

BULLETIN DE LA S. M. F.

H. GALBRUN

**Sur certaines solutions exceptionnelles d'une
équation linéaire aux différences finies**

Bulletin de la S. M. F., tome 49 (1921), p. 206-241

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1921__49__206_0

© Bulletin de la S. M. F., 1921, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

pondre une fonction méromorphe $f_j(x)$, solution de l'équation aux différences finies (1). Pour les grandes valeurs de la variable, ces fonctions sont représentées asymptotiquement par des séries de la forme

$$(9) \quad \frac{\alpha_i^x}{x^{\lambda_i}} \left[A_{0,i} + \frac{A_{1,i}}{x} + \dots + \frac{A_{\nu,i}}{x^\nu} + \dots \right].$$

Nous examinerons ici ce que deviennent ces résultats quand le polynôme B_0 admet une racine double au voisinage de laquelle les solutions de (7) sont irrégulières.

I.

Il nous faut tout d'abord rappeler comment se comportent les solutions de l'équation différentielle (7) au voisinage de cette racine double (2).

Posons

$$(10) \quad \gamma = a - \frac{1}{t}, \quad \varphi(\gamma) = \psi(t).$$

On a

$$(11) \quad \frac{d^n \varphi}{du^n} = b_{n,0} t^{2n} \frac{d^n \psi}{dt^n} + b_{n,1} t^{2n-1} \frac{d^{n-1} \psi}{dt^{n-1}} + \dots \\ + b_{n,p} t^{2n-p} \frac{d^{n-p} \psi}{dt^{n-p}} + \dots + b_{n,n-1} t^{n+1} \frac{d\psi}{dt},$$

les coefficients $b_{n,p}$ étant définis par la formule

$$(12) \quad b_{n,p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} (n-1)(n-2)\dots(n-p).$$

L'équation (7) devient ainsi

$$(13) \quad M_0 \frac{d^q \psi}{dt^q} + M_1 \frac{d^{q-1} \psi}{dt^{q-1}} + \dots + M_q \psi = 0,$$

(1) Voir *Sur la représentation des solutions d'une équation aux différences finies linéaire pour les grandes valeurs de la variable* (*Acta mathematica*, t. XXXVI).

(2) Voir POINCARÉ, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires* (*Acta mathematica*, t. VIII, 1886).

première solution de l'équation (13). On choisit les $q - 1$ solutions $\gamma_i(z)$ correspondant aux $q - 1$ racines non entières de l'équation déterminante relative à l'origine; le contour d'intégration se compose d'un lacet formé par un petit cercle entourant l'origine et de la demi-droite Ob ; on évite le point b par un demi-cercle tourné soit du côté des arguments croissants, soit du côté des arguments décroissants. Les $(q - 1)$ fonctions $\psi(t)$ déduites ainsi de la relation (16) sont solutions de l'équation (13).

Au total on a formé q solutions de (13) qui sont indépendantes. De plus, on sait former des séries, en général divergentes, qui représentent ces q fonctions pour les grandes valeurs de t .

Si l'on désigne par $-\omega$ l'argument avec lequel t devient infini dans son plan, par β l'argument de b , la fonction $\psi_1(t)$ est représentée asymptotiquement par :

$$(18) \quad \psi_1(t) = \frac{e^{-bt}}{t^{\mu+1}} \left[a_0 + \frac{a_1}{t} + \dots + \frac{a_n}{t^n} + \frac{\varepsilon}{t^n} \right]$$

quand l'argument ω reste dans les limites

$$\beta - \frac{3\pi}{2} < \omega < \beta + \frac{3\pi}{2}.$$

D'autre part, les fonctions $\psi(t)$, déduites de l'intégration le long du lacet entourant l'origine, sont représentées par des séries analogues, où b est nul, quand l'argument ω reste dans les limites

$$\beta - \frac{\pi}{2} < \omega < \beta + \frac{\pi}{2}.$$

Les dérivées des fonctions $\psi(t)$ sont représentées asymptotiquement par des séries analogues.

Dans le plan des y considérons un petit cercle ayant le point a pour centre; soit d le point situé entre l'origine et le point a , où ce cercle coupe la droite Oa ; on a

$$t = \frac{e^{i\pi}}{y - a}.$$

Quand le point t s'éloigne à l'infini dans son plan avec l'argument $-\omega$, le point y décrit un rayon du cercle et tend vers le

point a ; l'argument ω' de $y - a$ est

$$\omega' = \pi + \omega.$$

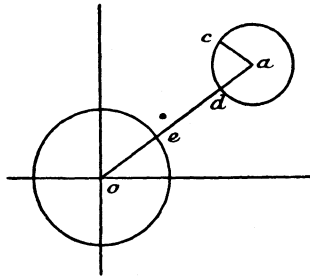
Considérons un rayon ac du cercle tel que

$$\beta - \frac{3\pi}{2} < \omega < \beta + \frac{3\pi}{2},$$

c'est-à-dire tel que

$$\beta + \pi - \frac{3\pi}{2} < \omega' < \beta + \pi + \frac{3\pi}{2}.$$

Fig. 1.



A la fonction $\psi_1(t)$ correspond par le changement de variable (10) une fonction $\varphi_1(y)$, telle que, quand y tend vers a le long de ac , on ait

$$\gamma_1(y) = e^{\frac{h}{y-a}} \frac{(y-a)^{\mu+1}}{e^{i\pi(\mu+1)}} [a_0 - a_1(y-a) \dots (-1)^n a_n (y-a)^n + \varepsilon (y-a)^n].$$

Si le rayon ac est choisi de telle sorte que

$$\beta + \pi - \frac{\pi}{2} < \omega' < \beta + \pi + \frac{\pi}{2},$$

le module de $\varphi_1(y)$, ainsi que celui de ses différentes dérivées, tend vers zéro comme $e^{-\frac{h}{r}}$, h étant un nombre positif et r le module de $y - a$, qui tend vers zéro.

II.

Pour former une solution de l'équation aux différences finies, on peut donc procéder de la façon suivante :

Le contour d'intégration S_1 est constitué par le rayon ac , l'arc

de cercle cd parcouru en sens direct et la portion de droite de [*fig. 1*]. Si I_1 est la fonction de x définie par

$$I_1 = \int_{s_1} \gamma^{x-1} \varphi_1(\gamma) d\gamma,$$

on a

$$F[I_1] = M[\varphi_1(e)].$$

Supposons que le point e soit suffisamment voisin de l'origine pour que le cercle Γ de rayon Oe , ayant l'origine pour centre, ne contienne à son intérieur aucune racine finie de B_0 .

Quand l'équation fondamentale relative à l'origine, pour l'équation (7), admet les q racines simples $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_q$, on peut former q solutions indépendantes de (7) $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_q$, qui par une rotation dans le sens direct le long de Γ deviennent respectivement $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2, \dots, \bar{\nu}_q$ tels que

$$\bar{\nu}_1 = \varpi_1 \nu_1, \quad \bar{\nu}_2 = \varpi_2 \nu_2, \quad \dots, \quad \bar{\nu}_q = \varpi_q \nu_q.$$

Quand l'équation fondamentale admet des racines multiples, on peut former q solutions indépendantes ν_1, \dots, ν_q , qui se répartissent en autant de groupes qu'il y a de racines distinctes et les l solutions du groupe, correspondant à la racine ϖ_i d'ordre de multiplicité l , deviennent par une rotation le long de Γ dans le sens direct

$$\bar{\nu}_1 = \varpi_1 \nu_1, \quad \bar{\nu}_2 = \varpi_{2,1} \nu_1 + \varpi_1 \nu_2, \quad \dots, \quad \bar{\nu}_l = \varpi_{l,1} \nu_1 + \dots + \varpi_1 \nu_l.$$

Dans les deux cas, on peut former q solutions indépendantes V_j , qui, par une rotation autour de l'origine le long de Γ dans le sens direct, deviennent \bar{V}_j tel que

$$e^{2i\pi x} \bar{V}_j - V_j = \nu_j.$$

Ces fonctions V_j sont des fonctions linéaires des ν_j , dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de $e^{2i\pi x}$. Ces coefficients ne contiennent en dénominateur que des expressions de la forme $\varpi_j e^{2i\pi x} - 1$ (1).

