BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DENJOY

Sur les séries de fractions rationnelles

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 418-434
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__418_1>

SUR LES SÉRIES DE FRACTIONS RATIONNELLES ;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Convenons de désigner sous le nom de *séries* (A) les expressions de la forme

$$\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+\ldots+\frac{A_m}{x-\alpha_m}+\ldots, \tag{1}$$

la série A_m étant *absolument convergente*, et les α_m désignant des points du plan complexe décrit par x.

Soit E le dérivé de l'ensemble des α_m. Le complémentaire de E forme une ou plusieurs régions. Dans chacune d'elles la série (1) est absolument convergente et a pour somme une fonction holomorphe de x.

On a paru longtemps croire que la frontière de chacune de ces régions R est une coupure essentielle pour la fonction de x définie par la série (1) dans cette même région, et cela sous la seule condition de la convergence absolue des A_m. En particulier, il semblait impossible que la somme de (1) fût zéro dans une telle région, sans que tous les A_m fussent nuls.

M. Borel a montré que cette dernière opinion est fondée quand les A_m sont assujettis à une décroissance très rapide si m croît. On est conduit par cette voie à l'existence de fonctions de x définies par un élément dans des ensembles plus généraux que les continuums de Weierstrass (1), et ensuite à la notion de fonction quasi analytique de variable réelle.

C'est M. Wolff qui dans deux notes du plus grand intérêt (2) a montré la possibilité, étant donnée une fonction holomorphe dans et *sur* un contour G, de la développer à l'intérieur de G en une série (A) dont l'ensemble E coïncide avec G. Le rôle de l'ordre de petitesse des A_m joue donc un rôle essentiel dans les propriétés des séries (A).

J'ai indiqué dans une note un peu postérieure aux précédentes (3), des considérations permettant de porter assez loin la rapidité de décroissance des A_m dans les séries (A) de M. Wolff. La limite de cette rapidité a été parfaitement élucidée par M. Carleman au cours des si belles recherches qu'il a consacrées aux fonctions quasi analytiques (4).

L'exposé ci-après se rattache aux résultats de la note que je viens de rappeler.

1. Désignons par G un contour formé d'un ou de plusieurs contours simples finis sans points communs. G peut être regardé comme la frontière totale de deux ensembles plans D et D′ que nous appellerons *zones*, tels que, en franchissant l'un quelconque des arcs de G, on passe de l'une de ces zones dans l'autre. Nous dirons que ces deux zones sont *conjuguées*. Nous regarderons G comme faisant partie de l'une et de l'autre. L'une de ces zones contient le point à l'infini.

A chacune des deux zones correspond un sens de parcours positif sur G, et réciproquement. Ce sens de parcours, dès qu'il est donné sur l'un des arcs de G, définit la zone correspondante et par suite le sens positif sur tous les contours simples dont est formé G.

(1) Ensembles d'un seul tenant, uniquement constitués de points intérieurs.

(2) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. 173, 1921, p. 1056 et 1327.

(3) *Ibid.*, t. 174, 1922, p. 97. *Voir* également t. 179, 1924, p. 867.

(4) *Ibid.*, t. 174, 1922, p. 588.

Nous dirons que $f(x)$ est ***régulière*** dans une zone D du type précédent, si $f(x)$ est holomorphe dans D (y compris G) et si de plus, dans le cas où D contient le point à l'infini, $f(\infty)$ *est nul*.

Bien entendu, D se composera en général de plusieurs domaines deux à deux distincts, à connexion simple ou multiple, et dans chacun d'eux $f(x)$ coïncidera avec une fonction holomorphe, ces diverses fonctions pouvant être analytiquement toutes distinctes.

Le lecteur n'aura dès lors aucune peine à montrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_G \frac{f(z)}{z-x}\,dz,$$

prise le long de G dans le sens direct relativement à D, est dans tous les cas égale à $f(x)$ si x est intérieur à D, et à o si x est intérieur à D', zone conjuguée de D.

Cette propriété résulte de cc qu'elle est vraie pour chacun des domaines connexes en lesquels D se décompose. Si l'un d'eux est infini, on le limite extérieurement par un cercle variable suffisamment grand, le long duquel, d'après $f(\infty) = 0$, l'intégrale est constamment nulle.

2. Cela posé, nous appellerons *série* (B) *relative à* D *et à* $f(x)$ une série du type (A) telle que :

1° Les pôles α_m sont intérieurs à D' et l'ensemble E de la série coïncide avec G;

2° La série (B) est, ainsi que toute ses séries dérivées terme à terme, absolument convergente dans D et *sur* G, les sommes correspondantes étant $f(x)$ et ses dérivées successives;

3°. A_m vérifie la condition

$$|A_m| < \lambda\, e^{-\theta m \sqrt{u_m}},$$

la série convergente u_m étant à notre volonté de l'un des types [1]

$$u_m = \frac{1}{m\log^{1+\alpha} m}, \qquad u_m = \frac{1}{m\log m\ldots\log_r m\,\log_{r+1}^{1+\alpha} m} \qquad (0 < \alpha < 1);$$

λ dépend de $f(x)$ et de G. θ dépend seulement de G.

