text{const.}).$$

D'autre part, de relation (9) on obtient

$$\frac{I'^2}{I^3} = \frac{s_3^2}{a_2^3}.$$

En éliminant $\frac{I'^2}{I^3}$ entre ces deux équations, nous aurons la relation cherchée

$$s_3^2 = B\,a_2^3 \qquad \text{ou} \qquad s_3 = \sqrt{B}\,a_2^{\frac{3}{2}},$$

c'est-à-dire, d'après (10),

$$\frac{da_2}{dx} + 2a_1a_2 - \sqrt{B}\,a_2^{\frac{3}{2}} = 0,$$

comme *nécessaire et suffisante*. Cette relation est une équation de *Bernoulli* par rapport à a_2 dont l'intégration donne

$$a_2 = \frac{e^{-2\int a_1 dx}}{\left(C - \frac{\sqrt{B}}{2}\int e^{-\int a_1 dx}\,dx\right)^2};$$

et *les équations, qui appartiennent à la classe d'équations à coefficients constants, sont de la forme*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + \frac{e^{-2\int a_1 dx}}{\left(C - \frac{\sqrt{B}}{2}\int e^{-\int a_1 dx}\,dx\right)^2}\,y = 0$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + \frac{A\,e^{-2\int a_1 dx}}{\left(\alpha + \beta\int e^{-\int a_1 dx}\,dx\right)^2}\,y = 0, \tag{12}$$

où a_1 est une fonction quelconque de x, A, α et β constantes arbitraires ; l'équation (12) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + \frac{A}{\beta^2} \left[\log \left(\alpha + \beta \int e^{-\int a_1 dx} dx \right) \right]^{12} y = 0.$$

En posant dans l'équation (12)

$$\frac{dt}{dx} = e^{-\int a_1 dx},$$

on voit immédiatement qu'elle se ramène à l'équation (11), qui est réductible à l'équation à coefficients constants.

L'intégration générale de l'équation (12) peut s'obtenir directement en posant

$$y = \left(\alpha + \beta \int e^{-\int a_1 dx} dx \right)^r,$$

r étant la racine de *l'équation caractéristique* suivante :

$$(13) \qquad \beta^2 r^2 - \beta^2 r + A = 0,$$

l'intégrale générale de l'équation (12) est donc

$$(14) \quad y = C_1 \left(\alpha + \beta \int e^{-\int a_1 dx} dx \right)^{r_1} + C_2 \left(\alpha + \beta \int e^{-\int a_1 dx} dx \right)^{r_2}.$$

Le cas où l'équation (13) a la racine double n'offre pas de difficulté si l'on fait l'observation suivante : la forme de l'intégrale (14) prouve que l'équation (12) se change en une équation à coefficients constants si l'on prend pour nouvelle variable indépendante

$$u = \log \left(\alpha + \beta \int e^{-\int a_1 dx} dx \right).$$

6. On sait qu'il existe une liaison intime entre l'équation différentielle linéaire homogène du second ordre et l'équation de *Riccati*. En vertu de cette liaison, nous dirons quelques mots sur les invariants de l'équation de *Riccati*. Quelques-uns de ces résultats sont contenus dans mon petit Mémoire intitulé : *Sur les invariants de l'équation de Riccati* (¹).

Considérons alors l'équation de *Riccati* de la forme plus géné-

(¹) PEYOVITCH, *Glas Srpske Kraljevske Akademie*, t. 111, 1924.

rale

$$\frac{dy}{dx} + a_2 y^2 + 2a_1 y + a_0 = 0, \tag{15}$$

a_0, a_1, a_2 étant des fonctions quelconques de x. En faisant le changement de fonction et de variable

$$y = \mathrm{U}(x)\,\mathrm{Y}, \qquad \frac{d\mathrm{X}}{dx} = \mathrm{M}(x),$$

où

$$\mathrm{U}(x) = e^{-2\int a_1\,dx}, \qquad \mathrm{M}(x) = a_2\, e^{-2\int a_1\,dx},$$

on obtient l'équation *canonique*

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{I}(\mathrm{X}), \tag{16}$$

où

$$\mathrm{I} = -\frac{a_0}{a_2 \mathrm{U}^2}.$$

I et ses dérivées par rapport à X,

$$\frac{d^n \mathrm{I}}{d\mathrm{X}^n} = -\frac{s_{2n+1}}{a_2^{2n+1}\mathrm{U}^{n+2}} \qquad (s_1 = a_0), \tag{17}$$

où

$$s_{2n+1} = a_2 \frac{ds_{2n-1}}{d\mathrm{X}} - s_{2n-1}\left[(2n-1)\frac{da_2}{dx} - 2(n+1)\,a_1 a_2\right], \tag{18}$$

exprimées en fonction des coefficients a_0, a_1 et a_2, sont des *invariants absolus*.