On a donc

$$M[\bar{V}_j] - M[V_j] = M[\nu_j];$$

(1) *Acta mathematica*, t. XXXVI.

et si l'on pose

$$I_2 = \int_{\Gamma} y^{x-1} [c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q] dy,$$

il vient

$$F[I_2] = M[c_1 v_1(e) + c_2 v_2(e) + \dots + c_q v_q(e)].$$

Si les constantes c_1, c_2, \dots, c_q sont choisies de telle sorte, qu'au voisinage de e , on ait

$$\varphi_1(y) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_q v_q,$$

la fonction

$$(19) \quad f_1(x) = I_1 - I_2$$

est une solution de l'équation aux différences finies (1).

On aurait pu, au lieu du contour S_1 , choisir le contour S_2 constitué par le même rayon ac , l'arc cd joignant le point c au point d sur la circonférence parcourue cette fois en sens inverse et la portion de droite de ; la valeur de $S_1(y)$ au point e est alors

$$\overline{\varphi_1(y)} = c'_1 v_1 + c'_2 v_2 + \dots + c'_q v_q,$$

et la fonction $f_2(x)$

$$(18) \quad f_2(x) = \int_{S_2} y^{x-1} \varphi_1(y) dy - \int_{\Gamma} y^{x-1} [c'_1 V_1 + c'_2 V_2 + \dots + c'_q V_q] dy$$

est une seconde solution de l'équation aux différences finies.

Les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent manifestement des propriétés générales des différentes solutions $f_j(x)$ de l'équation aux différences finies correspondant aux racines α_j de B_0 au voisinage desquelles les solutions de (7) sont régulières; elles sont méromorphes et leurs pôles, racines de l'équation

$$\omega e^{2i\pi x} = 1 = 0,$$

où ω est une racine de l'équation fondamentale de (7) relative à l'origine, sont situés sur des parallèles à l'axe des abscisses.

Il reste à rechercher la façon dont elles se comportent quand le point x s'éloigne à l'infini.

III.

Pour étudier les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, nous diviserons les contours d'intégration tels que S_1 , en plusieurs parties.

Considérons tout d'abord une région du plan des y , voisine de a , et dans laquelle on a

$$\varphi_1(y) = e^{\frac{b}{y-a}}(y-a)^\mu [a_0 + a_1(y-a) + \dots + a_n(y-a)^n + \varepsilon(y-a)^n],$$

et posons

$$y = a(1 + e^{i\pi} z);$$

il vient

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = -a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \int (1-z)^{x-1} e^{-\frac{k}{z}} z^\mu [a_0 - a_1 a z \dots] dz$$

avec

$$k = \frac{b}{a}.$$

Posons

$$z = \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u,$$

et désignons par z_0 et y_0 le point du plan des z et celui du plan des y correspondant à $u = 1$.

Quand le point x s'éloigne à l'infini, le point y_0 tend vers le point a et le module de $y_0 - a$ tend vers zéro comme $\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}$, ρ étant le module de x ; il vient

$$\begin{aligned} & \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ &= -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} \\ & \quad \times \int \left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} u^\mu e^{-\left(\frac{kx}{v}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[a_0 - a_1 a \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u + \dots\right] du. \end{aligned}$$

L'intégrale du premier membre sera prise sur une portion de droite contenant le point y_0 ; l'intégrale du second membre sera prise alors sur une portion de droite contenant le point 1; or nous serons amené à poser

$$u = 1 + v,$$

le module maximum de v sur le chemin d'intégration tendant vers zéro comme une puissance négative de ρ , quand ρ augmente indéfiniment.

Le module de u reste donc fini sur tout le contour d'intégration et quand ρ est suffisamment grand, on a

$$\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^x = e^{-\left(kx\right)^{\frac{1}{2}} u - \frac{ku^2}{2}} \left[1 + \frac{b_1(u)}{x^2} + \dots + \frac{b_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \dots\right],$$

la série du second membre étant convergente. Le coefficient $b_n(u)$ est un polynome en u dont les termes ont tous un degré de même parité que n ; le terme de plus haut degré est de degré $3n$ et le terme de plus bas degré est de degré $n+2$. De même, quand ρ est suffisamment grand, la fonction $\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{-1}$ se développe suivant les puissances croissantes de $\frac{u}{x^{\frac{1}{2}}}$; on a donc

$$\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} = e^{-\left(kx\right)^{\frac{1}{2}} u - \frac{ku^2}{2}} \left[1 + \frac{c_1(u)}{x^2} + \dots + \frac{c_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \dots\right].$$

Le coefficient $c_n(u)$ est un polynome en u de degré $3n$, ne contenant que des termes dont le degré a même parité que n ; son terme de plus bas degré est de degré $n+2$; le reste de cette série convergente s'écrit

$$R_n = \frac{1}{x^{\frac{n}{2}}} \left[\frac{c_{n+1}(u)}{x^2} + \dots + \frac{c_{n+p}(u)}{x^{\frac{p}{2}}} + \dots \right].$$

Quand ρ augmente indéfiniment, les termes de la série convergente entre parenthèses tendent vers zéro sur tout le parcours d'intégration puisque u reste fini; on a donc

$$R_n = \frac{\epsilon'}{x^{\frac{n}{2}}}$$

et

$$\left[1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u\right]^{x-1} = e^{-\left(kx\right)^{\frac{1}{2}} u - \frac{ku^2}{2}} \left[1 + \frac{c_1(u)}{x} + \dots + \frac{c_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\epsilon'}{x^{\frac{n}{2}}}\right].$$

En multipliant par la série asymptotique figurant sous le signe \int

il vient finalement

$$\begin{aligned} & \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ &= -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} \\ & \quad \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(u + \frac{1}{u}\right) - \frac{ku^2}{2}} u^\mu \left[a_0 + \frac{d_1(u)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{d_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right] dx. \end{aligned}$$

la quantité ε tendant uniformément vers zéro sur tout le parcours d'intégration. D'autre part, le polynome $d_n(u)$ est de degré $3n$, ne contient que des termes dont le degré a même parité que n , et est au moins égal à n . On peut d'ailleurs remarquer que ce résultat serait encore valable si le module de u , au lieu de rester fini sur le contour d'intégration, était seulement astreint à rester inférieur à ρ^ν , ν étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$ et ne dépendant que de n . En posant

$$u = 1 + v,$$

il vient

$$\begin{aligned} \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy &= -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}} \\ & \quad \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \frac{v^2}{1+v} - \frac{k}{2} (\nu^2 + 2\nu)} (1+v)^\mu \\ & \quad \times \left[a_0 + \frac{d_1(1+v)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{d_n(1+v)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right] dv, \end{aligned}$$

et en posant

$$(kx)^{\frac{1}{4}} v = \lambda,$$

il vient

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P \int f(\lambda) d\lambda$$

avec

$$(20) \quad P = -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{(kx)^{\frac{1}{4}}} e^{i\pi\mu - 2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}}$$

Le module de λ sur le contour d'intégration est au plus égal à ρ^ν . ν étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{4}$; le module de v reste donc inférieur à l'unité dès que ρ est suffisamment grand et l'on peut

écrire

$$\begin{aligned} & - (kx)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu^2}{1+\nu} - \frac{k^2}{2} (\nu^2 + 2\nu) \\ & = - (kx)^{\frac{1}{2}} \nu^2 [1 - \nu + \nu^2 - \dots] - \frac{k}{2} [\nu^2 + 2\nu] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & - (kx)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu^2}{1+\nu} - \frac{k^2}{2} (\nu^2 + 2\nu) \\ & = - \lambda^2 \left[1 - \frac{\lambda}{(kx)^{\frac{1}{4}}} + \frac{\lambda^2}{(kx)^{\frac{3}{4}}} - \dots \right] - \frac{k}{2} \left[\frac{2\lambda}{kx^{\frac{1}{4}}} + \frac{\lambda^2}{(kx)^{\frac{1}{2}}} \right]; \end{aligned}$$

mais on a

$$e^{-\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{(kx)^{\frac{1}{4}}} - \frac{\lambda^4}{(kx)^{\frac{3}{4}}} + \dots} = e^{-\lambda^2} \left[1 + \frac{e_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{4}}} + \dots + \frac{e_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{4}}} + \dots \right];$$

le polynôme $e_n(\lambda)$ est de degré $3n$, ne contient que des termes dont le degré au moins égal à $n+2$ est de même parité que n .

