

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÉONCE FOURÈS

Recouvrements de surfaces de Riemann

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 69 (1952), p. 183-201

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__183_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECOUVREMENTS

DE

SURFACES DE RIEMANN

PAR M. L. FOURÈS.

A. — Recouvrements riemanniens.

1. **RECOUVREMENTS.** — Une surface est une variété à deux dimensions, triangulable, et, dans tout ce qui suit, orientable. Nous prendrons toujours comme famille de voisinages d'un point des domaines élémentaires, c'est-à-dire des ouverts homéomorphes à des cercles.

La notion de surface de recouvrement a été définie et utilisée à plusieurs reprises en Topologie et en Théorie des fonctions. Certains auteurs (De Kerekjarto, Ahlfors [1, 3, 6, 7]), font intervenir deux triangulations correspondantes de la surface donnée et de son recouvrement. Nous donnons ci-dessous des définitions locales du type de celles données en 1938 ⁽¹⁾ par Stoilow [9, 15], dont je regrette de n'avoir pas assez mis en évidence le rôle fondamental dans mon Mémoire de 1951.

Dans ce paragraphe t désignera une représentation continue d'une surface \mathcal{S} dans une autre S de sorte que si $M \in S$, $t^{-1}(M)$ soit un ensemble isolé (formé de points isolés).

DÉFINITION 1. — $P \in S$ est couvert sans ramification par $\Delta \subset \mathcal{S}$ (pour t), s'il existe un voisinage $V(P) \subset S$ tel que $E_{V,\Delta} = \Delta \cap t^{-1}[V(P)]$ ne soit pas vide et que toute composante connexe de $E_{V,\Delta}$ soit représentée biunivoquement par t sur $V(P)$.

(\mathcal{S}, t) est un recouvrement de S relativement non ramifié si tout point $P \in S$ est couvert sans ramification par \mathcal{S} (pour t) ⁽²⁾.

⁽¹⁾ [9], p. 30.

⁽²⁾ Il nous arrivera de dire que \mathcal{S} est un recouvrement de S , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le choix de la fonction (ici t) qui représente \mathcal{S} sur S .

D'après la première partie, il existe dans chaque composante connexe Γ_i de $E_{v,\Delta}$ un point \mathfrak{X}_i tel que $t(\mathfrak{X}_i) = P$. La deuxième partie implique que t soit une représentation de \mathfrak{S} sur S .

Cas particulier. — Supposons S quasi-simple, doublement connexe; soit $M \in S$; ou bien $t^{-1}(M)$ a un nombre fini n de points dans \mathfrak{S} : \mathfrak{S} est alors doublement connexe, et n indépendant de $M \in S$ est l'ordre du recouvrement; ou bien $t^{-1}(M)$ a une infinité de points dans \mathfrak{S} qui est alors simplement connexe; (\mathfrak{S}, t) est le recouvrement universel de S .

DÉFINITION 2. — $P \in S$ est couvert avec ramification par $\Delta \subset \mathfrak{S}$ (pour t), s'il existe $V(P) \subset S$ tel que :

- 1° $E_{v,\Delta} \neq \emptyset$.
- 2° Soit Γ_i une composante connexe quelconque de $E_{v,\Delta}$: $\mathfrak{X}_i = \Gamma_i \cap t^{-1}(P) \neq \emptyset$.
- 3° $\Gamma_i^* = \Gamma_i - \mathfrak{X}_i$ est un recouvrement relativement non ramifié d'ordre fini de $V^*(P) = V(P) - P$.

(\mathfrak{S}, t) est un recouvrement de S relativement ramifié si tout point $P \in S$ est couvert avec ou sans ramification par \mathfrak{S} (pour t).

D'après (3°) et le fait que $V^*(P)$ est doublement connexe, Γ_i^* est doublement connexe et \mathfrak{X}_i se réduit à un seul point, puisque \mathfrak{X}_i est déjà un ensemble isolé.

DÉFINITION 3. — $P \in S$ est régulièrement couvert par \mathfrak{S} (pour t), s'il existe $V(P) \subset S$ tel que toutes les composantes connexes Γ_i de $E_{v,\mathfrak{S}}$ recouvrent P avec le même ordre de ramification.

Si tout point $P \in S$ est régulièrement couvert par \mathfrak{S} (pour t), (\mathfrak{S}, t) est un recouvrement régulièrement ramifié de S .

Singularités. — P est imparfaitement couvert par $\mathfrak{S}' \subset \mathfrak{S}$ (pour t) si tout point de $\mathfrak{S}' \cap t^{-1}(P)$ est intérieur à un domaine Δ tel que P soit couvert par Δ (pour t), sans que l'on puisse prendre pour Δ , la surface \mathfrak{S}' entière.

En d'autres termes, le choix d'un $V(P)$ fixe pour \mathfrak{S} entière est impossible.

Soit F_1 l'ensemble des points imparfaitement couverts par \mathfrak{S} (pour t). Soit $S^* \subset S$ l'image de \mathfrak{S} par t . Désignons par F_2 la frontière de S^* dans S et notons $F = F_1 \cup F_2$.

Remarquons que :

Les points de S^ couverts avec ramification par (\mathfrak{S}, t) sont isolés dans $S^* - F_1$.*

Parmi les éventualités possibles concernant l'aspect du recouvrement de S^* dans le voisinage d'un point isolé P de F , nous signalerons les deux suivantes :

a. Singularité générale logarithmique. — Soit $P \in \bar{S}^*$; il existe $V(P)$ tel que $V(P) - P \subset S^*$ et tel que toute composante connexe de $E_{v,\mathfrak{S}}$, qui ne couvre

pas P soit un recouvrement de $V(P) - P$ relativement non ramifié et simplement connexe.

b. Accumulation de points de ramification. — Soit $P \in F_1$. Quelque petit que soit $V(P)$ toute composante connexe de $E_{V,S}$ comprend au moins un point de $t^{-1}(P)$.

t est une fonction uniforme sur \mathfrak{S} ; t^{-1} n'est pas uniforme sur S^* . Soit $\mathfrak{X} = t^{-1}(P)$ qui définit dans un voisinage de P une branche de t^{-1} . Cette branche admet P pour point de ramification d'ordre n s'il existe $V(P)$ tel que P soit couvert avec ramification d'ordre n , par la composante connexe de $E_{V,S}$ qui contient \mathfrak{X} (pour t).

2. RECOUVREMENTS RIEMANNIENS. — Dans les définitions 1, 2, 3 remplaçons les surfaces S et \mathfrak{S} par deux surfaces de Riemann R et \mathcal{R} , et t par une représentation φ assujettie aux mêmes conditions que t , et en outre conforme biunivoque en tout point où t était seulement biunivoque.

Soit D un domaine doublement connexe, quasi-simple. (Δ, t) , (δ, θ) deux recouvrements relativement non ramifiés, d'ordre n , de D : toutes les branches de $\theta^{-1} \circ t$ ou $t^{-1} \circ \theta$ sont uniformes. Soit alors C le cercle-unité du plan de la variable z ; Γ_1 et Γ_2 les cercles-unités des plans des variables ζ_1 et ζ_2 . Notons C^* , Γ_1^* , Γ_2^* les domaines obtenus en retirant l'origine des cercles C , Γ_1 , Γ_2 . Soient $z = \varphi_1(\zeta_1)$ et $z = \varphi_2(\zeta_2)$ deux fonctions continues dans Γ_1 et Γ_2 avec $\varphi_1(o) = \varphi_2(o) = o$, et telles que (Γ_1^*, φ_1) et (Γ_2^*, φ_2) , soient des recouvrements du même ordre de C^* . Alors $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ et ψ^{-1} sont uniformes avec $\psi(o) = o$, $\psi^{-1}(o) = o$. L'origine de Γ_2 est régulière pour ψ qui, par suite, est de la forme $\psi = \alpha \zeta_2$, $|\alpha| = 1$. (Γ_1^*, ζ_1^n) étant un recouvrement d'ordre n de C^* , tous les recouvrements d'ordre n de C^* sont de la forme $(\Gamma^*, k\zeta^n)$, lorsque Γ^* est un cercle-unité privé de l'origine.

