ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ LAGRANGE

Quelques problèmes sur les produits d'inversions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 69 (1952), p. 83-108
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__83_0>

QUELQUES PROBLÈMES
SUR LES PRODUITS D'INVERSIONS

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

INTRODUCTION.

L'objet de cet article est la détermination de certains n-èdres plans de l'espace euclidien à $n-1$ dimensions tels que le produit des symétries par rapport aux n faces équivaille au produit d'un retournement autour d'une droite et d'une translation parallèle à cette droite. Pour $n=3$, donc dans le cas du triangle du plan, le produit des symétries par rapport aux trois côtés équivaut toujours à une transformation de ce type, l'axe du retournement joignant les pieds des hauteurs situés sur les deux axes de symétrie extrêmes. C'est la généralisation de cette propriété élémentaire du triangle que nous nous sommes proposé d'étudier, et qui se réalise de manière bien remarquable avec des n-èdres qu'il faut particulariser pour $n \geqq 4$.

Certains aspects de ce problème se retrouvent avec des n-sphères, et les produits d'inversions par rapport aux n faces. La réduction du produit consiste en un retournement anallagmatique autour d'un cercle, combiné avec un produit de deux inversions par rapport à deux sphères orthogonales au cercle, ce qui constitue bien l'équivalent anallagmatique de ce que l'on obtient pour les n-èdres.

Cette étude est l'application de la recherche des sphères invariantes dans un produit d'inversions. C'est aux formules les concernant qu'est consacré le premier chapitre, ainsi qu'à la détermination précise de ces invariants pour un produit de trois inversions. Les notations utilisées sont celles des Mémoires antérieurs sur les produits d'inversions et que le lecteur est prié de vouloir bien consulter si besoin est (1).

(1) *Sur les produits d'inversions* (*Acta Math.*, t. 82, 1950, p. 1-70; et *Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 82-99), et *Sur l'équivalence anallagmatique* (*Bull. Sc. math.*, t. 75, 1951, p. 47-64).

CHAPITRE I.

Sphères et points invariants pour un produit d'inversions.

1. Considérons un produit d'inversions $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ de rang n [2] par rapport à n sphères (ou plans) unitaires U_i dans l'espace euclidien E_N à N dimensions. Comme dans les Mémoires cités, nous désignerons par T la matrice triangulaire supérieure droite dont les éléments $t_{ij} (i, j, = 1, 2, \ldots, n)$ sont

$$t_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad i > j, \qquad t_{ii} = 1, \qquad t_{ij} = 2 U_i U_j \quad \text{si} \quad i < j,$$

et par $V_1, V_2, \ldots, V_n$ les sphères unitaires associées aux U_i. Si u et v sont les matrices à une colonne, ou vecteurs, formées respectivement par les n éléments U_i et V_i, rappelons que l'on a

$$u = \mathrm{T} v,$$

et que le produit $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ transforme une sphère quelconque Φ de E_N suivant la formule

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} \Phi = \Phi - 2 \sum_{i=1}^{n} V_i (U_i \Phi),$$

que la notation matricielle permet d'écrire sous la forme [3]

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} \Phi = (1 - 2 v' u) \Phi, \tag{1}$$

en désignant par v' la ligne transposée de la colonne v.

Ceci rappelé, les sphères ou points Φ invariants pour la transformation conforme en question sont les solutions de l'équation

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} \Phi = h \Phi, \tag{2}$$

où h désigne un certain scalaire. Cette transformation conservant Φ^2, h^2 vaut 1 si $\Phi^2 \neq 0$, c'est-à-dire si Φ est une sphère ou un plan non isotrope. Grâce à (1), (2) s'écrit

$$\frac{1 - h}{2} \Phi = v' u \Phi. \tag{3}$$

Une première solution est

$$h = 1, \qquad \text{donc} \quad u \Phi = 0,$$

---

(2) Les U_i sont donc linéairement distinctes, et n est au plus égal à $N + 2$.

(3) Il faut observer que si les deux formes linéaires $v' u$ et $u' v$ sont identiques, les deux opérateurs ne sont pas équivalents, puisque, par exemple,

$$u' v \Phi = \sum_{i=1}^{n} U_i (V_i \Phi).$$

car les V_i, sont, comme les U_i, linéairement distinctes. Cette solution fournit les sphères orthogonales à tous les U_i; les sphères-point qui ont cette qualité sont les points communs à tous les U_i et forment, dans le cas où n ne surpasse pas N, une hypersphère à $N-n$ dimensions. C'est la solution banale.

Celles qui nous intéressent sont associées aux valeurs de h autres que 1. (3) exprime alors que Φ appartient à la famille linéaire des V_i, donc des U_i. En désignant par λ un vecteur de n éléments λ_i, on peut poser

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i = \lambda' u = u'\lambda, \tag{4}$$

de sorte que le carré

$$\Phi^2 = \lambda' u u' \lambda = \lambda' \frac{T+T'}{2} \lambda;$$

un scalaire étant son propre transposé, on a $\lambda' T \lambda = \lambda' T' \lambda$, donc

$$\Phi^2 = \lambda' T \lambda = \lambda' T' \lambda. \tag{5}$$

Ceci observé, (3) s'écrit

$$\frac{1-h}{2} u'\lambda = v'(u\Phi) \qquad \text{avec} \quad u' = (Tv)' = v'T',$$

donc

$$v'\left(\frac{1-h}{2} T'\lambda - u\Phi\right) = 0.$$

Grâce à l'indépendance linéaire des V_i ceci équivaut à

$$\frac{1-h}{2} T'\lambda = u\Phi = uu'\lambda = \frac{T+T'}{2}\lambda,$$

et, par suite, à l'équation définitive en h et λ

$$(hT' + T)\lambda = 0. \tag{6}$$

Les solutions h sont ainsi les valeurs caractéristiques de la matrice régulière $-T'^{-1}T$, mais il est plus naturel d'écrire l'équation caractéristique sous la forme

$$\Delta(h) = \text{dét}(hT' + T) = \begin{vmatrix} h+1 & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ ht_{12} & h+1 & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ ht_{13} & ht_{23} & h+1 & \dots & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ ht_{1n} & ht_{2n} & ht_{3n} & \dots & h+1 \end{vmatrix} = 0. \tag{7}$$

C'est une équation algébrique en h, dont les termes de plus haut et de plus bas degré sont h^n et 1, et dont les racines différentes de 1 nous intéressent seules. $h = 1$ n'est d'ailleurs solution que si $\text{dét}(T+T') = 0$, c'est-à-dire si le système des U_i n'est pas régulier (4). (7) est une équation réciproque, car

$$\text{dét}\,(hT' + T) \equiv h^n\,\text{dét}\left(\frac{T}{h} + T'\right) \equiv h^n\,\text{dét}\left(\frac{T'}{h} + T\right),$$

puisque les déterminants de deux matrices transposées sont égaux. Par suite, les racines autres que ± 1 sont toujours en nombre pair et deux à deux inverses. Si n est pair, -1 ne peut être racine sans être multiple d'ordre pair; si n est impair, -1 est toujours racine d'ordre impair; d'ailleurs, dans ce dernier cas, dét $(T - T')$ est symétrique gauche d'ordre impair, donc nul.

