BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEBESGUE

Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 315-336

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__315_1>

REMARQUES SUR LES DEUX PREMIÈRES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME D'EULER RELATIF AUX POLYÈDRES;

PAR M. HENRI LEBESGUE.

1. *Démonstration de Legendre.* — C'est la première en date des démonstrations rigoureuses du théorème d'Euler, qui s'exprime

par l'égalité $F + S - A = 2$. Legendre l'a donnée en 1794, dans la première édition de sa Géométrie élémentaire.

Cette démonstration, qui fut pendant longtemps la seule rigoureuse, tend à disparaître de nos Traités où elle est remplacée par des preuves plus directes et dont l'intérêt est incontestable. Je voudrais cependant dire quelques mots en faveur de la vieille démonstration de Legendre à laquelle on reproche volontiers d'être artificielle, de faire appel à des notions étrangères au sujet, de ne s'appliquer qu'aux polyèdres convexes. Chacun de ces griefs est fondé, à chacun on peut cependant répondre.

1. Toute démonstration paraît naturelle quand la suite des idées qui y a conduit a été bien comprise et clairement exprimée, nombreuses sont les démonstrations jugées tout d'abord artificielles et qui nous paraissent maintenant naturelles et en quelque sorte nécessaires. D'autre part, bien des Auteurs ont, de parti pris, donné une forme artificielle et un peu mystérieuse à leurs publications, soit pour paraître plus ingénieux, soit pour se réserver des priorités. Aussi, dire d'une démonstration qu'elle semble artificielle, c'est critiquer seulement son exposition.

Ici, l'aspect artificiel provient de la forme synthétique de nos Traités et de leur silence complet sur les questions qui ont conduit au théorème d'Euler. Il est certain que, lorsque l'on a lu : « Théorème. — *Entre les nombres* F, S, A *des faces, des sommets, des arêtes d'un polyèdre convexe existe la relation* $F + S - A = 2$ », dans les quelques secondes de réflexion qu'on s'accorde avant de passer à la lecture de la démonstration, on ne pense pas à la formule qui donne l'aire d'un triangle sphérique; d'où l'étonnement que provoque la démonstration de Legendre. Mais nous nous étonnons trop tard, c'est en lisant l'énoncé que nous aurions dû nous étonner et nous demander : « Comment a-t-on pu penser à cela? »

Il est fréquent qu'un énoncé soit deviné avant d'être démontré; ici nous avons une preuve formelle : dans sa première publication (1)

---

(1). *Elementa Doctrinæ Solidorum* (*Novi Commentarii Academiæ Scientiarum impérialis Petropolitanæ*, t. IV, pour 1752 et 1753, paru en 1758). Ce Mémoire est immédiatement suivi par la démonstration dont il sera question dans la seconde partie de ces Remarques : « Demonstratio nonnullerum insignum proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. »

Euler énonce le théorème et déclare n'en avoir pu obtenir de démonstration. Puisque ce n'est pas la démonstration qui a conduit Euler au théorème, comment l'a-t-il deviné? — Comme beaucoup de Géomètres des XVII^e et XVIII^e siècles, Euler a essayé d'étudier les polyèdres, ces êtres mathématiques connus depuis les Grecs et sur lesquels on ne sait à peu près rien dire d'autre que leur définition. Pour voir clair dans cet amas désordonné de figures, il faudrait savoir énumérer les divers polyèdres ou tout au moins savoir les classer en familles homogènes et par suite s'occuper de la détermination des polyèdres. On rechercha donc, parmi les très nombreuses grandeurs attachées à un polyèdre (nombres de sommets, d'arêtes, de faces, aire des faces, longueur des arêtes, angles des faces, angles dièdres, etc.), quelles sont celles qu'on peut regarder comme principales parce qu'elles déterminent les autres.

En étudiant ces questions, Euler a remarqué la relation $F+S-A=2$, et sans doute beaucoup d'autres. C'est, j'y reviendrai, le grand mérite d'Euler d'avoir distingué l'égalité $F+S-A=2$ et d'en avoir fait le théorème fondamental, mais, en somme, cette égalité exprime l'une des plus cachées parmi les relations qu'on pouvait énoncer. Celles qui s'offrent le plus immédiatement à l'esprit sont des relations angulaires, comme celle-ci : *La somme des angles des faces d'un polyèdre convexe augmentée de huit droits, est égale à autant de fois quatre droits que le polyèdre a de sommets.*

Euler et Legendre déduisent cette proposition du théorème fondamental : si $n_1, n_2, \ldots$ sont les nombres de côtés des faces, la somme à évaluer, mesurée en angles droits, s'écrit en effet :

$$(2n_1-4)+(2n_2-4)+\ldots=4A-4F=4S-8.$$

Ces égalités montrent l'équivalence du théorème fondamental et de son corollaire.

Il existe donc, dans le cas des polyèdres convexes, des égalités angulaires dont la démonstration entraînerait celle du théorème d'Euler et, pour obtenir des égalités angulaires, nous disposons des théorèmes sur la somme des angles d'un polygone convexe, plan ou sphérique. Ainsi, il n'est pas étonnant que Legendre, qui s'occupait, comme Euler, des questions relatives à la détermination des polyèdres et qui, de plus, connaissait l'énoncé du théorème d'Euler, ait abouti à la démonstration que l'on connaît.

Si nous renoncions à exposer les mathématiques comme une science morte, si nous parlions de questions ouvertes et, par exemple, de cette question de la détermination des polyèdres sur laquelle nous ne savons guère plus qu'Euler et Legendre, la démonstration de Legendre ne serait plus isolée et ne surprendrait plus.

2. Je crois, en somme, que Legendre ne s'est jamais proposé de démontrer le théorème d'Euler, mais qu'ayant bâti à une occasion quelconque des considérations voisines de celles qui figurent dans sa démonstration, il s'est aperçu qu'il avait les éléments nécessaires à cette démonstration. Ceci est naturellement hypothétique; mais ce qui est certain c'est que Descartes, grâce à un raisonnement qui ne diffère pas essentiellement de celui de Legendre, avait obtenu le corollaire énoncé plus haut; il avait donc démontré le théorème d'Euler dont, d'ailleurs, il n'a jamais remarqué l'énoncé (1).