De même,

$$e^{-\frac{k}{2} \left(\frac{2\lambda}{kx^{\frac{1}{4}}} + \frac{\lambda^2}{kx^{\frac{1}{2}}} \right)} = 1 + k_1 \frac{\lambda}{x^{\frac{1}{4}}} + k_2 \left(\frac{\lambda}{x^{\frac{1}{4}}} \right)^2 + \dots + k_n \left(\frac{\lambda}{x^{\frac{1}{4}}} \right)^n + \dots,$$

les coefficients $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ étant indépendants de λ .

Le terme $\left(1 + \frac{\lambda}{kx^{\frac{1}{4}}} \right)^\mu$ se développe également en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{\lambda}{x^{\frac{1}{4}}}$.

Finalement on a

$$e^{-kx^{\frac{1}{2}} \frac{\nu^2}{1+\nu} - \frac{k}{2} (\nu^2 + 2\nu)} (1+\nu)^\mu = e^{-\lambda^2} \left[1 + \frac{f_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{4}}} + \dots + \frac{f_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{4}}} + \dots \right].$$

Le polynôme $f_n(\lambda)$ est de degré $3n$, ne contient que des termes dont le degré au moins égal à n est de même parité que n . Le reste R_n s'écrit

$$R_n = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{f_{n+1}(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{f_{n+p}(\lambda)}{x^{\frac{p}{2}}} + \dots \right].$$

Si le nombre ν est tel que

$$3\nu(n+p) - \frac{p}{2} < 0,$$

le rapport $\frac{f_{n+p}(\lambda)}{x^{\frac{p}{2}}}$ tend vers zéro; par conséquent, si le nombre ν est choisi de telle sorte que

$$3\nu(n+1) - \frac{1}{2} < 0,$$

il est clair que tous les termes de la parenthèse tendent vers zéro quand p augmente indéfiniment, et l'on peut écrire

$$R_n = \frac{\varepsilon'}{x^{\frac{1}{2}}},$$

ε' tendant uniformément vers zéro sur tout le parcours d'intégration.

D'autre part, le polynôme

$$d_p \left[1 + \frac{\lambda}{(kx)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

s'ordonne par rapport aux puissances croissantes de $\left(\frac{\lambda}{kx^{\frac{1}{2}}}\right)$; son terme de plus haut degré est de degré $3p$; il est multiplié dans la série asymptotique figurant sous le signe \int par $\frac{1}{x^{\frac{p}{2}}}$ qui peut

s'écrire $\frac{1}{x^{\frac{2p}{1}}}$. On a donc

$$\begin{aligned} a_0 + \frac{d_1(u)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{d_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \\ = a_0 + \frac{g_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{g_2(\lambda)}{x^{\frac{2}{2}}} + \dots + \frac{g_{n'}(\lambda)}{x^{\frac{n'}{2}}} + \frac{\varepsilon'}{x^{\frac{n'}{2}}}. \end{aligned}$$

Le polynôme $g_p(\lambda)$ ne contient que des termes de même parité

que p . La quantité sous le signe \int s'écrit donc finalement

$$e^{-\lambda^2} \left[a_0 + \frac{G_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{G_2(\lambda)}{x^{\frac{3}{2}}} + \dots + \frac{G_p(\lambda)}{x^{\frac{p}{2}}} + \dots + \frac{G_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{1}{2}}} \right].$$

$G_p(\lambda)$ étant un polynome ne contenant que des termes dont le degré a même parité que p et ε tendant uniformément vers zéro sur tout le contour d'intégration, si le module de λ y reste au plus égal à ρ^ν , ν étant un nombre positif inférieur à un nombre ν_1 qui ne dépend que de n , le nombre ν_1 est sûrement inférieur à $\frac{1}{4}$.

On a alors

$$\int y^{n-1} \varphi_1(y) dy = P \int e^{-\lambda^2} \left[a_0 + \frac{G_1(\lambda)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{G_n(\lambda)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{1}{2}}} \right] d\lambda,$$

l'intégrale du second membre est prise dans le plan des λ sur une portion de droite passant par l'origine comprise entre deux points situés de part et d'autre de l'origine à une distance égale à ρ^ν ; si sur cette droite l'argument de λ^2 est tel que son cosinus soit positif, ce second membre devient, quand ρ augmente indéfiniment,

$$(21) \quad \int y^{n-1} \varphi_1(y) dy = P \left[A_0 + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{1}{2}}} \right],$$

en posant

$$2p = n.$$

On voit que les termes contenant les puissances impaires de $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ disparaissent. La quantité ε tend uniformément vers zéro quand l'argument de λ^2 varie entre des limites, telles que son cosinus demeure constamment positif.

Au lieu de considérer un chemin d'intégration constitué par une petite droite passant par le point $u = 1$, on peut prendre pour contour d'intégration une petite portion de droite passant par le point

$$u = -1.$$

On pose alors

$$u = e^{im\pi}(1 - \nu) = -1 + \nu,$$

m étant un nombre impair positif ou négatif.

On peut écrire

$$\begin{aligned} \int y^{x-1} \varphi(y) dy &= -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{2}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} e^{2(kx)^{\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u+1}{u}\right)^2 - \frac{ku^2}{2}} u^\mu \left[a_0 + \frac{d_1(u)}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{d_n(u)}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right] \\ &= a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} e^{i\pi\mu} e^{2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} + im\pi\mu} \\ &\quad \times \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \frac{\nu^2}{e^{ik\pi(1-\nu)}} - \frac{k}{2} [\nu^2 - 2\nu]} (1-\nu)^\mu \\ &\quad \times \left\{ a_0 + \frac{d_1 [e^{im\pi(1-\nu)}]}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{n}{2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$x = x' e^{2im\pi},$$

l'exposant de e sous le signe \int s'écrit

$$-(kx')^{\frac{1}{2}} \frac{\nu^2}{1-\nu} - \frac{k}{2} (\nu^2 - 2\nu).$$

D'autre part, le polynôme $d_p(u)$ ne contient que des termes de même parité que p .

On a donc

$$d_p [e^{im\pi(1-\nu)}] = e^{ipm\pi} d_p(1-\nu),$$

d'où

$$\frac{d_p [e^{im\pi(1-\nu)}]}{x^{\frac{p}{2}}} = \frac{d_p(1-\nu)}{x'^{\frac{p}{2}}}.$$

Si l'on pose

$$(kx')^{\frac{1}{4}} = \lambda,$$

on aura donc sous le signe \int une fonction se déduisant de celle qui a été considérée dans le cas précédent en y changeant x en x' et λ en $-\lambda$; il vient ainsi

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P' \int e^{-\lambda^2} \left[a_0 + \frac{G_1(-\lambda)}{x'^{\frac{1}{4}}} + \dots + \frac{G_n(-\lambda)}{x'^{\frac{n}{4}}} + \frac{\varepsilon}{x'^{\frac{n}{4}}} \right] d\lambda$$

avec

$$(22) \quad P' = - a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{(kx')^{\frac{1}{2}}} e^{2i(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} + im\pi}$$

On a donc finalement

$$(23) \quad \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P' \left[A_0 + \frac{A_2}{x'^2} + \dots + \frac{A_{2p}}{x'^p} + \frac{\varepsilon}{x'^p} \right].$$

IV.

