J. RÉMOUNDOS

Les singularités des équations différentielles et les séries sommables

Bulletin de la S. M. F., tome 48 (1920), p. 95-106

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1920__48__95_0>

LES SINGULARITÉS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET LES SÉRIES SOMMABLES;

PAR M. J. RÉMOUNDOS.

1. Dans un travail antérieur [*Contribution à la théorie des singularités des équations différentielles du premier ordre* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXXVI; 1908)] j'ai étudié la singularité que présentent les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ pour l'équation différentielle

$$(1) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = by + f(x, y) \qquad (b \neq 0),$$

où $f(x, y)$ désigne une fonction holomorphe des x et y dans le voisinage de $x = 0$ et $y = 0$ s'annulant pour $x = 0$ et $y = 0$ et ne contenant pas de terme de la forme by. On sait que cette forme (1) est une de celles auxquelles nous conduit une méthode classique de réduction de Briot et Bouquet. On sait qu'il existe un développement taylorien satisfaisant à l'équation (1) et dont les coefficients se calculent de proche en proche par des différentiations successives faites sur l'équation (1), mais il est bien connu que cette série est, en général, divergente et, par conséquent, il n'existe pas, en général, une intégrale holomorphe dans le voisinage de $x = 0$ et s'annulant pour cette valeur de x.

Dans son Mémoire sur les séries divergentes (*Annales de l'École Normale*, 1899), ainsi que dans son livre : *Leçons sur les séries divergentes* (Gauthier-Villars, 1901), M. Borel donne des applications aux équations différentielles de sa belle et importante découverte de la théorie des séries sommables et démontre le théorème suivant :

« *Si une serie absolument sommable vérifie formellement une équation différentielle*

$$(2) \qquad F[x, y, y', \ldots, y^{(\nu)}] = 0$$

algébrique par rapport à y et à ses dérivées, analytique en x, *la fonction analytique définie par cette série est une intégrale de l'équation* (2). »

Dans son livre ci-dessus indiqué, M. Borel, après la démonstration du théorème précédent, s'exprime ainsi : « Nous manquons malheureusement encore de propositions précises sur les cas où l'on peut affirmer la sommabilité absolue de la série obtenue »; et ensuite il cite un exemple très particulier : l'équation différentielle

$$x^2 \frac{dy}{dx} = x^2 - y,$$

dont il détermine, moyennant sa théorie des séries sommables, l'intégrale

$$y = \int_0^\infty e^{-a}[ax - \log(1 + ax)]\, da,$$

répondant aux conditions initiales singulières $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

M. Borel énonce aussi le théorème suivant :

« *Soit*

$$(2') \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = \omega(x, y)$$

une équation différentielle dans laquelle $\omega(x, y)$ *désigne un polynome ne renfermant pas de terme de degré* 0 *ou* 1. *Si l'on forme le développement formel de l'intégrale qui correspond aux conditions initiales*

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad y'_0 = 0,$$

on obtient une série généralement divergente

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

dont la série associée

$$(3) \qquad \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \frac{a_4 t^4}{4!} + \ldots$$

a certainement un rayon de convergence différent de zéro. »

Tout cela montre que la théorie des séries sommables de M. Borel deviendra puissante et extrêmement utile pour la recherche des intégrales des équations différentielles correspondant à des conditions initiales singulières lorsque nous aurons des méthodes précises, assez générales, sur les cas où l'on peut affirmer la sommabilité absolue des séries qui satisfont formellement aux équations différentielles. C'est à cette lacune signalée par M. Borel et ci-dessus indiquée que se rapporte le présent travail.

2. Dans mon travail antérieur déjà mentionné j'ai indiqué une *méthode de comparaison* de la série divergente (en général) qui satisfait à l'équation différentielle (1) avec la série convergente (dans un cercle de rayon non nul) fournie par l'équation

$$xy = by + f(x, y), \tag{4}$$

moyennant les mêmes conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, et définissant une fonction $y = g(x)$ holomorphe dans le voisinage de $x = 0$, d'après un théorème classique de Weierstrass. Cette méthode m'a permis d'établir pour l'équation différentielle (1) non seulement le théorème indiqué sans démonstration par M. Borel et ci-dessus énoncé, mais encore un résultat plus précis, le suivant :