D'un point O, intérieur à un polyèdre convexe P, abaissons les demi-droites perpendiculaires sur les faces de P. Celles de ces perpendiculaires qui sont relatives aux faces passant par un même sommet s forment un angle solide α, polyèdre et convexe. Puisque ces angles couvrent une fois et une seule tout l'espace, la somme de leurs mesures est donc égale à 8 (2). Or la mesure de α est, d'après la formule qui donne l'aire d'un polygone sphérique, $d_1 + d_2 + \dots + d_p - 2(p-2)$, si $d_1, d_2, \dots, d_p$ sont les dièdres

(1) En 1859, Foucher de Careil a découvert, dans les manuscrits de Leibniz conservés à la bibliothèque de Hambourg, une copie, faite par Leibniz, d'un cahier de notes de Descartes. Il a publié de suite cette copie et Prouhet l'a commentée en mathématicien dans les *Comptes rendus* en 1860 (*voir* aussi des articles de Prouhet et de Mallet dans la *Revue de l'Instruction publique*, 20e année, 27 septembre, 1er novembre, 23 novembre, 6 décembre 1860).

Le manuscrit trouvé par Foucher de Careil est reproduit au Tome X de l'édition des *Œuvres de Descartes* de Ch. Adam et Paul Tannery. J'adopte ici la traduction française donnée par Prouhet (*Revue de l'Inst. publ.*, 1er novembre 1860) et son interprétation.

(2) L'unité d'angle solide est l'angle trièdre trirectangle afin qu'un angle solide ait même mesure que l'aire qu'il intercepte sur une sphère tracée de son sommet pour centre; l'unité d'aire sphérique étant, comme il est d'usage, celle du triangle trirectangle.

de α. Ces dièdres sont les suppléments des angles $s_1, s_2, \ldots, s_p$ groupés autour du sommet s, donc la mesure de α est :

$$(2-s_1)+(2-s_2)+\ldots+(2-s_p)-(2p-4)=4-s_1-s_2-\ldots-s_p.$$

La somme des angles solides α est donc :

$8=\Sigma(4-s_1-s_2\ldots-s_p)=4\times$ nombre des sommets — somme des angles des faces.

Le corollaire énoncé et par suite, grâce aux égalités signalées, le théorème fondamental sont donc démontrés.

Ce raisonnement de Descartes ([1]) est exactement celui de Legendre, mais appliqué au polyèdre polaire de P; alors que Legendre raisonne sur P, Descartes raisonne sur sa représentation sphérique. Le passage d'un polyèdre au polyèdre polaire permutant F et S sans modifier A, il était d'ailleurs clair que le même raisonnement conduisait au résultat qu'on l'applique à P ou à son polyèdre polaire.

Il me paraît difficile de qualifier d'artificielle une démonstration qui conduit si immédiatement au résultat et qui avait été construite avant que le théorème n'ait été formulé.

3. Du précédent de Descartes je tire argument en faveur du raisonnement de Legendre, mais je ne suis pas du tout d'accord avec ceux qui prétendent attribuer à Descartes le théorème d'Euler ([2]). Descartes n'a pas énoncé le théorème; il ne l'a pas vu. Euler l'a aperçu et en a bien compris le caractère. Pour Euler, la description de la forme d'un polyèdre doit précéder l'utilisation des mesures de ses éléments et c'est pourquoi il a posé son théorème comme théorème fondamental. C'est, pour lui comme pour nous, un théorème d'*Analysis situs* énumérative; aussi a-t-il cherché à le démontrer par des considérations indépendantes de toute propriété métrique, appartenant bien à ce que nous appelons le domaine de l'*Analysis situs*.

Et c'est pourquoi il a laissé à Legendre l'honneur d'en trouver

---

([1]) Ou plutôt de Prouhet; je cite plus loin, paragraphe 5, ce que Descartes dit sur la mesure de α et sur sa définition.

([2]) Au premier rang de ceux-ci il convient de citer de Jonquière dont les Notes (*Comptes rendus*, 1890) contiennent beaucoup de renseignements intéressants.

la première preuve rigoureuse; aucun de ceux qui ont quelque peu lu Euler, et qui ont été stupéfaits de sa prodigieuse virtuosité technique, ne doutera un seul instant que si Euler avait pensé à faire passer son théorème au second plan et à le déduire d'un de ses corollaires métriques, il n'y eût facilement réussi (1).

Que Descartes soit passé si près du théorème sans le voir me paraît au contraire souligner le mérite d'Euler. Encore peut-on dire que Descartes était jeune quand il s'occupait de ces questions (2), mais Leibniz, qui a trouvé le cahier de Descartes assez intéressant pour le copier, qui a reconnu que la géométrie de Descartes ne s'appliquait pas aux questions où interviennent des relations d'ordre et de position, qui a rêvé de construire l'algèbre de ces relations et l'a dénommée à l'avance *Analysis situs*, n'a pas aperçu, dans le cahier de Descartes, le théorème d'Euler si fondamental en *Analysis situs*.

Le théorème appartient bien à Euler; quant à la démonstration, on pourrait, un peu injustement peut-être, la dénommer démonstration de Legendre et Descartes.

4. Cette démonstration est métrique; il est juste de lui reprocher de faire appel à des notions étrangères à l'*Analysis situs*. Mais il ne faudrait pas s'exagérer la valeur de ce grief. La mode, en *Analysis situs*, est actuellement aux démonstrations arithmétisées; la démonstration de Legendre est arithmétisée. C'est précisément pour cela qu'elle est susceptible d'une exposition très précise et très concise à la fois; pendant très longtemps elle est restée la seule démonstration rigoureuse (3).

---

(1) Il convient d'ajouter qu'Euler ne restreint nullement ses recherches aux polyèdres convexes.

(2) C'est du moins ce que l'on croit, parce que Descartes a employé dans son cahier certains caractères cossiques qu'il utilisait avant de connaître les notations de Viète.

(3) Dans un Mémoire de C. Jordan (*J. de Crelle*, 1866) on trouve la démonstration actuellement la plus employée, qui consiste à raisonner sur une calotte polyédrale à un seul bord. Je ne sais, ni si Jordan est le premier auteur de cette démonstration, ni à quelle date remonte la première démonstration rigoureuse qui suivit celle de Legendre.

Il convient de rappeler toutefois qu'en 1813 Lhuillier a écrit sur la question un long Mémoire que nous ne connaissons que par un résumé, fait par Gergonne, et publié dans le Tome III des *Annales de Gergonne*. Ce Mémoire de Lhuillier

La démonstration de Legendre possède bien les avantages que l'on attend des démonstrations arithmétisées. Or ces avantages sont toujours acquis en faisant intervenir quelque chose d'étranger au sujet puisque, dans une démonstration arithmétisée, on doit, par quelque artifice, raisonner sur des nombres et non sur les figures considérées. Par exemple, l'une des démonstrations arithmétisées les plus connues du théorème d'Euler repose sur l'étude de l'indétermination d'un système d'équations linéaires. Ce système d'équations est étranger au sujet, seulement, comme il est dépourvu par lui-même de tout intérêt, et qu'on ne saurait songer à l'étudier pour autre chose que la démonstration du théorème d'Euler, on ne proteste pas; alors qu'on proteste parce que, dans la démonstration de Legendre, les considérations intermédiaires ont un intérêt par elles-mêmes.