Soit (\mathcal{R}, φ) un recouvrement ramifié ou non de R . Soit $P \in R$, $\mathfrak{X} \in \mathcal{R}$ tel que $\varphi(\mathfrak{X}) = P$. Il existe $V(P)$ tel que la composante connexe $\mathfrak{V}(\mathfrak{X})$ de $E_{V,\mathcal{R}}$ qui contient \mathfrak{X} recouvre P avec l'ordre de ramification n . Les uniformisantes locales de \mathcal{R} et R , respectivement \mathfrak{T} et T , représentent $\mathfrak{V}(\mathfrak{X})$ et $V(P)$ conformément sur les cercles-unités Γ et C des plans ζ et z .

Posons $\psi = T \circ \varphi \circ \mathfrak{T}^{-1}$, on a, d'après ce qui précède, $\psi = k\zeta^n$.

THÉORÈME. — Soit (\mathcal{R}, φ) un recouvrement de R relativement ramifié :

a. les points où φ n'est pas biunivoque sont isolés;

b. soit $P = \varphi(\mathfrak{X})$: il est possible de trouver sur R et \mathcal{R} des voisinages $V(P)$ et $\mathfrak{V}(\mathfrak{X})$ dont les paramètres z et ζ obtenus par les uniformisantes locales T et \mathfrak{T} sont tels que $T \circ \varphi \circ \mathfrak{T}^{-1} = k\zeta^n$.

Ainsi la définition 2 dans laquelle on a remplacé S , \mathfrak{S} , t par r , \mathcal{R} , φ est donc une généralisation du recouvrement riemannien défini par Stoilow [9]; il

s'agissait alors de la projection d'une surface de Riemann abstraite dans le plan complexe,

DÉFINITION 3 bis. — φ est une projection riemannienne d'une surface de Riemann \mathcal{R} sur une autre R , si, P étant un point quelconque de R , il existe pour tout point \mathcal{P}_i de $\varphi^{-1}(P)$, un domaine $\Delta_i \subset \mathcal{R}$ ($\mathcal{P}_i \in \Delta_i$) tel que P soit couvert avec ou sans ramification par Δ_i (pour la projection φ).

φ étant une projection riemannienne de \mathcal{R} sur R , (\mathcal{R}, φ) ne sera un *recouvrement Riemannien* de R que si (\mathcal{R}, φ) est un recouvrement de R au sens de la définition 2.

Ainsi φ peut être une projection riemannienne de \mathcal{R} sur R sans que (\mathcal{R}, φ) soit un recouvrement Riemannien de R , par exemple si P est un point singulier du type b .

Désignons par $\mathbf{S}u$ toute fonction de la variable u représentable dans un voisinage de $u = 0$ par une série convergente de la forme

$$\mathbf{S}u = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \dots, \quad \alpha_1 \neq 0.$$

De même $\mathbf{S}\mathbf{S}(u, v)$ représentera une série double en u et v , sans terme constant, convergente dans un voisinage de $u = 0, v = 0$:

$$\mathbf{S}\mathbf{S}(u, v) = \alpha_{11} u + \alpha_{12} v + \alpha_{21} u^2 + \alpha_{22} uv + \dots,$$

φ étant une projection riemannienne $M = \varphi(\mathcal{M})$ on a, pour des uniformisantes locales T et \mathcal{T} de R et \mathcal{R} opérant sur des voisinages particuliers de M et \mathcal{M} , $z = T \circ \varphi \circ \mathcal{T}^{-1} = k\zeta^u$. Si nous considérons des uniformisantes locales $z = T(M)$ et $\zeta = \mathcal{T}(\mathcal{M})$ pour des voisinages quelconques de M et \mathcal{M} on déduit de la relation précédente

$$(1) \quad z = \mathbf{S}(\mathbf{S}\zeta)^u = \alpha \zeta^{u(1 + \mathbf{S}\zeta)}$$

qui est invariante par toute transformation \mathbf{S} effectuée sur ζ et z . Dans (1) les fonctions \mathbf{S} sont complètement arbitraires.

3. SURFACES DE RIEMANN. POINTS DE RAMIFICATION. — Soit $W = F(Z)$ une représentation d'une surface de Riemann R_z dans une autre R_w . Cette représentation est analytique si pour tout couple de points Z et W associés par F , on peut trouver deux voisinages $V_z(Z) \subset R_z$ et $V_w(W) \subset R_w$ tels que si T_z et T_w sont les uniformisantes locales de R_z et R_w représentant V_z et V_w sur les cercles-unités des plans des variables z et w , on ait dans un voisinage de l'origine

$$w = h(z) = T_w \circ F \circ T_z^{-1} = \alpha_0 z^{\frac{p}{q}} \left(1 + \alpha_1 z^{\frac{1}{q}} + \alpha_2 z^{\frac{2}{q}} + \dots \right).$$

Si l'on pose $z^{\frac{1}{q}} = u, w^{\frac{1}{q}} = s$ on a $s = \varphi(u)$, où φ est holomorphe univalente nulle à l'origine

$$(2) \quad w = \left[\varphi \left(z^{\frac{1}{q}} \right) \right]^q = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}} \right)^p = \alpha z^{\frac{p}{q}} \left(1 + \mathbf{S} z^{\frac{1}{q}} \right)$$

qui est invariante par toute transformation **S** effectuée sur z et w . **S** est complètement arbitraire.

DÉFINITION 4. — La surface de Riemann de la fonction analytique $W = F(Z)$ est l'ensemble $(\mathcal{R}; \psi, \omega)$ d'une surface de Riemann \mathcal{R} et de deux projections riemanniennes de \mathcal{R} sur R_z et sur R_w : $Z = \psi(M)$, $W = \omega(M)$ ($M \in \mathcal{R}$) telles que

1° $F = \omega \circ \psi^{-1}$.

2° Si une courbe fermée de R_z a, par F , une image fermée sur R_w , son image dans \mathcal{R} par ψ^{-1} est aussi fermée.

Il existe sur R_z un voisinage $V(Z)$ tel que la composante connexe Δ_v de $\psi^{-1}(V)$, contenant M , soit représentée par une uniformisante locale de \mathcal{R} , Θ_v sur le cercle-unité G_v du plan ζ_v , de manière que l'on ait $T_z \circ \psi \circ \Theta_v^{-1} = \zeta_v$ (où T_z est une uniformisante locale de R_z qui représente V sur le cercle-unité du plan z). De même il existe sur R_w , $\mathcal{V}(W)$ tel que l'on ait avec des notations analogues aux précédentes $T_w \circ \omega \circ \Theta_w^{-1} = \zeta_w$. Soit $\Delta = \Delta_v \cap \Delta_w$, M est intérieur à Δ qui a pour images dans G_v et G_w , δ_v et δ_w . Ces images sont en correspondance conforme biunivoque $\zeta_w = \varphi(\zeta_v)$ avec correspondance des origines. Soient D_z et D_w les images de Δ par $T_z \circ \psi$ et par $T_w \circ \omega$. Remarquons que $\Theta_w^{-1} \circ \varphi \circ \Theta_v$ est l'identité sur \mathcal{R} . On a alors dans D_z :

$$w = f(z) = T_w \circ \omega \circ \psi^{-1} \circ T_z^{-1} = T_w \circ \omega \circ \Theta_w^{-1} \circ \varphi \circ \Theta_v \circ \psi^{-1} \circ T_z^{-1} = \left[\varphi \left(\frac{1}{z^q} \right) \right]^p.$$

Montrons que p et q ayant le sens donné au début, le développement de $w = f(z)$ ne peut se mettre sous une forme $w = \left(\mathbf{s} z^{\frac{1}{q'}} \right)^{p'}$ avec $p' < p$, $q' < q$: si non il y aurait dans V_z une courbe fermée faisant q' fois le tour de Z à laquelle correspondrait dans \mathcal{V}_w une courbe fermée faisant p' fois le tour de W . Il leur correspondrait sur \mathcal{R} une courbe fermée; mais la projection par ψ d'une courbe fermée de \mathcal{R} , entourant M est une courbe fermée faisant au moins q tours autour de Z : donc $q' > q$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME. — Soit $(\mathcal{R}; \psi, \omega)$ la surface de Riemann de $W = F(Z)$. Les ordres des projections riemanniennes $Z = \psi(M)$ et $W = \omega(M)$ sont respectivement les coefficients q et p du développement $w = \left(\mathbf{s} z^{\frac{1}{q}} \right)^p$ obtenu entre les paramètres z et w de voisinages quelconques de Z et W .