Par exemple, si $n = N + 2$, il n'existe aucune sphère orthogonale à tous les U_i; on sait également que $T + T'$ est une matrice régulière, ce qui exclut la valeur caractéristique $h = 1$.

En ce qui concerne la nature de l'invariant Φ associé à une racine de (7), observons tout d'abord que, si $h \neq -1$, (5) s'écrit encore

$$\Phi^2 = \lambda' \frac{hT' + T}{h + 1} \lambda = 0,$$

en vertu de (6), et fournit le

Théorème I. — *L'invariant associé à une valeur caractéristique* $h \neq -1$ (*et de* 1) *est un point ou un plan isotrope* (5).

On ne peut rien dire *a priori* sur la nature de l'invariant Φ associé à une racine $h = -1$.

2. Si la sphère U_1 est elle-même invariante par le produit $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ elle correspond nécessairement à la valeur caractéristique $h = -1$, et les équations (6) sont satisfaites par l'ensemble des valeurs $h = -1$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 0$, ce qui donne les n relations

$$t_{i1} - t_{1i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

donc

$$t_{1i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n),$$

et réciproquement. Par conséquent, la sphère U_1 est invariante pourvu qu'elle soit orthogonale aux autres sphères U_i du produit (6).

D'une manière générale, si $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ laisse invariante une sphère Φ de masse non nulle, de la famille linéaire des U_i, il existe $n - 1$ autres sphères

(4) Cf. *loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. 75, 1951, p. 63.

(5) La restriction $h \neq -1$ suffit seule si Φ est de la famille linéaire des U_i.

(6) On peut aussi remarquer que $\overline{U_1 U_1} = -U_1$, donc l'invariance de U_1 pour $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ équivaut à son invariance pour $\overline{U_n \ldots U_3 U_2}$; U_1 n'appartenant pas à la famille linéaire de ces $n - 1$ sphères, on a vu qu'il faut et il suffit qu'elle leur soit orthogonale; on a vu également que l'on a alors

$$\overline{U_n \ldots U_3 U_2 U_1} = U_1, \qquad \text{donc} \qquad \overline{U_n \ldots U_2 U_1 U_1} = -U_1.$$

$X_2, X_3, \ldots X_n$ de cette famille, qu'ont peut supposer de masse 1 comme Φ, et telles que l'on ait (7)

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{X_n \ldots X_3 X_2 \Phi}. \tag{8}$$

D'après ce qui précède, ces X_i sont orthogonaux à Φ, et, réciproquement, Φ est invariante pour $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ si elle est orthogonale aux X_i qui lui sont associés dans l'équivalence (8). On peut ainsi énoncer le

THÉORÈME. — *Toute sphère (ou plan) Φ, de masse non nulle, et appartenant à la famille linéaire des U_i, invariante par le produit $U_n \ldots U_2 U_1$, est telle que ce produit soit directement équivalent à un produit $X_n \ldots X_2 \Phi$ dans lequel Φ est orthogonale aux X_i.*

Remarque. — Si $n = N + 2$, et si $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ est inversement équivalent à un produit $\overline{X_p \ldots X_2 X_1}$, de rang p, il a été démontré antérieurement (8) que p est le rang de la matrice $T - T'$. Si donc $p < n$, $h = -1$ est racine de l'équation (7), d'ordre au moins égal à $n - p$, et l'équation (6) associée a une solution λ dépendant linéairement de $n - p$ arbitraires. Cette solution est évidemment constituée par les sphères de E_N qui sont orthogonales aux p sphères X_i.

3. Soit deux invariants

$$\Phi_1 = \lambda' u, \qquad \Phi_2 = \mu' u$$

associés à deux racines h_1 et h_2 de l'équation (7). Grâce aux relations (6) correspondantes

$$(h_1 T' + T)\lambda = \lambda'(h_1 T + T') = 0, \qquad (h_2 T' + T)\mu = 0,$$

il vient

$$\Phi_1 \Phi_2 = \lambda' u u' \mu = \lambda' \frac{T + T'}{2} \mu = \lambda' \frac{T - h_1 T}{2} \mu = \frac{1 - h_1}{2} \lambda' T \mu;$$

on a également

$$h_2 \Phi_1 \Phi_2 = \lambda' \frac{h_2 T + h_2 T'}{2} \mu = \lambda' \frac{h_2 T - T}{2} \mu = \frac{h_2 - 1}{2} \lambda' T \mu,$$

et l'élimination de $\lambda' T \mu$ entre ces deux équations fournit la relation

$$(h_1 h_2 - 1) \Phi_1 \Phi_2 = 0,$$

que traduit le

THÉORÈME II. — *Les sphères invariantes associées à deux valeurs caractéristiques non inverses l'une de l'autre sont orthogonales (9). En particulier, si $\Delta(-1) = 0$, la ou les variétés invariantes associées contiennent les points invariants associés aux autres valeurs caractéristiques.*

---

(7) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. **74**, 1950, p. 88.

(8) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. **75**, 1951, p. 54.

(9) Pour $h_1 = h_2 \neq \pm 1$, c'est l'énoncé du théorème I.

Pour deux points Φ_1, Φ_2, $\Phi_1\Phi_2 = 0$ signifie que la droite qui les joint est isotrope; par conséquent deux points invariants distincts, de la famille linéaire des U_i, ne sont réels que s'ils correspondent à deux valeurs caractéristiques inverses l'une de l'autre (par exemple à la même racine $h = -1$).