On se plaint donc de ce qui, à certains égards, est un réel avantage. Il n'en est pas moins vrai que l'emploi de notions métriques peut cacher aux étudiants la vraie nature du théorème et que, ces notions exigeant des études difficiles et délicates pour être solidement assises, le raisonnement de Legendre est en réalité fort long et détourné.

5. Le second grief est bien réellement fondé; pourtant une autre observation s'impose. Quand nous disons que la démonstration de Legendre fait appel à des considérations étrangères à l'*Analysis situs*, nous entendons par là que cette science découle d'axiomes ne formant qu'une partie de ceux de la Géométrie

---

est capital; qu'il ait ou non contenu une démonstration entièrement rigoureuse, ou y trouve, en tout cas, les éléments sans lesquels aucune démonstration véritable n'eût été possible. C'est là, en effet, que Lhuillier montre qu'il convient de bien préciser à quelles associations de polygones on donnera le nom de polyèdres (qu'il faut écarter, par exemple, ce que nous appellerions maintenant un polyèdre ayant deux sommets confondus) et surtout c'est là qu'est introduite la notion de genre d'un polyèdre. Lhuillier donne la formule générale $F + S - A = 2 - 2g$, pour un polyèdre de genre g.

Après Lhuillier, la question a fait des progrès quant aux preuves logiques, mais un seul fait mathématique nouveau a été reconnu : l'existence des surfaces à un seul côté, signalée par Möbius [*Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyedres* (*Berichte über die Verh. der Konig. Sächs Gess. der Wiss., Math. Phys. Klasse*, 1865, Bd 17)]. Ce travail est reproduit dans le Tome II des *Œuvres de Möbius*, p. 473-512; *voir* dans le même volume les pages 515 et suivantes.

métrique. N'oublions pas que les études axiomatiques ne nous renseignent que sur l'aspect purement logique des problèmes, comme Poincaré l'a fait observer à l'occasion des Mémoires de M. Hilbert sur la Géométrie; quelle que soit leur importance pour le mathématicien, elles négligent donc les aspects peut-être les plus intéressants des questions.

L'*Analysis situs* peut être fondée à partir de certaines propositions; mais pourquoi cette science est-elle fertile? Car nul ne doute qu'une science construite à partir de propositions et définitions formulées au hasard ne serait stérile? La variété infinie de ces sciences suffit à les condamner. L'*Analysis situs* est utile parce qu'on s'est occupé d'*Analysis situs* appliquée avant d'étudier l'*Analysis situs* pure. Ce sont les applications à des questions étrangères à l'*Analysis situs* qui ont fait naître cette science dont maintenant, après coup, on dégage les postulats.

Or la démonstration de Legendre, ou plutôt de Descartes, est intimement liée à la notion de courbure d'une surface; dans le raisonnement de Descartes on se borne à calculer de deux façons la courbure totale d'un polyèdre convexe. C'est, au reste, ce que Descartes déclare presque expressément; au sujet de l'angle α, il écrit : « Par angle solide extérieur, j'entends la courbure ou l'inclinaison mutuelle des plans, courbure qu'il faut mesurer à l'aide des angles plans qui comprennent l'angle solide (1); car la partie dont la somme de tous les angles plans formant un angle solide est moindre que les quatre angles droits qui forment un plan, désigne l'angle extérieur » (2).

(1) C'est-à-dire les faces de l'angle polyèdre.

(2) Voici ce qui précède la phrase citée :

« Un angle solide (droit) est celui qui embrasse la huitième partie de la sphère, quoiqu'il ne soit pas formé de trois angles plans droits. Tous les angles par lesquels il est terminé, pris ensemble, valent 3 angles droits. » Prouhet interprète cette dernière phrase comme suit : la somme des angles plans — c'est-à-dire des faces — d'un angle solide droit est égale à trois droits; aussi déclare-t-il qu'elle contient une erreur. « De même que dans une figure plane tous les angles extérieurs pris ensemble valent 4 angles droits; de même dans un corps solide tous les angles solides extérieurs valent 8 angles droits. »

J'ai tenu à faire la citation complète car, dans le texte, j'ai toujours admis que Prouhet avait exactement reconstitué la suite des idées de Descartes, ce qui est contestable et ce à quoi, d'ailleurs, Prouhet ne prétendait pas. Il se flattait

J. Bertrand (*C. R.*, 23 avril 1860) fit remarquer de suite la parenté des considérations de Descartes et de celles de Gauss et de Sophie Germain sur la courbure totale. Cette notion de courbure totale est liée à toutes nos principales connaissances en *Analysis situs*; c'est d'elle que dérivent la plupart des expressions analytiques qui servent dans les démonstrations arithmétisées; c'est elle qui suggère l'emploi des déterminants ou matrices qui nous permettent de distinguer des orientations; c'est elle qui nous fournit le moyen d'écrire parfois qu'un point est intérieur ou extérieur à une surface et qui a conduit à l'indice de Kronecker et à ses multiples généralisations. La démonstration de Descartes, et par suite celle de Legendre, fait donc appel à une notion étrangère à l'*Analysis situs* axiomatique, mais qui a tout particulièrement servi à l'édification même de l'*Analysis situs*.

6. Le troisième reproche paraît autrement grave et sa précision ne semble laisser place à aucune échappatoire. En réalité, il suffit de modifier légèrement le raisonnement de Legendre, de façon à pouvoir imiter des considérations de Poinsot, pour justifier le théorème d'Euler sous la forme générale que lui a donnée Lhuillier (¹).

---

seulement d'avoir correctement interprété le sens mathématique des énoncés de Descartes; ce qui paraît ne faire aucun doute.

Mais je vais plus loin et je crois volontiers que Prouhet a restitué le raisonnement de Descartes; pourquoi Descartes aurait-il appelé angle cette quantité qu'il dit être une courbure s'il ne l'avait figurée géométriquement à peu près comme Prouhet; et comment aurait-il vu, sans cela, que la somme des courbures d'un solide est égale à 8? Remarquez d'ailleurs que la définition de l'angle droit fait appel aux aires sphériques, et même aux aires sphériques de même mesure, donc au théorème d'Albert Girard; auquel doit se référer aussi la phrase peut-être incorrecte sur la somme des angles d'un angle solide droit.