B. — Fonctions d'automorphie.

1. FONCTIONS UNIFORMES. — Soit $w = f(z)$ une fonction uniforme de la variable z . $z' = \varphi(z)$ est fonction d'automorphie de f si $f(z) = f[\varphi(z)]$. φ s'écrit aussi $f^{-1} \circ f$.

Dans le cas où ω est méromorphe, si φ est à p déterminations elle est solution de $P(z, z') = 0$, où P est un polynôme de degré p en z et en z' (Shimizu) [5]. En particulier pour $p = 1$ si f est rationnelle, φ est homographique (Fatou) [2], si f est transcendante, φ est linéaire (Shimizu, Marty [5, 10]); nous reviendrons dans la section D sur le théorème de Shimizu.

2. FONCTIONS MULTIFORMES. — Soit une fonction algébrique $\omega(z)$ définie par $P(\omega, z) = 0$, où P est un polynôme de degré m en ω , n en z . Écrivons que ω prend la même valeur pour z et z' :

$$(A) \quad P(\omega, z) = 0, \quad P(\omega, z') = 0.$$

La correspondance obtenue entre z et z' par l'élimination de ω dans (A) est donnée par $\mathcal{R}(z, z') = 0$, où \mathcal{R} est le résultant de l'élimination de ω dans (A).

$\mathcal{R}(z, z') = (z' - z)^m R(z, z')$, où $R(z, z')$ est de degré $m(n - 1)$ par rapport à chacune des variables z et z' . Soient $z' = \varphi_1(z)$, $z' = \varphi_2(z)$ deux branches de $z'(z)$ définies par $R(z, z') = 0$. Posons $z'' = \varphi_2(z') = \varphi_2 \circ \varphi_1(z)$, il existe donc ω_1 et ω_2 tels que

$$\begin{aligned} P(\omega_1, z) &= 0, & P(\omega_2, z') &= 0, \\ P(\omega_1, z') &= 0, & P(\omega_2, z'') &= 0; \end{aligned}$$

où l'on peut avoir $\omega_1 \neq \omega_2$. Donc la branche de fonction analytique définie localement par $\varphi_2 \circ \varphi_1$ n'est pas fonction d'automorphie.

DÉFINITION 5. — Soit \mathcal{R} la surface de Riemann de la fonction analytique $W = F(Z)$. $M' = \Phi(M)$ est fonction d'automorphie de $\omega = \omega(M)$ uniforme si $\omega(M) = \omega[\Phi(M)]$. $\Phi = \omega^{-1} \circ \omega$. La relation $Z' = \psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ qui en résulte entre $Z = \psi(M)$ et $Z' = \psi(M')$ est la projection sur R_z de la fonction d'automorphie de $\omega = \omega(M)$.

Dans ces conditions les fonctions d'automorphie de ω forment un hypergroupe.

3. POINTS DE RAMIFICATION. — Soit $M' = \Phi(M)$ une fonction d'automorphie : $W = \omega(M) = \omega[\Phi(M)]$. Considérons des voisinages de M , M' , W (sur les surfaces \mathcal{R} , \mathcal{R} , R_W), et les uniformisantes locales qui les représentent sur les cercles-unités des plans ζ , ζ' , ω :

$$\omega = \alpha \zeta^p (1 + \mathbf{S}\zeta) = \alpha' \zeta'^p (1 + \mathbf{S}\zeta') \quad \text{ou} \quad \alpha \zeta^{\frac{p}{p'}} (1 + \mathbf{S}\zeta) = \alpha' \zeta' (1 + \mathbf{S}\zeta') = \mathbf{S}\zeta'.$$

Si $\mathbf{S}\zeta' = u$, $\zeta' = \mathbf{S}u$:

$$(3') \quad \zeta' = \mathbf{S} \left[\zeta^{\frac{p}{p'}} (1 + \mathbf{S}\zeta) \right],$$

$$(3) \quad \zeta' = \gamma \zeta^{\frac{p}{p'}} \left[1 + \mathbf{S}\mathbf{S} \left(\zeta^{\frac{p}{p'}}, \zeta \right) \right].$$

Dans la forme (3) invariante par toute transformation **S** effectuée sur ζ et sur ζ' , la série double **SS** n'est pas quelconque; (3) peut se mettre sous la forme d'une série simple ne contenant que des termes $\alpha_i \zeta^{\frac{\lambda p + \mu p'}{p'}}$ où $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$.

Projetons $M' = \Phi(M)$ sur la surface R_z par $Z = \psi(M)$:

$$\omega = \left(\mathbf{s}_{z^{\frac{1}{q}}}\right)^p = \left(\mathbf{s}_{z'^{\frac{1}{q'}}}\right)^{p'}$$

d'où

$$\mathbf{s}_{z'^{\frac{1}{q'}}} = \left(\mathbf{s}_{z^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{p}{p'}}, \quad z'^{\frac{1}{q'}} = \mathbf{s} \left(\mathbf{s}_{z^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{p}{p'}};$$

$$(4') \quad z' = \left[\mathbf{s} \left(\mathbf{s}_{z^{\frac{1}{q}}}\right)^{\frac{p}{p'}} \right]^{q'}$$

$$(4) \quad z' = c z^{\frac{p}{p'} \frac{q'}{q}} \left[\mathbf{I} + \mathbf{SS} \left(z^{\frac{p}{p'} \frac{1}{q}}, z^{\frac{1}{q}} \right) \right].$$

Les formes (4) et (4') sont invariantes par toute transformation **S** effectuée sur z et z' . Dans (4) la série double **SS** n'est pas à coefficients quelconques et l'on peut la mettre sous la forme d'une série simple ne contenant que des termes $a_i z^{\frac{\lambda p + \mu p'}{q p'}}$, où $\lambda \geq m$, $\mu > 0$.

THÉORÈME. — Soit $M' = \Phi(M)$ une fonction d'automorphie de la fonction analytique $W = F(Z)$ définie sur la surface de Riemann \mathcal{R} de cette fonction. Supposons que $W = \omega(M)$ soit d'ordre p en M d'ordre p' en M' , la projection $Z = \psi(M)$ étant d'ordre q en M , d'ordre q' en M' . Dans ces conditions le développement de $M' = \Phi(M)$ est de la forme

$$(3) \quad \zeta' = \gamma \zeta^{\frac{p}{p'}} \left[\mathbf{I} + \mathbf{SS} \left(\zeta^{\frac{p}{p'}}, \zeta \right) \right]$$

qui ne contient que des termes $\zeta^{\frac{\lambda p + \mu p'}{p'}}$, $\lambda > 0$, $\mu \geq 0$. La projection de Φ par ψ soit $\psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ est de la forme

$$(4) \quad z' = c z^{\frac{p}{p'} \frac{q'}{q}} \left[\mathbf{I} + \mathbf{SS} \left(z^{\frac{p}{p'} \frac{1}{q}}, z^{\frac{1}{q}} \right) \right]$$

qui ne comprend que des termes $z^{\frac{\lambda p + \mu p'}{p' q}}$, $\lambda \geq m$, $\mu > 0$. Les points de ramification de Φ ou de $\psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ ne sont pas du type général (2) des points de ramification d'une fonction analytique.