« *Si nous désignons par*

$$\gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n + \ldots \tag{5}$$

la série qui satisfait formellement à l'équation (1), *nous avons toujours l'inégalité*

$$|\gamma_n| < 1.2.3\ldots(n-1)\,\delta_n,$$

où

$$\omega(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots + \delta_n x^n + \ldots \tag{6}$$

désigne la fonction $y = \omega(x)$ *qui s'annule pour* $x = 0$ *et satisfait à l'équation*

$$xy + \mathrm{F}(x, y) = |b|\,y, \tag{7}$$

$\mathrm{F}(x, y)$ *désignant la fonction que nous obtenons en remplaçant tous les coefficients par leurs modules dans le développement taylorien de* $f(x, y)$. »

Il en résulte que, d'après la théorie des séries sommables de

M. Borel, la fonction associée à la série divergente (5), donnée par la série

$$(8) \quad u(ax) = \frac{\gamma_1 ax}{1} + \frac{\gamma_2 a^2 x^2}{1.2} + \frac{\gamma_3 a^3 x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{\gamma_n a^n x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

aura ses coefficients $\frac{\gamma_n}{n!}$ de module inférieur aux coefficients correspondants δ_n, qui sont tous positifs; en posant donc

$$|x| = r,$$

nous aurons l'inégalité

$$|u(ax)| \leqq \delta_1 ar + \delta_2 a^2 r^2 + \ldots + \delta_n a^n r^n + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad u|(ax)| \leqq \omega(ar)$$

satisfaite pour $a > 0$, dans le cercle C de convergence de la série

$$(10) \quad \omega(ar) = \delta_1 ra + \delta_2 r^2 a^2 + \ldots + \delta_n r^n a^n + \ldots \qquad (\text{par rapport à } a),$$

il est clair que, en tout point intérieur au cercle C du plan a et situé sur le demi-axe réel positif, toutes les dérivées

$$u'_a(ax), \quad u''_{a^2}(ax), \quad u'''_{a^3}(ax), \quad \ldots$$

ont leurs modules inférieurs aux dérivées correspondantes

$$\omega'_a(ar), \quad \omega''_{a^2}(ar), \quad \omega'''_{a^3}(ar), \quad \ldots$$

de la fonction $\omega(ar)$ et, par conséquent, si le prolongement analytique de la fonction $\omega(ar)$ est possible sur tout le demi-axe réel positif du plan a, on voit de proche en proche que, pour $a \geqq 0$, nous avons toujours la formule

$$(11) \qquad |u(ax)| \leqq \omega(ar),$$

le prolongement analytique de la fonction $u(ax)$ sur le même demi-axe étant aussi possible par la même série de cercles. Alors, les intégrales

$$\int_0^{a_1} e^{-a} |u(ax)|\, da, \qquad \int_0^{a_1} e^{-a} \omega(ar)\, da$$

(a_1 étant un nombre positif quelconque) auront un sens et nous aurons la formule

$$(12) \qquad \int_0^{a_1} e^{-a} \,|\, u(ax) \,|\, da \leqq \int_0^{a_1} e^{-a} \omega(ar)\, da.$$

Si donc, l'intégrale

$$(12') \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} \omega(ar)\, da$$

a un sens, il en sera de même de l'intégrale

$$(13) \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} \,|\, u(ax) \,|\, da$$

et, par conséquent, la série (5) sera *sommable*. Remarquons aussi que, si toutes les intégrales

$$(14) \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} \frac{d^{\nu} \omega(ar)}{da^{\nu}}\, da$$

ont un sens, il en sera de même, grâce aux remarques ci-dessus faites sur les dérivées des fonctions $u(ax)$ et $\omega(ar)$, des intégrales

$$(15) \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} \left| \frac{d^{\nu} u(ax)}{da^{\nu}} \right| da$$

et, par conséquent, la série (5) sera *absolument sommable*. Alors, comme cette série vérifie formellement l'équation différentielle (1), la fonction analytique définie par cette série absolument sommable sera, d'après le théorème de M. Borel ci-dessus énoncé, une intégrale de l'équation, pourvu qu'elle soit algébrique en y.