Étant donné un nombre positif m aussi petit que l'on veut, on peut toujours tracer dans le plan des y un cercle C de centre a et de rayon assez petit pour que l'on ait

$$\varphi_1(y) = e^{\frac{b}{y-a}} (y-a)^\mu [a_0 + \eta],$$

η restant inférieur à m , quand le point y reste à l'intérieur de ce cercle dans une région, telle que l'argument ϖ' de $y-a$ soit compris entre $\beta + \pi - \frac{3\pi}{2}$ et $\beta + \pi + \frac{3\pi}{2}$. Considérons d'autre part un cercle C' de centre a , dont le rayon tend vers zéro comme $\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}$. Dès que ρ est suffisamment grand, il est intérieur au cercle C et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} & \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ &= - a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2i(kx)^{\frac{1}{2}}} \int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u-1}{u}\right)^2 - \frac{ku^2}{2}} u^\mu (a_0 + \eta') du, \end{aligned}$$

l'intégrale étant prise sur un chemin d'intégration situé tout entier à l'intérieur du cercle C' dans une région telle que l'argument ϖ' reste compris entre les limites précédemment déterminées.

Désignons par x l'argument de a et posons

$$x = \rho e^{i\sigma},$$

l'argument de z est $\varpi - x - \pi$ et l'on peut écrire

$$u = r e^{-i\gamma}$$

avec

$$\gamma = -\varpi' + \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}$$

Si k' désigne le module de k , on voit que la partie réelle de l'expression

$$(kx)^{\frac{1}{2}} \frac{(u-1)^2}{u}$$

est

$$(\rho k')^{\frac{1}{2}} [\xi \cos \delta + \eta \sin \delta],$$

en posant

$$\xi - \eta i = u + \frac{1}{u} - 2$$

et

$$\delta = \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2}.$$

Ce dernier angle n'est autre que l'argument de $(kx)^{\frac{1}{2}}$

On a donc

$$(24) \quad \begin{cases} \xi = \left(r + \frac{1}{2}\right) \cos \gamma - 2, \\ \eta = \left(r - \frac{1}{2}\right) \sin \gamma. \end{cases}$$

Considérons ξ et η comme les coordonnées rectangulaires d'un point du plan; quand r reste fixe et que γ varie seul, autrement dit quand le point y décrit un cercle de centre a , le point (ξ, η) décrit une ellipse ayant pour foyer l'origine et le point -4 de l'axe des abscisses; si γ reste fixe et si r varie seul, autrement dit si le point y décrit un rayon issu du point a , le point ξ, η décrit une hyperbole de mêmes foyers.

Le contour du plan des y , sur lequel on intègre, se déforme quand ρ augmente indéfiniment, de telle sorte que la distance de chacun de ces points au point a tende vers zéro comme $\rho^{-\frac{1}{2}}$; sur ce contour la variable u conserve un module inférieur à une quantité positive fixe; si le point ξ, η décrit alors dans son plan une courbe telle que la projection sur la direction δ du vecteur qui a pour origine l'origine des coordonnées et pour extrémité le point ξ, η

reste supérieur à un nombre positif fixe, le module de l'intégrale

$$\int e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u-1}{u}\right)^2 - \frac{ku^2}{2}} u^\mu (A_0 + \eta) du$$

tend vers zéro comme $e^{-h\rho^{\frac{1}{2}}}$, h étant positif.

On est ainsi amené à étudier les courbes décrites par le point ξ , η dans son plan, quand le point y décrit la portion du contour d'intégration comprise à l'intérieur du cercle C' dont le rayon tend

vers zéro comme $\frac{1}{\rho^{\frac{1}{2}}}$.

Considérons maintenant la portion d'un rayon du cercle C comprise entre le point p situé sur C et le point q situé sur C' .

On a

$$\int y^{x-1} \varphi_1(y) dy = -a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \int (1-z)^{x-1} e^{-\frac{k}{z}} z^\mu (a_0 + \eta) dz.$$

Mais le facteur $(1-z)$ reste fini et

$$(1-z)^x e^{-\frac{k}{z}} z^\mu = e^{-rzs(1+\eta)} z^\mu e^{-\frac{k}{z}}.$$

Le module de η devient inférieur à toute quantité positive donnée à l'avance, si le rayon du cercle C est suffisamment petit.

Posant alors

$$z = \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} u,$$

on a

$$\begin{aligned} & \int y^{x-1} \varphi_1(y) dy \\ &= -a^{x+\mu} e^{i\pi\mu} \left(\frac{k}{x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}}} \int M(u) u^\mu e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left[u(1+\eta) + \frac{1}{u} - 2\right]} du, \end{aligned}$$

$M(u)$ restant fini; or si l'on pose

$$\eta = \varepsilon e^{i\delta'},$$

on a

$$u\eta = r\varepsilon e^{i(-\gamma + \delta')}$$

et

$$\left| e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} u\eta} \right| = e^{-(\rho k')^{\frac{1}{2}} r\varepsilon \cos(-\gamma + \delta + \delta')} < e^{r\varepsilon(\rho k')^{\frac{1}{2}}},$$

et finalement

$$\left| e^{-(kx)^{\frac{1}{2}} \left[u(1+\eta) + \frac{1}{u} - 2 \right]} \right| < e^{-(\rho k')^{\frac{1}{2}} [\xi \cos \delta + \eta \sin \delta - r \varepsilon]}.$$

Le module r de u varie depuis une valeur très grande correspondant au point q situé sur C' jusqu'à une valeur qui devient infinie comme $\rho^{\frac{1}{2}}$ correspondant au point p situé sur C .

La quantité

$$\xi \cos \delta + \eta \sin \delta$$

est, sur tout le parcours d'intégration, de la forme

$$r \cos(\delta - \gamma) + B,$$

B restant fini.

Si $\cos(\delta - \gamma)$ reste positif quand le point ξ, η décrit la courbe correspondante dans son plan, on pourra toujours choisir r assez petit pour que la différence

$$\cos(\delta - \gamma) - \varepsilon$$

soit positive. Dans ces conditions, l'intégrale tend vers zéro comme $e^{-h\rho^{\frac{1}{2}}}$, h étant positif.

Au point $u = 1$ on a

$$\gamma = -\varpi' + \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2} = 0,$$

d'où

$$\varpi = \varpi'_0 = \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}.$$

Considérons dans le plan des u une droite D passant par le point $u = 1$. Sur cette droite on prend pour direction positive celle vers laquelle se déplace le point M , quand l'angle ν de la direction OM et de l'axe des abscisses croît. Si m est la distance du point 1 au point M comptée positivement dans le sens ainsi défini et si ζ est l'angle de cette direction positive et de la direction positive de l'axe des abscisses, on a

$$m \sin(\zeta - \nu) = \sin \nu$$

et

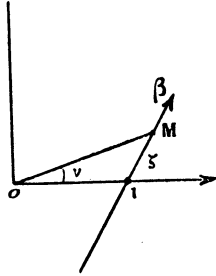
$$r = \sqrt{1 + m^2 + 2m \cos \zeta}.$$

En s'appuyant sur ces deux formules et en remarquant que

$$\gamma = -\varpi' + \varpi'_0 = -\varpi'_0 - \nu + \varpi'_0 = -\nu,$$

on démontre que, lorsque le point M décrit la portion de droite D

Fig. 3.



voisine du point 1, le point ξ, η décrit une courbe admettant à l'origine un point de rebroussement; en développant ξ et η suivant les puissances croissantes de m , il vient

$$\begin{aligned} \xi &= m^2 \cos 2\zeta + A_1 m^3 + \dots, \\ \eta &= -m^2 \sin 2\zeta + B_1 m^3 + \dots \end{aligned}$$

Cette remarque nous sera utile dans la suite.

V.

Dans la recherche des séries, qui représentent asymptotiquement les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$, interviennent les valeurs relatives des angles α et β ; pour fixer les idées nous supposons que

$$\alpha < \beta < \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

Dans le plan des y traçons alors la droite qui passe par le point α et fait avec la direction positive de l'angle des abscisses l'angle β .

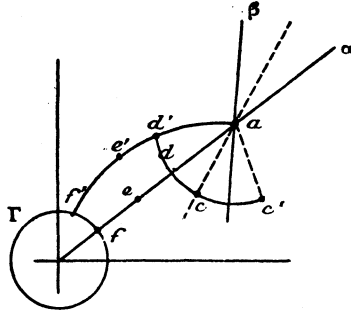
La direction $\alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha}{2}$ est donc la direction αc de la bissectrice de cette droite et de $O\alpha$.