Les *invariants* I, I′, ..., de l'équation de *Riccati* sont des *semi-invariants* pour l'équation linéaire du second ordre (*loc. cit.*).

Si les coefficients a_0, a_1, a_2 de l'équation (15) sont constants, I prend la forme

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{A}}{(\alpha + \beta \mathrm{X})^2}$$

et l'équation canonique (16) devient alors

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} + \mathrm{Y}^2 = \frac{\mathrm{A}}{(\alpha + \beta \mathrm{X})^2}. \tag{19}$$

En opérant comme dans l'équation du second ordre, c'est-à-dire éliminant X entre I et I', on obtient la relation suivante

$$I'^2 = B I^3 \qquad (B = \text{const.})$$

entre I et I'. Si l'on remplace, dans cette dernière équation, I et I' par leurs valeurs (17) exprimées en fonctions de a_0, a_1 et a_2 de l'équation (15), on aura la relation

$$s_3^2 = B\, a_0^3 a_2^3,$$

ou, d'après (18),

$$(20) \qquad \frac{da_0}{dx} - \frac{a_2' - 4a_1 a_2}{a_2} a_0 - \sqrt{B}\, a_2^{\frac{1}{2}} a_0^{\frac{3}{2}} = 0,$$

comme *nécessaire et suffisante* pour que l'équation (15) puisse être ramenée à la forme canonique (19).

L'intégration de l'équation (20), où l'on considère a_0 comme fonction inconnue de la variable x, donne

$$a_0 = \frac{a_2 e^{-4\int a_1 dx}}{\left(C - \frac{\sqrt{B}}{2}\int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right)^2},$$

ou sous la forme

$$a_0 = \frac{A\, a_2 e^{-4\int a_1 dx}}{\left(\alpha + \beta\int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right)^2},$$

et *l'équation* (15) *qui se ramène à l'équation* (19), *c'est-à-dire à l'équation à coefficients constants*, ***prend la forme***

$$(21) \qquad \frac{dy}{dx} + a_2 y^2 + 2a_1 y + \frac{A\, a_2 e^{-4\int a_1 dx}}{\left(\alpha + \beta\int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right)^2} = 0,$$

a_1, a_2 étant fonctions quelconques de x, A, α et β constantes.

Transformons l'équation (21) en équation du second ordre en posant

$$y = \frac{1}{a^2}\frac{z'}{z},$$

on obtient

$$(22)\quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(2a_1 - \frac{a_2'}{a_2}\right)\frac{dz}{dx} + \frac{A a_2^2 e^{-4\int a_1 dx}}{\left(\alpha + \beta \int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right)^2} z = 0.$$

Il est facile à vérifier que *l'intégrale générale* de cette équation est

$$z = C_1\left(\alpha + \beta \int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right)^{r_1} + C_2\left(\alpha + \beta \int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right)^{r_2},$$

où r_1 et r_2 sont des racines de l'équation *caractéristique*

$$\beta^2 r^2 - \beta^2 r + A = 0.$$

On voit de l'intégrale générale que l'équation (22) se ramène à l'équation à coefficients constants par le changement de variable

$$u = \log\left(\alpha + \beta \int a_2 e^{-2\int a_1 dx} dx\right).$$

III. — Équations du troisième ordre.

7. Considérons une équation du troisième ordre

$$(23)\quad \frac{d^3 y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = 0,$$

a_1, a_2, a_3 étant des fonctions de x. Le changement de variable (1) donne

$$\frac{d^3 y}{d\xi^3} + \alpha_1 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \alpha_2 \frac{dy}{d\xi} + \alpha_3 y = 0,$$

où

$$\alpha_1 = \frac{3u' + a_1 u}{u^2}, \qquad \alpha_2 = \frac{u'' + a_1 u' + a_2 u}{u^3}, \qquad \alpha_3 = \frac{a_3}{u^3} \qquad \left(u' = \frac{du}{dx}\right).$$