4. FONCTIONS D'AUTOMORPHIE SANS POINTS DE RAMIFICATION. — Soit $M' = \Phi(M)$ une fonction d'automorphie sans points de ramification et dont l'inverse n'a pas de points de ramification.

Considérons l'uniformisante globale f de \mathcal{R} qui réalise la représentation conforme de \mathcal{R} sur un cercle C (ou le plan entier). f^{-1} est automorphe par les fonctions homographiques d'un groupe G proprement discontinu. Soit Φ_i une

branche quelconque de Φ (définie dans le voisinage d'un point). $g_i = f \circ \Phi_i \circ f^{-1}$ est homographique, donc $\omega \circ f^{-1}$ est automorphe pour une fonction homographique $g_i \notin G$, et pour toutes les fonctions du groupe proprement discontinu Γ obtenu en adjoignant à G la fonction g_i . Le groupe Γ comprend nécessairement toutes les fonctions $g_j = f \circ \Phi_j \circ f^{-1}$. En effet Φ_j s'obtient par prolongement de Φ_i suivant une courbe fermée sur \mathcal{R} dont l'image dans C est ouverte et joint deux points se correspondant par une fonction de G . On a donc $g_j = a \circ g_i \circ b$, où a et $b \in G$, donc $g_j \in \Gamma$. Inversement toute fonction Φ_k obtenue par transposition $\Phi_k = f^{-1} \circ g_k \circ f$ d'une fonction $g_k \in \Gamma$, $g_k \notin G$, est une branche de Φ .

Les images par une même fonction g_j de deux points de C se correspondant par $a \in G$ ne se correspondent pas nécessairement par une fonction de G , dès que Φ a plus d'une branche : $g_j \circ a \circ g_j^{-1} \notin G$ ($a \in G$).

G est un sous-groupe invariant de Γ si et seulement si Φ est uniforme. En général, le nombre de branches de Φ est égal au nombre de classes γ_i de Γ définies de la manière suivante :

tout g appartenant à Γ et n'appartenant pas à G , appartient à une classe γ_i ;
 g_μ et $g_\nu \in$ même classe si $g_\mu \circ g_\nu^{-1} \in G$.

Il en résulte que Φ et Φ^{-1} ont le même nombre de déterminations.

5. NOMBRE DE DÉTERMINATIONS DES FONCTIONS D'AUTOMORPHIE. — *a. Domaines fondamentaux.* — Soit φ_0 une représentation d'une surface de Riemann R sur elle-même. Φ l'hypergroupe engendré par les itérées positives et négatives de φ_0 . φ_i désignera une fonction quelconque de Φ . M et M' sont dits équivalents s'il existe $\varphi_i \in \Phi$ tel que $M' = \varphi_i(M)$. Supposons qu'il existe une projection riemannienne π de R sur F de sorte que tous les points d'une même classe d'équivalence aient même image sur F ; nous n'exigeons pas qu'un point de F soit l'image d'une seule classe de points équivalents. D'autre part si φ est une fonction d'automorphie, une telle projection existe : $\omega(M)$ elle-même ; mais il est aussi possible qu'il existe d'autres projections que $\omega(M)$ satisfaisant à la condition posée et permettant une réalisation plus aisée de la condition suivante :

Supposons que l'on puisse tracer sur F un système d'arcs simples de Jordan ne s'accumulant nulle part, ne séparant pas F et limitant sur F un domaine F^* dans lequel toutes les branches de π^{-1} sont uniformes. Soient d_i les domaines obtenus sur R comme images de F^* par π^{-1} . Ces domaines tous étrangers et couvrant R (avec leurs frontières) constituent un pavage de R . Les domaines d_i sont appelés *domaines fondamentaux* de R relativement à π .

b. Les déterminations de φ_0 . — Supposons les d_i en nombre fini n . Soit $M \in d_i$: il y a au plus un équivalent de M dans chaque d_j ($j \neq i$). φ_0 a un

nombre fini p de déterminations. Soit $(\mathcal{R}; \tau, \sigma)$ la surface de Riemann de φ_0 : $\varphi_0 = \sigma \circ \tau^{-1}$. Toute branche d'une φ_j définie dans un d_i lui associe un autre d_k puisque φ associe des points équivalents et que d'après la nature de la frontière de F^* , si un point est frontière d'un d_i tous ses équivalents sont frontières de domaines d_j . Considérons sur \mathcal{R} les images δ_λ des d_i par τ^{-1} : tout point de \mathcal{R} a une image par τ dans un d_i , donc il appartient ou bien à un δ_λ ou à la frontière d'un nombre fini d'entre eux; d'autre part si $\lambda \neq \mu$: $\delta_\lambda \cap \delta_\mu = \emptyset$. Les δ_λ constituent donc un pavage de \mathcal{R} , chaque domaine du pavage ayant pour image F^* par $\pi \circ \tau$.

L'image de δ_λ par σ est un d_k : appliquons τ et σ à δ_λ . Définie dans $\tau(\delta_\lambda) = d_j$, $\sigma \circ \tau^{-1}$ est une branche de φ_0 qui associe donc à d_j un autre domaine fondamental d_k . Puisque φ_0 a p déterminations, à d_i correspondent par τ^{-1} , p domaines δ_λ distincts, quel que soit d_i . \mathcal{R} est donc pavée par np domaines δ_λ , et σ représente ces np domaines δ_λ sur n domaines d_k . Supposons que $\sigma^{-1}(d_k)$ soit formée de q domaines δ_λ : prolongeons σ^{-1} , depuis d_k jusqu'à $d_{k'}$, en évitant d'éventuels points de ramification de σ^{-1} : les δ_λ obtenus sont tous différents, donc $q' \geq q$, en désignant par q' le nombre de domaines δ_λ images de $d_{k'}$ par σ^{-1} ; mais en effectuant le prolongement de σ^{-1} depuis $d_{k'}$, jusqu'à d_k on trouvera $q \geq q'$, donc $q = q' = p$. σ^{-1} étant à p déterminations $\tau \circ \sigma^{-1} = \varphi_0^{-1}$ l'est aussi.

THÉORÈME. — *Soit φ une représentation d'une surface de Riemann R sur elle-même. Supposons qu'il existe une fonction π uniforme sur R admettant pour fonction d'automorphie φ_0 . Supposons de plus que la décomposition de R en domaines fondamentaux pour π soit possible et se fasse suivant un nombre fini de domaines.*

Dans ces conditions, φ_0 et toutes les fonctions de l'hypergroupe des itérées de φ_0 ont même nombre de déterminations que leurs inverses.

En particulier : toutes les fonctions d'automorphie des fonctions algébriques ont même nombre de déterminations que leurs inverses.

6. REMARQUE SUR LES FONCTIONS D'AUTOMORPHIE. — Le théorème du paragraphe 3 prouve que si l'on se donne une représentation analytique $Z' = \Phi(Z)$ d'une surface de Riemann R_z sur elle-même, il n'existe pas nécessairement de fonction analytique $W = F(Z)$ admettant Φ comme projection de fonction d'automorphie. Mais si l'on considère dans R_z un domaine D suffisamment petit (pour que Φ représente D sur $D' \subset R_z$ conformément et biunivoquement, et que certaines conditions de régularité des frontières soient satisfaites) on peut toujours construire un domaine $\Delta \subset R_z$, $\Delta \supset D$, $\Delta \supset D'$ et une fonction $W = F^*(Z)$ uniforme dans Δ et admettant dans Δ , Φ comme fonction d'automorphie [18].

C. — Arbres topologiques régulièrement ramifiés.

1. DÉFINITIONS. — Si (Σ, t) est un recouvrement d'une surface B_0 close, de genre zéro, relativement ramifié en un nombre fini de points $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, q)$, on peut représenter Σ par son arbre topologique T . Les côtés sont de q sortes notés $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}, a_q$, et se succèdent dans cet ordre si l'on tourne autour d'un nœud \circ dans le sens direct, autour d'un nœud \times dans le sens rétrograde [11, 16].