Remarque. — Lorsque le système des U_i est orthogonal, on sait que les V_i leur sont égaux ($V_i = U_i$), et que [10]

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1 \Phi} \equiv \Phi - 2\sum_{i=1}^{n} (U_i\Phi)U_i$$

se réduit à $-\Phi$ dès que Φ appartient à la famille linéaire des U_i. Effectivement, T est alors la matrice unité, et (7) se réduit à $(h+1)^n = 0$. $h = -1$ est la seule racine, et, pour celle-ci, le système (6) s'évanouit, laissant indéterminés tous les λ_i.

4. Appliquons ces généralités aux premières valeurs de n, en commençant par $n = 2$ malgré la nature élémentaire des résultats. Venant de voir ce qu'il en est lorsque $U_1U_2 = 0$, nous pouvons supposer que U_1U_2 n'est pas nul. En posant $U_1U_2 = \cos\alpha$, où α est complexe [11], la matrice $hT' + T$ est ici

$$hT' + T = \begin{Vmatrix} h+1 & 2\cos\alpha \\ 2h\cos\alpha & h+1 \end{Vmatrix},$$

et son déterminant

$$\Delta(h) = \text{dét}(hT' + T) = h^2 - 2h\cos 2\alpha + 1$$

a les deux zéros $h = e^{\pm 2i\alpha}$, inverses l'un de l'autre, et différents de -1. Ils sont distincts si $\sin\alpha \neq 0$, c'est-à-dire si le système des deux sphères U_1, U_2 est régulier. Ces deux valeurs caractéristiques fournissent deux points, ou plans isotropes, invariants; d'ailleurs le système (6) associé à $h = e^{2\varepsilon i\alpha}$ ($\varepsilon = \pm 1$) se réduit à l'équation unique

$$(1 + 2e^{\varepsilon i\alpha})\lambda_1 + 2\lambda_2\cos\alpha = 0 \qquad \text{ou} \qquad e^{\varepsilon i\alpha}\lambda_1 + \lambda_2 = 0,$$

qui fournit le point invariant

$$\Phi = U_1 - e^{\varepsilon i\alpha}U_2. \tag{9}$$

Si U_1 et U_2 sont deux vraies sphères, ce sont les points de Poncelet de leur famille. Lorsque $\sin\alpha = 0$, les deux points (9) sont confondus avec le point de contact des deux sphères, dont le système est irrégulier, par exemple le point $U_1 - U_2$ si $\alpha = 0$.

---

(10) *Loc. cit.*, *Acta Math.*, t. 81, 1950, p. 15.

(11) Si les inversions sont réelles, U_1 et U_2 sont réelles ou imaginaires pures, donc $\cos\alpha$ est réel ou imaginaire pur, et α est ou réel ou de la forme $k\frac{\pi}{2} + iy$ (k entier réel et y réel).

En explicitant les deux sphères U_i de centre A_i et de rayon R_i, on a

$$U_i = \frac{\overrightarrow{A_iP}^2 - R_i^2}{2R_i} \qquad (i = 1, 2),$$

où P désigne, suivant les notations antérieures, le point courant de l'espace E_N. On déduit aisément de (9) les deux points géométriques M de Poncelet; cette équation est en effet de la forme

$$k\frac{\overrightarrow{MP}^2}{2} \equiv \frac{\overrightarrow{A_1P}^2 - R_1^2}{2R_1} - e^{\varepsilon i\alpha}\frac{\overrightarrow{A_2P}^2 - R_2^2}{2R_2},$$

où $-k$ est la masse du point (9). L'identification des termes du second degré en P donne

$$k = \frac{1}{R_1} - \frac{e^{\varepsilon i\alpha}}{R_2},$$

et la dérivation par rapport à P donne ensuite, pour $P = A_1$,

$$k\overrightarrow{MA_1} = e^{\varepsilon i\alpha}\frac{\overrightarrow{A_1A_2}}{R_2},$$

donc M est déterminé par l'égalité vectorielle

$$M = A_1 + \frac{R_1}{R_1 - e^{-\varepsilon i\alpha}R_2}\overrightarrow{A_1A_2}.$$

Si U_1 et U_2 sont deux plans sécants, $\overline{U_2U_1}$ est une rotation autour d'une variété linéaire à $N-2$ dimensions, et (9) fournit les deux plans isotropes qui passent par cette variété. Avec

$$U_i = \vec{e}_i \,.\, \overrightarrow{A_iP}, \qquad \vec{e}_i^{\,2} = 1 \qquad (i = 1, 2),$$

(9) est le plan isotrope

$$\Phi = \left(\vec{e}_1 - e^{\varepsilon i\alpha}\vec{e}_2\right)\overrightarrow{A_1P} + e^{\varepsilon i\alpha}\vec{e}_2 \,.\, \overrightarrow{A_1A_2}.$$

Lorsque les deux plans U_1, U_2 sont parallèles $\left(\vec{e}_1 = \vec{e}_2,\ \alpha = 0\right)$, $\overline{U_2U_1}$ est une translation et Φ est le plan de l'infini.

5. Supposons maintenant $n = 3$, et posons

$$U_1U_2 = \cos\gamma, \qquad U_2U_3 = \cos\alpha, \qquad U_1U_3 = \cos\beta,$$

α, β, γ étant trois angles complexes. Ici $\Delta(h)$ est

$$\Delta(h) = \begin{vmatrix} h+1 & 2\cos\gamma & 2\cos\beta \\ 2h\cos\gamma & h+1 & 2\cos\alpha \\ 2h\cos\beta & 2h\cos\alpha & h+1 \end{vmatrix}.$$