Supposons tout d'abord que le point x s'éloigne à l'infini avec un argument nul, et prenons pour contour d'intégration S , le con-

tour formé par la portion de droite ac , l'arc de cercle cd et la portion de droite de ; la distance ac tend vers zéro comme $\frac{t}{\rho^2}$; mais le point c est toujours situé au delà du point qui correspond au point 1 dans le plan des u .

Quand l'angle σ est voisin de zéro, on déforme le contour S_1 de

Fig. 3.



la façon suivante; il est constitué par une portion de droite ac' issue du point a et faisant avec l'axe des x l'angle ϖ'_0 :

$$\varpi'_0 = \alpha + \pi + \frac{\beta + \alpha - \sigma}{2} = \varpi'_{0,1} - \frac{\sigma}{2},$$

en posant

$$\varpi'_{0,1} = \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha}{2},$$

puis par l'arc de cercle $c'd$ et enfin la portion de droite de .

La droite ac' fait avec la droite ac l'angle $-\frac{\sigma}{2}$.

Pour que le contour ainsi formé sont équivalent au contour primitif S_1 , il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta + \pi - \frac{\pi}{2} < \varpi'_0 < \beta + \pi + \frac{\pi}{2}$$

ou

$$\alpha - \beta - \pi < \sigma < \alpha - \beta + \pi.$$

Or l'angle $\alpha - \beta$ est compris entre zéro et $-\frac{\pi}{2}$, cette condition sera donc satisfaite tant que

$$-\frac{\pi}{2} < \sigma < \frac{\pi}{2}.$$

Quand le point y décrit la droite ac' depuis le point, a jusqu'au point y_0 correspondant au point $u = 1$, le point (ξ, η) décrit la partie positive de l'axe des abscisses, depuis l'infini jusqu'à l'origine ; quand le point y décrit la droite ac' depuis le point y_0 jusqu'au point c' , le point ξ, η décrit la partie positive de l'axe des abscisses depuis l'origine jusqu'à un point situé à distance finie ; quand le point y décrit l'arc de cercle $c'd$, le point ξ, η décrit un arc d'ellipse situé au-dessus de l'axe des abscisses, puisque γ croît quand ϖ' décroît.

Enfin quand le point y décrit la portion de droite de , le point ξ, η décrit un arc d'hyperbole asymptote à la droite, qui fait, avec l'axe des abscisses, l'angle

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2},$$

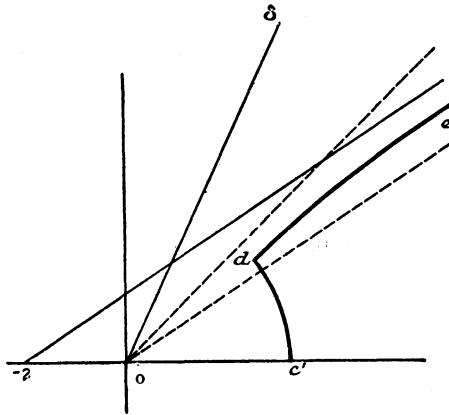
puisqu'alors on a

$$\varpi' = \alpha + \pi.$$

Or la direction de cette asymptote et la direction δ

$$\delta = \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2}$$

Fig. 4.



ont pour bissectrice la direction $\frac{\beta - \alpha}{2}$ qui est comprise entre zéro et $\frac{\pi}{4}$, et forment entre elles un angle aigu, puisque σ est compris

entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La projection sur la direction σ du vecteur joignant l'origine au point ξ, η reste donc constamment supérieure à un nombre positif fixe, sauf quand le point ξ, η vient au voisinage de l'origine.

Cette dernière portion du contour, décrit par le point ξ, η , correspond à la portion du contour d'intégration voisine du point γ_0 ; dans le cas actuel l'angle ζ de la droite D avec la direction positive de l'axe des abscisses dans le plan des u est nul; on a

$$\begin{aligned} \xi &= r + \frac{1}{r} - 2, \\ \eta &= 0. \end{aligned}$$

Quand m varie depuis une valeur finie, mais petite, jusqu'à la valeur $A\rho^{\frac{\nu-1}{4}}$, A étant une constante positive convenable et ν un nombre positif inférieur à $\frac{1}{4}$, le point ξ, η décrit une portion de l'axe des abscisses situé entre un point voisin de l'origine et fixe à un point ξ' :

$$\xi' = m^2 + \Lambda_1 m^3 + \dots,$$

où m a la valeur $A\rho^{\frac{\nu-1}{4}}$; la projection du vecteur $O\xi$ sur la direction δ atteint son minimum pour le point ξ' , qui est l'extrémité de la portion de l'axe des abscisses la plus voisine de l'origine. On a donc pour toute cette partie du contour d'intégration

$$-(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi \cos \delta + \eta \sin \delta) < -(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi' \cos \delta + \eta' \sin \delta).$$

Or

$$(\rho k')^{\frac{1}{2}}(\xi' \cos \delta + \eta' \sin \delta) = M_0 \cos \delta \rho^{2\nu} + M_1 \cos \delta \rho^{3\left(\nu - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}} \dots \xi.$$

Si le nombre ν est suffisamment petit, on a donc

$$(\rho k')^{\frac{1}{2}} \rho^{2\nu} \cos \delta + \eta' \sin \delta = M_0 \cos \delta \rho^{2\nu} + \eta_1,$$

η tendant vers zéro quand ρ augmente indéfiniment; or M_0 est positif; $\cos \delta$ est également positif. L'exposant de e dans la quantité sous le signe \int devient donc infini comme

$$-h\rho^{2\nu};$$

quand ρ augmente indéfiniment, h étant positif.

Enfin si, pour la portion du contour d'intégration, qui correspond à la portion de l'axe des abscisses du plan $\xi\eta$, comprise entre l'origine et le point ξ' , nous posons

$$u = 1 + v,$$

$$v(kx^{\frac{1}{2}}) = \lambda,$$

on voit que l'argument de λ^2 n'est autre que δ , dont le cosinus est positif, et l'on obtient, en vertu de (21),

$$\int_{s_1}^{\rho} y^{x-1} \varphi_1(y) dy = P \left[A_0 + \frac{A_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{A_n}{x^{\frac{n}{2}}} + \frac{\varepsilon'}{x^{\frac{n}{2}}} \right],$$

ε' tendant vers zéro quand ρ augmente indéfiniment.

Il reste à examiner la portion d'intégrale prise le long de la portion de droite ef' , f' étant voisin de l'origine et sur le cercle Γ .

Au point

$$y = r e^{i\sigma},$$

on fait correspondre le point y' de coordonnées rectangulaires $(Lr, -s)$, et l'on considère dans le plan des y' l'image du contour d'intégration du plan des y .

Si l'on pose

$$I = \int y^{x-1} v(y) dy,$$

on constate facilement que le module du rapport

$$\frac{I}{\alpha^x e^{-2.k.r^{\frac{1}{2}}}}$$

est de la forme

$$k e^{-h\rho + g\rho^{\frac{1}{2}}},$$

k étant un nombre fini et h restant supérieur à un nombre positif fixe, si la projection du vecteur Oy' sur la direction ϖ reste inférieure à la projection du vecteur Oa' , a' étant l'image de a , quand le point y' décrit l'image du contour d'intégration.

Quand l'argument σ est compris entre μ et $\frac{\pi}{2} - \mu$, μ étant un angle positif aussi petit que l'on veut, on définit $f_1(x)$ par la

formule

$$f_1(x) = \int_{s_1} y^{x-1} \varphi(y) dy + \int_{\Gamma} (c_1 V_1 + c_2 V_2 + \dots + c_q V_q) dy.$$

Quand l'argument σ est compris entre $\frac{\pi}{2} + \mu$ et $-\mu$, on définit $f_1(x)$ par la formule

$$f_1(x) = \int_{s_1} y^{x-1} \varphi(y) dy + \int_{-\Gamma} [c_1(\nu_1 + V_1) + c_2(\nu_2 + V_2) + \dots + c_q(\nu_q + V_q)] dy^{x-1} dy,$$

le contour Γ étant alors parcouru à partir du point f en sens inverse.