(¹) Poinsot (*Journ. de l'Ec. Polyt.*, cah. 10, 1809) considérant un polyèdre régulier d'espèce supérieur, le projette de son centre sur une sphère concentrique, et, comme le faisait Legendre pour le cas d'un polyèdre convexe, il écrit que l'aire de la surface projection, c'est-à-dire un certain nombre de fois la sphère entière, est la somme des aires des projections de faces. On peut encore dire, en pensant à la forme du raisonnement donnée par Descartes, qu'il évalue la courbure totale du polyèdre polaire. Il obtient ainsi la formule

$$2e = S + F\varphi - A,$$

où e est l'espèce du polyèdre et φ l'espèce des faces. Cette formule n'est valable

Nous supposerons posées la définition d'une surface et celle du genre, et démontré le théorème de Jordan sur l'identité, au point de vue de l'*Analysis situs*, de deux surfaces du même genre. Ce qui revient à dire que nous appellerons surface de genre g toute figure en correspondance ponctuelle biunivoque et bicontinue avec la surface particulière appelée disque à g trous (1); cette surface est constituée par deux domaines plans, identiques, superposés, limités chacun par g contours fermés, extérieurs les uns aux autres et intérieurs à un $(g+1)^{\text{ième}}$ contour fermé; ces deux domaines plans sont soudés l'un à l'autre par les $g+1$ contours frontières, qui servent au passage d'un feuillet plan à l'autre. Il suffit de démontrer la formule de Lhuillier pour un tel disque divisé en polyèdre (2).

Pour utiliser le raisonnement de Legendre, modifions notre disque par les opérations inverses de celles qu'on emploie pour passer d'une surface de Riemann sphérique à un disque : Par une inversion nous transformons les domaines plans en domaines sphériques, puis nous déformons les $g+1$ contours de façon à transformer chacun d'eux en les deux lèvres d'une coupure suivant un axe d'un grand cercle C. Nous arrivons ainsi à deux domaines constitués chacun de toute la sphère coupée suivant les arcs $a_1 b_1$, $a_2 b_2$,.., $a_{g+1} b_{g+1}$ d'un même grand cercle C; il suffit alors de remplacer l'un des domaines par son symétrique par rapport au plan de C pour avoir une surface de Riemann à deux feuillets sphériques et à $2(g+1)$ points de ramification, les points a_i et b_i. L'aire de cette surface, soit deux fois la sphère, est 16; nous allons écrire qu'elle est la somme des aires des faces.

Les faces de notre polyèdre sont limitées par des arcs de Jordan qui, légèrement déformés au besoin, peuvent être supposés des lignes polygonales sphériques. Chacune de nos faces est d'ailleurs, d'après la définition même d'un polyèdre, homéomorphe à un polygone

---

que si les angles solides du polyèdre sont convexes; s'ils sont d'espèce σ, la formule devient

$$2e = S\sigma + F\varphi - A.$$

Rouché et de Comberousse l'ont donnée dans leur *Traité de Géométrie élémentaire*.

(1) C'est-à-dire homéomorphe à cette surface.

(2) Il est inutile de rappeler ici ce que l'on appelle *polyèdre* en *Analysis situs*.

plan convexe; or si, dans un tel polygone ou sur sa frontière, on prend un point et qu'on le joigne par des droites à tous les sommets, on le divise en triangles; l'homéomorphie fait apparaître une division correspondante de la face considérée. Nous pourrons donc admettre que le polyèdre primitif a été remplacé, par subdivision de ses faces, par un polyèdre à faces triangulaires, à côtés quelconques d'abord, puis par répétition de ces subdivisions par un polyèdre dont les faces sont des triangles sphériques ordinaires. Ce dernier polyèdre a même $F + S - A$ que le polyèdre primitif, car il est clair que chaque subdivision ne modifie pas ce nombre.

Cette opération préliminaire n'est pas indispensable; mais à raisonner sur un polyèdre dont les faces sont des triangles sphériques nous avons cet avantage de n'avoir à utiliser que la formule de l'aire du triangle sphérique et non celles qu'on en pourrait déduire relatives aux aires des polygones tracés sur une surface de Riemann à deux feuillets. Pour le polyèdre à faces triangulaires, dont nous nous occupons maintenant, les $2(g + 1)$ points de ramification sont des sommets.

Chaque face a une aire égale à

$$\text{Somme de ses angles} - 2,$$

au total cela donne

$$\text{Somme des angles de toutes les faces} - 2F.$$

Évaluons la somme des angles en groupant ceux de même sommet; un sommet fournit une somme partielle égale à 4 ou 8 suivant que le sommet est point ordinaire ou point de ramification de la surface de Riemann et comme tous les points de ramification sont nécessairement des sommets, nous avons :

$$16 = 4S + 4 \times 2(g + 1) - 2F.$$

F et S sont ici relatifs au polyèdre à faces triangulaires pour lequel

$$3F - 2A = 0,$$

donc la relation précédente qui s'écrit :

$$2S - F = 4 - 4g,$$

donne

$$2S + 2F - 2A = 4 - 4g.$$

Pour le polyèdre à faces triangulaires, donc aussi pour le polyèdre primitif, on a la relation de Lhuillier :

$$F + S - A = 2 - 2g\ (^1).$$

7. Je n'ai pas eu l'intention d'opposer la méthode de Legendre aux méthodes actuelles, à coup sûr préférables ; mais j'ai tenu à protester contre l'oubli trop complet qui se fait autour du raisonnement de Descartes et Legendre, ou contre le dédain manifesté parfois à son égard. C'est pourquoi j'ai rappelé que la méthode était puissante, qu'elle avait les avantages des démonstrations arithmétisées, qu'elle ne faisait appel qu'aux notions auxquelles l'*Analysis situs* a dû jusqu'ici ses plus grands succès. Pour mieux en montrer la puissance, je devrais maintenant faire voir qu'elle s'étend aussi à l'hyperespace et à l'étude de cette généralisation du théorème d'Euler que nous devons à Poincaré ; mais ceci exigerait de longs développements [2], je me contenterai de signaler une Note qui semble être passée inaperçue (*C. R. Acad. Sc.*, 16 janvier 1905) dans laquelle Poincaré étend à l'hyperespace la formule donnée par Albert Giraud en 1629 pour l'aire d'un triangle sphérique ; formule indispensable pour la généralisation de la méthode de Legendre. En développant cette généralisation on ne s'écarte d'ailleurs certainement pas de l'ordre d'idées qui a guidé Poincaré ; il déclare en effet dans sa Note, exactement comme il l'avait fait dans son premier Mémoire sur l'*Analysis situs*, qu'il a surtout en vue le problème de la détermination des groupes finis et le prolongement des résultats de Klein et de Jordan.

8. Laissant de côté les extensions aux espaces supérieurs, pour traiter du moins complètement le cas de l'espace ordinaire, il reste à parler des surfaces unilatères. Dans tout ce qui précède il a toujours été supposé implicitement que les surfaces étaient bilatères, puisqu'il a été question de leur genre. Les considérations suivantes se raccordent bien avec les précédentes, elles ne sont

---

(1) Le même raisonnement, présenté sous la forme de Prouhet-Descartes, se réduirait à écrire que la courbure totale de la surface est 16.