En désignant par δ l'invariant [12] des produits d'inversions directement équivalents à $\overline{U_3U_2U_1}$:

$$\delta = \text{dét}\frac{T+T'}{2} = \frac{\Delta(1)}{8} = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}, \tag{10}$$

et en se rappelant que $\Delta(h)$ est divisible par $h+1$, on voit tout de suite que $\Delta(h)$ est de la forme

$$\Delta(h) = (h+1)[(h+1)^2 + ah],$$

avec $a = 4(\delta - 1)$. L'équation caractéristique est ainsi

$$\Delta(h) \equiv (h+1)[h^2 - 2(1-2\delta)h + 1] = 0, \tag{11}$$

et les trois valeurs caractéristiques sont -1 et $1 - 2\delta \pm 2\sqrt{\delta(\delta-1)}$. Pour $h = -1$, le système (6) se réduit aux deux équations

$$\frac{\lambda_1}{\cos\alpha} = \frac{\lambda_2}{-\cos\beta} = \frac{\lambda_3}{\cos\gamma},$$

en écartant toujours le cas où les U_i forment un système orthogonal. La sphère invariante correspondante est ainsi

$$\Phi = U_1\cos\alpha - U_2\cos\beta + U_3\cos\gamma, \tag{12}$$

de masse $\sqrt{1-\delta}$. C'est donc une vraie sphère ou un plan non isotrope si $\delta \neq 1$. La construction de Φ est bien simple dans le trisphère que forment les U_i. La sphère $U_1\cos\alpha - U_2\cos\beta$ est en effet la sphère du faisceau U_1, U_2 qui est orthogonale à U_3 ; on peut l'appeler la hauteur du trisphère abaissée du sommet C_3 que constitue l'intersection de U_1 et U_2 ; cette hauteur coupe U_3 suivant une variété sphérique D_3 à $N-2$ dimensions qu'on peut appeler le pied de la hauteur. (12) exprime que Φ passe par D_3. On voit de même que Φ passe par le pied D_1, situé sur U_1, de la hauteur abaissée sur U_1 de l'intersection C_1 de U_2 et U_3.

Si $\delta(\delta-1) \neq 0$, les deux autres racines de (11) sont distinctes, inverses l'une de l'autre, et différentes de ± 1 ; elles fournissent donc deux points invariants [13], distincts, situés sur (12).

Si $\delta = 1$, -1 est une racine triple de (11), et la seule variété invariante est (12), de masse nulle, donc point, ou plan isotrope, ou plan de l'infini.

Si $\delta = 0$, le système des U_i n'est pas régulier, et la racine double de (11) est égale à 1. Les seules variétés invariantes de la famille linéaire des U_i sont la vraie sphère (ou plan) Φ, et les points communs à tous les U_i.

---

(12) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 83.

(13) Ça peut être aussi des plans isotropes passant par le centre de Φ.

Nous pouvons résumer ces résultats dans le

THÉORÈME. — *Dans un trisphère* U_1, U_2, U_3, *les pieds des hauteurs sont deux à deux cosphériques, et la sphère de la famille linéaire des* U_i *qui est invariante pour un produit d'inversions tel que* $\overline{U_3U_2U_1}$ *est celle qui est définie par les pieds situés sur les deux sphères extrêmes* U_1, U_3 *du produit.*

6. Nous vu au paragraphe 2 que la sphère Φ est caractérisée par une équivalence directe de la forme

$$\overline{U_3U_2U_1} = \overline{X_2X_1\Phi},$$

où les sphères X_1 et X_2 sont orthogonales à Φ. Le produit X_1X_2 de ces sphères, supposées unitaires, s'obtient aisément en exprimant l'invariance de dét $\dfrac{T+T'}{2}$ dans l'équivalence, ce qui donne ici

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & X_1X_2 \\ 0 & X_1X_2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(X_1X_2)^2, \tag{13}$$

donc [14]

$$X_1X_2 = \pm\sqrt{1-\delta};$$

ainsi, X_1 et X_2 font un angle ω égal à arc sin $\sqrt{\delta}$. Les points de Poncelet du faisceau X_1, X_2 sont les deux points invariants de $\overline{U_3U_2U_1}$; ce sont les points communs à toutes les sphères orthogonales à X_1 et X_2, donc les points communs à Φ et au cercle d'intersection de toutes les sphères orthogonales à U_1, U_2, U_3. La construction de ces deux points est aisée, et fait connaître le faisceau de X_1, X_2; il ne reste plus qu'à préciser l'angle des deux sphères pour connaître la rotation anallagmatique $\overline{X_2X_1}$; (13) ne fournit d'ailleurs que la valeur absolue de cet angle et ne suffit pas [15].

Observons encore qu'en fonction de ω, les deux racines de (11) qui fournissent les points invariants sont $e^{\pm 2i\omega}$.

7. Supposons plus particulièrement que les U_i soient trois variétés linéaires. Dans le plan ($N = 2$), il s'agit donc de trois droites, que nous admettons former un triangle, et du produit des symétries par rapport aux trois côtés de ce triangle ABC. Si α, β, γ désignent par exemple les angles supplémentaires des angles intérieurs de A, B, C, la somme

$$2\sigma = \alpha + \beta + \gamma = 2\pi,$$

---

[14] Ça résulte aussi d'une formule (49) établie dans l'article *Sur les produits d'inversions* (*Bull. Sc. math.*, t. 74, 1950, p. 112).

[15] Dans le plan, une inversion permet de réduire deux des cercles U_i à des droites, tout au moins si deux de ces cercles se coupent. La détermination des éléments invariants relève ensuite de raisonnements élémentaires de géométrie.

et l'identité classique qui donne de (10) l'expression

$$\delta = 4 \sin\sigma \sin(\sigma - \alpha) \sin(\sigma - \beta) \sin(\sigma - \gamma)$$

montre que δ est nul. Ça résulte encore de ce que le système des U_i est irrégulier, car leur famille linéaire est l'ensemble de toutes les droites du plan et ne contient aucun système orthonormal de trois droites; tout système orthogonal de trois droites comprenant nécessairement la droite de l'infini, dont la masse est nulle.

Si U_1, U_2, U_3 sont les côtés respectifs BC, CA, AB, la droite Φ invariante pour $\overline{U_3 U_2 U_1}$ est la droite $D_1 D_3$ qui joint les pieds des hauteurs AD_1, CD_3. X_1 et X_2 sont deux droites perpendiculaires à Φ, donc parallèles ($X_1 X_2 = \pm 1$), et $\overline{X_2 X_1}$ est une translation parallèle à Φ. D'ailleurs il est bien connu que $\overline{U_3 U_2 U_1}$, qui est *a priori* une symétrie dans le plan, équivaut à un certain retournement, associé à une translation parallèle à l'axe de ce retournement.