Nous dirons que T est *tracé sur une surface* S si T est effectivement tracé sur la surface S et si de plus toute portion de S limitée par des côtés de T et ne contenant elle-même aucun côté de T à son intérieur, est simplement connexe.

T étant donné, on peut définir un polygone de T comme étant une surface simplement connexe limitée par une ligne polygonale formée de chaînons des types a_i et a_{i+1} seulement, cette ligne polygonale étant soit fermée soit ouverte, et dans ce dernier cas, comprenant une infinité de chaînons.

Nous ne considérerons ici que des arbres T tracés sur des surfaces S dont ils constituent une triangulation, c'est-à-dire des arbres T dont les polygones ont tous, un nombre fini de côtés.

Désignons par K_i les polygones tracés sur S par T . Dans chaque K_i choisissons un point Ω_i que nous appellerons le « centre » de K_i . Soient $K_{i_1}, K_{i_2}, \dots, K_{i_q}$ les polygones ayant N_j pour sommet commun. Joignons Ω_{i_k} et $\Omega_{i_{k+1}}$ (k défini mod q) : nous obtenons un polygone K^j . Les K^j constituent une triangulation de S et par l'intermédiaire de cette triangulation on obtient une correspondance topologique entre S et $\Sigma : \Sigma \xrightarrow{\sigma} S$.

Remarque. — (Σ, t) étant par définition un recouvrement de B_0 , avec les définitions que nous avons adoptées, il n'y a pas de points de B_0 , imparfaitement couverts, et tous les polygones de T ont un nombre fini de côtés.

Nous dirons que *deux nœuds* A et B de T sont *équivalents* ($A \sim B$) s'il existe un homéomorphisme de T sur lui-même emmenant A en B . T est *régulièrement ramifié* s'il y a seulement un nombre fini de classes de nœuds équivalents.

Un ensemble E de nœuds de T est connexe si l'on peut joindre deux nœuds de E par une chaîne de traits de liaison ne reliant que des nœuds de E .

Dans l'étude qui suit nous supposerons T régulièrement ramifié.

2. CELLULES. — Une cellule est un ensemble connexe fini de nœuds de T tel qu'il n'y ait pas dans la cellule deux nœuds équivalents, et que tout nœud de T soit équivalent à un nœud de la cellule.

Construction. — Soit E un ensemble de nœuds de T : $M \notin E$ est dit extrapériphérique pour E , s'il est relié par un seul trait de liaison à un nœud de E ; $N \in E$ est périphérique pour E , s'il est relié par un seul trait de liaison à un nœud extrapériphérique.

Choisissons un nœud $A = A_0^{m_0} \in T$. Soient $A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{n_1}$ les nœuds extrapériphériques pour $A_0^{m_0}$. Construisons C_1 de la manière suivante : ordonnons d'abord l'ensemble des couples d'entiers : $(x, y) < (x', y')$ si $x < x'$ ou bien si $x = x'$ avec $y < y'$.

Dans ces conditions $A_1^\nu \in C_1$ si $A_1^\nu \not\sim A_j^\mu$ où $(j, \mu) < (1, \nu)$. Désignons par $A_0^{m_0}, A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{n_1}$ les nœuds de C_1 , et d'une façon générale $A_0^{m_0}, A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{n_1}, A_2^1, \dots, A_2^{m_2}, A_2^1, \dots, A_2^{m_2}$ les nœuds de C_i . Désignons par $A_{i+1}^1, A_{i+1}^2, \dots, A_{i+1}^{n_{i+1}}$ les nœuds extrapériphériques pour C_i :

$$A_{i+1}^\nu \in C_{i+1} \quad \text{si} \quad A_{i+1}^\nu \not\sim A_j^\mu, \quad \text{où} \quad (j, \mu) < (i+1, \nu).$$

Ainsi tout nœud de C_i appartient aussi à C_{i+1} . Mais la suite des C_i ne peut être croissante puisqu'il n'y a dans T qu'un nombre fini de classes de nœuds équivalents; donc à partir d'un certain rang $C_{k+1} \equiv C_k \equiv C$.

Association des côtés libres de C. — Un côté libre de C est un trait de liaison de T joignant un nœud périphérique de C à un nœud extrapériphérique. Soit Q extrapériphérique : il possède un équivalent R dans C . Soit α un côté libre de C joignant Q à un nœud périphérique Q' : le côté α' de même nature que α et issu de R joint R à R' ; $R' \not\equiv Q'$ si non $Q \equiv R$. $R' \sim Q'$ donc $R' \notin C$ et R est périphérique pour C . Ainsi les côtés $RR'(\alpha')$ et $QQ'(\alpha)$ sont tous deux des côtés libres : nous les dirons associés. Il est immédiat que cette association est réciproque et qu'un côté libre n'a qu'un seul associé.

C est une cellule. — A partir d'un nœud quelconque P_i de T , équivalent à P de C , on peut construire d'une manière unique un ensemble C_i homologue de C dans l'homéomorphisme de T sur lui-même qui emmène P_i sur P . Deux ensembles C_i sont ou bien confondus ou totalement étrangers.

Tout nœud de T a un équivalent dans C : soit $P \in T$, on peut le joindre à $O \in C$ par une ligne polygonale L d'un nombre fini de côtés. Parcourons L (de O vers P). Soit P_1 le premier point extrapériphérique de L pour C , il a un équivalent P'_1 dans C et l'on peut construire C_1 à partir de P_1 comme C est construit à partir de P'_1 ; C_1 et C n'ont aucun nœud commun. Soit alors P_2 le premier nœud extrapériphérique pour $C \cup C_1$: il est extrapériphérique pour l'un au moins des ensembles C et C_1 , et a donc un équivalent $P'_2 \in C$. Construisons C_2 à partir de P_2 comme C est construit à partir de P'_2 , Comme $P_2 \neq P_1$ et que L comprend seulement un nombre fini de nœuds, il existe $C_n \ni P$. Donc P a un équivalent dans C , évidemment unique. L'ensemble C constitue bien une cellule que nous noterons \mathfrak{C} .

3. T COMME RECOUVREMENT RAMIFIÉ. — Si \mathfrak{C} n'est pas tracée sur le plan, découpons certains côtés de manière à former un ensemble \mathfrak{C}^* tracé sur le plan : \mathfrak{C} s'obtiendra à partir de \mathfrak{C}^* en identifiant certains côtés libres. Bordons \mathfrak{C}^* par un polygone Π de manière que chaque côté libre de \mathfrak{C}^* aboutisse à un côté de Π .

Associons deux à deux les côtés de Π comme les côtés libres de \mathfrak{C}^* qui y aboutissent. L'identification de deux côtés associés transforme Π en une surface close S_0 , et \mathfrak{C}^* en un arbre T_0 qui réalise une triangulation de S_0 . Désignons par p^* la représentation de T sur T_0 associant à un nœud de T l'image dans T_0 de son équivalent dans \mathfrak{C} . Soit K un polygone de S . Chacun de ses côtés a une image unique sur T_0 . A la périphérie \tilde{K} de K est alors associée par p^* la périphérie \tilde{K}_0 d'un polygone K_0 découpé par T_0 sur S_0 . Soient A_1, A_2, \dots, A_ν tous les nœuds d'une même classe d'équivalence sur \tilde{K} et A_0 leur image sur \tilde{K}_0 ; ν est appelé la *caractéristique* de K . Soit Ω le centre de K auquel nous faisons correspondre un point Ω_0 intérieur à K_0 (centre de K_0). Introduisons dans K_0 le « rayon » $\Omega_0 A_0$ et dans K les rayons $\Omega A_i (i=1, 2, \dots, \nu)$. Établissons une correspondance entre ΩA_i et $\Omega_0 A_0$ de sorte que Ω_0 et A_0 soient les images respectives de Ω et A_i . A la périphérie du secteur $A_i \Omega A_{i+1}$ est associée ainsi par une correspondance \check{p} la périphérie du secteur $A_0 \Omega_0 A_0$ « d'ouverture 2π », la restriction à T de \check{p} étant p^* . \check{p} peut être prolongée en une correspondance topologique entre l'intérieur du secteur $A_i \Omega A_{i+1}$ et l'intérieur du secteur $A_0 \Omega_0 A_0$. Donc p^* se prolonge dans K en une représentation p de K sur K_0 de sorte que (K, p) soit un recouvrement d'ordre ν de K_0 relativement ramifié à l'ordre ν au centre de K_0 et seulement en ce point.