---

[1] Au lieu de $\log_r m$, il serait préférable d'utiliser la fonction $A_r\, m$ telle que $A\,m = \log(1 + m)$, $A_{r+1}\,m = A(A_r\,m)$. $A_r\,m$ est réel et positif pour toute valeur positive de m.

Nous allons montrer que si la courbure de G est en tout point inférieure en valeur absolue à un nombre $\frac{1}{R}$, $f(x)$ *est développable relativement à* D *en série* (B) *à pôles indépendants de* $f(x)$.

D'ailleurs la disposition de ces pôles étant possible d'une infinité de manières distinctes, la différence de deux séries (B) relatives à la zone D et à une même fonction $f(x)$ nous donnera une série (B) à résidus non tous nuls, relative à D et à la fonction o de x (¹).

D'après l'hypothèse faite sur la courbure de G, le contour C_0 situé dans D′, parallèle à G et à la distance d de G, est simple si d est inférieur à la fois à R et à la demi-distance de deux quelconques des contours simples formant G. On peut également supposer d assez petit pour que la longueur de C_0 soit inférieure à deux fois la longueur L de G.

Nous décomposons d en une série de termes positifs

$$d = \delta_0 + \delta_1 + \ldots + \delta_p + \ldots,$$

et, posant $d_p = \delta_p + \delta_{p+1} + \ldots$, nous traçons dans D′ le contour C_p parallèle à G, et distant de d_p de G. La distance (C_p, C_{p+1}) est δ_p.

Sur $C_p (p \geqq 0)$, nous plaçons n_p points $a_p, b_p, \ldots$, tels que l'arc σ_p joignant deux points a_p, b_p consécutifs de C_p soit inférieur à $\frac{h_1 L}{n_p}$, h_1 étant indépendant de p et de a_p.

(¹) L'hypothèse sur la courbure de G ne sert qu'à la commodité de l'exposé et à la formation d'exemples typiques. Elle n'offre aucun caractère de nécessité. En s'inspirant de la démonstration ci-dessus, on peut établir le résultat suivant :

Soient G un ensemble fermé (à distance finie) non dense absolument quelconque (pouvant se décomposer en un nombre limité ou une infinité dénombrable de points isolés, d'ensembles parfaits discontinus, de continus deux à deux distincts) et D′ un ensemble *ouvert* fini ou infini, dont G est la frontière. Soient D le complémentaire de D′ (D contient donc G) et $f(x)$ une fonction régulière dans un domaine *ouvert* contenant D. *On peut développer* $f(x)$ *en une série* (B′) *vérifiant relativement à* D, D′, G, *et* $f(x)$ *les trois conditions des séries* (B) *sauf à remplacer dans la troisième l'exposant* $-m\sqrt{u_m}$ *de e par* $-m^{\frac{3}{2}}u_m$.

Pour suivre le raisonnement du texte, on peut choisir le contour C_p intérieur à D′, ayant chacun de ses points à la distance d_p de G et de façon que, si L_p est la longueur de C_p, la série $L_p\delta_p$ soit convergente. L'inégalité (3) subsiste en y remplaçant l par kL_p, k étant indépendant de p. On prend ensuite, comme il est dit, $n_p = \frac{ekL_p}{\delta_p}$.

Les points a_0, b_0, ..., a_p, b_p, ... seront les pôles α_m, indépendamment de $f(x)$. Si k_0 est le résidu de a_0, k_p celui de a_p, et si $f(x)$, holomorphe sur G par hypothèse, l'est aussi sur C_0, la fonction

$$f_{p+1}(x) = f(x) - \sum \frac{k_0}{x-a_0} - \ldots - \sum \frac{k_p}{x-a_p}$$

est régulière dans D_{p+1}, zone obtenue en ajoutant à D la zone finie limitée par G et C_{p+1}. Par suite

$$f_p(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_p} \frac{f_p(z)}{z-x}\,dz,$$

quel que soit x intérieur à D_p.