Lorsque δ n'est pas nul, comme dans le cas des inversions par rapport à trois cercles du plan, (13) nous apprend que l'angle de la rotation anallagmatique $\overline{X_2 X_1}$ se conserve dans la permutation circulaire des U_i. Lorsque X_1 et X_2 sont, comme maintenant, des droites parallèles, il est à prévoir que la translation $\overline{X_2 X_1}$ a le même caractère. Quelle est sa valeur en fonction du triangle ABC? C'est le vecteur $\overrightarrow{D_1 D'_1}$ qui joint D_1 à son transformé $D'_1 = \overline{U_3 U_2 U_1}\, D_1 = \overline{U_3 U_2}\, D_1$; D'_1 s'obtient donc par la rotation de D_1, autour de A, d'un angle égal à $2\widehat{AC, AB}$. La longueur de cette translation est ainsi

$$D_1 D'_1 = 2 A D_1 \sin A = \frac{2S}{R},$$

en appelant S et R l'aire du triangle ABC et le rayon de son cercle circonscrit.

8. Dans l'espace E_N à plus de deux dimensions, les trois plans U_i (variétés linéaires à $N - 1$ dimensions) se coupent généralement suivant une variété S à $N - 3$ dimensions, qui constitue le sommet du triplan ([16]).

Pour $N = 3$, S est un point O si les U_i forment un vrai trièdre ([17]) OABC, que nous supposons non rectangle, en vertu de la remarque qui clôt le paragraphe 3. Le pied de hauteur D_1 est ici la droite d'intersection de la face $U_1 = OBC$ avec le plan hauteur AOD_1; si D_3 est de même la projection orthogonale de l'arête OC sur la face opposée $U_3 = OAB$, le plan invariant Φ

([16]) Ce que nous appelons les sommets au paragraphe 5 sont ici les trois arêtes du trièdre, pour $N = 3$, et trois variétés linéaires à $N - 2$ dimensions dans le cas général, auxquelles on pourrait encore réserver ce nom.

([17]) Si les U_i forment un prisme triangulaire, on retrouve évidemment le problème relatif à un triangle du plan.

est le plan OD_1D_3. δ, qui diffère de 1, mesure le carré du volume v du parallélépipède construit sur les vecteurs unitaires $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, qui sont les arêtes du trièdre supplémentaire, ou d'un trièdre analogue; il n'est pas nul, et il existe effectivement des familles de trois plans orthogonaux passant par O. X_1 et X_2 sont deux plans perpendiculaires au plan Φ, passant par O, et faisant l'angle arc sin v. Si $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ est le trièdre supplémentaire de OABC, les angles α, β, γ sont supplémentaires des angles dièdres A, B, C, et, en fonction de ceux-ci,

$$\begin{aligned}\delta &= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2\cos A\cos B\cos C \\ &= -4\cos\sigma\cos(\sigma - A)\cos(\sigma - B)\cos(\sigma - C),\end{aligned}$$

où l'on pose $A + B + C = 2\sigma$.

$\overline{U_3U_2U_1}$ *est le produit de la symétrie par rapport au plan* OD_1D_3 *et d'une rotation d'angle* arc sin v *autour de la normale en* O *à ce plan.*

C'est un résultat connu que le volume V du parallélépipède construit sur les arêtes unitaires du trièdre OABC lui-même est

$$V = \frac{v^2}{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma} = \frac{v^2}{\sin A\,\sin B\,\sin C},$$

donc l'angle de la rotation est, en fonction de ce trièdre,

$$\text{arc}\cos\sqrt{1 - V\sin A\,\sin B\,\sin C}.$$

Les deux variétés invariantes de masse nulle sont évidemment les plans isotropes qui passent par l'axe de la rotation.

Lorsque N surpasse 3, la variété linéaire E_3 à trois dimensions, qui est perpendiculaire à S en un point O de S, coupe les plans U_i suivant trois variétés linéaires $U_i^\star$ à deux dimensions; tout plan Φ de la famille linéaire des U_i passe par S et a sur E_3 une trace $\Phi^\star$ à deux dimensions. Les trois vecteurs $\vec{e}_i$ normaux aux plans $U_i = \vec{e}_i.\overrightarrow{OP}$ sont dans E_3. On comprend alors qu'il n'y ait aucune différence essentielle avec le cas $N = 3$ qui vient d'être traité.

CHAPITRE II.

SUR CERTAINS n-ÈDRES SPHÉRIQUES OU PLANS DE E_{n-1}.

9. Dès que le nombre n des U_i surpasse 3, le produit $\overline{U_n \ldots U_2U_1}$ ne se réduit généralement pas de manière intéressante, mais une réduction qui rappelle celle rencontrée avec $n \leqq 3$ devient possible avec des systèmes particuliers que nous nous proposons d'étudier. Il sera instructif d'examiner d'abord les produits d'inversions de rang 4.

Un tel produit $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ n'admet une sphère (ou plan non isotrope) invariante, dans la famille linéaire des U_i, que si la matrice $T - T'$ est singulière. Ici, dét$(T - T')$ est un carré, et l'on a précisément

$$\text{dét}(T - T') = (t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23})^2.$$

Ainsi, un tel invariant n'existe que pour les produits qui vérifient la condition

$$(1) \qquad t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} + t_{14}t_{23} = 0.$$

Observons en passant que cette expression se conserve par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4 en 4, 1, 2, 3, de sorte que, si $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ a une sphère invariante dans la famille des U_i, il en est de même pour $\overline{U_3U_2U_1U_4}$, donc également pour $\overline{U_2U_1U_4U_3}$ et $\overline{U_1U_4U_3U_2}$. Les produits inverses $\overline{U_1U_2U_3U_4}$, $\overline{U_2U_3U_4U_1}$, $\overline{U_3U_4U_1U_2}$ et $\overline{U_4U_1U_2U_3}$ ont évidemment la même propriété.

Dans le plan $(N = 2)$, le système de quatre cercles U_i linéairement distincts est complet. $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ est inversement équivalent à un produit dont le rang est celui de la matrice [18] $T - T'$; ce rang p, nécessairement pair, est égal à 2 ou 0 si (1) est vérifié. Lorsque p est nul, $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ se réduit à l'identité géométrique; dans l'autre cas, qui nous intéresse seul, il existe deux cercles X_1, X_2 tels que

$$\overline{U_4U_3U_2U_1} = -\overline{X_2X_1},$$

et le produit conserve tous les cercles orthogonaux à X_1, X_2. D'ailleurs le système des équations [(6), chap. I] associées à la racine multiple $h = -1$ de [(7), chap. I] est au plus de rang 2 et fournit au moins un faisceau de cercles. Les deux autres valeurs caractéristiques, inverses l'une de l'autre, donnent un ou deux points invariants, qui sont évidemment le ou les points de base du faisceau des cercles invariants.

