BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GODEAUX

Sur une famille de surfaces algébriques de l'espace à six dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 484-503
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__484_1>

SUR UNE FAMILLE DE SURFACES ALGÉBRIQUES DE L'ESPACE A SIX DIMENSIONS;

Par M. L. Godeaux.

G. Humbert a étudié la surface déduite d'une courbe de genre trois en faisant correspondre, à un couple de points de la courbe, un point de la surface et, à un point de la surface, deux couples de points de la courbe formant un groupe canonique de celle-ci ([1]). On peut prendre, comme modèle projectif de la surface de Humbert, une surface d'ordre 12, de l'espace S_6 à six dimensions, possédant 28 points doubles coniques et 63 hyperplans la touchant suivant des courbes elliptiques du sixième ordre ([2]). Si nous considérons, dans l'espace S_6, le cône V_3^4 projetant d'un point une surface de Véronèse, nous avons démontré que la surface de Humbert est découpée sur ce cône par une hypersurface cubique touchant le cône en 28 points ([3]).

D'un autre côté, C. Segre, en étudiant les surfaces de l'hyperespace contenant ∞^2 courbes contenues dans les espaces à trois dimensions, a rencontré la famille des surfaces découpées sur le cône V_3^4 par les hypersurfaces de l'espace S_6 ([4]). Ce sont celles de ces surfaces qui sont algébriques que nous étudierons dans ce travail.

Nous commençons par déterminer les invariants des surfaces considérées et leur système canonique. Celui-ci est un multiple du réseau formé par les courbes appartenant aux surfaces et situées dans des espaces à trois dimensions. D'une manière plus précise, soit F la surface découpée sur le cône V_3^4 par une hypersurface d'ordre n, à coefficients généraux, ne passant pas par le sommet du cône. Soit encore $|C|$ le réseau formé par les courbes C découpées sur F par les cônes du second degré contenus dans le cône V_3^4 (les courbes C sont donc situées dans des espaces à trois dimensions). Nous démontrons que le système canonique de la surface est le système

$$|(2n-5)C|.$$

([1]) G. Humbert, *Sur une surface du sixième ordre liée aux fonctions abéliennes de genre trois* (*Journal de Liouville,* 1896, 2e série, t. II, p. 263-293).

([2]) L. Godeaux, *Sur une surface algébrique considérée par M. G. Humbert* (*Bulletin des Sciences mathématiques,* 1921, p. 14-20).

([3]) L. Godeaux, *Sur une involution rationnelle, douée de trois points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique de genre trois* (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique,* Classe des Sciences, 1921, p. 653-655 et 694-702).

([4]) C. Segre, *Le superficie degli iperspazi con una doppia infinità di curve piane o spaziali* (*Atti R. Accad. di Torino,* 1921, vol. LVI, p. 143-157; 1922, vol. LVII, p. 575-585).

Les genres p_g, p_a, $p^{(1)}$ ont pour valeurs

$$p_g = p_a = \frac{1}{6}(n-2)(4n^2 - 7n + 3),$$
$$p^{(1)} = n(2n-5)^2 + 1.$$

Nous faisons voir ensuite que si la surface F admet une transformation birationnelle en elle-même, celle-ci échange nécessairement entre elles les courbes du réseau $|C|$. Ces transformations sont par suite déterminées par des homographies de l'espace ambiant. Nous examinons plus particulièrement les transformations susceptibles d'engendrer des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence. Deux exemples généraux d'involutions d'ordre 7 de cette nature sont examinés à la fin de ce travail.

1. Soient x_0, x_1, x_2, ..., x_6 les coordonnées homogènes d'un espace linéaire S_6 à six dimensions, O_0, O_1, ..., O_6 les sommets du polyèdre de référence.

Une surface de Véronèse, appartenant à l'espace $x_0 = 0$, peut être représentée par les équations [1]

$$(1) \qquad \begin{cases} x_2x_3 = x_4^2, & x_3x_1 = x_5^2, & x_1x_2 = x_6^2, \\ x_1x_4 = x_5x_6, & x_2x_5 = x_6x_4, & x_3x_6 = x_4x_5. \end{cases}$$

Dans S_6, les équations (1) représentent le cône V_3^4 d'ordre quatre, projetant cette surface de Véronèse du point O_0.

Une surface de Véronèse contient ∞^2 coniques se coupant deux à deux en un point, par conséquent le cône V_3^4 contient ∞^2 cônes du second ordre de sommet commun O_0, se coupant deux à deux suivant une génératrice.

Considérons une variété algébrique à cinq dimensions V_5^n, d'ordre n, de S_6, ne passant pas par le point O_0. Nous écrirons son équation sous la forme

$$x_0^n + x_0^{n-1}\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_6) + \ldots + x_0\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_6) + \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0,$$

où φ_1, ..., φ_{n-1}, φ_n sont des polynomes entiers, rationnels et homogènes en x_1, x_2, ..., x_6, de degrés égaux aux indices.

[1] BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa, 1907 (*voir* Chap. XV).

Cette variété V_5^n découpe, sur le cône V_3^4, une surface algébrique F, d'ordre $4n$. La variété V_5^n coupe chacun des ∞^2 cônes du second ordre appartenant à V_3^4 suivant une courbe C, d'ordre $2n$, appartenant à F. Ces courbes C forment, sur la surface F, un réseau $|C|$; chacune d'elles appartient à un espace à trois dimensions déterminé par le cône qui la contient. Une génératrice quelconque du cône V_3^4 rencontrant la variété V_5^n en n points, le réseau $|C|$ a le degré n.