Nous allons fixer le choix des k_p et des n_p

Si $f(x)$ est régulière dans D_0, nous posons

$$k_0 = -\frac{1}{2i\pi}\int_{a_0}^{b_0} f(z)\,dz.$$

Soit x dans D_1. Alors, les sommations étant étendues à tous les pôles successifs a_0, b_0, ... rencontrés sur C_0,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \sum \frac{1}{2i\pi}\int_{a_0}^{b_0} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

Or,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{a_0-x} + \frac{a_0-z}{(a_0-x)(z-x)}.$$

Donc

$$f_1(x) = f(x) - \sum \frac{k_0}{x-a_0} = \sum \frac{1}{2i\pi}\int_{a_0}^{b_0} \frac{f(z)(a_0-z)}{(a_0-x)(z-x)}\,dz.$$

Soient σ_0 la longueur de l'arc $a_0 b_0$ et M_0 le module maximum de $f(x)$ sur C_0 (donc dans D_0). On a, si M_1 est le module maximum de $f_1(x)$ dans D_1, et si η_0 est la distance de x (dans D_1) à l'arc $a_0 b_0$,

$$M_1 < \frac{1}{2\pi} M_0 \sum \frac{\sigma_0^2}{\eta_0^2} < \frac{M_0}{2\pi}\frac{h_1 L}{n_0}\sum \frac{\sigma_0}{\eta_0^2}.$$

La somme $\sum \frac{\sigma_0}{\eta_0^2}$ est infiniment grande avec le minimum de $\frac{1}{\eta_0}$ et elle est inférieure à $\frac{h_2}{\delta_0}$, le nombre h_2 pouvant être choisi de façon à convenir à tous les C_p, d'après les hypothèses faites. Finalement,

$$M_1 < M_0 \frac{l}{n_0 \delta_0},$$

$l = \frac{h_1 h_2 L}{2\pi}$ étant calculable connaissant G et les constantes numériques rencontrées, qui seront les mêmes pour tous les C_p. De proche en proche on pose

$$k_p = -\frac{1}{2i\pi}\int_{a_p}^{b} f_p(z)\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long de C_p, et d'après

$$f_{p+1}(x) = f_p(x) - \sum \frac{k_p}{x - a_p},$$

on aura, si M_p est le module maximum de $f_p(x)$ dans D_p,

$$(2) \qquad M_{p+1} < M_p \frac{l}{n_p \delta_p}.$$

Nous supposerons que n_p est, pour chaque valeur de p, la valeur à une unité près par excès de $\frac{el}{\delta_p}$. Dès lors, connaissant les δ_p, les α_m peuvent être placés, indépendants de $f(x)$, et l'on a

$$M_p < M_0 e^{-p}.$$

$f(x)$ peut ne pas être régulière dans D_0. Comme elle l'est dans D, il existe une valeur entière de q positive telle que $f(x)$ soit régulière dans D_{q-1}. On fera

$$k_0 = \ldots = k_{q-1} = 0,$$

d'où $f_q(x) = f(x)$ dans D_q, et l'on aura

$$M_p < M_q e^{-(p-q)} \qquad (p > q)$$

si M_q est le maximum de f sur C_q.

Dans tous les cas la série $\sum \frac{k_0}{x - a_0} + \ldots + \sum \frac{k_p}{x - a_p} + \ldots$ converge vers $f(x)$ dans D, *y compris* G.

D'ailleurs $\Sigma \mid k_p \mid < M_p \frac{L}{\pi}$.

Donc la série des $\frac{k_p}{x - a_p}$ est une série (A). G constitue son ensemble E, et sa somme dans D est $f(x)$.

L'essentiel des idées précédentes appartient à M. Wolff.

Nous allons disposer du choix des δ_p pour donner à cette série (A) les autres caractères d'une série (B) relative à D et à $f(x)$.

Soit u_m l'une des séries convergentes désignées dans l'énoncé du troisième caractère, et soit s sa somme. Prenons

$$\delta_p = \gamma u_{p-1} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{d}{s}.$$

On a donc sensiblement

$$n_p = \frac{el}{\gamma} \frac{1}{u_{p-1}} = \frac{e h_1 h_2 \mathrm{L} s}{2\pi d} \frac{1}{u_{p-1}} \qquad \left(\text{d'où } \sigma_p < \frac{h_1 \mathrm{L}}{u_{p-1}} = du_p \frac{2\pi}{e h_2 s}\right).$$

Observons que

$$\sum_1^p \frac{1}{u_m} = \frac{p}{(2+\varepsilon) u_p},$$

ε tendant vers zéro quand p croît. Posons

$$n_0 + n_1 + \ldots + n_p = m_p.$$

On a

$$m_p = \frac{el}{(2+\varepsilon)\gamma} \frac{p}{u_p}.$$

Donc $\frac{n_p}{m_p}$ tend vers zéro.