Dans les deux cas, le contour d'intégration est tel que la projection du vecteur Oy' reste inférieure à la projection du vecteur Oa' .

D'autre part, dans le premier cas, les coefficients γ qui interviennent dans les fonctions V tendent vers zéro ou vers l'unité; dans le second, ils tendent toujours vers zéro; on peut donc écrire finalement

$$(25) \quad f_1(x) = P \left[A_0 + \frac{A_2}{x^2} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{2p}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{p}{2}}} \right],$$

ε tendant vers zéro quand ρ augmente indéfiniment.

Quand l'angle σ est compris entre $-\mu$ et μ , les coefficients γ restent finis si le point x s'éloigne à l'infini en restant à distance finie des pôles de $f_1(x)$. En partant de la première définition de $f_1(x)$ on voit aisément que le rayon du cercle Γ peut être choisi assez petit, pour que la projection de Oy' reste inférieure à la projection de Oa' ; l'égalité précédente est encore vérifiée sous la seule restriction que le point x reste à distance finie des pôles de $f_1(x)$.

Cette condition disparaît quand les solutions de l'équation (7) sont régulières au voisinage de l'origine; les pôles de la fonction $f_1(x)$ ne s'étendent plus à l'infini dans la direction des abscisses positives, et cette fonction peut être définie par la formule

$$f_1(x) = \int_{s_1} y^{x-1} y_1(y) dy + \int_e^0 y^{x-1} \varphi_1(y) dy,$$

la seconde intégrale étant prise sur la droite Oa depuis le point e jusqu'à l'origine. On démontre toujours par la même méthode que cette intégrale est représentée par une série asymptotique à termes nuls, abstraction faite du facteur P ; il en résulte que l'égalité (25) est satisfaite quand le point x s'éloigne à l'infini de façon quelconque avec un argument compris entre $-\mu$ et μ .

Supposons que σ soit voisin de $\frac{\pi}{2}$; on a

$$\frac{\pi}{2} - \mu < \sigma < \frac{\pi}{2} + \mu.$$

Si μ est suffisamment petit, l'angle δ est encore compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On prolonge alors l'arc de cercle $c'd$ jusqu'au point d' , situé sur le rayon $d'e'$; le point e' étant, par rapport au rayon Oa , du côté des arguments croissants; au contour ef, Γ , on substitue le contour $e'f', \Gamma$; la courbe $e'f'$, étant voisine de la droite Oa , est tout entière située, par rapport à cette droite, du côté des arguments croissants. On constate alors que, pour les intégrales prises le long du contour $e'f', \Gamma$, tout ce qui a été démontré dans le cas précédent est encore vrai.

Il suffit donc d'étudier l'intégrale prise sur le contour S_4 ; or ce dernier ne diffère du contour de même nom du cas précédent qu'en ce que l'arc de cercle est prolongé jusqu'au point d' correspondant à l'argument

$$\varpi' = \alpha + \pi - \nu.$$

L'arc d'hyperbole, image dans le plan ξ, η de la droite $d'e'$ est alors asymptote à une droite de direction

$$\gamma = \nu + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}.$$

La différence $\delta - \gamma$ est donc

$$\delta - \gamma = \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2} - \nu - \frac{\beta - \alpha + \sigma}{2} = \sigma - \nu.$$

Elle est inférieure à $\frac{\pi}{2}$ si

$$\frac{\pi}{2} + \mu - \nu < \frac{\pi}{2},$$

où

$$\mu < \nu.$$

Étant donné μ , il suffit donc de choisir un nombre ν satisfaisant à cette inégalité, pour que tout ce qui a été dit dans le cas précédent subsiste.

Toutefois la déformation du contour cf' , Γ n'est possible que, si entre 0 et a n'existe aucune racine du polynome B_0 , qui ait été évitée sur le contour d'intégration par un petit cercle situé, par rapport au rayon Oa du côté des arguments décroissants.

S'il en existe une ou plusieurs $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, au voisinage desquels les solutions de B_0 sont régulières, on démontre que l'on a

$$f_1(x) = P \left[U + \frac{\varepsilon}{x^n} \right] + \frac{x^\sigma}{x^{\lambda_1+1}} \left[M_1 + \frac{\varepsilon_1}{x^\mu} \right] + \dots + \frac{x^\sigma}{x^{\lambda_p+1}} \left[M_p + \frac{\varepsilon_p}{x^\mu} \right]$$

quand σ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, U étant la série de la formule (25) et les séries M étant de la forme

$$M_j = \alpha_{0,j} + \frac{\alpha_{1,j}}{x} + \dots + \frac{\alpha_{n,j}}{x^n}.$$

Si α_p est celle des racines α dont le module est le plus faible, on aura

$$f_1(x) = \frac{x^\sigma}{x^{\lambda_p+1}} \left[M_p + \frac{\varepsilon_p}{x^\mu} \right]$$

quand σ sera supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et cette direction forme coupure.

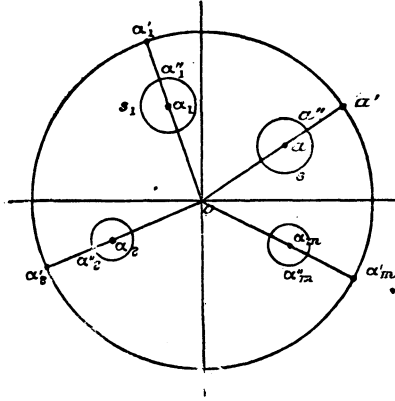
VI.

Quand l'argument σ est compris entre π et $\frac{\pi}{2}$, on est amené à donner au cercle Γ un rayon supérieur à la distance Oa . Le contour d'intégration au moyen duquel est définie la fonction $f(x)$ est construit de la façon suivante :

On trace une circonférence S ayant l'origine pour centre et de rayon supérieur à Oa . Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les points racines du polynome B_0 situés à l'intérieur de cette circonférence et rangés dans l'ordre où les rencontre un rayon coïncidant d'abord avec Oa et tournant autour de l'origine en sens direct. On désigne par a' ,

$\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_m$ les points où la circonférence S rencontre les rayons $Oa, O\alpha'_1, \dots, O\alpha'_m$; autour du point α_j , avec α_j pour

Fig. 5.



centre, on trace un petit cercle s_j qui coupe $O\alpha_j$ en α''_j ; on choisit alors pour contour S_j le contour formé par un chemin allant à l'intérieur du cercle s depuis le point α jusqu'au point α'' et que nous déterminerons par la suite, la portion de droite $\alpha''\alpha'$ et l'arc $\alpha'\alpha'_1$ parcourus en sens direct.

Pour contour Γ on prend le contour constitué par la portion de droite $\alpha'_1\alpha''_1$, le cercle s_1 parcouru en sens inverse, la portion de droite $\alpha''_1\alpha'_1$, l'arc $\alpha'_1\alpha'_2$, la portion de droite $\alpha'_2\alpha''_2$, le cercle s_2 parcouru en sens inverse, la portion de droite $\alpha''_2\alpha'_2$, et ainsi de suite.

Ce contour se termine par la portion de droite $\alpha'\alpha''$, le cercle s parcouru en sens inverse, la portion de droite $\alpha''\alpha'$, l'arc $\alpha'\alpha'_1$.

On connaît déjà la représentation asymptotique des portions d'intégrales relatives aux cercles s qui ont pour centre une racine de B_0 au voisinage de laquelle les solutions de l'équation (7) sont régulières; il suffit donc ici d'étudier la portion d'intégrale relative à la partie du contour S_j et à celle du contour Γ qui avoisinent le point α , racine double de B_0 au voisinage de laquelle les solutions de (7) sont irrégulières.

La méthode est toujours celle qui a été employée dans le Chapitre précédent; elle consiste à choisir convenablement la portion du contour d'intégration au voisinage du point α et à rechercher ce

que devient la portion d'intégrale correspondante en s'aidant de l'image de ce contour dans le plan des (ξ, η) .