Le prolongement de p^* en p pouvant se faire dans tout polygone de S , (S, p) est un recouvrement de S_0 relativement ramifié aux centres Ω_0^i de certains polygones découpés par T_0 sur S_0 . Montrons que ce recouvrement est régulier : considérons un polygone K_0 de S_0 . On peut caractériser K_0 sur S_0 par la donnée d'un de ces nœuds périphériques, soit N_0 , et la nature des deux côtés aboutissant en ce nœud. Tous les polygones de S représentés sur K_0 par p ont chacun parmi leurs sommets au moins un nœud de l'ensemble $p^{-1}(N_0)$. Tous les nœuds de cet ensemble sont équivalents, donc tous les polygones admettant l'un de ces nœuds pour sommet et limités par des côtés de même nature que ceux de K_0 , ont la même caractéristique.

THÉORÈME. — *A toute surface Σ représentée par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygone infini, on peut associer une surface Σ_0 close et une représentation π de Σ sur Σ_0 de sorte que (Σ, π) soit un recouvrement de Σ_0 régulièrement et relativement ramifié en un nombre fini de points (cf. définitions 3, A. 1).*

En effet $\Sigma \xrightarrow{\sigma} S$ (σ biunivoque bicontinue). (S, p) est un recouvrement de S_0 relativement et régulièrement ramifié. Soit alors Σ_0 la surface (considérée comme associée à une projection de Σ_0 sur B_0 qui en fait un recouvrement de B_0) représentée par $T_0 = p(T)$; Σ_0 est une surface close et $\Sigma_0 \xrightarrow{\sigma_0} S_0$. Donc il existe une représentation $\pi = \sigma_0^{-1} \circ p \circ \sigma$ de Σ sur Σ_0 telle que (Σ, π) est un recouvrement de Σ_0 relativement et régulièrement ramifié.

4. **T SIMPLEMENT CONNEXE.** — Supposons maintenant T régulièrement ramifié

et simplement connexe, c'est-à-dire tracé sur le plan. Nous avons démontré antérieurement le résultat suivant [17] :

Étant donné sur une surface close S_0 , n points Ω_0^i ($i = 1, 2, \dots, n$) et n indices ν_i associés aux Ω_0^i il existe une surface close S_1 et une représentation p_0 de S_1 sur S_0 de sorte que (S_1, p_0) soit un recouvrement de S_0 régulièrement ramifié à l'ordre ν_i aux Ω_0^i et seulement en ces points, (sauf si $n = 2$ avec $\nu_1 \neq \nu_2$ et S_0 de genre zéro).

Dans le cas actuel S est un plan. Choisissons une détermination particulière \hat{p}_0^{-1} de p_0^{-1} et montrons que $p_1 = \hat{p}_0^{-1} \circ p_0$ est uniforme :

1° *localement* : soit $A \in S$. Si $A \not\equiv \Omega_i$, p_0 est localement biunivoque comme p et \hat{p}_0^{-1} . Si $A \equiv \Omega_i$, soient $A_0 = p(A)$, $A_1 = \hat{p}_0^{-1}(A_0)$. Choisissons sur S_0 un voisinage V_0 de A_0 identique ou contenu dans le polygone de S_0 qui contient A_0 . Soient V et V_1 les images de V_0 par p^{-1} et \hat{p}_0^{-1} . p_1 réalise une correspondance biunivoque entre V et V_1 ;

2° *globalement* : soit C une courbe fermée joignant A à lui-même dans le plan S . D'après 1° on peut, en modifiant C dans un voisinage de A , supposer que A est un nœud de T , et cela sans changer la nature, fermée ou ouverte, de C_1 image de C par p_1 . Soient A_1 et A'_1 les extrémités de C_1 . Désignons par opération (r) l'opération suivante : soit γ un arc de C intérieur ou frontière d'un polygone K ayant avec l'intérieur de C une intersection non vide. Remplaçons γ par la frontière de P intérieure à C . L'opération (r) ne change pas les points A_1 et A'_1 .

Par une répétition finie de l'opération (r) , on peut réduire C au point A , alors $A_1 \equiv A'_1$. C_1 est donc une courbe fermée.

Dans ces conditions, (S, p_1) est un recouvrement relativement non ramifié de S_1 . Soit $T_1 = p_1(T) = \hat{p}_0^{-1}(T_0)$ et soit (Σ_1, τ_1) le recouvrement de B_0 représenté par T_1 . $\Sigma_1 \xrightarrow{\sigma_1} S_1$ où σ_1 est bicontinue biunivoque. Posons $\pi_1 = \sigma_1^{-1} \circ p_1 \circ \sigma_0$, (Σ_1, π_1) est un recouvrement relativement non ramifié de Σ_1 . Si nous remarquons que Σ_1 est une surface close on obtient le résultat suivant :

THÉOREME. — *A toute surface Σ simplement connexe représentée par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygone infini, on peut associer une surface Σ_1 close et une représentation π_1 de Σ sur Σ_1 de sorte que (Σ, π_1) soit un recouvrement de Σ relativement non ramifié.*

5. SURFACES DE RIEMANN. — Si B_0 et Σ sont des surfaces de Riemann et (Σ, τ) un recouvrement riemannien de B_0 , alors τ_0 et τ_1 sont des projections riemanniennes ainsi que $\pi = \tau_0^{-1} \circ \tau$, $\pi_0 = \tau_0^{-1} \circ \tau_1$ et $\pi_1 = \tau_1^{-1} \circ \tau = \pi_0^{-1} \circ \tau$ puisque π , π_0 , π_1 ainsi définis sont uniformes.

THÉORÈME. — *A toute surface de Riemann \mathcal{R} simplement connexe, représentable par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygones infinis, on peut associer une surface de Riemann \mathcal{R}_1 close et une représentation riemannienne ω de \mathcal{R} sur \mathcal{R}_1 , de sorte que (\mathcal{R}, ω) soit un recouvrement de \mathcal{R}_1 relativement non ramifié.*

Remarquons que toute surface de Riemann close \mathcal{R}_1 peut être projetée sur une surface de Riemann close de genre zéro de sorte que \mathcal{R}_1 soit représentable par un arbre topologique; le recouvrement universel de \mathcal{R}_1 est représentable par un arbre topologique régulièrement ramifié sans polygones infinis.

Les relations entre les diverses surfaces sont résumées dans le tableau ci-dessous où les signes \leftrightarrow indiquent des représentations topologiques (biunivoques), \rightarrow des représentations continues (projections) et \Rightarrow des projections riemanniennes.

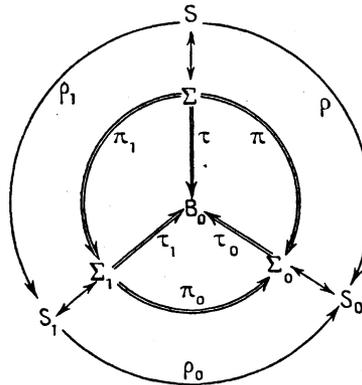


Fig. 1.

D. — Sur un théorème de Shimizu.

1. INTRODUCTION. — Fatou (1919) a montré que si une fonction rationnelle admettait une fonction d'automorphie uniforme, celle-ci était homographique (cf. aussi Gunnar of Hällström [2, 12, 14]).