Si α_m est sur C_p, son rang m est compris entre m_{p-1} et m_p. Donc $\frac{m}{m_p}$ tend vers 1 et

$$m = \frac{el}{(2+\varepsilon')\gamma} \frac{p}{u_p} \qquad (\lim \varepsilon' = 0);$$

d'où nous déduisons, d'après la forme de u_p,

$$p^2 = m^{1+\varepsilon_m} \qquad (\lim \varepsilon_m = 0), \qquad \text{d'où} \qquad pu_p = mu_m(\beta + \varepsilon''_m)$$

(β constante numérique, savoir : $2^{-1-\alpha}$ avec le premier type de u_m, 1 avec les types suivants), puis, d'après $p^2 = pu_p . \frac{p}{u_p}$, finalement

$$p = \sqrt{\frac{(2\beta + \varepsilon'')\gamma}{el}} \, m\sqrt{u_m}.$$

Or A_m est l'un des k_p. Donc

$$|\mathrm{A}_m| < \mathrm{M}_p \sigma_p < \mathrm{M}_0 \sigma_p e^{-p} < \mathrm{M}_0 \lambda' e^{-\theta m \sqrt{u_m}}$$

avec

$$\theta = \sqrt{\frac{\beta\gamma}{el}} = \sqrt{\frac{\beta h_1}{es}}\sqrt{h_2 L d} \qquad \text{et} \qquad \lambda' = du_1 \frac{2\pi}{eh_2 s},$$

en séparant les constantes absolues β, h_1, s et les facteurs L, d, h_2 dépendant de G.

Si $f(x)$ n'est pas régulière sur D_0, mais seulement sur D_q, on a

$$|A_m| < M_q \lambda'_q e^{-\theta m \sqrt{u_m}},$$

λ'_q se tire de λ' en remplaçant du_1 par $d_q u_q e^q$.

Il est évident que $\sum \frac{|k_p|}{|x-a_p|^{r+1}}$ est au plus égal à $\frac{M_p L}{\pi n_p d_p{}^{r+1}}$ si x est dans D. Or, la série $\frac{M_p}{d_p{}^r}$ est convergente quel que soit r. Donc la série $\sum\sum \frac{k_p}{x-a_p}$ dérivée r fois terme à terme est uniformément et absolument convergente dans D, y compris G. Sa somme étant une fonction continue, y coïncide nécessairement avec $f^{(r)}(x)$. La série (B) cherchée est donc obtenue.

3. Considérons un ensemble fermé *non dense* E_0, et soit une fonction $\Phi(x)$ définie dans le complémentaire de E_0 et régulière à l'intérieur de chacune des régions déterminées par E_0.

Nous appelons *série* (C) relative à E_0 et à $\Phi(x)$, une série (A) telle que :

1° L'ensemble E de cette série est *non dense* et *contient* E_0;

2° En tout point x étranger à E, la somme de la série coïncide avec $\Phi(x)$.

Nous allons montrer *l'existence d'une série* (C) *pour tout couple* $[E_0, \Phi(x)]$. Quelques remarques préliminaires nous seront utiles.

Appelons « zone circulaire normale de rayon R et de centre a » la zone Z infinie déterminée par les deux cercles concentriques de centre a et de rayons R et 4R.

Convenons de dire que le couple $[Z, \Phi(x)]$ est « normalement associé », si la fonction $\Phi(x)$ est régulière sur la zone infinie Z_0 concentrique à Z et limitée par les cercles de rayons 2R et 3R.

Soit (Z) la zone circulaire normale de centre o et de rayon 1.

Choisissons — par exemple dans la zone (Z_0) — une distribution type des α_m pour la zone (Z), et adoptons pour distribution type des pôles α'_m relative à Z, les points $\alpha'_m = a + R\alpha_m$. Si une fonction $f(x)$ distincte de zéro est normalement associée à (Z), avec le module maximum M_0 sur (Z_0), $f(x)$ est dans (Z) la somme d'une série $\dfrac{A_m}{x-\alpha_m}$, avec

$$|A_m| < M_0\lambda' e^{-\theta m\sqrt{u_m}} \quad \text{et} \quad \Sigma |A_m| < \nu M_0,$$

θ, λ', ν étant des constantes numériques, une fois choisie la série u_m.

Si donc la fonction $F(x)$ est normalement associée à Z, avec le maximum M_0 sur Z_0, la fonction $F(a+Rx) = f(x)$ est normalement associée à (Z) avec le même maximum M_0 sur (Z_0). D'ailleurs, $F(x) = f\left(\dfrac{x-a}{R}\right)$ est une série du type $\dfrac{A'_m}{x-\alpha'_m}$ avec $A'_m = A_m R$. D'où

$$|A'_m| < M_0 R\lambda' e^{-\theta m\sqrt{u_m}} \quad \text{et} \quad \Sigma |A'_m| < \nu M_0 R.$$

L'ensemble formé par les différences d'argument des α_m est dénombrable. Soit c une valeur qui lui est étrangère. Si $s(x)$ est la série type (B) correspondant à (Z) et à la fonction 1, la demi-différence $\dfrac{s(x) - s(xe^{ic})}{2}$ sera par convention la série type relative à (Z) et à la fonction 0.