Je me bornerai ici à indiquer comment on peut choisir cette portion du contour et le résultat que l'on obtient. Si l'on a

$$\frac{\pi}{2} < \sigma < \alpha - \beta + \pi,$$

d'où

$$\delta < \frac{\pi}{2},$$

le contour S_1 est constitué :

1° Par le rayon ac' correspondant à la valeur de ω'

$$\omega'_0 = \alpha + \pi + \frac{\beta - \alpha - \sigma}{2}$$

comme dans le cas où σ était inférieur à $\frac{\pi}{2}$; le point c' a pour image dans le plan des u un point dont le module est supérieur à l'unité;

2° L'arc de cercle $c'e$, de centre a , de rayon ac' , parcouru en sens inverse jusqu'au point e situé sur le prolongement de Oa , au delà du point a ;

3° Une portion ef du prolongement de Oa .

Si l'on a

$$\alpha - \beta + \pi - \mu < \sigma < \alpha - \beta + \pi + \mu,$$

μ étant un très petit angle, on choisit le contour d'intégration de la façon suivante :

1° Un rayon ac' correspondant à la valeur de ω'

$$\omega' = \omega'_0 + \nu,$$

l'angle ν étant petit, mais supérieur à $\frac{\mu}{2}$, le point c' ayant pour image dans le plan des u un point de module inférieur à l'unité;

2° Une portion de droite partant de c' , passant par le point γ_0 qui a pour image dans le plan des u le point 1; elle est légèrement inclinée sur la direction $a\gamma_0$ correspondant à la valeur ω'_0 de l'argument ω' de telle sorte que l'angle désigné par ζ est ici égal à $\pi - \epsilon$, ϵ étant petit et positif;

3° Un arc de cercle de centre a parcouru en sens inverse jusqu'au point e ;

4° La portion ef de la droite Oa .

Si l'angle σ est compris entre les limites

$$\alpha - \beta + \pi < \sigma < \pi,$$

la direction ϖ'_0 n'est plus comprise dans l'angle où $e^{\frac{b}{\gamma-a}}$ tend vers zéro; mais la direction $\varpi'_0 + \pi$ se trouve comprise dans cet angle.

Le contour est alors formé :

1° De la droite ac' correspondant à la valeur $\varpi'_0 + \pi$ de l'argument ω' , le point c' ayant pour image dans le plan des u un point dont le module est un peu supérieur à l'unité;

2° Un arc de cercle $c'_1c'_2$ de centre a parcouru en sens inverse;

3° Une petite portion de droite $c'_1c'_2$ passant par le point γ_0 et perpendiculaire à la droite $a\gamma_0$;

4° Un arc de cercle c'_2e de centre a parcouru en sens inverse, jusqu'au point e situé sur le prolongement de Oa ;

5° Une portion ef de cette droite Oa .

Dans ces trois cas, l'intégrale prise le long du contour ainsi défini donne naissance à la série asymptotique (25).

Quand σ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$, on choisit pour le contour S_1 :

1° Une portion de droite ac' correspondant à la valeur ϖ'_0 de l'argument ω' ; le point c' ayant pour image dans le plan des u un point dont l'argument est supérieur à l'unité;

2° Un arc de cercle $c'e$ de centre a parcouru cette fois en sens direct, de telle sorte que son extrémité e située sur le prolongement de Oa corresponde à la valeur $\alpha + 2\pi$ de l'argument ω' ;

3° Une portion ef de la droite Oa , puis un arc de cercle ayant pour centre l'origine, parcouru en sens inverse jusqu'à son extrémité située sur le premier rayon $O\alpha_m$ que l'on rencontre en tournant dans ce sens à partir de Oa autour de l'origine.

L'intégrale est encore représentée par la série asymptotique (25).

Il nous reste à étudier la portion de l'intégrale relative à la

partie du contour Γ qui est voisine du point a . Cette portion de contour est constituée par un lacet formé d'une portion fe de la droite Oa située entre a et a''_m , et d'un petit cercle s de centre a ; comme l'argument de y reste compris entre α et $\alpha + 2\pi$, la fonction $\varphi_1(\gamma)$ est représentée asymptotiquement sur tout le contour par la même série asymptotique que dans le cas précédent en vertu des hypothèses faites sur les valeurs respectives de α et de β .

On choisit le cercle s de telle sorte que son image dans le plan des u est un rayon légèrement supérieur à l'unité. Quand σ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\alpha - \beta + \pi$, on substitue à la portion du cercle voisine du rayon, correspondant à la valeur $\sigma'_0 + \pi$ de l'argument, une petite portion de droite perpendiculaire à ce rayon et passant par le point y_1 , ayant pour image dans le plan des u le point -1 . Après avoir fait les changements de variable, qui permettent d'obtenir sous le signe \int une fonction de u , on multiplie cette fonction par $e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}}}$ au lieu de $e^{2(kx)^{\frac{1}{2}}}$, comme dans les cas précédents; il vient ainsi

$$\int e^{-2(kx)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{u+1}{u}\right)^2 - \frac{kn^2}{2} u^\mu (a_0 + \eta) du.$$

On pose

$$\begin{aligned} \xi' &= \left(r + \frac{1}{2}\right) \cos \gamma + 2, \\ \eta' &= \left(r - \frac{1}{2}\right) \sin \gamma, \end{aligned}$$

et l'on forme l'image du contour d'intégration dans le plan des $\xi'\eta'$. En employant toujours le même genre de raisonnement, on constate que l'intégrale considérée est représentée asymptotiquement par la série

$$(26) \quad P' \left[A_0 + \frac{A_2}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{\frac{p}{2}}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{p}{2}}} \right]$$

figurant dans le second membre de (23).

Quand σ est compris entre $\alpha - \beta + \pi$ et π , on substitue à la portion de cercle voisine du point y_0 , dont l'image dans le plan des u est le point 1 , une petite portion de droite perpendiculaire au rayon; l'intégrale est alors représentée asymptotiquement par la série (25).

Quand σ est voisin de $\alpha - \beta + \pi$, on forme le contour d'intégration de la façon suivante :

- 1° Un arc de cercle dont l'origine e situé sur le prolongement de Oa correspond à la valeur α de l'argument ω' ; son rayon est supérieur à $\alpha\gamma_0$;
- 2° Une petite portion de droite passant par γ_0 et inclinée sur $\alpha\gamma_0$;
- 3° Un arc de cercle de rayon inférieur à la distance $\alpha\gamma_0$;
- 4° Une petite portion de droite passant par le point γ_1 ;
- 5° Un arc de cercle de rayon supérieur à $\alpha\gamma_1$ et dont l'extrémité sur le prolongement de Oa correspond à la valeur $\alpha + 2\pi$ de l'argument ω' .

En formant l'image de la portion de contour relative aux valeurs de ω' , comprise entre α et $\alpha + \pi$ dans le plan des ξ, η , et celle de la portion de contour relative aux valeurs de ω' , comprise entre $\alpha + \pi$ et $\alpha + 2\pi$ dans le plan des ξ', η' , on trouve que l'intégrale est représentée asymptotiquement par la somme des deux séries (25) et (26).

Il reste à étudier les intégrales le long du contour entourant le point a , qui portent sur l'une des $q - 1$ fonctions $\varphi_j(y)$, que l'on associe à $\varphi_1(y)$, pour obtenir un système de q solutions indépendantes de l'équation différentielle (7).

Ces fonctions sont déduites de fonctions $\psi_j(t)$ que l'on peut former de deux façons différentes.

Dans le plan des z , où est prise l'intégrale servant à définir $\psi_j(t)$, on prend pour contour d'intégration un lacet formé par un cercle, ayant l'origine pour centre, et la droite Ob ; sur cette droite, on évite le point b par un demi-cercle, situé par rapport à Ob , soit du côté des arguments croissants, soit du côté des arguments décroissants. Dans le premier cas, les fonctions $\psi_j(t)$ sont représentées par des séries asymptotiques, où l'exposant de e est nul, tant que l'argument ω satisfait aux inégalités

$$\beta - \frac{\pi}{2} < \omega < \beta + 2\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Les fonctions $\varphi_j(y)$ correspondantes sont représentées par des séries asymptotiques, telles que

$$(27) (y - a)^\mu [a_0 + a_1(y - a) + \dots + a_n(y - a)^n + \varepsilon(y - a)^n].$$

Quand l'argument a franchi la valeur $\beta - \frac{\pi}{2}$, ces mêmes fonctions sont représentées par la série asymptotique, qui représente $\varphi_1(\gamma)$ pour les valeurs de ω' comprise entre $\beta - \frac{3\pi}{2}$ et $\beta + \frac{3\pi}{2}$, multipliée par une constante convenable.