Shimizu (1931) a montré que les fonctions d'automorphie uniformes des fonctions méromorphes transcendentes étaient de la forme $e^{\theta\pi z} + b$, où θ est rationnel. La démonstration de Shimizu utilise une décomposition en facteurs de $f(z') - f(z)$ due à Gronwall et Hahn, et le théorème suivant de Julia [4] :

Le complémentaire du domaine d'existence de $z'(z)$ définie par $g(z', z) = 0$, où g est entière, ne comprend pas de continu.

Dans le cas général où $z'(z)$ est multiforme, ce théorème n'indique pas que le prolongement de $z'(z)$ n'est jamais arrêté par un continu. En d'autres termes considérons la surface de Riemann R de $z'(z)$ et sa projection sur le plan z :

il pourrait arriver que R admette un continu frontière \mathcal{C} se projetant en C et l'on ne sera pas en contradiction avec le théorème de Julia si C est intérieur à la projection d'un domaine de R , non contigu à \mathcal{C} .

Si la méthode de Shimizu, peut avec quelques précautions, démontrer la première partie du théorème 11 de son Mémoire qui s'énonce comme suit :

Si $\Phi(z)$ satisfaisant à $f(\Phi) = f$ est uniforme dans un domaine du plan, c'est une fonction entière.

Cette même méthode ne peut servir à démontrer la seconde partie :

Si $\Phi(z)$ est à p déterminations dans un domaine du plan, $\Phi(z)$ est une algèbroïde finie.

Nous allons prouver ici par la seule utilisation du théorème d'Iversen que si $\Phi(z)$ est à p déterminations dans un domaine quelconque du plan, $\Phi(z)$ est à p déterminations dans tout le plan, sans autre singularité que des points de ramification.

2. THÉORÈME DE SHIMIZU. — LEMME. — *Soient $f(z)$ méromorphe et φ_0 un élément régulier de $f^{-1} \circ f$ défini en O . Soit (b) une bande quelconque contenant O et un point ω : il est possible de prolonger φ_0 jusqu'en ω exclusivement suivant une courbe intérieure à (b) .*

On peut d'abord en diminuant au besoin le domaine couvert par (b) supposer que (b) ne contient pas de zéros de $f'(z)$, sauf peut-être O ou ω . Ainsi si $f(O) = O_1$, $f(\omega) = \omega_1$, l'image de (b) étant une bande (β) , il y a une branche de f^{-1} qui prend en O_1 la valeur zéro et qui par prolongement dans (β) associe à (β) la bande (b) . La branche de f^{-1} définie en O_1 , qui intervient comme facteur de gauche dans l'expression $\varphi_0 = f^{-1} \circ f$, est prolongeable de O_1 jusqu'à ω_1 exclusivement [si cette branche n'est pas uniforme en O_1 , on peut la définir en utilisant un point O' de (b) , voisin de O], suivant une courbe Λ intérieure à (β) . φ_0 est donc prolongeable de O jusqu'en ω exclusivement suivant une courbe L intérieure à (b) .

Domaine de définition. — D'après le lemme précédent le domaine de définition de Φ obtenu par prolongement de φ_0 est partout dense dans le plan complexe C_z .

Multi-formité. — Considérons un système fini d'éléments réguliers φ_i : en prolongeant φ_{i+1} dans la bande définie par le prolongement de φ_i on peut trouver L intérieure à (b) joignant O à ω et suivant laquelle les éléments φ_i et φ_{i+1} sont prolongeables jusqu'à ω exclusivement.

Si Φ est à p déterminations $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ en A , il existe quel que soit B , dans un voisinage de B des points où Φ a au moins p déterminations distinctes obtenues par prolongement de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ suivant une même courbe L . Si deux des éléments ainsi obtenus étaient confondus en φ^* , on devrait pouvoir

prolonger φ^* jusqu'en A suivant L et obtenir deux déterminations distinctes ce qui est impossible puisque L ne contient pas de zéros de f' autres que A et B éventuellement (l'élément initial de ce prolongement astreint seulement à être dans un voisinage de B peut être défini en un point où $f' \neq 0$).

Supposons Φ effectivement à p déterminations dans un domaine D_1 de C_z . En aucun point de C_z , Φ ne peut avoir plus de p déterminations. Φ a donc effectivement p déterminations dans un domaine partout dense de C_z .

Singularités de Φ . — Supposons la branche φ_i définie en A prolongeable suivant γ jusqu'en x exclusivement. Soit x_n une suite de points sur γ tendant vers x , y_n leurs images par φ_i ; $\chi_n = f(y_n) = f(x_n)$. Soit y un point limite de la suite (y_n) . Si y est à distance finie, $f(y)$ est déterminée et $f(y) = f(x)$; d'après B.3 (p. 188) φ_i qui associe y à x est régulière au point x (peut-être avec ramification). Nécessairement y est rejeté à l'infini.

Soit A régulier pour toutes les branches de Φ . Considérons dans le plan C_z un domaine doublement connexe Δ , tel que $A \in \Delta$, $f(z) \neq f(x)$ pour $z \in \Delta$, $x \notin \Delta$, $\infty \notin \Delta$, Δ séparant x et l'infini, suivant laquelle toutes les déterminations de Φ (en A) sont prolongeables jusqu'en A (ici inclusivement). Désignons par D l'intérieur de L ($D \ni x$, $D \not\ni \infty$).

Soient $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \dots, \mathcal{L}'_p$ toutes les images par Φ de L; considérées dans leur ensemble elles constituent nécessairement un système de k courbes fermées $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_k$ ($k \leq p$).

Prolongeons φ_i dans D de toutes les manières possibles, on obtient dans C_z un domaine d_x limité en particulier par des courbes \mathcal{L}_i : nous supposons que ces \mathcal{L}_i sont $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_h$, les autres étant $\mathcal{L}_{h+1}, \dots, \mathcal{L}_k$.

Soit \mathcal{O} l'extérieur de toutes les courbes \mathcal{L}_i ($i = 1, 2, \dots, h$). Choisissons y_0 sur γ suffisamment près de x pour que $\eta_0 = \varphi_i(y_0)$ soit dans \mathcal{O} . C'est possible puisque d'après le début de ce paragraphe les y_n tendent vers l'infini [$y_n = \varphi_i(x_n)$, où $x_n \rightarrow x$]. Considérons dans \mathcal{O} une bande quelconque \mathcal{B} contenant η_0 et un point arbitraire η . Il est possible de prolonger φ_i^{-1} (déterminé en η_0) dans \mathcal{B} de η_0 jusqu'à η exclusivement, suivant une courbe λ d'image l . l ne peut sortir de L, si non soit m le premier point d'intersection de l avec L; prolongeons φ_i de y_0 jusqu'à m : on définit ainsi en m un élément φ_k de Φ qui représente m en \mathfrak{N} sur une courbe \mathcal{L}_i ($i = 1, \dots, h$), puisque φ_k a été obtenu par prolongement de φ_i dans D.

Ainsi d_x est un ouvert partout dense dans \mathcal{O} . On peut avoir construit L dans un voisinage de x suffisamment petit pour que si $z \in D$, $|f(z) - f(x)| < a$. Soit alors (u_n) une suite de points du plan z pour lesquels $f(u_n) = U$ avec $f(z) \neq U$ pour $z \in D$. Il y a dans tout voisinage de u_n des points effectivement atteints par prolongement de φ_i dans \mathcal{O} . En ces points $f(z)$ prend des valeurs voisines de U. On ne peut avoir $f(\Phi) = f$ pour ces points.

Φ n'a donc pas de singularité dans D . Φ est donc dans tout C_z à p déterminations sauf aux points de ramification. Φ n'a pas non plus de pôle.

Alors Φ peut être définie par l'équation

$$A_0(z)\Phi^p + A_1(z)\Phi^{p-1} + \dots + A_p(z) = 0,$$

où les $A_i(z)$ sont des fonctions entières; A_0 toujours $\neq 0$ peut être pris constant. On dit que Φ est une algèbroïde finie.