On en déduira la série type relative à Z et à 0. On pourra multiplier tous les termes de cette série par un coefficient numérique quelconque, en sorte que les inégalités des $|A'_m|$ et de $\Sigma |A'_m|$ sont encore valables, mais avec un facteur M_0 aussi petit qu'on le veut.

Établissons maintenant l'existence de la série (C) décrite plus haut.

Considérons une zone circulaire normale Z de rayon R contenant l'ensemble donné E_0 dans sa région finie ω. Soient Ω la région infinie de Z, γ et Γ les cercles limitant Z (et de rayons respectifs R et $4R$). Désignons par $\sigma_0(x)$ la série type (B) relative à Z et à la fonction $\Phi_0(x)$, si $\Phi_0 = \Phi(x)$ dans la région infinie Z'_0 de Z_0 et $\Phi_0 = 0$ dans la région finie Z''_0 de Z_0 (Z_0 concentrique à Z et de rayons extrêmes $2R$ et $3R$).

Si μ_0 est le module maximum de $\Phi_0(x)$ dans Z_0 [donc le module maximum de $\Phi(x)$ dans Z'_0] et si $\sigma_0(x) = \sum \dfrac{A^0_m}{x-\alpha^0_m}$, on a, posant $\lambda' = \lambda'' \nu$,

$$\Sigma \mid A^0_m \mid < \nu \mu_0 R = w, \qquad \mid A^0_m \mid < \lambda'' w\, e^{-0 m \sqrt{u_m}}.$$

Désignons par $\psi_0(x)$ la somme de cette première série qui converge absolument en tout point x du plan distinct de ses pôles.

Soit E^1 l'ensemble réunissant E_0, les pôles de ψ_0 et leur ensemble dérivé, formé de $\Gamma + \gamma$.

A l'intérieur de Γ, considérons le point ζ_1 ainsi défini : la distance d'aucun point ζ (intérieur à Γ) à E_1 ne surpasse celle de ζ_1. Si ces deux distances sont égales, la partie réelle de ζ ne surpasse pas celle de ζ_1. Si ces parties réelles sont égales, le coefficient de i dans ζ est inférieur à celui de ζ_1. En ζ_1, Φ et ψ_0 sont holomorphes. Nous pouvons prendre R_1, assez petit pour que, dans le cercle de centre ζ_1 et de rayon $2R_1$, la fonction $\Phi - \psi_0 = \Phi_1(x)$ soit holomorphe et que son module maximum μ_1 vérifie $\nu \mu_1 R_1 < \frac{w}{2}$.

Le type circulaire normal est réalisé par la zone Z^1 de centre ζ_1 et de rayon R_1, et par la fonction égale à o dans la région infinie de Z^1_0 (extérieur d'un cercle de centre ζ_1 et de rayon $3R_1$) et à $\Phi_1(x)$ dans la région finie de Z^1_0 (intérieur d'un cercle de centre ζ_1 et de rayon $2R_1$).

Soit $\sigma_1(x) = \sum \frac{A^1_m}{x - \alpha^1_m}$ la série type (B) correspondante. On a

$$\Sigma \mid A^1_m \mid < \frac{w}{2} \qquad \text{et} \qquad \mid A^1_m \mid < \lambda'' \frac{w}{2} e^{-m\sqrt{u_m}}.$$

Si Ω_1 est la région infinie et ω_1 la région finie de Z^1, la série $\sigma_0(x) + \sigma_1(x)$ est convergente absolument partout, sauf en ses pôles. Soit $\psi_1(x)$ sa somme. On a $\psi_1(x) = \Phi(x)$ dans Ω et dans ω^1.

On désignera par E^2 la réunion de E^1 et des pôles de $\psi_1(x)$ accrus de leur dérivé (la frontière de Z^1). E^2 est fermé, non dense. On désigne par ζ_2 le point intérieur à Γ et le plus éloigné de E^2 (avec les mêmes précisions que plus haut, s'il est nécessaire), puis posant

$$\Phi_2(x) = \Phi(x) - \psi_1(x)$$

on détermine un cercle de centre ζ_2, de rayon de $2R_2$ dans lequel $\Phi_2(x)$ est holomorphe et de module maximum μ_2 tel que $\nu \mu_2 R_2 < \frac{w}{4}$.

On forme la série type (B) relative à la zone circulaire normale Z^2 de rayon R_2, ayant pour somme o dans la région infinie Ω^2 de Z^2, et $\Phi_2(x)$ dans la région ω^2 finie de Z^2.