Considérons deux courbes C_1, C_2 du réseau $|C|$. Les espaces à trois dimensions qui les contiennent respectivement ont en commun une droite (génératrice commune aux cônes du second ordre contenant C_1, C_2). Ces espaces à trois dimensions appartiennent par suite à un hyperplan de S_6, et par conséquent la courbe $C_1 + C_2$ est une section hyperplane de F. On en conclut que le système des sections hyperplanes de F est le système $|2C|$.

2. *Correspondance birationnelle entre le cône* V_3^4 *et un espace ordinaire.* — Désignons par y_0, y_1, y_2, y_3 les coordonnées homogènes d'un espace linéaire S_3 à trois dimensions, et soit $A_0 A_1 A_2 A_3$ le tétraèdre de référence.

Les quadriques tangentes en A_0 au plan $y_1 = 0$ ont pour équation

$$(2)\qquad \begin{aligned}\lambda_{01} y_0 y_1 + \lambda_{11} y_1^2 + \lambda_{22} y_2^2 + \lambda_{33} y_3^2 \\ + \lambda_{23} y_2 y_3 + \lambda_{31} y_3 y_1 + \lambda_{12} y_1 y_2 = 0.\end{aligned}$$

Entre les hyperplans de l'espace S_6 et les ∞^6 quadriques (2), établissons une projectivité au moyen des formules

$$(3)\qquad \frac{x_0}{y_0 y_1} = \frac{x_1}{y_1^2} = \frac{x_2}{y_2^2} = \frac{x_3}{y_3^2} = \frac{x_4}{y_2 y_3} = \frac{x_5}{y_3 y_1} = \frac{x_6}{y_1 y_2}.$$

Des équations (3), on déduit

$$(4)\qquad \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_6} = \frac{y_3}{x_5},$$

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{y_1}{x_6} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_4}, \\ \frac{y_1}{x_5} = \frac{y_2}{x_4} = \frac{y_3}{x_3}.\end{aligned}\right.$$

Si l'on tient compte des équations (1) du cône V_3^4, les équations (5) se ramènent aux équations (4). Il en résulte que les équations (3) établissent une correspondance birationnelle entre le cône V_3^4 et l'espace S_3.

Cette correspondance présente des points exceptionnels que nous allons rechercher.

Il y a en premier lieu le point A_0, commun à toutes les quadriques (2). Il y a ensuite le plan $y_1 = 0$. Examinons tout d'abord ce dernier plan.

Si dans (3), on pose $y_1 = 0$, on trouve

$$(6) \qquad x_0 = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_5 = 0. \qquad x_6 = 0, \qquad x_2 x_3 = x_4^2.$$

Aux points d'un plan $y_1 = 0$ correspondent donc les points de la conique (6). D'une façon plus précise, à un point de la conique (6) correspondent, dans S_3, les points d'une droite du plan $y_1 = 0$, passant par A_0.

Observons qu'aux sections de V_3^4 par les hyperplans passant par O_0 correspondent, en général, des cônes du second degré de sommet A_0. On en déduit qu'aux points infiniment voisins de A_0 correspondent en général les points infiniment voisins de O_0 sur V_3^4. Il y a exception pour les points du plan $y_1 = 0$ infiniment voisins de A_0. A l'un quelconque de ceux-ci correspondent tous les points d'une génératrice du cône

$$x_1 = x_5 = x_6 = 0, \qquad x_2 x_3 = x_4^2$$

de V_3^4.

Les formules (3), (4) et (5) montrent que la correspondance est bien déterminée pour tous les autres points.

3. *Transformée de la surface* F. — Au moyen de la transformation (3), il correspond dans S_3, à la surface F, une surface F^* d'équation

$$(7) \qquad \begin{aligned} &y_0^n y_1^n + y_0^{n-1} y_1^{n-1} \varphi_1(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2) \\ &\quad + \ldots + \varphi_n(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2) = 0. \end{aligned}$$

La surface F^* est d'ordre $2n$, possède un point multiple d'ordre n en A_0, le cône tangent étant formé du plan $y_1 = 0$ compté n fois.

La surface F^* possède $2n$ droites situées dans le plan $y_1 = 0$ et ayant pour équations

$$y_1 = 0, \qquad \varphi_n(0, y_2^2, y_3^2, y_2 y_3, 0, 0) = 0.$$

Ces droites proviennent des points de rencontre de la variété V_5^n avec la conique (6) ; ce sont donc des droites exceptionnelles.

Si les formes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont générales, la surface F^* ne possède pas de singularité autre que le point A_0. En effet, dans ces conditions, la section de F^* par le plan $y_0 = 0$,

$$y_0 = 0, \qquad \varphi_n(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_2 y_3, y_3 y_1, y_1 y_2) = 0,$$

est une courbe générale d'ordre $2n$ et ne possède pas de points multiples, donc la surface F^* ne possède pas de courbe multiple.

D'autre part, un point multiple isolé de F^*, non situé dans le plan $y_1 = 0$, ne peut provenir que d'un point multiple de F, point qui n'existe pas dans l'hypothèse faite sur les formes φ.

4. Pour examiner de plus près la singularité de la surface F^* au point A_0, effectuons sur la surface la transformation quadratique

$$y_0 : y_1 : y_2 : y_3 = y'_2 y'_3 : y'_0 y'_1 : y'_0 y'_2 : y'_0 y'_3,$$

qui fait correspondre, aux points infiniment voisins de A_0, les points du plan $y'_0 = 0$.