Si les U_i sont quatre droites du plan, ils ne peuvent être linéairement distincts, et le rang de $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ est au plus égal à 2. Cette transformation est effectivement un déplacement dans le plan, donc en général une rotation, et tous les cercles centrés au centre de la rotation sont invariants; les éléments invariants de masse nulle sont le centre de rotation et les droites isotropes qui y passent.

Lorsque N surpasse 2, le système des quatre sphères U_i n'est plus complet. S'il est régulier [dét$(T + T') \neq 0$], et vérifie (1), $h = -1$ fournit toujours une famille de sphères invariantes, formant généralement un faisceau dans la famille linéaire des U_i. Les deux autres valeurs caractéristiques fournissent un bipoint invariant. Les sphères invariantes associées à $h = -1$ se coupent suivant une variété sphérique à $N - 2$ dimensions; celles qui sont orthogonales

---

[18] *Loc. cit.*, *Bull. Sc. Math.*, t. 75, 1951, p. 54.

à tous les $U_i(h=1)$ forment une famille linéaire d'ordre $N-2$, et se coupent suivant une variété sphérique à deux dimensions; ces deux variétés sphériques se coupent en deux points qui constituent justement le bipoint invariant en question.

10. Ces considérations deviennent particulièrement intéressantes avec quatre plans U_i de l'espace E_3. Leur système n'est pas régulier, car tout système orthogonal de quatre plans de cet espace comprend le plan de l'infini, dont la masse est nulle. 1 est donc valeur caractéristique. $\Delta(1)=\text{dét}(T+T')=0$ exprime d'ailleurs la relation obligatoire entre les t_{ij} relatifs à quatre vecteurs unitaires de E_3.

Nous supposons que les U_i forment un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$, en désignant par A_i le sommet opposé à la face U_i. Le produit des quatre symétries $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ est un déplacement de E_3, donc un certain déplacement hélicoïdal d'axe D, d'angle ω, et de translation $\mathfrak{T}$ parallèle à D. En général, les seuls invariants sont le plan de l'infini, et les plans isotropes passant par D. Le plan de l'infini, orthogonal à tous les U_i, est l'invariant associé à $h=1$; les plans isotropes sont les invariants, de masse également nulle, associés aux deux autres racines de $\Delta(h)=0$. Il n'existe un plan invariant de masse non nulle que si $\mathfrak{T}$ est l'identité, ce qu'on peut écrire $\mathfrak{T}\equiv 1$ ou mes $\mathfrak{T}=0$, ou si ω est un multiple entier de π. Dans le premier cas, les invariants sont tous les plans perpendiculaires à D; dans le second, les plans passant par D. Les deux familles existent simultanément si l'on a à la fois $\mathfrak{T}\equiv 1$ et $\omega=k\pi$ ($k=0$ ou 1). Mais on doit observer que, si $\mathfrak{T}\equiv 1$, $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ équivaut au produit $\overline{X_2X_1}$ de deux symétries par rapport à deux plans passant par D, qui appartiennent, comme tout plan de E_3, à la famille linéaire des U_i; cette équivalence ne peut être directe puisque les U_i sont linéairement distincts, ni inverse ([19]) car $n=4$ est inférieur à $N+2=5$. Un raisonnement semblable écarte le cas $\omega=0$. En résumé, nous avons établi que *le produit* $\overline{U_4U_3U_2U_1}$ *de quatre symétries par rapport aux faces d'un tétraèdre de* E_3 *n'admet une variété invariante de masse non nulle que s'il équivaut à un vrai déplacement hélicoïdal d'angle* π, *et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que soit satisfaite la relation* (1).

11. Précisons les éléments du retournement et de $\mathfrak{T}$. Posons

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_i=\vec{e}_i.\overrightarrow{A_4P}\qquad (i=1,2,3),\\ U_4=\vec{e}_4.\overrightarrow{B_4P}=\vec{e}_4.\overrightarrow{A_4P}-d, \end{array}\right.$$

([19]) *Loc. cit.*, *Bull. Sc. Math.*, 1951, t. 75, p. 54. On peut aussi remarquer que $\mathfrak{T}\equiv 1$ entraîne l'invariance de toutes les sphères centrées sur D, alors que la famille des U_i ne comporte que des plans, et que des invariants n'appartenant pas à cette famille doivent être orthogonaux aux quatre plans U_i, contrairement aux sphères en question.

où les quatre vecteurs $\vec{e}_i$ sont unitaires, et en désignant par d la mesure $\vec{e}_4 . \overrightarrow{A_4B_4}$ de la hauteur A_4B_4 abaissée de A_4 sur U_4; on choisit le sens de $\vec{e}_4$ de manière que d soit positif. U_iU_j étant égal au produit scalaire $\vec{e}_i . \vec{e}_j$, la condition (1) s'écrit

$$(3) \qquad \left(t_{23}\vec{e}_1 - t_{13}\vec{e}_2 + t_{12}\vec{e}_3\right)\vec{e}_4 = 0,$$

et exprime que A_4B_4 est parallèle à un plan déterminé par les trois faces issues de A_4; sous une autre forme, (3) exprime que U_4 est parallèle au vecteur

$$\vec{\nu} = t_{23}\vec{e}_1 - t_{13}\vec{e}_2 + t_{12}\vec{e}_3,$$

ou qu'il est perpendiculaire au plan

$$(4) \qquad \Phi = t_{23}U_1 - t_{13}U_2 + t_{12}U_3,$$

qui passe par A_4, donc par A_4B_4. Nous avons vu au paragraphe 5 que ce plan Φ est invariant par $\overline{U_3U_2U_1}$; il l'est aussi par $\overline{U}_4$, à cause de son orthogonalité avec U_4; il est donc invariant par $\overline{U_4U_3U_2U_1}$, et contient l'axe D du retournement.

