P. FATOU

Sur les frontières de certains domaines

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 16-22
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__16_1>

SUR LES FRONTIÈRES DE CERTAINS DOMAINES;

PAR M. P. FATOU.

Nous nous proposons de compléter ici, sur quelques points, les faits établis dans notre Mémoire sur les équations fonctionnelles (*Bulletin de la Société mathématique*, 1919-1920, Chap. III, IV et V), concernant les frontières des domaines de convergence des itérées d'une fraction rationnelle [1].

---

[1] *Voir* aussi G. JULIA, *Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 7e série, t. IV, 1918, p. 189 et suiv.).

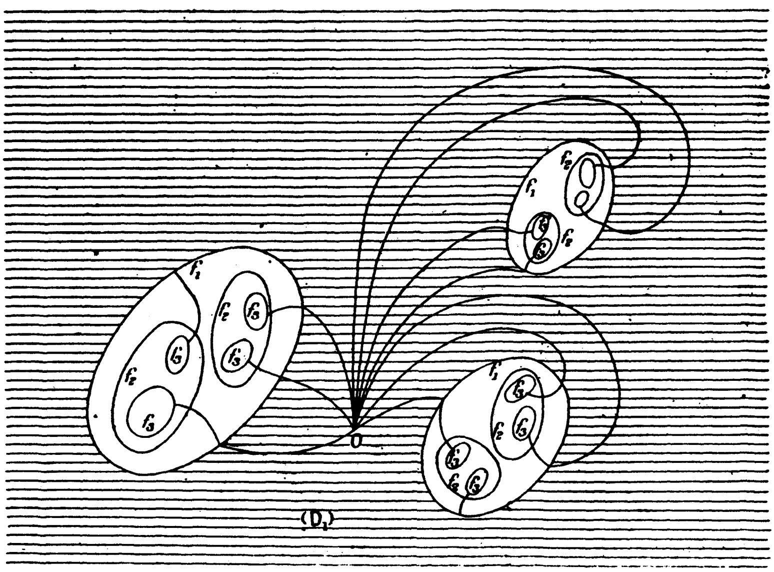
Considérons une suite infinie de domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ jouissant des propriétés suivantes :

1° D_n est complètement intérieur à D_{n+1}, ce qui s'exprime par l'inégalité

$$D_n < D_{n+1};$$

2° La frontière f_n de D_n est constituée par un nombre fini de courbes fermées simples extérieures les unes aux autres, tout entières à distance finie ; nous supposerons même, pour plus de clarté, que chacune de ces courbes est constituée par un seul arc régulier de courbe analytique ;

3° On peut joindre chaque point de f_{n+1} à un point de f_n par un arc de courbe compris (sauf ses extrémités) dans la partie de D_{n+1} extérieure à D_n, et la longueur de cet arc est inférieure à un nombre ε_n, fonction de n seul, tel que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit convergente.



Soit alors D *le domaine limite de* D_n. *Je dis que la frontière* f *de* D *a tous ses points accessibles par des arcs de longueur finie.*

Soit p un point de f, c'est-à-dire un point limite de points appartenant respectivement à des f d'indice croissant. Soit q_n le point de f_n le plus rapproché de p, la distance $\delta_n = p q_n$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On peut joindre q_n à un point q_{n-1} de f_{n-1} par un arc de longueur inférieure à ε_{n-1} compris dans $(D_n - D_{n-1})$; on peut joindre q_{n-1} à un point q_{n-2} de f_{n-2} par un arc $< \varepsilon_{n-2}$ situé dans $(D_{n-1} - D_{n-2})$, et ainsi de suite. On peut enfin joindre q_1 à un point O intérieur à D_1 par un arc $< \varepsilon_0$ situé dans D_1.