L'équation (7) de F^* devient

$$\begin{aligned}(8)\quad & y_1'^n y_2'^n y_3'^n \\ & + y'_0 y_1'^{n-1} y_2'^{n-1} y_3'^{n-1} \varphi_1(y_1'^2, y_2'^2, y_3'^2, y'_2 y'_3, y'_3 y'_1, y'_1 y'_2) \\ & \qquad + \ldots + y_0'^n \varphi_n(y_1'^2, y_2'^2, \ldots, y'_1 y'_2) = 0.\end{aligned}$$

Si dans cette équation, nous posons $y'_0 = k y'_1$, le résultat peut être divisé par $y_1'^n$; par suite la droite $y'_0 = y'_1 = 0$ est multiple d'ordre n pour la surface (8). Cette droite est précisément le lieu des points du plan $y'_0 = 0$ qui correspondent aux points du plan $y_1 = 0$ infiniment voisins de A_0. Par conséquent, la surface F^* possède, dans le plan $y_1 = 0$, une droite multiple d'ordre n, infiniment voisine du point A_0.

Cette droite correspond à la section du cône

$$x_1 = x_5 = x_6 = 0, \qquad x_2 x_3 = x_4^2,$$

par la variété V_5^n.

5. Désignons par C^* les courbes de F^* qui correspondent aux courbes C de F. Par construction, aux courbes 2C de F corres-

pondent, sur $F^\star$, les sections de cette surface par les quadriques (2). Il en résulte que l'ensemble de deux courbes $C^\star$ doit se trouver sur une quadrique (2). Observons encore que les quadriques (2) passant par une courbe $C^\star$ doivent découper, sur $F^\star$, le réseau des courbes $C^\star$. Enfin, les courbes $C^\star$ sont d'ordre $2n$.

Si $n > 1$, les courbes $C^\star$ sont nécessairement les sections de la surface $F^\star$ par les plans passant par A_0. Si $n = 1$, la surface $F^\star$ est une des quadriques (2) et les courbes $C^\star$ sont des coniques ; nous laisserons ce dernier cas de côté.

Les courbes $C^\star$ étant des courbes planes d'ordre $2n$ possédant en A_0 deux points multiples d'ordre n infiniment voisins sont de genre $(n-1)^2$. Il en est de même des courbes C de F.

6. *Surfaces d'ordre* $2n-3$, *adjointes à* $F^\star$. — Considérons une courbe $C^\star$ déterminée et soit ϖ son plan. La série canonique de $C^\star$ est découpée sur cette courbe par les adjointes d'ordre $2n-3$, c'est-à-dire par les courbes d'ordre $2n-3$ du plan ϖ passant $n-1$ fois par chacun des points multiples d'ordre n de $C^\star$. Ces courbes dégénèrent donc en une droite fixe, intersection des plans ϖ et $y_1 = 0$, et en des courbes d'ordre $2n-4$ ayant, en A_0, deux points multiples d'ordre $n-2$ infiniment voisins. Ces courbes, situées dans le plan ϖ, forment un système linéaire de dimension $(n-1)^2-1$.

Envisageons maintenant les surfaces $F_1^\star$, d'ordre $2n-4$, ayant un point multiple d'ordre $n-2$ en A_0, auquel est infiniment voisine une droite multiple d'ordre $n-2$ dans le plan $y_1 = 0$. Ces surfaces vont découper, sur le plan ϖ, des courbes d'ordre $2n-4$ adjointes à la courbe $C^\star$ située dans ce plan. En d'autres termes, les surfaces $F_1^\star$ découpent, sur une courbe $C^\star$ quelconque, des groupes de la série canonique de cette courbe.

Les surfaces d'ordre $2n-3$, formées du plan fixe $y_1 = 0$ et des surfaces $F_1^\star$, sont donc des surfaces adjointes d'ordre $2n-3$ à la surface $F^\star$.

Inversement, une surface d'ordre $2n-3$, adjointe à la surface $F^\star$, doit découper sur toute courbe $C^\star$ un groupe de la série canonique. En d'autres termes, elle doit rencontrer tout plan ϖ passant par A_0 suivant une courbe plane d'ordre $2n-4$ adjointe à la courbe $C^\star$ située dans ϖ. Il en résulte que cette surface adjointe contient le plan $y_1 = 0$ comme partie, et que la surface d'ordre $2n-4$ qui la complète doit passer $n-2$ fois par A_0 et avoir, en tout point du plan $y_1 = 0$ infiniment voisin de A_0, la multiplicité $n-2$. Cette dernière surface est donc une surface F_1^*.

7. L'équation d'une surface F_1^* ne possède pas de termes contenant y_0 à une puissance supérieure à $n-2$, puisque A_0 est multiple d'ordre $n-2$. Le coefficient de y_0^{n-2} est nécessairement y_1^{n-2}, puisque le cône tangent en A_0 se réduit au plan $y_1 = 0$ compté $n-2$ fois. Nous pouvons donc écrire l'équation d'une surface F_1^* sous la forme

$$(9)\qquad \begin{aligned} &y_0^{n-2}y_1^{n-2} + y_0^{n-3}f_{n-1}(y_1, y_2, y_3) + \ldots \\ &\quad + y_0^p f_{2n-p-4}(y_1, y_2, y_3) + \ldots + f_{2n-4}(y_1, y_2, y_3) = 0, \end{aligned}$$

où $f_{n-1}, \ldots, f_{2n-4}$ sont des polynomes entiers, rationnels et homogènes en y_1, y_2, y_3, de degrés égaux aux indices.