D'ailleurs D est l'axe du faisceau des plans invariants, et se détermine à l'aide de ceux-ci, que fait connaître le système [(6), chap. I] relatif à $h = -1$. Ce système, de rang 2, équivaut à celui des deux équations

$$(5) \qquad \begin{cases} t_{12}\lambda_2 + t_{13}\lambda_3 + t_{14}\lambda_4 = 0, \\ -t_{12}\lambda_1 + t_{23}\lambda_3 + t_{24}\lambda_4 = 0, \end{cases}$$

en supposant, par exemple, $t_{12} \neq 0$. La résolution par rapport à λ_1 et λ_2 met la solution sous la forme $\lambda_3\Phi + \lambda_4\Psi$, où Φ est le plan (4) déjà rencontré, et Ψ le plan invariant qui passe par A_3 :

$$(6) \qquad \Psi = t_{24}U_1 - t_{14}U_2 + t_{12}U_4.$$

Les produits du point $B_4 = -\dfrac{\overrightarrow{B_4P}^2}{2}$ et des U_i sont

$$U_iB_4 = \vec{e}_i . \overrightarrow{A_4B_4} = \vec{e}_i . \vec{e}_4\, d = \frac{d}{2} t_{i4} \qquad (i = 1, 2, 3),$$
$$U_4B_4 = 0,$$

donc $\Psi B_4 = 0$. Ψ, comme Φ, passe par B_4, qui se trouve ainsi sur D. La direction de D est celle du produit vectoriel des deux vecteurs

$$(7) \qquad \begin{cases} \vec{\nu} = t_{23}\vec{e}_1 - t_{13}\vec{e}_2 + t_{12}\vec{e}_3, \\ \vec{\nu}' = t_{24}\vec{e}_1 - t_{14}\vec{e}_2 + t_{12}\vec{e}_4. \end{cases}$$

Formons d'abord le tableau des produits scalaires $\vec{\nu} . \vec{e}_i$ et $\vec{\nu}' . \vec{e}_i$; compte tenu de (1), on a

$$\vec{\nu}.\vec{e}_1 = t_{23}, \quad \vec{\nu}.\vec{e}_2 = -t_{13}+t_{12}t_{23}, \quad \vec{\nu}.\vec{e}_3 = t_{12}, \quad \vec{\nu}.\vec{e}_4 = 0,$$
$$\vec{\nu}'.\vec{e}_1 = t_{24}, \quad \vec{\nu}'.\vec{e}_2 = -t_{14}+t_{12}t_{24}, \quad \vec{\nu}'.\vec{e}_3 = t_{12}t_{34}, \quad \vec{\nu}'.\vec{e}_4 = t_{12};$$

rapporté aux trois vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, D a donc pour paramètres directeurs les déterminants du tableau

$$\begin{Vmatrix} t_{23} & -t_{13}+t_{12}t_{23} & t_{12} \\ t_{24} & -t_{14}+t_{12}t_{24} & t_{12}t_{34} \end{Vmatrix},$$

ce qui conduit, après division par t_{12} et compte tenu de (1), au vecteur d'expression remarquable

$$\vec{\chi} = -\left(t_{14}^{-1}\vec{e}_1 + t_{24}^{-1}\vec{e}_2 + t_{34}^{-1}\vec{e}_3\right), \tag{8}$$

en désignant par t_{ij}^{-1} les éléments ([20]) de la matrice T^{-1}. La longueur de $\vec{\chi}$ est donnée par

$$\vec{\chi}^2 = (t_{14}^{-1})^2 + (t_{24}^{-1})^2 + (t_{34}^{-1})^2 + t_{12}t_{14}^{-1}t_{24}^{-1} + t_{13}t_{14}^{-1}t_{34}^{-1} + t_{23}t_{24}^{-1}t_{34}^{-1},$$

et, en utilisant les expressions des t_{ij} en fonction des t_{i}^{-1}, qui sont naturellemen de la forme de celles des t_{ij}^{-1} en fonction des t_{ij},

$$\vec{\chi}^2 = t_{14}^{-1}[t_{14}^{-1} - t_{12}^{-1}t_{24}^{-1} + t_{34}^{-1}(-t_{13}^{-1} + t_{12}^{-1}t_{24}^{-1})] + t_{24}^{-1}[t_{24}^{-1} - t_{23}^{-1}t_{34}^{-1}] + (t_{34}^{-1})^2;$$

les deux crochets sont justement $-t_{14}$ et $-t_{24}$, ce qui donne l'expression remarquable

$$\vec{\chi}^2 = -(t_{14}t_{14}^{-1} + t_{24}t_{24}^{-1} + t_{34}t_{34}^{-1}) \tag{9}$$

ou

$$|\vec{\chi}| = \sqrt{-(t_{14}t_{14}^{-1} + t_{24}t_{24}^{-1} + t_{34}t_{34}^{-1})}. \tag{9'}$$

12. Les conditions (1) et $\Delta(1) = 0$ permettent de rattacher bien simplement cette valeur au déterminant δ de la formule [(10), chap. I] relative aux trois plans U_1, U_2, U_3, de sorte que $\sqrt{\delta}$ est ce que certains auteurs appellent le sinus du trièdre $A_4\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Tout d'abord, on a en effet

$$4\delta = 4(1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma) + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 4 - t_{12}^2 - t_{13}^2 - t_{23}^2 + t_{12}t_{13}t_{23};$$

([20]) Pour l'expression des

$$t_{ij}^{-1} = -t_{ij} + \sum_{i<\alpha<j} t_{i\alpha}t_{\alpha j} - \sum_{i<\alpha<\beta<j} t_{i\alpha}t_{\alpha\beta}t_{\beta j} + \ldots \qquad (i<j),$$

cf. *loc. cit.*, *Bull. Sc. Math.*, t. 74, 1950, p. 81 et *Acta Math.*, t. 82, 1950, p. 15.

d'autre part, le développement de Laplace de $\Delta(1)$ donne, compte tenu de (1),

$$\Delta(1) = \begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & t_{24} \\ t_{13} & t_{23} & 2 & t_{34} \\ t_{14} & t_{24} & t_{34} & 2 \end{vmatrix} = (4-t_{12}^2)(4-t_{34}^2) + (t_{13}t_{24} - t_{23}t_{14})^2$$

$$-(2t_{23} - t_{12}t_{13})(2t_{23} - t_{24}t_{34}) - (2t_{14} - t_{12}t_{24})(2t_{14} - t_{13}t_{34})$$
$$-(2t_{13} - t_{12}t_{23})(2t_{13} - t_{14}t_{34}) - (2t_{24} - t_{12}t_{14})(2t_{24} - t_{23}t_{34})$$
$$= 16 - 4(t_{12}^2 + t_{13}^2 + t_{23}^2 + t_{14}^2 + t_{24}^2 + t_{34}^2)$$
$$+ 4(t_{12}t_{13}t_{23} + t_{12}t_{14}t_{24} + t_{13}t_{14}t_{34} + t_{23}t_{24}t_{34})$$
$$+ 2t_{12}t_{34}(t_{12}t_{34} - t_{13}t_{24} - t_{23}t_{14}).$$