On forme ainsi un arc γ_n joignant O à un point de f_n qui est infiniment voisin de p pour n infiniment grand; γ_n est contenu dans D_n; c'est un arc simple, rectifiable, de longueur inférieure à $l = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots$. On peut représenter les points de cet arc par les équations

$$x = f_n(t),$$
$$y = \varphi_n(t),$$

f_n et φ_n désignant des fonctions continues, t un paramètre réel qui varie de o à 1; on peut prendre, par exemple, $t = \frac{s}{\lambda_n}$, s étant la longueur de l'arc compris entre O et (x, y), λ_n la longueur totale de γ_n. Pour deux points (x, y) (x', y') de la courbe, on a

$$|x' - x| < |s' - s| = \lambda_n |t - t'| < l |t - t'|,$$
$$|y' - y| < l |t - t'|,$$

d'où il résulte que les fonctions f_n et φ_n sont, au sens d'Arzelà, des fonctions *également continues*. De la suite des fonctions f_n, φ_n on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans l'intervalle fermé (o, 1) vers $f(t)$, $\varphi(t)$; on définit ainsi une courbe γ,

$$x = f(t),$$
$$y = \varphi(t),$$

limite des courbes $\gamma_{n_1}, \gamma_{n_2}, \ldots, \gamma_{n_p}, \ldots$; il est visible que γ joint le point O au point p; je dis que tous les points de γ sauf p sont intérieurs à D; en effet, la partie de γ_n extérieure au domaine $D_{n'}$ a une longueur inférieure à

$$\varepsilon_{n'} + \varepsilon_{n'+1} + \ldots + \varepsilon_n < \varepsilon_{n'} + \varepsilon_{n'+1} + \ldots = r_{n'},$$

$r_{n'}$ reste de la série convergente $\Sigma\varepsilon_{n'}$, infiniment petit avec $\frac{1}{n'}$. Soit alors $0 < \theta < 1$; appelons m_n le point de coordonnées $f_n(\theta)$, $\varphi_n(\theta)$ et q_n l'extrémité de γ_n. On a, en remarquant que $\lambda_n > \lambda > 0$:

$$\text{arc}\, m_n q_n = \lambda_n - s = \lambda_n(1-\theta) > \lambda(1-\theta).$$

On peut prendre n' assez grand pour que

$$\lambda(1-\theta) > r_{n'}$$

et, par suite,

$$\text{arc}\, m_n q_n > r_{n'},$$

quel que soit n; l'arc $m_n q_n$ est, *a fortiori*, plus grand que l'arc (unique) de γ_n extérieur à $D_{n'}$; donc le point m_n est intérieur à $D_{n'}$. Ainsi les points

$$x_n = f_n(\theta),$$
$$y_n = \varphi_n(\theta)$$

sont tous intérieurs à un domaine $D_{n'}$, n' indépendant de n. Leurs points limites, en particulier le point

$$x = f(\theta),$$
$$y = \varphi(\theta),$$

sont donc intérieurs à $D_{n'}$ ou sur son contour et, par conséquent, intérieurs à D. Nous avons donc obtenu une courbe intérieure à D joignant O à p et dont la longueur est au plus égale à l.

C. Q. F. D.

On doit remarquer, à ce sujet, qu'un domaine tel que deux quelconques de ses points puissent être joints par une ligne intérieure dont la longueur reste bornée peut néanmoins présenter sur sa frontière des points inaccessibles; c'est ce qu'on verra en considérant, par exemple, un domaine dont la frontière comprend la courbe $y = \sin\frac{1}{x}$ $(0 < x \leqq 1)$ et, bien entendu, le segment $(-1, +1)$ de l'axe des y, qui est la limite des sinuosités de cette courbe; les points de ce segment, sauf les extrémités, sont inaccessibles, bien que le minimum de longueur des lignes intérieures au domaine joignant un point intérieur O à un point également intérieur et infiniment voisin du segment $(-1, +1)$ reste borné.

Inversement, il peut y avoir sur une frontière des points accessibles mais seulement par des chemins de longueur infinie; on le verra facilement en considérant la spirale hyperbolique $\rho\omega = 1$.

Nous pouvons considérer, en particulier, le cas où les f_n sont formées d'une seule courbe, c'est-à-dire où les domaines D_n et D sont simplement connexes; f est alors un continu; il y a des cas où l'on voit aisément que c'est une courbe de Jordan simple; par exemple quand f, limite des courbes $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ comprises chacune à l'intérieur de la précédente est également limite d'une suite de courbes $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ intérieures chacune à la suivante, et intérieures également à toutes les courbes f_n; si les courbes f_n et φ_n jouissent de toutes les propriétés énoncées plus haut, on voit que f partage le plan en deux régions et que tous ses points sont accessibles tant de l'intérieur que de l'extérieur; c'est alors une courbe de Jordan sans points doubles, comme l'a démontré M. Schœnfliess.