Pour exprimer que la surface (9) doit avoir, dans le plan $y_1 = 0$, une droite multiple d'ordre $n-2$ infiniment voisine de A_0, opérons la transformation quadratique déjà utilisée plus haut (n° 4). La surface obtenue a pour équation, après suppression du facteur $y_0'^{n-2}$,

$$\begin{aligned} &(y_1'y_2'y_3')^{n-2} + (y_2'y_3')^{n-3}y_0'f_{n-1}(y_1', y_2', y_3') + \ldots \\ &\quad + (y_2'y_3')^p y_0'^{n-p-2} f_{2n-p-4}(y_1', y_2', y_3') + \ldots \\ &\qquad + y_0'^{n-2} f_{2n-4}(y_1', y_2', y_3') = 0. \end{aligned}$$

Cette surface doit posséder comme droite multiple d'ordre $n-2$ la droite $y_0' = 0$, $y_1' = 0$; il faut donc que si l'on pose $y_0' = ky_1'$, on puisse mettre $y_1'^{n-2}$ en évidence dans le premier membre de l'équation précédente. Cela exige que l'on ait

$$\begin{aligned} f_{n-1}(y_1', y_2', y_3') &\equiv y_1'^{n-3} f_2(y_1', y_2', y_3'), \ldots \\ f_{2-p-4}(y_1', y_2', y_3') &\equiv y_1'^p f_{2n-2p-4}(y_1', y_2', y_3'), \ldots. \end{aligned}$$

En faisant alors la transformation quadratique inverse

$$y_0' : y_1' : y_2' : y_3' = y_2y_3 : y_0y_1 : y_0y_2 : y_0y_3,$$

on obtient, pour l'équation (9) de la surface F_1^*,

$$(10)\qquad \begin{aligned} &y_0^{n-2}y_1^{n-2} + y_0^{n-3}y_1^{n-3}f_2(y_1, y_2, y_3) \\ &\quad + \ldots + y_0^p y_1^p f_{2n-2p-4}(y_1, y_2, y_3) \\ &\qquad + \ldots + f_{2n-4}(y_1, y_2, y_3) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (10), il est facile d'évaluer la dimension du système linéaire formé par les surfaces F_1^*. Le nombre de termes de l'équation (10) est en effet

$$1+6+15+\ldots+\frac{(2n-3)(n-2)}{2}=1+\frac{1}{6}(n-2)(4n^2-n+3).$$

Les surfaces F_1^* forment donc un système linéaire de dimension

$$\frac{1}{6}(n-2)(4n^2-n+3).$$

8. *Système canonique de la surface* F. — D'après ce que nous venons de voir, les surfaces F_1^* découpent, sur les courbes C^*, des groupes canoniques; en d'autres termes, les surfaces F_1^* découpent, sur la surface F^*, le système adjoint au réseau $|C^*|$. Nous allons rechercher le système de courbes qui lui correspond sur F.

Observons qu'au moyen des formules (3), il correspond, à une forme de degré pair $2p$ en y_1, y_2, y_3, une forme homogène de degré p (incomplète) en $x_1, x_2, \ldots, x_6$. Il en résulte que les surfaces F_1^* ont pour homologues, dans le cône V_3^4, des surfaces découpées par les variétés V_5^{n-2} d'équation

$$x_0^{n-2}+x_0^{n-3}\psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_6)+\ldots+\psi_{n-2}(x_1, x_2, \ldots, x_6)=0,$$

où les formes ψ ont le degré indiqué par l'indice. Ces formes V_5^{n-2} découperont donc, sur les courbes C, des groupes canoniques de ces courbes, c'est-à-dire qu'elles découperont, sur F, le système adjoint au réseau $|C|$.

Nous avons vu que les sections hyperplanes de F étaient des courbes $2C$, par suite, les sections de F par les variétés V_5^{n-2} envisagées seront des courbes $2(n-2)C$.

Il résulte de tout ceci que le système adjoint au réseau $|C|$ est le système

$$|C'|=|2(n-2)C|.$$

Ce système a la dimension $\frac{1}{6}(n-2)(4n^2-n+3)$, car plusieurs variétés V_5^{n-2} passent par une même courbe C'.

Le système canonique de la surface F est, d'après ceci,

$$|C'-C|=|(2n-5)C|.$$

Le réseau $|C|$ étant de degré n et de genre $(n-1)^2$, le système canonique de F a le degré

$$p^{(1)} - 1 = (2n-5)^2 n$$

et le genre

$$\begin{aligned} p^{(1)} &= (2n-5)(n-1)^2 + \frac{1}{2}(2n-5)(2n-6)n - (2n-6) \\ &= (2n-5)^2 n + 1. \end{aligned}$$

9. *Examen des cas $n = 1$ et $n = 2$.* — Lorsque $n = 1$, la surface F est une section hyperplane du cône V_3^1 ne passant pas par le sommet du cône. C'est donc une surface de Véronèse et la transformation (3) lui fait correspondre une quadrique, comme nous l'avons déjà fait remarquer.

Lorsque $n = 2$, nous allons voir que la surface F est rationnelle. Les courbes C forment en effet alors un réseau de degré 2 et de genre 1. Or, toute surface contenant un réseau de courbes elliptiques est rationnelle.

On peut d'ailleurs retrouver ce résultat en considérant la surface F^* correspondante. Celle-ci est du quatrième ordre et possède un tacnode en A_0. Les surfaces adjointes d'ordre $2n-4$, qui sont ici des surfaces d'ordre o, doivent passer par A_0, ce qui est absurde.

Dans ce qui va suivre, nous supposerons $n > 3$.

10. *Les genres arithmétique et géométrique de* F. — Avant d'évaluer les genres arithmétique p_a et géométrique p_g de F, nous allons montrer que cette surface est régulière ($p_a = p_g$). Pour cela, il nous suffira de montrer que le système adjoint à $|C|$ découpe, sur chacune des courbes C, la série canonique complète.