(2) Je leur ai consacré la seconde partie de mon cours du Collège de France en 1922-1923.

toutefois pas relatives spécialement au mode de raisonnement de Legendre.

Nous allons raisonner sur des surfaces unilatères types. Il n'existe pas, je crois, de modèles pour les diverses classes de surfaces unilatères qui soient classiques comme le sont les surfaces à trous. Voici comment, dans mon cours de cette année, j'ai construit des surfaces types dont l'emploi me paraît commode encore qu'il faille, avec elles, renoncer à nos habitudes, car l'élément constituant de ces surfaces n'est plus le point ordinaire de la géométrie, mais certains couples de points ordinaires.

Soit une surface bilatère σ de genre g et ayant un centre de symétrie O ; j'appellerai surface unilatère Σ, déduite de σ, la variété constituée par les couples de points de σ symétriques l'un de l'autre par rapport à O. Cette variété est engendrée par des éléments ayant deux paramètres de liberté, c'est bien une surface ; et l'on vérifie de suite qu'elle est unilatère. Il n'y a pas non plus de difficultés à démontrer que toute surface unilatère est homéomorphe à l'une des variétés Σ. Si donc on part d'une collection de surfaces σ représentatives des divers genres g, on a une collection des types des surfaces unilatères. On pourra prendre, par exemple, pour surfaces σ les divers disques à trous, ayant un centre de symétrie, ou des surfaces de Riemann à centre de symétrie.

Si l'on veut des surfaces types engendrées par des points ordinaires, voici comment l'on peut procéder. Prenons d'abord pour σ une sphère de centre O, au lieu de considérer la variété Σ comme engendrée par les couples de points A, A_1 de la sphère, symétriques par rapport à O, il est équivalent, au point de vue de l'*Analysis situs*, de dire que Σ est engendrée par la droite AOA_1 issue de O [1] ; ou encore, si α est le point où la droite AOA_1 perce un plan fixe P, ne passant pas par O, de dire que Σ est engendrée par α. Sous ce dernier aspect Σ est tout simplement ce que l'on appelle ordinairement le plan projectif P.

Si l'on opère de même à partir d'une surface de Riemann à centre, pour surface σ, on aura, pour Σ, une sorte de surface de

---

(1) J'ai eu l'occasion de faire observer que la variété formée de ces droites introduit dans la géométrie élémentaire les relations de situation délicates qui se présentent dès qu'on a affaire à des surfaces unilatères (*Sur les angles polyèdres*, deux articles de la *Revue de l'Enseignement des Sciences*, 1916).

Riemann constituée par plusieurs plans projectifs. Plus généralement, on peut considérer des surfaces constituées par plusieurs feuillets plans superposés, les uns étant des plans projectifs, les autres étant des plans ordinaires. Deux feuillets donnent tous les types de surfaces bilatères (B impair) s'il s'agit de deux plans ordinaires; les types de surfaces unilatères, pour lesquelles B est impair, s'obtiennent avec deux plans projectifs; celles pour lesquelles B est pair, avec un plan projectif et un plan ordinaire.

Ces indications sont déjà inutilement développées pour ce qui sera utile ici ; il nous suffit de savoir, en effet, qu'une surface unilatère est, en quelque sorte, la moitié d'une surface bilatère. Si l'une de nos surfaces Σ est divisée en polyèdre auquel sont attachés les nombres F, S, A, la surface σ correspondante est divisée en un polyèdre auquel sont attachés les nombres 2F, 2S, 2A, donc on a

$$2F + 2S - 2A = 2 - 2g.$$

Introduisons maintenant la notion de nombre de Betti ; par définition ce nombre B est $2g + 1$ pour σ et $g + 2$ pour Σ, donc pour toute surface, bilatère ou unilatère, la relation s'écrit :

$$F + S - A = 3 - B.$$

II. *Démonstration d'Euler.* — Dans son second Mémoire, Euler a essayé de démontrer le théorème qu'il avait précédemment énoncé, et cela par des procédés ressortissant strictement au domaine de l'*Analysis situs*. Cette démonstration est inacceptable et les objections qu'on peut lui opposer paraissent tout d'abord très graves. C'est pourquoi il y a peut-être quelque intérêt à montrer qu'on peut tirer parti du raisonnement d'Euler pour arriver au résultat cherché.

1. Pour abréger un peu l'exposition schématisée que je vais donner du procédé d'Euler, j'admets qu'en subdivisant au besoin les faces du polyèdre primitif on soit amené à raisonner sur un polyèdre à faces triangulaires. Soient $\mathcal{SA}$, $\mathcal{SB}$, $\mathcal{SC}$, $\mathcal{SD}$, ..., $\mathcal{SK}$, $\mathcal{SL}$ les arêtes successives aboutissant à un même sommet $\mathcal{S}$ de ce polyèdre. Je trace les droites $\mathcal{AC}$, $\mathcal{AD}$, ..., $\mathcal{AK}$. Je supprime le sommet $\mathcal{S}$, les arêtes $\mathcal{SA}$, $\mathcal{SB}$, ..., $\mathcal{SL}$, les faces $\mathcal{SAB}$, ..., $\mathcal{SAL}$; je remplace les arêtes $\mathcal{SC}$, $\mathcal{SD}$, ..., $\mathcal{SK}$ par $\mathcal{AC}$, $\mathcal{AD}$, ..., $\mathcal{AK}$, les faces $\mathcal{SBC}$,

$\mathcal{S}\mathcal{C}\mathcal{D}$, ..., $\mathcal{S}\mathcal{K}\mathcal{L}$ par $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$, $\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{D}$, ..., $\mathcal{A}\mathcal{K}\mathcal{L}$. Donc $F + S - A$ n'a pas varié.

Or nous avons ainsi un sommet de moins. En répétant la même opération, on arrivera à un polyèdre à quatre sommets, à un tétraèdre, pour lequel il est clair que $F + S - A = 2$.

En réalité, les choses ne sont pas aussi simples. Supposons, par exemple, que dans le polyèdre primitif existe l'arête $\mathcal{A}\mathcal{B}$; alors, dans la modification de ce polyèdre, $F + S - A$ aura été augmenté d'une unité ; à moins que l'on ne compte l'arête $\mathcal{A}\mathcal{D}$ comme double. Si la face $\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{D}$ avait existé dans le polyèdre primitif, pour ne rien modifier à notre raisonnement il faudrait compter comme doubles la face $\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{D}$ et les arêtes $\mathcal{A}\mathcal{C}$, $\mathcal{A}\mathcal{D}$. Donc, ou bien l'on compte les éléments comme simples, et $F + S - A$ change parfois au cours des transformations, ce qui empêche de conclure, ou l'on compte certains éléments comme multiples et, si l'on arrive finalement à un tétraèdre, on ne peut affirmer que, pour lui, $F + S - A = 2$, puisqu'il faudrait tenir compte des degrés de multiplicité, inconnus, des éléments de ce tétraèdre.