Appliquons ceci aux domaines que l'on rencontre dans l'étude de la convergence des itérées d'une fraction rationnelle. Soit α un point racine de $R(z) = z$ avec $|R'(\alpha)| < 1$; il existe un domaine circulaire de centre α qui contient ses conséquents; appelons-le D_0. Je considère le domaine antécédent immédiat de D_0 qui contient D_0, soit D_{-1} ce domaine, qui est le transformé de D_0 par une branche de la fonction inverse $R_{-1}(z)$, c'est-à-dire par une substitution algébrique; de D_{-1} on déduira de même D_{-2}, puis $D_{-3}, \ldots$. On sait ou l'on démontre immédiatement que

$$D_0 < D_{-1} < D_{-2} < \ldots.$$

On peut d'ailleurs supposer, sans nuire à la généralité, que les domaines D_{-p} contiennent le point à l'infini. Ces domaines jouissent alors des propriétés 1° et 2°. On peut ensuite joindre chaque point frontière de D_{-1} à un point de la circonférence initiale par un arc de courbe analytique dont la longueur ne dépasse pas une quantité fixe ε_0; on en déduira, en effectuant les substitutions $R_{-n}(z)$, des courbes joignant chaque point de la frontière de D_{-n} à un point de la frontière de $D_{-(n-1)}$, en restant comprises dans la ou les régions $[D_{-n} - D_{-(n-1)}]$. Si l'on a dans toutes ces régions, à partir d'une certaine valeur de n, l'inégalité

$$|R'(z)| > K > 1,$$

on en déduira, par un raisonnement facile employé à maintes reprises dans notre Mémoire cité, que les quantités jouant le rôle des ε_n de l'énoncé du lemme initial décroissent comme les termes d'une progression géométrique convergente. La frontière f du domaine D, limite de D_{-n}, a donc tous ses points accessibles par des chemins de longueur finie. La condition $|R'(z)| > k > 1$ est d'ailleurs vérifiée dans des cas généraux, c'est-à-dire sans qu'il y ait de relations particulières entre les coefficients (*Bull. Soc. math. Fr.*, 1919, p. 258-259, et 1920, p. 72-73).

Dans le cas plus particulier où les points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$ appartiennent tous à l'un ou à l'autre des domaines immédiats D et D' de deux points doubles attractifs α et α', on a (*loc. cit.*, 1919, p. 260-267) une division du plan en deux régions séparées par une courbe de Jordan. Nous avons obtenu, dans ce cas, une représentation de la courbe f par une expression de la forme

$$z = x + iy = F_1(t) + iF_2(t) = F(t),$$

la fonction $F(t)$ vérifiant les équations

$$\begin{aligned} &R[F(t)] = F(mt) \qquad (m, \text{ degré de } R), \\ &F(t+1) = F(t). \end{aligned}$$

La méthode précédente ne donne pas un résultat aussi précis, mais possède l'avantage de s'appliquer à des cas où la frontière est discontinue, le domaine D étant alors d'ordre de connexion infini.

En se reportant au Mémoire cité, on obtient, en définitive, le résultat suivant : soit E'_c l'ensemble dérivé des conséquents des points critiques de la fonction $R_{-1}(z)$; si E'_c ne renferme que des points doubles ou périodiques de multiplicateur < 1 en module (et qui sont nécessairement en nombre fini), le plan complexe se subdivise en régions où les itérées $R_n(z)$ convergent régulièrement ou périodiquement vers les affixes de ces points doubles ou périodiques, régions dont tous les points frontières sont accessibles et même par des courbes de longueur finie pourvu que les ensembles frontières soient bornés. Ces régions peuvent être en nombre infini, mais sont les antécédents d'un nombre fini d'entre elles auxquelles s'applique la démonstration qui précède, le résultat étant encore exact pour les régions antécédentes déduites de celles-ci par des transformations algébriques qui n'ont pas de points critiques sur les frontières.

C'est là une circonstance très générale, mais il y aurait lieu de démontrer que c'est bien le cas le plus général; voici ce que j'entends par là; représentons une fraction rationnelle de degré m qui possède $2m+1$ coefficients arbitraires par un point de l'espace E_{4m+2}; l'ensemble des points pour lesquels on n'est pas dans le cas précédent est un ensemble fermé qui n'est dense nulle part. Je ne suis pas parvenu jusqu'ici à démontrer ce théorème, que je considère comme devant être exact.