Reprenons la surface F^*. Dans un plan ϖ passant par A_0, les courbes d'ordre $2n-3$ adjointes à la courbe C^* située dans ce plan se composent d'une droite fixe (dans le plan $y_1 = 0$) et de courbes variables d'ordre $2n-4$ formant un système de dimension $(n-1)^2 - 1$, puisque C^* est de genre $(n-1)^2$. Les sections des surfaces F_1^* par le plan ϖ sont des courbes de ce système. Il est facile de voir que le système complet est donné par ces sections.

Nous pouvons supposer, sans restriction, que le plan ϖ coïncide avec le plan $y_3 = 0$, par exemple. Les sections des surfaces F_1^* par ce plan ont pour équation

$$y_0^{n-2} y_1^{n-2} + y_0^{n-3} y_1^{n-3} f_2(y_1, y_2, 0) + \ldots + f_{2n-4}(y_1, y_2, 0) = 0.$$

Cette équation contient

$$1+3+5+\ldots+(2n-3)=(n-1)^2$$

termes, par suite les sections des surfaces F_1^* par le plan $y_3=0$ forment un système linéaire de dimension $(n-1)^2-1$ et donnent donc toutes les courbes adjointes à la courbe C^* située dans ce plan.

En revenant à la surface F, on voit que le système adjoint à $|C|$,

$$|C'|=|(2n-4)C|,$$

découpe, sur une courbe C quelconque, la série canonique complète. Il en résulte que la surface est régulière et que l'on a $p_a=p_g$.

Nous allons maintenant calculer le genre géométriqne p_g.

Les courbes C' découpent, sur une courbe C, une série linéaire d'ordre $2(n-1)^2-2$ et de dimension $(n-1)^2-1$; par conséquent, les courbes C' passant par $(n-1)^2$ points d'une courbe C contiennent cette courbe. Le système résiduel, c'est-à-dire le système canonique de F, a par suite la dimension

$$p_g-1=\frac{1}{6}(n-2)(4n^2-n+3)-(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-2)(4n^2-7n+3)-1.$$

On a donc, pour la surface F,

$$p_a=p_g=\frac{1}{6}(n-2)(4n^2-7n+3).$$

Connaissant le genre arithmétique p_a, on calcule aisément les valeurs des plurigenres P_2, P_3, ... Le système bicanonique, par exemple, est donné par

$$|(4n-10)C|,$$

il est régulier. On a donc

$$P_2=\frac{1}{6}n(28n^2-135n+167).$$

11. En résumé :

La surface algébrique F, *intersection d'un cône projetant d'un point d'un espace linéaire à six dimensions, une surface de Véronèse, et d'une hypersurface d'ordre n ne passant pas par le sommet du cône, possède un réseau* $|C|$ *de courbes de* *genre* $(n-1)^2$ *et de degré n. Elle est régulière, ses genres géométrique et arithmétique ont pour valeur*

$$p_a = p_g = \frac{1}{6}(n-2)(4n^2-7n+3),$$

son genre linéaire

$$p^{(1)} = n(2n-5)^2+1.$$

Le système canonique est

$$|(2n-5)C|.$$

12. *Transformations birationnelles de la surface* F *en elle-même.* — Supposons qu'il existe une transformation birationnelle T de la surface F en elle-même. Cette transformation doit changer en lui-même le système canonique $|(2n-5)C|$ de la surface F.

Au système $|C|$, la transformation T fait correspondre un système $|C_1|$ de même degré n, de même genre $(n-1)^2$ et de même dimension 2. De plus, on doit avoir

$$(2n-5)C_1 \equiv (2n-5)C;$$

donc les courbes C et les courbes C_1 se rencontrent en n points. Les courbes C_1 rencontrent donc les sections hyperplanes 2C de F en $2n$ points; en d'autres termes, ce sont des courbes d'ordre $2n$.

Supposons que le système $|C_1|$ puisse être distinct du système $|C|$.

Les courbes C_1 étant d'ordre $2n$ et de genre $(n-1)^2$, appartiennent à des espaces linéaires dont la dimension r satisfait à l'inégalité (¹)

$$r \leqq \frac{2\rho(2n-1)-2(n-1)^2}{\rho(\rho+1)}+1,$$

ρ étant le plus grand entier contenu dans

$$\frac{2(n-1)^2-2}{2n}+1.$$

Actuellement, on a $\rho = n-1$ et $r \leqq 3$. Les courbes C_1 sont

(¹) Comessatti, *Limiti di variabilità della dimensione e dell' ordine d'una* g_n^r *sopra una curva di dato genere* (*Atti Ist. Veneto*, 1914-1915).

donc planes ou situées dans des espaces linéaires à trois dimensions.

D'autre part, les courbes C_1 ne peuvent être planes, car un plan ne peut rencontrer la surface F, et par suite l'hypersurface V_5^n, d'ordre n, suivant une courbe d'ordre $2n$.

Si les courbes C_1 sont situées dans des espaces linéaires à trois dimensions S_3, les n points communs à une courbe C_1 et à une courbe C doivent être en ligne droite, sans quoi les S_3 contenant les courbes C_1 devraient coïncider avec chacun des S_3 contenant les courbes C, ce qui est absurde. Mais les n points communs à deux courbes C, C_1 devant être en ligne droite, sont sur une génératrice du cône V_3^4. Il en résulte que la série linéaire g_n^2, découpée par les courbes C_1 sur une courbe C quelconque, contient comme partie la série g_m^1 découpée sur cette courbe C par les autres courbes du réseau $|C|$. Par suite, les courbes C_1 sont équivalentes aux courbes C, contrairement à l'hypothèse.