Au reste, on n'aboutit pas nécessairement à un tétraèdre. Supposons que le polyèdre primitif, d'arêtes $\mathcal{S}\mathcal{A}$, $\mathcal{S}\mathcal{B}$, ..., $\mathcal{S}\mathcal{L}$, soit simplement connexe et que $\mathcal{A}\mathcal{D}$ en soit une arête; après la première modification, suppression du sommet $\mathcal{S}$, nous avons en réalité deux polyèdres réunis par l'arête singulière $\mathcal{A}\mathcal{D}$. Opérons sur $\mathcal{D}$ comme sur $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$ jouant toujours le même rôle, nous aurons deux polyèdres reliés par le seul sommet $\mathcal{A}$. Continuons de façon à ne conserver que quatre sommets, savoir : le sommet $\mathcal{A}$, deux sommets β, γ du premier polyèdre, un δ du second. Notre figure finale n'aura que quatre arêtes $\mathcal{A}\beta$, $\mathcal{A}\gamma$, $\mathcal{A}\delta$, $\beta\gamma$.

2. Ces objections ont dû paraître sérieuses, sinon péremptoires, tant qu'on a conservé au mot polyèdre son sens primitif. Les opérations d'Euler obligent alors à modifier la *surface* du polyèdre et de là viennent toutes les difficultés. Mais maintenant que nous sommes habitués à appeler polyèdre toute division d'une surface en un nombre fini de faces, grâce à un nombre fini d'arêtes, on peut effectuer les modifications considérées par Euler sans modifier la surface sur laquelle on opère et l'on ne rencontre plus de difficultés.

Je commencerai par montrer que $F + S - A$ est le même pour tous les polyèdres déduits d'une même surface, en utilisant un peu plus systématiquement des remarques banales ; puis, grâce au procédé d'Euler, je donnerai une interprétation de ce nombre $F + S - A$. Pour l'emploi de ce procédé, il convient d'élargir un peu le sens donné au mot polyèdre. Sur une surface sont tracés des arcs de Jordan en nombre fini, chacun d'eux sans point multiple ; deux arcs ne peuvent avoir en commun que certaines de leurs extrémités ; toute extrémité est commune au moins à deux arcs ; ces arcs divisent la surface en morceaux et tout arc est nécessaire à la division. Les arcs sont les arêtes, les extrémités sont les sommets, les morceaux sont les faces. Toute face doit être homéomorphe, au sens strict, avec un polygone convexe ; c'est-à-dire qu'il doit y avoir une correspondance ponctuelle biunivoque et continue entre les points de la face, points intérieurs ou frontières, et ceux du polygone. Telle est la définition classique du polyèdre. Nous élargirons la dernière condition en admettant des faces homéomorphes seulement au sens large avec des polygones convexes, c'est-à-dire qu'il pourra être nécessaire pour assurer la correspondance ponctuelle entre la face et un polygone de renoncer à l'unicité de cette correspondance en tous ou certains des sommets de la face ; l'unicité étant respectée aux autres points.

Par exemple, déformons dans l'espace un hexagone de façon à laisser distincts les points primitivement distincts, mais à faire pourtant coïncider deux ou plusieurs des sommets de cet hexagone, la surface ainsi obtenue pourra encore être prise pour face.

Avec cette convention si, dans une face, on trace un arc de Jordan sans point multiple partant du périmètre et y aboutissant, cet arc divise la face primitive en deux nouvelles faces, que les extrémités de l'arc soient ou non différentes, tandis qu'avec le sens plus étroit du mot face ce ne serait vrai que lorsque les extrémités sont différentes. Une telle opération, faite sur une face d'un polyèdre, le transforme en un nouveau polyèdre ayant une face de plus ; si les deux extrémités de l'arc sont différentes, S et A sont augmentés respectivement de deux, une ou zéro unités et de trois, deux ou une unités suivant que zéro, une ou deux des extrémités de l'arc étaient déjà sommets du polyèdre primitif ; si les deux extrémités sont confondues, S et A sont augmentés d'une ou zéro unité et de deux ou une unités suivant que cette extrémité unique n'était pas ou était sommet du polyèdre primitif. Dans tous les cas nous avons transformé le polyèdre en un polyèdre et sans modifier $F+S-A$.

Ceci étant, considérons deux polyèdres P_1, P_2 obtenus par deux subdivisions en faces d'une même surface. Par des modifications extrêmement petites de P_1 et P_2, on peut supposer que les arêtes de ces deux polyèdres ne se coupent qu'en un nombre fini de points et, par une modification qui n'est plus nécessairement petite mais qui est toujours possible de l'une des arêtes, on peut supposer que les arêtes des deux polyèdres ont des points communs. Traçons alors à la fois les arêtes de P_1 et de P_2 ; la figure P_{12} obtenue est un polyèdre. On peut en effet l'obtenir en partant de P_1, en subdivisant une face de P_1 par un arc formé d'arêtes ou de morceaux de P_2, ce qui donne P'_1 ; puis en subdivisant une face de P'_1 par un arc formé d'arêtes ou de morceaux d'arêtes non employés de P_2, cela donne P'_2 ; puis on subdivise une face de P'_2 et ainsi de suite. P_{12} est donc bien un polyèdre ; de plus il a même $F+S-A$ que P_1, P'_1, P'_2, ... Mais P_{12} a également même $F+S-A$ que P_2, donc P_1 et P_2 ont le même $F+S-A$, ce qui démontre notre proposition : $F+S-A$ *est attaché à une surface et non à une division particulière de cette surface en polyèdre.*

3. Reste à interpréter le nombre $F+S-A$, ou plutôt $B=3+A-F-S$, pour aboutir à une définition du nombre de Betti.

Lorsqu'un polyèdre P *a plus d'un sommet on peut subdiviser autrement sa surface de façon à obtenir un polyèdre* P' *ayant un sommet de moins.*