Le théorème 11 de Shimizu est ainsi démontré. On peut poursuivre l'étude de Φ comme Shimizu l'a fait en utilisant par exemple les résultats de Fatou sur l'itération des fonctions entières. L'étude est plus difficile dans le cas où $z' = \Phi(z)$ est à $p(p > 1)$ déterminations.

Les résultats sont les suivants :

Si Φ est uniforme dans un domaine du plan, alors $z' = e^{i\theta\pi}z + b$, θ rationnel.

Si Φ est à p déterminations dans un domaine du plan, alors

$$z'^p + az^p + P(z', z) = 0, \quad \text{où } |a| = 1$$

et où $P(z', z)$ est un polynôme en z et z' de degré $\leq p$ par rapport à l'ensemble des variables z et z' , de degré $< p$, par rapport à chacune d'elles.

E. — Arbre topologique et fonction d'automorphie ⁽¹⁾.

1. NŒUDS ÉQUIVALENTS. — Soit maintenant (\mathcal{R}, ω) un recouvrement riemannien d'une surface de Riemann B_0 conformément équivalente au plan privé d'un nombre fini de points. Ces points peuvent être imparfaitement couverts par \mathcal{R} pour ω , ou même peuvent ne pas être couverts du tout.

Conventionnellement chaque nœud de T représente un demi-domaine fondamental de \mathcal{R} (pour ω). L'association de deux nœuds de même espèce sur T définit une fonction d'automorphie de ω , dont on peut étudier la multiformité et les points de ramification, sur T lui-même.

Supposons que ω admette une fonction d'automorphie biuniforme (déjà étudiée en B.4). Soient A_1 et A_2 deux nœuds de T , images de deux demi-domaines de \mathcal{R} , se correspondant par φ . A tout parcours fermé sur T , d'origine A_1 , correspond un parcours fermé d'origine A_2 , et inversement, c'est donc que A_1 et A_2 sont équivalents sur T . Inversement si T possède deux nœuds équivalents, la fonction d'automorphie de ω définie par la correspondance entre ces deux nœuds est biuniforme. Si l'on considère alors l'uniformisante globale f de \mathcal{R} , $\omega \circ f^{-1}$ est une fonction uniforme dans le plan, ou le cercle, automorphe pour une fonction homographique n'appartenant pas au groupe obtenu par

⁽¹⁾ Voir aussi [13].

le recouvrement de \mathcal{R} . Si $\omega \circ f^{-1}$ est total automorphe la cellule de T comprend seulement deux nœuds d'espèces différentes; et inversement.

2. CAS PARTICULIER. — Nous allons, par exemple, montrer que le théorème de Shimizu de la section D ne peut être étendu au cas des fonctions uniformes dans le cercle-unité.

Prenons pour surface B_0 le plan entier sur lequel nous fixons six points. Construisons alors la surface de Riemann \mathcal{R} recouvrement de B_0 ramifié en ces six points et représentable par l'arbre topologique suivant :

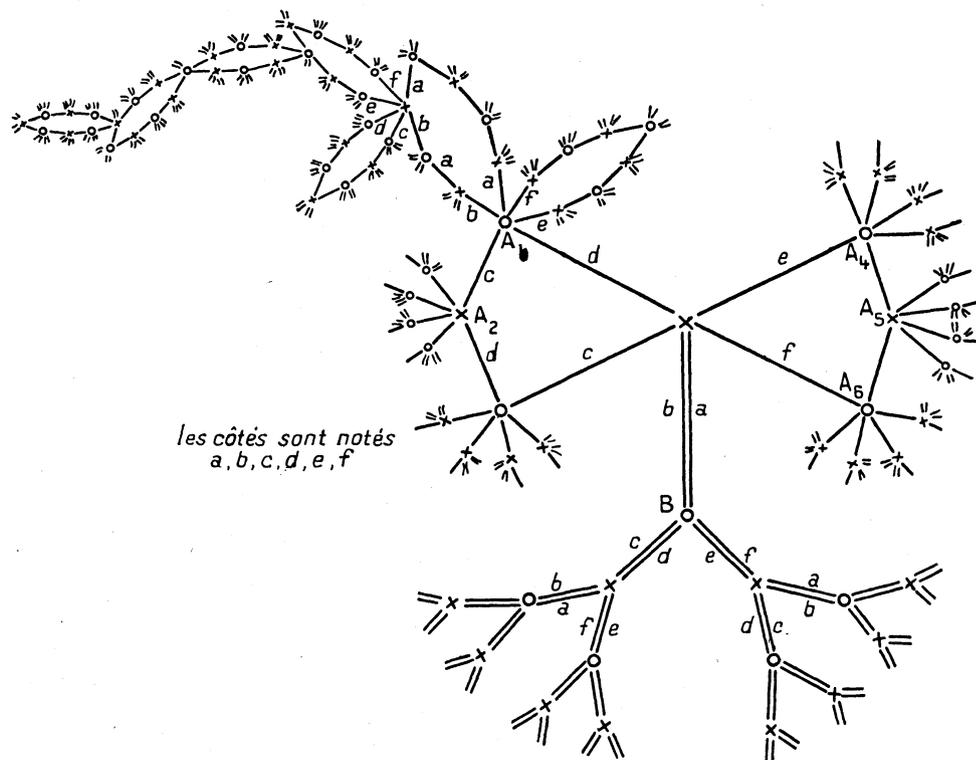


Fig. 2.

Sur cet arbre les points situés au delà des A_i , dans la partie supérieure appartiennent chacun à trois octogones, tandis que ceux situés au-dessous de B sont chacun communs à trois polygones plats (deux côtés). Toute fonction d'automorphie de l'uniforminante de \mathcal{R} , associant un nœud « au-dessous » de B à un nœud « au-dessus » des A_i est uniforme mais pas son inverse. C'est encore le cas si l'on prend la fonction d'automorphie définie par $M(P)$ où l'on prend M en B et P en l'un des six A_i .

\mathcal{R} est bien une surface de Riemann, simplement connexe, nécessairement de type hyperbolique.

Bibliographie.

- [1] H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, 1913.
 - [2] P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 67-68, 1919-1920).
 - [3] DE KEREKJARTO, *Vorlesungen über Topologie*, Springer, 1923.
 - [4] G. JULIA, *Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière $G(x, y) = 0$* (*Bull. Soc. Math. France*, t. 54, 1926).
 - [5] T. SHIMIZU, *On the fundamental domains and the groups for meromorphic functions* (*Jap. J. Math.*, t. 8, 1931).
 - [6] SEIFERT et THRELHALL, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1936.
 - [7] L. AHLFORS, *Zur Theorie der Überlagerungsflächen* (*Acta Math.*, t. 65, 1935).
 - [8] L. AHLFORS, *Geometrie der Riemannschen Flächen* (*Congrès international des mathématiciens*, Oslo, 1936).
 - [9] S. STOLOW, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, 1938.
 - [10] F. MARTY, *Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 53, 1936).
 - [11] R. NEVANLINNA, *Eindeutige analytische Functionen*, Springer, 1936.
 - [12] GUNNAR af HÄLLSTRÖM, *Über Substitutionen, die eine rationale Funktion invariant lassen* (*Acta. Acad. Aboens.*, t. 15, n° 6, 1946).
 - [13] GUNNAR af HÄLLSTRÖM, *On the study of algebraic functions of automorphism by help of graphs* (*X. Skand. Math. Kongr. København*, 1946).
 - [14] GUNNAR af HÄLLSTRÖM, *Über die Automorphiefunktionen meromorpher Funktionen*, (*Acta. Acad. Aboens.*, 16, n° 4, 1946).
 - [15] C. CHEVALLEY, *Theory of Lie Groups*, Princeton, 1946.
 - [16] L. FOURÈS, *Sur la théorie des surfaces de Riemann* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951).
 - [17] L. FOURÈS, *Sur les recouvrements régulièrement ramifiés* (*Bull. Sc. math.*, t. 76, 1952).
 - [18] L. FOURÈS, *Le problème des translations isothermes* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 1952).
-