On obtiendra une forme canonique en donnant à la fonction $u(x)$ la valeur particulière U qui annule α_1, c'est-à-dire en posant

$$(a)\quad \frac{dt}{dx} = U(x) = e^{-\frac{1}{3}\int a_1 dx},$$

l'équation (23) devient

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \mathrm{I}_2 \frac{dy}{dt} + \mathrm{I}_3 y = 0, \tag{24}$$

où

$$\mathrm{I}_2 = \frac{p_2}{\mathrm{U}^2}, \qquad p_2 = \frac{9a_2 - 2a_1^2 - 3a_1'}{9}, \qquad \mathrm{I}_3 = \frac{a_3}{\mathrm{U}^3}.$$

Il est facile à vérifier que I_2, I_3 et leurs dérivées par rapport à t sont des *semi-invariants absolus* pour toute la transformation de la forme (1).

Les I_2, I_3 et leurs dérivées peuvent s'exprimer en fonction de coefficients a_1, a_2 et a_3. Par exemple pour I_2 on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}_2 = \dfrac{p_2}{\mathrm{U}^2}, \qquad p_2 = \dfrac{9a_2 - 2a_1^2 - 3a_1'}{9}; \\[2ex] \mathrm{I}_2' = \dfrac{d\mathrm{I}_2}{dt} = \dfrac{\dfrac{d\mathrm{I}_2}{dx}}{\dfrac{dt}{dx}} = \dfrac{p_3}{\mathrm{U}^3}, \qquad p_3 = \dfrac{3p_2' + 2a_1 p_2}{3}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{25}$$

Pour I_3, on aura

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{I}_3 = \dfrac{a_3}{\mathrm{U}^3}, \qquad \mathrm{I}_3' = \dfrac{d\mathrm{I}_3}{dt} = \dfrac{\dfrac{d\mathrm{I}_3}{dx}}{\dfrac{dt}{dx}} = \dfrac{q_4}{\mathrm{U}^4}, \qquad q_4 = a_3' + a_1 a_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{26}$$

Les $p_2, p_3, \ldots, q_4, \ldots$, sont des *semi-invariants relatifs* du poids désigné par leur indice.

Cherchons ici, comme chez les équations du second ordre, les conditions *nécessaires el suffisantes* pour que l'équation (23) puisse être ramenée à l'équation à coefficients constants.

Si les coefficients a_1, a_2 et a_3 sont constants, l'équation canonique (24) prend la forme

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{\mathrm{A}_2}{(\alpha+\beta t)^2}\frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{A}_3}{(\alpha+\beta t)^3} y = 0, \tag{27}$$

c'est-à-dire les semi-invariants sont de la forme

$$I_2 = \frac{A_2}{(\alpha+\beta t)^2}, \qquad I_3 = \frac{A_3}{(\alpha+\beta t)^3},$$

A_2, A_3, α, β étant constantes.

En dérivant I_2 et I_3 par rapport à t, on obtient

$$I'_2 = -2A_2\beta(\alpha+\beta t)^{-3}, \qquad I'_3 = -3A_3\beta(\alpha+\beta t)^{-4}.$$

L'élimination $(\alpha+\beta t)$, d'une part entre I_2 et I'_2, d'autre part entre I_3 et I'_3, on obtient les relations

$$I'^2_2 = A I^3_2, \qquad I'^3_3 = B I^4_3 \qquad (A, B = \text{const.}).$$

Si l'on remplace I_2, I'_2, I_3, I'_3 par des valeurs (25) et (26), on aura

$$p'^2_2 = A p^3_2, \qquad q'^3_3 = B a^4_3$$

ou

$$\frac{dp_2}{dx} + \frac{2}{3}a_1 p_2 = \sqrt{A}\, p_2^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{da_3}{dx} + a_1 a_3 = \sqrt[3]{B}\, a_3^{\frac{4}{3}}. \tag{28}$$

Ces dernières relations sont *nécessaires* et *suffisantes* pour que l'équation (23) puisse être ramenée à la forme canonique (27).