Soit $\mathcal{S}$ un sommet de P ; puisque P a d'autres sommets, il passe par $\mathcal{S}$ une arête au moins contenant un autre sommet. Soit $\mathcal{S}\mathcal{M}\mathcal{S}_1$ une telle arête, et soient $\mathcal{S}_1\mathcal{M}$, $\mathcal{S}_1\mathcal{M}_1$, $\mathcal{S}_1\mathcal{M}_2$, ..., $\mathcal{S}_1\mathcal{M}_p$ les arêtes que l'on rencontre successivement en tournant autour du sommet $\mathcal{S}_1$ dans un certain sens. Sur $\mathcal{S}_1\mathcal{M}_2$, ..., $\mathcal{S}_1\mathcal{M}_p$, prenons des points m_2, ..., m_p voisins de $\mathcal{M}_2$, ..., $\mathcal{M}_p$. Supprimons $\mathcal{S}_1$ et prolongeons $\mathcal{M}_1\mathcal{S}_1$ par l'arc $\mathcal{S}_1\mathcal{M}\mathcal{S}$; supprimons l'arc $m_2\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{M}_2\mathcal{S}_1$ et remplaçons-le par un arc $m_2\mathcal{S}$ très voisin de $m_2\mathcal{S}_1\mathcal{M}\mathcal{S}$; supprimons l'arc $m_3\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{M}_3\mathcal{S}_1$ et remplaçons-le par un arc $m_3\mathcal{S}$

très voisin de $m_3 \mathcal{S}_1 \mathfrak{M} \mathcal{S}$; et ainsi de suite. En prenant ces arcs sans point multiple, ne se coupant pas les uns les autres et ne coupant pas les arêtes conservées de P_1 on obtient le polyèdre P' ([1]).

La construction que nous venons d'effectuer est, à une modification insignifiante près, celle d'Euler. En répétant cette construction, nous pouvons transformer tout polyèdre en polyèdre à un seul sommet. Soit P_1 un tel polyèdre. Supposons que m des arêtes de ce polyèdre P_1 puissent être tracées sans diviser la surface en morceaux, mais qu'on subdivise la surface en traçant de plus toute autre arête ; je dis que $m = B - 1$. En effet, traçons d'abord les m arêtes et à cette figure attachons les nombres $F = 1$, $S = 1$, $A = m$, encore qu'il ne s'agisse pas d'un polyèdre. Traçons une $(m+1)^{\text{ième}}$ arête, $S = 1$, $A = m + 1$; la surface est subdivisée par hypothèse en au moins deux morceaux, et en deux morceaux seulement puisque la $(m+1)^{\text{ième}}$ arête doit faire partie de la frontière des morceaux et que cette arête n'a que deux bords ([2]) ; nous poserons $F = 2$, encore que les morceaux ne soient pas nécessairement des faces.

Traçons une $(m+2)^{\text{ième}}$ arête, $S = 1$, $A = m + 2$; cette arête est dans l'un des deux morceaux déjà obtenus et elle le subdivise, sans quoi tracée seule avec les m premières arêtes, elle n'eût pas subdivisé la surface ; en deux morceaux seulement, car elle n'a que deux bords. Donc nous avons trois morceaux, posons $F = 3$. En continuant ainsi, nous arriverons à tracer P_1 et pour lui nous aurons

$$S = 1, \qquad A = m + p, \qquad F = p + 1,$$

si P_1 a $m + p$ arêtes.

Donc

$$F + S - A = 2 - m = 3 - B; \qquad B = m - 1.$$

([1]) Ces constructions rentrent dans la catégorie de celles dont on admettait jadis la possibilité sans démonstration, en se référant au bon sens. Actuellement cette possibilité découle des recherches sur les courbes de Jordan et les homéomorphies du plan ; il existe en effet une homéomorphie transformant une partie de la surface considérée, contenant l'arc $\mathcal{S}\mathfrak{M}\mathcal{S}_1$ à son intérieur, en une aire plane, l'arc $\mathcal{S}\mathfrak{M}\mathcal{S}_1$ et les portions des arêtes aboutissant en $\mathcal{S}$ et en $\mathcal{S}_1$, qui sont assez voisines de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{S}_1$, en segments rectilignes.

([2]) Malgré que les deux extrémités de cette arête soient confondues, elle doit être considérée comme un arc ouvert et non comme un contour fermé et c'est pourquoi elle a toujours deux bords que la surface soit bilatère ou non. Au reste, ici, il s'agit de prouver seulement qu'il n'y a pas plus de deux morceaux.

Élargissons un peu la propriété ainsi démontrée. *Si l'on a pu tracer sur une surface m contours ne se coupant les uns les autres qu'en un seul point* $\mathcal{S}$, *ne divisant pas la surface en morceaux et tels que tout autre contour, ne coupant les m premiers qu'en* $\mathcal{S}$, *tracé en plus de ceux-ci divise la surface en morceaux, le nombre de Betti* B *de la surface est égal à* $m + 1$ (¹).

En effet, traçons en plus des m contours C, les arêtes d'un polyèdre p provenant de la surface, choisi seulement de manière que les contours et les arêtes ne se coupent qu'en un nombre fini de points et se coupent effectivement en au moins un point; nous avons ainsi un polyèdre P dans lequel les contours C apparaissent comme formés d'arêtes. Par le procédé d'Euler déduisons de P un polyèdre P_1 n'ayant que le sommet $\mathcal{S}$. Si chaque fois que nous supprimons au sommet $\mathcal{S}_1$ de l'un des contours C, nous faisons jouer aux deux côtés qui aboutissent en $\mathcal{S}$, le rôle joué par les deux côtés $\mathcal{S}_1\mathcal{M}\mathcal{S}$, $\mathcal{S}_1\mathcal{M}_1$ au début de ce numéro, nous arriverons à un polyèdre P_1 admettant, en particulier, les m contours C comme des arêtes. Donc il résulte de ce qui précède que $B = m + 1$.

Ainsi, nous avons défini le nombre de Betti B et prouvé que l'on a

$$F + S - A = 3 - B;$$

la démonstration (²) qui nous y a conduit diffère à peine de certaines de celles qu'on emploie maintenant; aussi fait-elle bien voir, il me semble, combien nos procédés actuels sont proches des considérations qui se sont présentées à Euler quand, le premier, il s'occupa de ces questions.

4. Dans une Note récente (*C. R.*, 3 septembre 1923) M. A. Errera s'est occupé d'un problème d'*Analysis situs* dont la solution peut être déduite du théorème d'Euler, mais qu'il a tout d'abord résolu directement. Le rapprochement de ses deux solutions fournit une démonstration du théorème d'Euler que je rapporte ici, en me bornant pour simplifier au cas des surfaces simplement connexes, parce

(¹) Il n'y aurait aucune difficulté à passer de là à des définitions plus ordinaires du nombre de Betti, mais ceci sortirait vraiment du sujet.

(²) Il est clair que, si l'on s'était borné au cas des surfaces simplement connexes, la conclusion eût été très rapidement acquise.

qu'elle est aussi basée sur une méthode de réduction qui fait intervenir des polyèdres ayant de moins en moins de sommets.