De tout ceci, on conclut que la transformation T transforme en lui-même le réseau $|C|$. Elle transforme également en lui-même le système des sections hyperplanes $|2C|$ de F et est donc déterminée par une homographie de l'espace S_6.

Si la surface F *possède une transformation birationnelle en elle-même, celle-ci est déterminée par une homographie de l'espace* S_6 *et transforme en lui-même le réseau* $|C|$.

13. Envisageons de nouveau la surface F^* de S_3, birationnellement équivalente à F. A la transformation T correspond une transformation birationnelle de F^* en elle-même que nous désignerons encore par T.

Aux courbes C correspondent les sections de F^* par les plans passant par A_0 et aux courbes $2C$, les sections de F^* par les quadriques tangentes en A_0 au plan $y_1 = 0$. Il en résulte que la transformation T échange entre eux les plans passant par A_0 et les quadriques tangentes en A_0 au plan $y_1 = 0$; elle s'étend donc à tout l'espace S_3 contenant F^* et c'est une transformation de Jonquières. Si nous observons qu'aux sections de F^* par des plans ne passant pas par A_0, correspondent des sections hyperplanes de F, nous voyons que dans l'espace S_3 contenant F^*, à un plan ne passant pas par A_0, T fait correspondre une quadrique tangente au plan $y_1 = 0$ en A_0. Il en résulte que T est une transformation de Jonquières du second ordre ou, en particulier, une homographie.

Si nous désignons par y'_0, y'_1, y'_2, y'_3 les coordonnées du point que T fait correspondre au point de coordonnées y_0, y_1, y_2, y_3, nous avons

$$y'_1 : y'_2 : y'_3 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 : a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\ : a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3.$$

A la quadrique dégénérée $y'_0\, y'_1$ correspond une quadrique tangente en A_0 au plan $y_1 = 0$. Écrivons l'équation de cette quadrique sous la forme

$$a_{00}y_0y_1 + a_{01}y_1^2 + a_{02}y_2^2 + a_{03}y_3^2 + a_{04}y_2y_3 + a_{05}y_3y_1 + a_{06}y_1y_2 = 0.$$

Les équations de la transformation pourront s'écrire

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \rho y'_0 = a_{00}y_0y_1 + a_{01}y_1^2 + \ldots + a_{06}y_1y_2, \\ \rho y'_1 = (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3)^2, \\ \rho y'_2 = (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3), \\ \rho y'_3 = (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3)(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3). \end{cases}$$

En retournant à l'espace S_6, nous avons

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \rho' x'_0 = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3 + a_{04}x_4 + a_{05}x_5 + a_{06}x_6, \\ \rho' x'_1 = a_{11}^2x_1 + a_{12}^2x_2 + a_{13}^2x_3 + 2a_{12}a_{13}x_4 + 2a_{13}a_{11}x_3 + 2a_{11}a_{12}x_6, \\ \rho' x'_2 = a_{21}^2x_1 + a_{22}^2x_2 + \ldots + 2a_{21}a_{22}x_6, \\ \rho' x'_3 = a_{31}^2x_2 + a_{32}^2x_2 + \ldots + 2a_{31}a_{32}x_6, \\ \rho' x'_4 = a_{21}a_{31}x_1 + a_{22}a_{32}x_2 + \ldots + (a_{21}a_{32} + a_{31}a_{22})x_6, \\ \rho' x'_5 = a_{31}a_{11}x_1 + a_{32}a_{12}x_2 + \ldots + (a_{31}a_{12} + a_{11}a_{32})x_6, \\ \rho' x'_6 = a_{11}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + \ldots + (a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12})x_6. \end{cases}$$

Ce sont les équations de l'homographie la plus générale de S_6 transformant le cône V_3^4 en lui-même.

14. *Involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à la surface* F. — Supposons que la surface F possède une involution douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Nous avons démontré qu'une telle involution, appartenant à une surface algébrique, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même (1).

---

(1) L. Godeaux, *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis*,

La recherche des involutions envisagées pouvant appartenir à la surface F revient donc à celle des transformations (II) périodiques, ne laissant qu'un nombre fini de points invariants sur la surface, ou à celle des transformations (I) possédant la même propriété.

Les points qui sont transformés en eux-mêmes par la transformation (I) doivent satisfaire aux relations

$$(1)\quad \frac{y_1}{a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3}=\frac{y_2}{a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3}=\frac{y_3}{a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3},$$

$$(2)\quad y_0(a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3)^2-y_1(a_{00}y_0y_1+a_{01}y_1^2+\ldots+a_{06}y_1y_2)=0.$$

Les équations (1) ne peuvent se réduire à des identités, car alors l'involution engendrée sur la surface F* par la transformation (I) posséderait une courbe de coïncidence située sur la surface (2). Il en résulte que les trois dernières équations (1) doivent représenter une homographie non identique entre les plans passant par A_0.

L'homographie déterminée par T dans la gerbe de plans de sommet A_0 possède soit une droite d_1 et un plan α de points invariants (cas qui se présente nécessairement si T est involutive), soit trois droites d_1, d_2, d_3, de points invariants. Ces droites et ce plan passent évidemment par A_0.

Dans le premier cas, la transformation T laisse invariants les points communs à d_1 et à la surface (2) et les points de la courbe commune à cette surface et au plan α.