L'intégration des relations (28), en considérant p_2 et a_3 comme inconnues de la variable x, donne

$$p_2 = \frac{A_2 e^{-\frac{2}{3}\int a_1 dx}}{\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1 dx}dx\right)^2}, \qquad a_3 = \frac{A_3 e^{-\int a_1 dx}}{\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1 dx}dx\right)^3},$$

ou, d'après (25) pour p_2, on aura

$$a_2 = \frac{2}{9}a_1^2 + \frac{1}{3}a'_1 + \frac{A_2 e^{-\frac{2}{3}\int a_1 dx}}{\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1 dx}dx\right)^2},$$

$$a_3 = \frac{A_3 e^{-\int a_1 dx}}{\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1 dx}dx\right)^3}.$$

Ces formules donnent les coefficients a_2 et a_3 exprimés à l'aide de a_1. Si nous remplaçons maintenant a_2 et a_3 par leurs valeurs dans l'équation (23), on obtient les *équations qui appartiennent à la classe d'équations à coefficients constants sous la forme*

$$(29)\quad \frac{d^3y}{dx^3}+a_1\frac{d^2y}{dx^2}+\left[\frac{2}{9}a_1^2+\frac{1}{3}a_1'+\frac{A_2\,e^{-\frac{2}{3}\int a_1\,dx}}{\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1\,dx}\,dx\right)^2}\right]\frac{dy}{dx}+\frac{A_3\,e^{-\int a_1\,dx}}{\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1\,dx}\,dx\right)^3}\,y=0,$$

a_1 étant fonction quelconque de x, A_2, A_3, α, β constantes.

Si l'on fait le changement de variable (a) dans l'équation (29), on obtient l'équation canonique (27), qui est réductible à l'équation à coefficients constants. *L'intégrale générale* de l'équation (29) est

$$y=C_1\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1\,dx}\,dx\right)^{r_1}+C_2\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1\,dx}\,dx\right)^{r_2}+C_3\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{1}{3}\int a_1\,dx}\,dx\right)^{r_3}.$$

où C_1, C_2, C_3 sont des constantes d'intégration, r_1, r_2 et r_3 les racines de l'équation *caractéristique*

$$r(r-1)(r-2)\beta^3+A_2r\beta+A_3=0.$$

Dans le cas des racines multiples, on peut faire la même remarque que dans les équations du second ordre.

Remarque. — On peut trouver des autres conditions *nécessaires*, entre les *semi-invariants* I_2, I_3 et leurs dérivées par rapport à t, pour que l'équation (23) puisse être ramenée à la forme canonique (27), mais *non suffisantes*.

IV. — Équations d'ordre n.

8. Soit une équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$(30)\quad \frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0,$$

où a_k sont des fonctions quelconques, de la variable x. Faisons le changement de variable indépendante

$$\frac{d\xi}{dx} = u(x); \tag{1}$$

$u(x)$ étant la fonction indéterminée de x dont les dérivées par rapport à x sont u', u'', ...; l'équation (30) devient alors

$$\frac{d^n y}{d\xi^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \alpha_2 \frac{d^{n-2} y}{d\xi^{n-2}} + \ldots + \alpha_{n-1} \frac{dy}{d\xi} + \alpha_n y = 0,$$

où

$$\alpha_1 = \frac{\frac{n(n-1)}{2} u' + a_1 u}{u^2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En donnant à la fonction $u(x)$ la valeur particulière U qui annule le second terme du premier membre de l'équation (30), on aura

$$\frac{dt}{dx} = \mathrm{U}(x) = e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int a_1\,dx} \tag{31}$$

et l'équation (30) prend la forme canonique

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \mathrm{I}_2 \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \mathrm{I}_3 \frac{d^{n-3} y}{dt^{n-3}} + \ldots + \mathrm{I}_{n-1} \frac{dy}{dt} + \mathrm{I}_n y = 0. \tag{32}$$

Les coefficients I_i et leurs dérivées par rapport à t sont des *semi-invariants absolus* pour toute la transformation de la forme (1).

Si les coefficients a_k de l'équation (30) sont constants, les *semi-invariants absolus* I_i prennent la forme

$$\mathrm{I}_2 = \frac{\mathrm{A}^2}{(\alpha + \beta t)^2}, \qquad \mathrm{I}_3 = \frac{\mathrm{A}_3}{(\alpha + \beta t)^3}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{I}_n = \frac{\mathrm{A}_n}{(\alpha + \beta t)^n};$$

et l'équation canonique (32) devient alors

$$\frac{d^n y}{dt^n} + \frac{\mathrm{A}_2}{(\alpha + \beta t)^2} \frac{d^{n-2} y}{dt^{n-2}} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_{n-1}}{(\alpha + \beta t)^{n-1}} \frac{dy}{dt} + \frac{\mathrm{A}_n}{(\alpha + \beta t)^n} y = 0, \tag{33}$$

où α, β, A_2, ..., A_n sont des constantes.