Considérons une division de la sphère en polyèdre ; contrairement à ce que nous avions fait tout à l'heure, nous exigeons des faces qu'elles soient homéomorphes, au sens strict, avec un polygone convexe. Dans chaque face et sur chaque arête prenons un point, ce seront de nouveaux sommets, subdivisons chaque face en quadrilatères en joignant le point pris à l'intérieur de chaque face aux points pris sur les arêtes de cette face par des arcs intérieurs à la face, ne se coupant pas les uns les autres, qui seront de nouvelles arêtes. Nous remplaçons ainsi le polyèdre primitif par un autre à faces quadrilatères ; et l'on vérifie de suite que $F + S - A$ n'a pas changé dans cette opération.

Notons que notre nouveau polyèdre satisfait à la condition suivante que j'appellerai condition d'unicité : *deux sommets ne sont jamais joints par plus d'une arête*. Ceci étant, montrons que : *pour démontrer que* $F + S - A = 2$ *pour une divivion* D *de la sphère satisfaisant à la condition d'unicité, il suffit, si cette division a plus de quatre sommets, de le démontrer pour des divisions, satisfaisant à la condition d'unicité, et ayant moins de sommets que* D.

Supposons que deux quadrilatères Q, Q′ aient en commun deux sommets opposés ; Q sera par exemple, $A_1B_2A_2B_2'$, Q′ sera $A_1B_1A_2B_1'$. Si l'on enlève Q et Q′ de la sphère, il reste deux calottes C et C′ (1) ; nous supposerons que $A_1B_1A_2B_2$ est la frontière de C ; celle de C′ sera $A_1B_1'A_2B_2'$. Considérons en plus de la division D, la division d formée des quadrilatères de D contenues dans C et du quadrilatère constitué par la réunion de Q, Q′ et C′,

la division d' formée des quadrilatères de D contenus dans C′ et du quadrilatère constitué par la réunion de Q, Q′ et C. Aux divisions D, d, d', sont attachés des nombres F, S, A ; f, s, a ; f', s', a'.

On a

$$F = f + f', \qquad S = s + s' - 2, \qquad A = a + a' ;$$

donc

$$F + S - A - 2 = (f + s - a - 2) + (f' + s' - a' - 2),$$

(1) C'est cette partie du raisonnement qu'il conviendrait de modifier pour traiter le cas des surfaces à connexion multiple.

et il suffit de démontrer que les parenthèses du second membre sont nulles. La réduction est effectuée; les nouvelles divisions à considérer satisfont bien à la condition d'unicité.

Toutefois le raisonnement suppose essentiellement que B_1 et B_2 ne coïncident pas, non plus que B'_1 et B'_2. Supposons que B_1 et B_2 coïncident; alors, d'après la condition d'unicité, A_1B_1 et A_1B_2 sont confondues de même que A_2B_1 et A_2B_2. Alors le sommet B_1B_2 n'est commun qu'à deux faces; c'est un sommet d'ordre 2 que l'on peut supprimer ainsi que les deux arêtes qui y aboutissent réunissant ainsi Q et Q', la réduction est effectuée; la nouvelle division à considérer satisfait bien à la condition d'unicité.

Pourtant ceci suppose que $Q + Q'$ ou $A_1B'_1A_2B'_2$ soit un quadrilatère, c'est-à-dire que B'_1 et B'_2 soient distincts. Mais s'ils étaient confondus, $A_1B'_1$ et $A_1B'_2$ seraient confondus, d'après la condition d'unicité, ainsi que $A_2B'_1$ et $A_2B'_2$; la division D ne comprendrait que les deux quadrilatères Q et Q', elle n'aurait que quatre sommets, il n'y aurait pas à rechercher de réduction.

Supposons maintenant que le cas de réduction que nous venons d'examiner ne se présente pas pour la division D, un artifice qui joue le rôle essentiel dans la Note de M. Errera va nous permettre de déduire de D une autre division ayant mêmes F, S, A et pour laquelle le cas de réduction se présente. Pour cela, remarquons que les faces étant à quatre côtés, tout contour fermé formé d'arêtes en contient un nombre pair [1]; les sommets se répartissent par suite naturellement en deux classes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$; les sommets d'une même classe étant joints les uns aux autres par des chemins constitués par un nombre pair d'arêtes et à ceux de l'autre classe par des chemins constitués par un nombre impair d'arêtes. La division D étant formée de quadrilatères contient au moins deux points $\mathcal{A}$ et deux points $\mathcal{B}$. Si, comme nous le supposons, le cas de réduction ne se présente pas pour elle, elle n'a pas de sommet d'ordre 2, donc elle contient au moins trois points $\mathcal{A}$ et trois points $\mathcal{B}$.

Soit A_0 l'un des sommets $\mathcal{A}$; en A_0 aboutissent au moins trois faces; supposons, par exemple, que nous ayons les faces $A_0B_1A_1B_2$, $A_0B_2A_2B_3$, $A_0B_3A_3B_4$, $A_0B_4A_4B_1$. L'ensemble de ces faces est limité par un polygone ayant toujours au moins six côtés; dans

[1] Ici encore intervient l'hypothèse que le polyèdre est simplement connexe.

exemple, c'est le polygone $B_1 A_1 B_2 A_2 B_3 A_3 B_4 A_4$ à huit côtés. Tous ces côtés sont distincts, car tous les sommets le sont : deux des B_i sont en effet distincts, d'après la condition d'unicité, comme reliés au même sommet A_0; deux des A_i sont distincts comme opposés, dans deux quadrilatères, au même sommet A_0, puisque le cas de réduction ne se présente pas. L'ensemble des quadrilatères de sommet A_0 est donc homéomorphe à un polygone plan convexe, ce qui montre la possibilité des opérations suivantes : nous effaçons les arêtes $A_0B_1, A_0B_2, A_0B_3, A_0B_4$ et nous traçons de nouvelles arêtes $A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, A_0A_4$, sortes de diagonales des quadrilatères primitifs. Il est clair qu'ainsi ni F, ni S, ni A n'a été modifié et que la condition d'unicité est remplie pour la nouvelle division D'. Or, dans D', A_0 est passé dans la classe $\mathcal{B}$, les autres sommets n'ayant pas changés de classe.

Si, pour D', le cas de réduction ne se présente pas, nous recommencerons avec un autre sommet de la classe $\mathcal{A}$. Le nombre des sommets $\mathcal{A}$ sera alors réduit de deux unités, celui des $\mathcal{B}$ augmenté de deux unités. Et nous continuerons ainsi à diminuer le nombre des points $\mathcal{A}$ jusqu'à ce que nous rencontrions le cas de réduction ou, s'il ne se présente pas, jusqu'à ce que le nombre des $\mathcal{A}$ soit réduit à 2. Mais, à ce moment, le cas de réduction se présenterait car tous les sommets $\mathcal{B}$ seraient d'ordre 2.

Ainsi nous sommes ramenés simplement à vérifier la formule $F + S - A = 2$ pour une division de la sphère en deux quadrilatères : $F = 2$, $S = A = 4$.