Remarquons maintenant que les intégrales (12′) et (14) auront bien un sens dans le cas où le prolongement analytique de la fonction $\omega(t)$ est possible le long de l'axe réel positif et *la fonction $f(x, y)$ est algébrique aussi en x*, puisque, en vertu de cette hypothèse, la fonction $\sigma_r(a) = \omega(ar)$ sera algébrique en a et, par conséquent, restera inférieure à une puissance a^k, k étant une constante pouvant dépendre de r, ainsi que ses dérivées de tout ordre. Comme l'intégrale

$$(16) \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} a^k\, da$$

où k est une constante positive, a toujours un sens, il en résulte que, sous les conditions ci-dessus indiquées, les intégrales (12′) et (14) et, par conséquent, l'intégrale

$$(17) \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} \,|\, u(ax) \,|\, da$$

et les (15) auront un sens; c'est-à-dire la série (5) sera absolument sommable et sa somme $g(x)$ est une fonction ayant la propriété importante

$$(18) \qquad |\, g(x) \,| \leq \int_0^{a} e^{-a} \omega(ar)\, da \qquad \text{où} \qquad r = |\, x \,|.$$

Je tiens à signaler le fait que, dans les conditions indiquées, la série en question (5) est sommable dans tout le plan x (pour toute valeur de x). Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

Théorème I. — *Considérons l'équation différentielle*

$$(19) \qquad x^2 \frac{dy}{dx} = by + f(x, y) \qquad (b \neq 0)$$

algébrique en x et y, $f(x, y)$ désignant un polynome quelconque s'annulant pour $x = 0$ et $y = 0$ et ne contenant pas de terme de la forme by et désignons par $F(x, y)$ la fonction qui se déduit du polynome $f(x, y)$, en y remplaçant tous les coefficients par leurs modules.

Si la fonction algébrique $y = \omega(x)$ définie par l'équation

$$(20) \qquad xy + F(x, y) = |\, b \,|\, y$$

est prolongeable analytiquement le long de l'axe réel positif, la série (s) qui satisfait formellement à l'équation (19) et répond aux conditions singulières $x = 0$, $y = 0$ est sommable dans tout le plan x et sa somme est une fonction $u = g(x)$ dont le module ne dépasse pas, en chaque point du plan x, la valeur de l'intégrale [1]

$$(21) \qquad \int_0^{\infty} e^{-a} \omega(ar)\, da,$$

où $r = |\, x \,|$.

---

[1] Dans cette intégrale nous n'écrivons pas la valeur absolue de $\omega(ar)$, parce que la fonction $\omega(ar)$ est positive pour les valeurs positives de a.

La série associée à la série (s) *a un rayon de convergence différent de zéro toujours, quelle que soit la fonction* $f(x, y)$, *pourvu qu'elle soit holomorphe dans le voisinage des valeurs* $x = 0$ *et* $y = 0$.

Généralisation. — Il n'est pas sans intérêt d'ajouter que le théorème précédent subsiste dans le cas plus général où les coefficients $A_i(x)$ du polynome

$$f(x, y) = xA_0(x) + xA_1(x)y + A_2(x)y^2 + \ldots + A_\mu(x)y^\mu$$

sont des fonctions entières en x *d'ordre inférieur à l'unité*, puisque, dans ce cas, la fonction $u = \sigma_r(a) = \omega(ar)$, qui est maintenant *algébroïde*, sera aussi d'ordre inférieur à l'unité [*voir* mes travaux sur les zéros et la croissance des fonctions algébroïdes et, en particulier, mon Mémoire *Sur les fonctions ayant un nombre fini de branches* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, tome II, fasc. I, 1906)]; par conséquent, à partir d'une valeur de $|a|$, le module de la fonction $\sigma_r(a) = \omega(ar)$ et de toutes ses dérivées sera inférieur à

$$e^{|a|^{\rho+\varepsilon}}$$

(ε étant arbitrairement petit et $\rho < 1$). Nous aurons donc, pour $a > 0$, la formule

$$e^{-a}\omega(ar) < e^{-a}e^{a^{\rho+\varepsilon}} = e^{-a+a^{\rho+\varepsilon}} = e^{-a[1-a^{(\rho-1+\varepsilon)}]} < e^{-a(1-\theta)},$$

à partir d'une valeur de a, l'ordre ρ étant supposé inférieur à l'unité et le nombre θ étant positif et inférieur à l'unité. Nous en concluons que, si le prolongement analytique de la fonction $\omega(t)$ est possible le long de l'axe réel positif, l'intégrale (21) et celles qui contiennent les dérivées auront bien un sens et il en sera de même des autres relatives à la fonction $u(ax)$.

EXTENSIONS.