Le plan α ne peut coïncider avec le plan $y_1=0$. Si cela était, tous les points de ce plan infiniment voisins de A_0 seraient invariants pour la transformation (I); par suite, tous les points du cône

$$x_1=x_5=x_6=0,\qquad x_2x_3=x_4^2$$

seraient invariants pour la transformation (II) et, par suite, l'involution engendrée par cette transformation sur F aurait une courbe de coïncidence, section de F par ce cône.

---

appartenant à une surface algébrique (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1914). *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919).

Si la droite d_1 n'appartient pas au plan $y_1 = 0$, elle contient deux points invariants pour la transformation (I), l'un de ces points étant A_0. Au point de cette droite infiniment voisin de A_0 correspond un point du cône V_3^4 infiniment voisin de O_0 et qui, par suite, n'appartient pas à F (puisque, par hypothèse, F ne contient pas O_0).

Si la droite d_1 appartient au plan $y_1 = 0$, il lui correspond un point de la conique

$$x_0 = x_1 = x_5 = x_6 = 0, \qquad x_2 x_3 = x_4^2 \tag{3}$$

invariant pour la transformation (II). Ce point appartiendra à la surface F si la droite d_1 est une des droites exceptionnelles de la surface F*.

Dans le second cas, la transformation T possède comme points invariants les trois points de rencontre des droites d_1, d_2, d_3 avec la surface (2), en dehors de A_0, et le point A_0 lui-même. Dans ce cas, l'involution engendrée sur F par la transformation (II) ne possédera certainement qu'un nombre fini de points de coïncidence. Si l'une des droites d_1, d_2, d_3 appartient à la fois au plan $y_1 = 0$ et à la surface F*, le point de coïncidence correspondant se trouvera sur la conique (3).

En résumé : *Pour que la transformation* (II) *engendre sur* F *une involution n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, il faut que la transformation* (I) *ne laisse invariants qu'une simple infinité de points au plus et que les points du plan* $y_1 = 0$, *infiniment voisins du point* A_0, *ne soient pas invariants pour cette dernière transformation.*

15. *Involutions d'ordre sept.* — Supposons que la transformation (I) soit donnée par

$$\frac{y'_0}{\varepsilon^6 y_0} = \frac{y'_1}{\varepsilon y_1} = \frac{y'_2}{\varepsilon^2 y_2} = \frac{y'_3}{\varepsilon^4 y_3}, \tag{I'}$$

où ε est une racine primitive septième de l'unité. La transformation (II) est alors donnée par

$$\frac{x'_0}{x_0} = \frac{x'_1}{\varepsilon^2 x_1} = \frac{x'_2}{\varepsilon^4 x_2} = \frac{x'_3}{\varepsilon x_3} = \frac{x'_4}{\varepsilon^6 x_4} = \frac{x'_5}{\varepsilon^5 x_5} = \frac{x'_6}{\varepsilon^3 x_6}. \tag{II'}$$

Nous allons construire une surface F^* transformée en elle-même par la transformation (I').

Commençons par observer que le facteur $y_0 y_1$ se reproduit par (I'). Il en est de même des trinomes

$$a_{\lambda 1} y_1^{14\lambda+3} y_3 + a_{\lambda 2} y_2^{14\lambda+3} y_1 + a_{\lambda 3} y_3^{14\lambda+3} y_2,$$
$$b_{\lambda 1} y_1^{14\lambda+5} y_2 + b_{\lambda 2} y_2^{14\lambda+5} y_3 + b^{\lambda}{}_3 y_3^{14\lambda+5} y_1$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il en résulte que l'on peut prendre pour équation d'une surface F^* invariante pour la transformation (I'), soit

$$\begin{aligned}(1)\qquad & y_0^{7\nu+2} y_1^{7\nu+2} + y_0^{7\nu} y_1^{7\nu}(a_{01} y_1^3 y_3 + a_{02} y_2^3 y_1 + a_{03} y_3^3 y_2)\\ & + y_0^{7\nu-1} y_1^{7\nu-1}(b_{01} y_1^5 y_2 + b_{02} y_2^5 y_3 + b_{03} y_3^5 y_1) + \ldots\\ & + a_{\nu 1} y_1^{14\nu+3} y_3 + a_{\nu 2} y_2^{14\nu+3} y_1 + a_{\nu 3} y_3^{14\nu+3} y_2 = 0,\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}(2)\qquad & y_0^{7\nu+3} y_1^{7\nu+3} + y_0^{7\nu+1} y_1^{7\nu+1}(a_{01} y_1^3 y_3 + a_{02} y_2^3 y_1 + a_{03} y_3^3 y_2)\\ & + y_0^{7\nu} y_1^{7\nu}(b_{01} y_1^5 y_2 + b_{02} y_2^5 y_3 + b_{03} y_3^5 y_1) + \ldots\\ & + b_{\nu 1} y_1^{14\nu+5} y_2 + b_{\nu 2} y_2^{14\nu+5} y_3 + b_{\nu 3} y_3^{14\nu+5} y_1 = 0.\end{aligned}$$

Les surfaces F correspondantes seront découpées sur le cône V_3^4 respectivement par les hypersurfaces V_5 d'équations

$$\begin{aligned}(3)\qquad & x_0^{7\nu+2} + x_0^{7\nu}(a_{01} x_1 x_5 + a_{02} x_2 x_6 + a_{03} x_3 x_4)\\ & + x_0^{7\nu-1}(b_{01} x_1^2 x_6 + b_{02} x_2^2 x_4 + b_{03} x_3^2 x_5) + \ldots\\ & + a_{\nu 1} x_1^{7\nu+1} x_5 + a_{\nu 2} x_2^{7\nu+1} x_6 + a_{\nu 3} x_3^{7\nu+1} x_4 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\qquad & x_0^{7\nu+3} + x_0^{7\nu+1}(a_{01} x_1 x_5 + a_{02} x_2 x_6 + a_{03} x_3 x_4)\\ & + x_0^{7\nu-1}(b_{01} x_1^2 x_6 + b_{02} x_2^2 x_5 + b_{03} x_3^2 x_5) + \ldots\\ & + b_{\nu 1} x_1^{7\nu+2} x_6 + b_{\nu 2} x_2^{7\nu+2} x_4 + b_{\nu 3} x_3^{7\nu+2} x_5 = 0.\end{aligned}$$