En continuant ainsi indéfiniment, on détermine des régions Ω, ω^1, $\omega^2, \ldots, \omega^p \ldots$, partout denses dans le plan, et une série

$$\sigma_0(x) + \sigma_1(x) + \ldots + \sigma_k(x) + \ldots$$

ayant pour somme $\Phi(x)$ dans chacune de ces régions. Les pôles de la série étant extérieurs à toutes les régions forment un ensemble non dense dont tout point de E_0 est limite. De plus la somme des modules des résidus de σ_p étant inférieure à $\frac{w}{2^p}$, la série $\Sigma \sigma_p(x)$ doublement infinie est absolument convergente dans chacune des régions dites et peut être rangée en série simple (A).

Ainsi se trouve réalisé le cas (C) que nous avions en vue. On se rendra compte sans peine de la possibilité, quitte à remplacer la condition $\nu \mu_p R_p < \frac{w}{2^p}$ par une autre plus restrictive, d'avoir

$$| A_m | < e^{-\theta_m m \sqrt{u_m}},$$

θ_m tendant vers zéro aussi lentement que l'on veut. En substituant dès le début au type u_m choisi un autre type plus lent, on obtient une série (C) vérifiant une inégalité

$$| A_m | < \lambda \, e^{-\theta m \sqrt{u_m}},$$

où λ seul dépend de E_0 et de $\Phi(x)$.

Enfin, il serait évidemment possible que la fonction $\Phi(x)$ fût o, en sorte que l'on peut construire une série (A) dont les pôles à résidus non nuls forment un ensemble non dense (contenant un ensemble fermé non dense donné) et dont la somme est o en tout point limite des pôles.

Mais certains des résultats généraux qui suivent permettraient de borner le champ d'arbitraire des A_m et des α_m pour ces dernières séries.

4. Théorème I. — *La série* $| A_m |$ *étant supposée convergente,*

l'ensemble des points où la série $\frac{A_m}{z-\alpha_m}$ *n'est pas absolument convergente est de mesure nulle.* En outre, *la fonction* $\psi(z)$ *égale à la somme de la série* $\frac{|A_m|}{|z-\alpha_m|}$ *aux points où celle-ci converge, et à* o *ailleurs,* $\psi(z)$ *est sommable dans tout domaine fini.*

Soit en effet C un carré quelconque. L'intégrale $\int\int_C \frac{dS}{|z-a|}$ a un sens quel que soit a, intérieur ou extérieur au carré, dS étant l'élément d'aire du carré C parcouru par z. La valeur de l'intégrale est bornée pas un certain nombre k indépendant de a.

Donc, l'intégrale

$$\int\int_C \sum_0^p \frac{|A_m|}{|z-\alpha_m|} dS,$$

croissante avec p, est constamment inférieure à $k\sum_0^\infty |A_m|$. Il suit de là que :

1° L'ensemble H des points z où la série $\frac{|A_m|}{|z-\alpha_m|}$ diverge est de mesure nulle dans C (H est inclus dans E);

2° La fonction $\psi(z)$ définie dans l'énoncé est sommable dans C.

C étant quelconque, le théorème est établi.

La série $|A_m|$ étant supposée convergente, nous désignons ci-après par $f(x)$ la somme de la série (1) en un point x *distinct des* α_m *et non limite pour eux.* $f(x)$ est donc sommable dans tout domaine fini, et ceci borne le champ des fonctions susceptibles d'être développées en séries (A).

Théorème II. — *La série* $|A_m|$ *à termes tous non nuls étant supposée convergente, si l'un des pôles apparents* α *de la série* (1) *est tel que le produit* $f(x)(x-\alpha)$ *tend vers zéro quand* x *tend vers* α, *l'ensemble* E *dérivé des pôles est de mesure superficielle positive* (x reste distinct des α_m et étranger à E).

Nous allons même montrer que la conclusion (mes. E $>$ o) subsiste sous cette condition plus large vérifiée par $f(x)$:

Il existe dans le champ de la variable positive $\rho = |x-\alpha|$ un ensemble J *épais à l'origine* (ayant une mesure positive dans tout intervalle $0 < \rho < \varepsilon$) et tel que $f(x)(x-\alpha)$ soit infiniment petit si ρ tend vers zéro sans quitter J (x restant étranger à E).

Plaçons-nous en effet dans l'hypothèse où E serait de mesure superficielle nulle. Nous écrivons la série (1) :

$$\frac{A}{x-\alpha}+\sum_{1}^{\infty}\frac{A_m}{x-\alpha_m}$$

et nous posons $\alpha_0=\alpha$. Reprenons les notations du théorème I relativement à l'ensemble mince H et à la fonction par tout sommable $\psi(z)$.