3. Nous avons des résultats analogues pour les équations différentielles plus générales

$$(22) \qquad x^\mu y' = by + f(x, y), \quad \mu \geqq 2,$$

ainsi que pour les systèmes de la forme

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &x^{\mu_1}\frac{dy_1}{dx} = b_1y_1+f_1(x, y_1 y_2, \ldots, y_n),\\ &x^{\mu_2}\frac{dy_2}{dx} = b_2y_2+f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &x^{\mu_n}\frac{dy_n}{dx} = b_ny_n+f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &(b_1\neq 0,\ b_2\neq 0,\ \ldots,\ b_n\neq 0;\qquad \mu_1\geqq 2,\ \mu_2\geqq 2,\ \ldots,\ \mu_n\geqq 2),\end{aligned}\right.$$

où les f_i sont des fonctions holomorphes dans le voisinage des valeurs initiales $x = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, ..., $y_n = 0$ (¹).

Nous n'avons pas besoin de répéter la démonstration qui est la même, basée toujours sur la méthode de comparaison exposée dans mon travail déjà cité du *Bulletin de la Société mathématique de France* et fondée sur quelques facteurs positifs qui jouent le rôle essentiel et que j'ai appelés *facteurs de divergence*.

On peut appliquer notre méthode directement à une équation différentielle

$$(24)\qquad F[x, y, y', y'', \ldots, y^{(\nu)}] = 0$$

supposée, pour fixer les idées, algébrique en y, y', y'', ..., $y^{(\nu)}$, et satisfaite pour $x = 0$, $y = 0$, quelles que soient les valeurs initiales attribuées à y', y'', ... Cette singularité a fait l'objet d'une Communication au cinquième Congrès international des mathématiciens [voir *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians*, vol. I, Communications (Section I), page 372, Cambridge], où j'ai fait une étude morphologique des équations présentant la singularité de fournir une série divergente, satisfaisant formellement à l'équation.

Dans cette Communication, j'ai donné les définitions suivantes qui sont nécessaires pour notre problème actuel, à savoir :

Considérons un terme M de l'équation (24) et effectuons sur ce terme m dérivations successives, et ensuite remplaçons x et y

(¹) Il n'y a pas besoin que toutes les équations du système présentent la singularité qui nous occupe pour pouvoir appliquer notre méthode, qu'on peut employer même dans le cas où une seule équation présente la forme (23), les autres étant régulières pour les conditions initiales $x = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, ..., $y_n = 0$, ou possédant une singularité d'autre nature.

par zéro ; si nous désignons par N l'ordre différentiel de l'expression E ainsi obtenue, la différence $N - m$ sera appelée *poids* du terme considéré. Cette définition nous conduit facilement aux règles suivantes, dont les démonstrations sont évidentes, à savoir :

1° Le poids d'un terme de la forme ax^p est égal à $-m$ (c'est-à-dire indéterminé, comme dépendant du nombre des dérivations effectuées).

2° Le poids d'un terme de la forme $ax^p y^q$ (où $q \neq 0$) est égal à $1 - p - q$.

3° Le poids d'un terme T ne contenant que des dérivées est égal à son ordre (c'est-à-dire à l'ordre le plus élevé des dérivées qui y figurent). Si nous désignons par b le poids d'un tel terme T, le poids du produit $x^p\mathrm{T}$ est égal à $b - p$ et le poids du produit $x^p y^q \mathrm{T}$ (où $q \neq 0$) est égal à $b + 1 - p - q$.

4° Le poids d'une somme est en général égal au plus grand des poids de ses termes.

Deux termes M et M′ du même poids seront dits *équipollents* lorsque les expressions correspondantes E ou E′ (*voir* la notation ci-dessus indiquée) se composent de termes semblables par rapport aux dérivées y', y'', ... (ne pouvant différer que par les coefficients). Toute équation en x et y, *différentielle ou non*, ayant des termes respectivement équipollents aux termes de l'équation (24) sera appelée *associée à l'équation* (24). Deux équations associées l'une à l'autre et *ayant communs* les termes du plus grand poids jouent un rôle très intéressant pour la singularité qui nous occupe. L'étude approfondie de notre travail déjà mentionné, qui sert de base pour le Mémoire actuel, montre deux choses importantes :

1° Ce sont les termes du poids maximum qui jouent le rôle prépondérant dans le calcul des coefficients des séries et non pas les termes qui contiennent la dérivée de l'ordre plus élevé, comme il arrive dans les cas réguliers. C'est un caractère de la singularité qui nous occupe.

2° Les résultats des dérivations successives dans les deux séries ne diffèrent que par quelques *facteurs positifs et indépendants de la valeur algébrique des coefficients des équations associées* que j'ai appelés *facteurs de divergence*, *puisque c'est la présence* *de ces facteurs qui seule entraîne la divergence d'une série lorsque l'autre a un rayon de convergence différent de zéro.*

L'équation différentielle (1), étudiée dans ce travail, a comme associée l'équation

$$xy = by + f(x, y)$$

qui n'est pas différentielle, et qui, par un changement des signes (s'il est nécessaire) des coefficients, nous a fourni l'équation

$$xy + F(x, y) = |b|y,$$

dont la comparaison avec l'équation (1) nous a permis d'établir le théorème de ce travail.