9. Cherchons maintenant les relations *nécessaires* et *suffisantes*

entre les coefficients a_k et leurs dérivées par rapport à x, pour que l'équation (30) puisse être ramenée à la forme (33).

On devra avoir

$$I_2 = \frac{A_2}{(\alpha + \beta t)^2}, \qquad I_3 = \frac{A_3}{(\alpha + \beta t)^3}, \qquad \ldots, \qquad I_n = \frac{A_n}{(\alpha + \beta t)^n},$$

d'où, par différentiation par rapport à t,

$$I'_2 = \frac{-2 A_2 \beta}{(\alpha + \beta t)^3}, \qquad I'_3 = \frac{-3 \beta A_3}{(\alpha + \beta t)^4}, \qquad \ldots, \qquad I'_n = \frac{-n A_n \beta}{(\alpha + \beta t)^{n+1}}.$$

L'élimination $(\alpha + \beta t)$ entre I_i et I'_i respectivement donnera les relations

$$(34) \qquad I'^2_2 = A I^3_2, \qquad I'^3_3 = B I^4_3, \qquad \ldots, \qquad I'^n_n = D I^{n+1}_n,$$

A, B, ..., D étant constantes.

En remplaçant I_i et I'_i, dans ces dernières relations, par des valeurs exprimées en fonction des coefficients a_k, on obtient les conditions cherchées comme *nécessaires et suffisantes*.

Remarquons que l'équation (30) se ramène à l'équation à coefficients constants, par la transformation (31), si les *semi-invariants* I_i de l'équation canonique (32) sont constants, c'est-à-dire si leurs dérivées satisfont aux relations

$$I'_2 = 0, \qquad I'_3 = 0, \qquad \ldots, \qquad I'_n = 0;$$

mais ces conditions [1] sont comprises par des relations (34), car elles s'en déduisent en annulant les constantes arbitraires A, ..., D.

A propos d'autres conditions entre les *semi-invariants* I_i, on peut faire la même remarque que dans les équations du troisième ordre.

Puisque l'équation (30), dont les coefficients satisfont aux relations (34), se ramène à l'équation (33), réductible à l'équation à coefficients constants, *l'intégrale générale* d'une telle équation,

---

[1] Conditions d'Halphen (*loc. cit.*).

d'après la transformation (31), sera de la forme

$$(35) \qquad y = C_1\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int a_1 dx}\,dx\right)^{r_1} + C_2\left(\alpha+\beta\int e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int a_1 dx}\,dx\right)^{r_2}+\dots,$$

$r_1, r_2, \dots,$ étant des racines de l'équation *caractéristique* de l'équation (33), c'est-à-dire les racines de l'équation

$$r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)\beta^n + A_2 r(r-1)\dots(r-n+3)\beta^{n-2}+\dots+A_n = 0.$$

L'équation de *Legendre*

$$A_0(a+bx)^n\frac{d^n y}{dx^n}+A_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+A_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx}+A_n y = 0$$

appartient à cette classe d'équations, car ses coefficients satisfont aux relations (34). On voit de la forme de l'intégrale générale (35) que les équations ici indiquées se ramènent à l'équation de Legendre par le changement de variable

$$u = \int e^{-\frac{2}{n(n-1)}\int a_1 dx}$$

Dans son Mémoire couronné par l'Académie des Sciences, en étudiant la théorie des invariants par le changement de fonction et de variable, Halphen a trouvé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation puisse être transformée en une équation à coefficients constants; mais ces conditions d'une part, sont valables pour l'équation d'ordre supérieur à deux, d'autre part, sont très compliquées pour donner l'équation sous la forme explicite sauf dans des cas particuliers.

Dans ce Mémoire, nous avons utilisé la théorie des semi-invariants par le changement de variable et donné les conditions plus simples, qui s'étendent aux équations d'ordre quelconque et qui peuvent donner les équations sous la forme explicite, comme on le voit dans les équations du deuxième et du troisième ordre.