Si γ' est un cercle de centre α et de rayon ρ', les nombres ρ' pour lesquels l'une au moins des trois conditions suivantes est réalisée :

1° La mesure linéaire de E sur γ' est positive;

2° La mesure linéaire de H sur γ' est positive;

3° $\psi(z)$ n'est pas sommable sur γ';

ces nombres ρ' forment un ensemble de mesure nulle.

Les points ρ de J distincts des ρ' forment donc un ensemble J′ de même mesure que J (ou encore : une « pleine épaisseur de J »). La mesure de J étant supposée positive dans tout intervalle $0 < \rho < \varepsilon$, il existe dans J′ des nombres ρ aussi petits que nous voudrons.

Soit γ un cercle d'un tel rayon ρ, et de centre α. Sur γ :

1° Les ensembles e et h formés respectivement par les points de E et de H sont de mesure nulle (h est inclus dans e);

2° $\psi(z)$ est sommable (et, en conséquence, γ ne contient aucun des α_m);

3° e' étant relativement à γ le complémentaire de e, le produit $\rho\,|f(x)|$, défini aux x de e', est inférieur à une fonction de ρ infiniment petite avec ρ.

Considérons l'intégrale

$$I_p=\frac{1}{2i\pi}\int\sum_{0}^{p}\frac{A_m}{z-\alpha_m}\,dz,$$

I_p est égal à A augmenté des résidus A_r des pôles α_r intérieurs à γ. Leurs rangs r ont un minimum non décroissant quand ρ tend vers zéro. Donc la série A_m étant absolument convergente, on a, dès que ρ est assez petit, et pour r différent de o,

$$\Sigma |A_r| < \frac{1}{2} |A|,$$

quel que soit p.

Alors

$$|I_p| > \frac{1}{2} |A|.$$

De même, dès que ρ appartenant à J′ est assez petit, on a, si x est sur e',

$$|f(x)| < \frac{|A|}{4\rho}.$$

ρ étant ainsi choisi, soit η_p l'ensemble des points z de γ tels que

$$\left| \sum_0^{p+n} \frac{A_m}{z - \alpha_m} \right| > \frac{|A|}{4\rho}$$

pour au moins une valeur entière non négative de n. L'ensemble η_p est non croissant quand p croît. Tout point x de e' finit par être étranger à η_p, puisque le premier membre tend vers $|f(x)|$ en un tel point. La mesure de η_p tend donc vers la mesure de e, savoir o, quand p croît. Or, soit η'_p le complémentaire de η_p relativement à γ. Calculons I par la décomposition :

$$\int_\gamma = \int_{\eta_p} + \int_{\eta'_p}.$$

On a

$$\left| \frac{1}{2i\pi} \int_{\eta'_p} \sum_0^p \frac{A_m}{z - \alpha_m} dz \right| < \frac{|A|}{4}$$

et

$$\left| \int_{\eta_p} \sum_0^p \frac{A_m}{z - \alpha_m} dz \right| < \int_{\eta_p} \psi(z) \, |dz|,$$

puisque l'ensemble H est mince sur γ. Mais $\psi(z)$ étant sommable sur γ, son intégrale sur un ensemble η_p dont la mesure tend vers zéro quand p croît, tend elle-même vers zéro. Nous en déduisons que, p croissant, la plus grande limite de $|I_p|$ est au plus égale à $\frac{1}{4} |A|$. Or ceci est impossible d'après $A \neq 0$ et $|I_p| > \frac{1}{2} |A|$.

Donc E est de mesure superficielle positive.

En particulier, si $f(x)$, définie seulement hors de E, y coïncide avec une fonction définie dans tout le plan et partout continue (ou seulement bornée), E est épais en lui-même (de mesure positive dans tout cercle contenant intérieurement un point de E). C'est en particulier le cas si $f(x) = 0$, tous les A_m bien entendu étant supposés non nuls.

On montrerait par un raisonnement analogue que :

Si E *est de mesure superficielle nulle, il existe pour chaque valeur de q, dans le champ de la variable positive* ρ, *un ensemble* K_q *dont le complémentaire est de mesure nulle, et tel que si* ρ *tend vers zéro sans quitter* K_q, *on a*

$$2i\pi A_q = \lim \int_\gamma f(x)\,dx,$$

γ *étant le cercle de centre* α_q *et de rayon* ρ [$f(x)$ étant remplacée par 0 aux points de E].

Théorème III. — E^0 *étant un ensemble fermé (borné), non dense sur une famille de droites parallèles* Δ *déterminant sur une transversale un ensemble partout épais, s'il existe une série* (A) *dont la somme hors de* E^0 *soit une fonction* $f(x)$ *bornée, la série* $|A_m|\,L\,|A_m|$ *est divergente.*

(Nous venons d'établir que E^0 est de mesure positive.)

Les droites de l'énoncé parallèles à une même direction, pourraient être remplacées par une famille quelconque de courbes analytiques dépendant analytiquement d'un paramètre.