Un emploi analogue d'une associée à l'équation (24), *choisie de façon à donner une série de Maclaurin à coefficients tous positifs, permet d'étendre à l'équation* (24) *notre théorème I. Il faudra toujours que la série fournie par l'équation associée ait un rayon de convergence différent de zéro et définisse une fonction* $u = a(x)$ *prolongeable sur l'axe réel positif et d'ordre de grandeur inférieur à celui de* e^x *pour la sommabilité de M. Borel par la fonction sommatrice* e^a.

Parmi les associées à l'équation (24) on choisira, bien entendu, la plus simple, celle qui a le plus petit ordre différentiel. S'il existe une associée non différentielle, comme pour l'équation (1), elle est certainement (en général) préférable.

4. Pour les équations linéaires, notre théorème I n'est pas très utile. Si, par exemple, l'équation (1) est linéaire, son associée (que nous avons utilisée) est de la forme

$$|b|y = xy + xA(x) + xyA_1(x),$$

où les fonctions $A(x)$ et $A_1(x)$ sont à coefficients tous positifs; la fonction $\omega(x)$ sera donc

$$(25) \qquad y = \omega(x) = \frac{xA(x)}{|b| - x[1 + A_1(x)]}.$$

Si les $A(x)$ et $A_1(x)$ sont des polynomes, le dénominateur de la fraction (25) possède toujours une racine réelle et positive et, comme le numérateur n'a pas des racines positives, il en résulte que, dans le cas actuel, la fonction $y = \omega(x)$ possède toujours un point singulier sur l'axe réel positif et, par conséquent, le long de cet axe, son prolongement analytique est impossible. Donc, lorsque l'équation (1) est linéaire et algébrique en x, notre théorème n'est pas très utile.

Mais, pour les équations non linéaires, notre théorème est, en général, utile. Dans le cas, par exemple, où $f(x, y)$ est du second degré en y, l'associée de l'équation différentielle (1) est de la forme

$$|b|y = xy + x\mathrm{A}(x) + xy\mathrm{A}_1(x) + \mathrm{A}_2(x)y^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A}_2(x)y^2 + y[x\mathrm{A}_1(x) + x - |b| +]x\,\mathrm{A}(x) = 0, \tag{26}$$

où les $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{A}_1(x)$, $\mathrm{A}_2(x)$ sont à coefficients positifs; pour fixer les idées, supposons qu'ils soient des polynomes. On peut les choisir de façon que le polynome

$$\{x[\mathrm{A}_1(x)+1] - |b|\}^2 - 4x\mathrm{A}(x)\mathrm{A}_2(x)$$

n'ait pas des racines positives et, alors, la fonction $y = \omega(x)$, définie par l'équation (26), n'aura pas des points singuliers sur l'axe réel positif et son prolongement analytique sur cet axe sera bien possible.

Je tiens à signaler le fait remarquable que notre méthode de comparaison ramène la possibilité de la sommation des séries divergentes satisfaisant formellement aux équations différentielles de la forme (1) et d'autres formes plus générales à l'étude des points singuliers et de la croissance d'une fonction algébrique ou algébroïde bien connue et déterminée par l'équation différentielle.

Une généralisation de la notion de sommation de M. Borel faite par d'autres moyennes ou par d'autres fonctions sommatrices permettrait, je l'espère, à notre méthode de donner de meilleurs résultats pour la théorie des singularités des équations différentielles.

Il est aussi digne d'attirer l'attention sur le fait que notre théorème I fournit une limite supérieure de la fonction $y = g(x)$ qui est la somme de la série (5) satisfaisant formellement à l'équation différentielle; nous avons

$$|g(x)| \leqq M(r),$$

où

$$(27) \qquad M(r) = \int_0^\infty e^{-a}\omega(ar)\,da = \frac{1}{r}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{r}}\omega(t)\,dt.$$

Remarquons enfin que, d'après les résultats ci-dessus mentionnés de M. Borel, notre méthode démontre l'existence d'intégrales de certaines équations différentielles, répondant aux conditions initiales ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$) singulières et fournies par la série divergente satisfaisant formellement aux équations et par la théorie de sommabilité de M. Borel.