Au voisinage de la direction singulière, les fonctions $\varphi_j(\gamma)$ sont représentées par la somme des deux séries précédentes.

Pour étudier les intégrales portant sur les fonctions $\varphi_j(\gamma)$, on effectue toujours les mêmes transformations; on obtient des résultats analogues aux précédents. Toutefois, quand $\varphi_j(\gamma)$ est représenté par une série telle que (27), l'exposant de e est de la forme

$$-(kx)^{\frac{1}{2}}u - \frac{ku^2}{2},$$

de telle sorte que l'on pose

$$\begin{aligned}\xi_1 &= r \cos \gamma + 2, \\ \eta_1 &= r \sin \gamma.\end{aligned}$$

L'image d'un cercle du plan des u ayant pour centre le point a , est dans le plan des ξ, η , un cercle ayant pour centre le point a .

On constate facilement que :

1° Si σ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\alpha - \beta + \pi$, ces intégrales donnent naissance à des séries asymptotiques à termes nuls, abstraction faite du facteur P;

2° Si σ est compris entre $\alpha - \beta + \pi$ et π , elles sont représentées asymptotiquement par la série (27) multipliée par un facteur constant convenable.

Quand σ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$, on considère les fonctions $\varphi_j(\gamma)$ déduites des fonctions $\psi_j(t)$ définies au moyen du contour, sur lequel le point b est évité par un arc de cercle situé, par rapport à Ob , du côté des arguments décroissants; les intégrales correspondantes sont représentées asymptotiquement par des séries à termes nuls, abstraction faite du facteur P.

VII.

En résumé, si l'on groupe les résultats qui viennent d'être démontrés, et si l'on tient compte de ceux qui ont été établis dans le cas où les solutions de (7) sont régulières au voisinage des racines du polynôme B_0 , on est amené aux conclusions suivantes :

Soient r et α le module et l'argument de la racine α de B_0 . On marque dans un plan le point α' de coordonnées Lr et $-\alpha$. Soit α_j une racine du polynôme B_0 , dont le module est au plus égal à r ; on a

$$\alpha_j = r_j e^{i\omega_j},$$

l'angle ω_j étant compris entre α et $\alpha + 2\pi$.

On marque les points α'_j de coordonnées Lr_j , $-\alpha_j$; on marque également le point α'' de coordonnées Lr , $-(\alpha + 2\pi)$. On trace la ligne polygonale convexe ayant pour sommets les points α' et α'' , certains des points α'_j et laissant à sa droite vers les abscisses positives tous les autres points α'_j .

Soient α' , α'_1 , α'_2 , ..., α'_m , α'' les sommets de cette ligne dans l'ordre où on les rencontre partant du point α' pour aller vers le point α , et soient μ_1 , μ_2 , ... les arguments des perpendiculaires aux côtés $\alpha'\alpha'_1$, $\alpha'_1\alpha'_2$, ... compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π .

Quand l'argument σ de x varie depuis ν petit et positif jusqu'à μ_1 , la fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par

$$(28) \quad f_1(x) = P_1 \left[A_0 + \frac{A_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{A_{2p}}{x^{\frac{p}{2}}} + \frac{\epsilon}{x^{\frac{p}{2}}} \right],$$

où

$$(29) \quad P_1 = -a^{x+\mu} \left(\frac{k}{x} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{kx^{\frac{1}{2}}} e^{i\pi\mu - 2(kx)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2}}.$$

Quand σ varie de μ_1 à μ_2 , cette même fonction est représentée asymptotiquement par la série attachée au point α_1 :

$$(30) \quad f_1(x) = A_1 \frac{\alpha_1^x}{x^{\lambda_1+1}} \left[a_{0,0} + \frac{a_{0,1}}{x} + \dots + \frac{a_{0,n}}{x^n} + \frac{\epsilon}{x^n} \right].$$

De même, quand σ varie de μ_2 à μ_3 , la fonction $f_1(x)$ est repré-

sentée par la série analogue à (30), attachée au point α_2 , et ainsi de suite.

Quand σ est compris entre $-\nu$ et $+\nu$, la fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par la formule (28), quand x s'éloigne à l'infini en restant à distance finie de ses pôles; cette dernière restriction disparaît quand les pôles de $f_1(x)$ ne s'étendent pas à l'infini dans le sens des abscisses positives.

Soient μ_m, μ_{m-1}, \dots les arguments des perpendiculaires aux côtés $\alpha''\alpha'_m, \alpha'_m\alpha''_{m-1}, \dots$, ω compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$. La fonction $f_1(x)$ est représentée asymptotiquement par la série (28), quand σ varie de $-\nu$ à μ_m .

Quand σ est compris entre μ_m et μ_{m-1} , elle est représentée par la série

$$(31) \quad f_1(x) = \Lambda_m \frac{\alpha_m^{x+\mu}}{x^{\lambda_{m+1}}} e^{-2i\pi x} \left[a_{m,0} + \frac{a_{m,1}}{x} + \dots + \frac{a_{m,n}}{x^n} + \frac{\varepsilon}{2^n} \right],$$

attachée au point α_m ⁽¹⁾.

Quand σ est compris entre μ_{m-1} et μ_{m-2} , elle est représentée par la série analogue à (31) attachée au point α_{m-2} , et ainsi de suite.

L'étude de la fonction $f_2(x)$ se fait évidemment par les mêmes méthodes; la série

$$(32) \quad f_2(x) = P'_1 \left[A_0 - \frac{A_2}{x^2} + \dots + (-1)^\rho \frac{A_{2\rho}}{x^{2\rho}} + \frac{\varepsilon}{x^{\frac{\rho}{2}}} \right],$$

où

$$(33) \quad P'_1 = -a^{a+\mu} \left(\frac{k}{x} \right)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{1}{(kx e^{2i\pi})^{\frac{1}{4}}} e^{2(k\mu)^{\frac{1}{2}} - \frac{k}{2} + i\pi\mu},$$

joue pour $f_2(x)$ le même rôle que la série (28) pour $f_1(x)$.

Considérons enfin un point α_j , racine du polynôme B_0 , au voisinage duquel les solutions de (7) sont régulières. A chacune d'elles correspond une fonction $f_j(x)$ solution de l'équation aux différences finies qui est représentée asymptotiquement par une série attachée au point α_j quand l'argument σ de x est compris

⁽¹⁾ Dans le second membre, α_m est pris avec l'argument σ_m compris entre α et $\alpha + 2\pi$, d'où le facteur $e^{-2i\pi x}$.

entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Mais il se peut que quand σ varie en dehors des limites précédentes, cette fonction $f_j(x)$ soit représentée dans un certain angle par les séries attachées au point a au voisinage duquel les solutions de (7) sont irrégulières.

Il en est ainsi chaque fois que a ayant un module au plus égal à α_j son image a' se trouve parmi les sommets du polygone convexe formé en partant de l'image α'_j de α_j , comme le polygone considéré plus haut a été formé en partant de l'image a' du point a .

Si la direction $\alpha - \beta + \pi$ n'appartient pas à l'angle considéré, la fonction $f_j(x)$ y est représentée soit par la série (28), soit par la série (33) multipliée par une constante convenable. Si la direction $\alpha - \beta + \pi$ appartient à l'angle considéré, elle forme coupure et le divise en deux parties; dans l'une $f_j(x)$ est représentée par la série (28), dans l'autre par la série (33).

Les deux développements asymptotiques (28) et (33) attachés à la racine double a de B_0 jouent dans la représentation des solutions de l'équation aux différences finies le même rôle que les développements de la forme (30), correspondant aux racines de B_0 au voisinage desquels les solutions de (7) sont régulières et se permutent avec ces derniers pour représenter les solutions de l'équation aux différences finies, quand l'argument, avec lequel x devient infini, varie de zéro à 2π .