Tous les α_m sont évidemment dans E^0.

Voici la marche de la démonstration. On montre d'abord que si la série $|A_m|\,L\,|A_m|$ est convergente, l'ensemble des droites Δ_1' parallèles à une direction donnée quelconque sur lesquelles la série $\frac{|A_m|}{|z-\alpha_m|}$ n'est pas uniformément convergente possède une mesure superficielle nulle.

En effet, soit γ_m le cercle de centre α_m et de rayon $|A_m|$. Soient ξ_m l'abscisse perpendiculaire à Δ_1', du point α_m, ξ l'abscisse d'une droite Δ_1 comprise entre les abscisses extrêmes a et b de E^0. On voit immédiatement que

$$\int_a^b \sum_p^{p+q} \frac{|A_m|}{|\xi-\xi_m|}\,d\xi$$

étendue aux abscisses ξ des droites Δ_1 ne rencontrant aucun des cercles γ_m pour $m \geqq p$ est borné indépendamment de q, savoir sensiblement par $\left(p\right.$ assez grand pour que $|A_m| < \frac{1}{2}$ si $\left. m \geqq p\right)$

$$2\sum_p^\infty |A_m| \, L \frac{1}{|A_m|}.$$

Les ξ des droites Δ_1'' rencontrant une infinité de cercles γ_m forment un ensemble de mesure nulle, d'après la convergence de la série $|A_m|$. Il en est de même des ξ des droites Δ_1''' rencontrant un nombre limité de cercles γ_m, mais pour lesquelles la série $\frac{A_m}{|\xi - \xi_m|}$ diverge. Les ξ restants forment une épaisseur pleine (l'ensemble complémentaire est mince). Sur chacune des droites Δ_1' correspondantes, la série (A) est évidemment uniformément convergente. Sa somme est continue. Nous la désignons par $\omega(z)$ en tout point de convergence z. On a $\omega(x) = f(x)$ en tout point x étranger à E^0.

Si l'on prend pour les Δ_1 la direction des Δ, on voit que, les ξ des Δ formant par hypothèse un ensemble partout épais, les Δ_1' et les Δ coïncidants forment un ensemble de droites Δ_0 partout épais superficiellement, donc partout dense. Sur une telle droite Δ_0, la somme $\omega(z)$ étant continue et l'ensemble E^0 étant non dense, $\omega(z)$, égal à $f(x)$ hors de E^0, est borné par le même nombre μ que $|f(x)|$.

Soit un cercle γ de centre α_q et de rayon ρ. Les ρ des γ, sur lesquels la série (A) est uniformément convergente, forment, d'après un raisonnement identique à celui de la famille des droites Δ_1, une pleine épaisseur. Un tel cercle γ rencontre une infinité de droites Δ_0 en un ensemble partout dense sur γ. Donc, sur γ, $|\omega(z)|$ étant continue est inférieure à μ. Le rayon ρ de γ étant aussi petit que l'on veut, on en déduit $A_q = 0$.

Donc la série $|A_m| \, L \, |A_m|$ est divergente.

Il en est en particulier ainsi quand la somme de la série (A) est partout nulle hors de E^0 (1).

(1) Les considérations précédentes conduisent à construire un ensemble fermé non dense E^0 susceptible de bien montrer l'opposition des points de vue métrique et descriptif dans la théorie des ensembles.

Soit dans le carré C un ensemble dénombrable a_n partout dense. Soient $\alpha_1 = a_1$, γ_m le cercle de centre α_m et de rayon ν_m, γ_m' un cercle intérieur à γ_m et ne

Dans le présent article, il n'a été question que de séries (A) ne possédant pas de pôle apparent α_m sur la frontière des régions où la somme $f(x)$ était envisagée. Je donnerai dans un autre recueil une étude des singularités de $f(x)$ dans le cas opposé.

---

contenant à son intérieur aucun des points α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$. α_{m+1} est le point a_n d'indice minimum distinct des $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et extérieur à $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_m$. Soit E^0 le complémentaire de l'intérieur des γ'_m. La série v_m est supposée convergente.

L'ensemble fermé E^0 étant non dense, les droites Δ parallèles à une direction donnée quelconque sur lesquelles E^0 est non dense déterminent sur une transversale quelconque T un ensemble résiduel (complémentaire de la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses). Cependant, les droites Δ' parallèles à la même direction et sur lesquelles E^0 est constitué par *un nombre limité de segments de droites* rencontrent T en une épaisseur pleine. Donc les droites Δ'' sur lesquelles E^0 possède une infinité d'intervalles contigus déterminent sur T un ensemble de mesure nulle, et cela quelle que soit la direction commune des droites Δ. Ces droites infiniment fréquentes du point de vue descriptif sont infiniment rares du point de vue métrique.