La transformation (I') possède quatre points invariants qui appartiennent toujours tous quatre à la surface F^*, ce sont les sommets A_0, A_1, A_2, A_3 du tétraèdre fondamental. D'après ce que nous avons établi plus haut, l'involution d'ordre 7 engendrée par la transformation (II') doit posséder trois points de coïncidence, correspondant à A_1, A_2, A_3; ce sont les points O_1, O_2, O_3. De plus, deux de ces points, O_2, O_3, doivent se trouver sur la conique

$$(5)\qquad x_0 = x_4 = x_5 = x_6 = 0, \qquad x_2 x_3 = x_1^2.$$

C'est ce qui a effectivement lieu.

Nous allons montrer que les points O_1, O_2, O_3 sont des points de coïncidence non parfaite [1] de l'involution engendrée sur F par (II').

16. Envisageons tout d'abord la surface F découpée, sur le cône V_3^4, par l'hypersurface (3).

Le plan tangent à la surface F au point O_1 a pour équations

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0. \tag{6}$$

Le point O_1 est simple pour la surface F. La transformation (II') échange entre elles les droites situées dans (6) et en laisse deux, O_1O_0, O_1O_6 invariantes. Il en résulte que O_1 est un point de coïncidence non parfaite de l'involution d'ordre 7.

Observons que si, dans les équations de F, c'est-à-dire dans l'équation (3) et dans les équations du cône V_4^3, on fait :

1° $x_0 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$, elles se réduisent à $x_6^2 = 0$, donc la droite O_1O_6 touche la surface F au point O_1 ;

2° $x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$, elles se réduisent à $x_0^{7\nu+2} = 0$, donc la droite O_1O_0 a un contact d'ordre $7\nu + 1$ avec la surface F au point O_1.

On arrive à des conclusions analogues pour les points O_2, O_3.

Au point O_2, le plan tangent a pour équations

$$x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0;$$

la droite O_2O_4 touche la surface F, la droite O_2O_0 a un contact d'ordre $7\nu + 1$ avec la surface F en ce point.

Le plan tangent au point O_3 a pour équations

$$x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0,$$

la droite O_3O_5 touche la surface F, la droite O_3O_0 a un contact d'ordre $7\nu + 1$ avec la surface F en ce point.

Il y a, sur la surface F, trois courbes du réseau $|C|$ transformées en elles-mêmes par la transformation (II'); ce sont les courbes qui passent par deux quelconques des points O_1, O_2, O_3.

---

[1] Pour la définition de ces points, voir nos *Recherches sur les involutions* (*loc. cit.*).

Nous ferons maintenant voir que la surface F envisagée ici possède les mêmes caractères p_a, p_g, $p^{(1)}$ que la surface F générale étudiée précédemment. Pour cela, il suffira de faire voir que la surface F^*, représentée par l'équation (1), ne présente pas de singularité nouvelle influant sur les caractères en question.

La section de la surface (1) par le plan $y_0 = 0$ ne présente pas de points multiples, donc cette surface ne possède pas de courbe multiple.

Le point A_0 est un multiple uniplanaire d'ordre n. La surface (1) rencontre le plan $y_1 = 0$, tangent en A_0, suivant deux droites A_0A_2, A_0A_3; elle a un contact d'ordre $7\nu + 1$ avec ce plan le long de la droite A_0A_3.

Si d'autre part la surface (1) possédait des points multiples isolés distincts de A_0, les quatre dérivées partielles du premier membre de cette équation devraient s'annuler pour ces points. Il est facile de voir que, dans les cas les plus simples, cela entraîne des relations entre les coefficients, dont la surface (1) ne peut, en général, posséder des points multiples en dehors de A_0 (1). Cette surface possède donc les mêmes caractères invariants que la surface F générale.

17. Une étude analogue peut être faite pour la surface F découpée sur le cône V_3^4 par l'hypersurface (4). On trouve de même que l'involution d'ordre 7 engendrée sur F par la transformation (II') possède trois points invariants O_1, O_2, O_3.

En O_1, le plan tangent à F a pour équations

$$x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = 0,$$

la droite O_1O_5 touche la surface F, la droite O_1O_0 a un contact d'ordre $7\nu + 1$ avec F au point O_1. On a des propriétés analogues pour O_2, O_3.

Les points O_1, O_2, O_3 sont des coïncidences non parfaites pour

(1) On pourrait disposer des coefficients de l'équation (3) pour que cette hypersurface ait avec le cône V_3^4 des points de contact simple (dont le nombre est nécessairement multiple de 7); à ces points correspondront, sur F^*, des points doubles coniques, sans influence sur le système canonique, donc sur les valeurs de p_g, p_a, $p^{(1)}$.

l'involution d'ordre 7 envisagée, et la surface F présente en général les mêmes caractères invariants que les surfaces F générales [1].

---

[1] Pour $\nu = 0$, on retrouve la surface et l'involution d'ordre 7 que nous avons étudiée avec quelques détails dans notre Note *Sur une involution rationnelle*, (*loc. cit.*).