La dernière parenthèse vaut $-2t_{23}t_{14}$, donc la nullité de

$$\frac{\Delta(1)}{4} = (4 - t_{12}^2 - t_{13}^2 - t_{23}^2 + t_{12}t_{13}t_{23})$$
$$-(t_{14}^2 + t_{24}^2 + t_{34}^2 - t_{12}t_{14}t_{24} - t_{13}t_{14}t_{34} - t_{23}t_{24}t_{34} + t_{12}t_{23}t_{34}t_{14})$$

s'écrit

$$4\delta = t_{14}(t_{14} - t_{12}t_{14} - t_{13}t_{34} + t_{12}t_{23}t_{34}) + t_{24}(t_{24} - t_{23}t_{34}) + t_{34}^2$$

ou enfin

(10) $$4\delta = -(t_{14}t_{14}^{-1} + t_{24}t_{24}^{-1} + t_{34}t_{34}^{-1}).$$

On voit ainsi que

(11) $$|\vec{\chi}| = 2\sqrt{\delta} = 2 \sin \text{trièdre} \left(A_4 \, \vec{e}_1 . \vec{e}_2 . \vec{e}_3\right).$$

13. Il ne reste plus qu'à déterminer la translation $\mathfrak{T}$ pour caractériser le déplacement hélicoïdal représenté par $\overline{U_4U_3U_2U_1}$. Il suffit de projeter $\overrightarrow{A_4A'_4}$ sur D, en appelant A'_4 le transformé $\overline{U_4U_3U_2U_1}\,A_4$. Or $\overline{U_3U_2U_1}\,A_4 = A_4$, donc $\overrightarrow{A_4A'_4} = 2\overrightarrow{A_4B_4}$, et le vecteur $\vec{\tau}$ représentant la translation $\mathfrak{T}$ est

$$\vec{\tau} = 2d \frac{\vec{e}_4 . \vec{\chi}}{\vec{\chi}^2} \vec{\chi}.$$

(8) donne tout de suite

$$\vec{e}_4 . \vec{\chi} = -\frac{1}{2}(t_{14}^{-1}t_{14} + t_{24}^{-1}t_{24} + t_{34}^{-1}t_{34}),$$

donc

(12) $$\vec{\tau} = d\vec{\chi}.$$

14. Conséquences. — Nous avons observé au paragraphe 9 que le produit $\overline{U_1U_4U_3U_2}$ vérifie également (1). Or il s'écrit

$$\overline{U_1U_4U_3U_2} = \overline{U}_1 \, \overline{U_4U_3U_2U_1} \, \overline{U}_1,$$

et représente le transformé de $\overline{U_4 U_3 U_2 U_1}$ par la symétrie U_1; c'est donc le produit d'un retournement et d'une translation, l'axe D_1 du retournement étant le symétrique de D par rapport à la face U_1, donc rencontrant D au point où il perce U_1; mais la transposition à ce produit des propriétés de $\overline{U_4 U_3 U_2 U_1}$ nous apprend que D_1 passe par le pied B_1 de la hauteur abaissée de A_1 sur cette face U_1, donc D passe par B_1 et l'on a le

THÉORÈME. — *L'axe du retournement de* $\overline{U_4 U_3 U_2 U_1}$ *est la droite qui joint les pieds des hauteurs abaissées sur les deux plans de symétrie extrêmes.*

C'est la généralisation de ce que nous avons observé pour le triangle.

La translation associée à $\overline{U_1 U_4 U_3 U_2}$ a la longueur de $\vec{\tau}$ par raison de symétrie, mais mesure d'autre part $2 d_1 \sqrt{\delta_1}$, en désignant par d_1 la longueur de la hauteur $A_1 B_1$ et par $\sqrt{\delta_1}$ le sinus du trièdre ([21]) $A_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 \vec{e}_4$, si l'on applique les formules (11) et (12). En généralisant l'emploi des indices, de façon que d et δ deviennent d_4 et δ_4, les permutations circulaires successives donnent les égalités

$$d_1\sqrt{\delta_1} = d_2\sqrt{\delta_2} = d_3\sqrt{\delta_3} = d_4\sqrt{\delta_4}. \tag{13}$$

C'est une propriété classique de tous les tétraèdres, et pas particulière à ceux envisagés ici. En désignant par s_i l'aire de la face U_i, le volume V du tétraèdre est tel que l'on ait $3V = d_i s_i$, donc (13) s'écrit encore

$$\frac{s_1}{\sqrt{\delta_1}} = \frac{s_2}{\sqrt{\delta_2}} = \frac{s_3}{\sqrt{\delta_3}} = \frac{s_4}{\sqrt{\delta_4}}, \tag{13'}$$

et exprime en effet que, *dans un tétraèdre, les aires des faces sont proportionnelles aux sinus des trièdres suplémentaires des trièdres opposés* ([22]). Pour les tétraèdres qui vérifient (1), la valeur commune de ces rapports est ([23]) $\frac{6V}{|\vec{\tau}|}$.

15. Étendons ces résultats à une classe de produits d'inversions $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ de l'espace E_{n-1}. On sait qu'il existe toujours une sphère invariante de la famille linéaire des U_i si n est impair, mais pas nécessairement si n est pair.

([21]) La mesure de $\vec{\tau}$ ne pouvant dépasser $2d$, et valant $2d\sqrt{\delta}$, on vérifie ainsi la propriété connue de $\sqrt{\delta}$ de pouvoir être assimilé à un sinus.

([22]) *Voir* par exemple : DOSTOR, *Éléments de la théorie des déterminants*, 2e édition, p. 269.

([23]) C'est à rapprocher de la formule analogue obtenue au paragraphe 7 pour le triangle, et qui s'écrit

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4S}{|\vec{\tau}|}, \qquad \text{puisque} \quad \sin(\pi - A) = \sin A.$$

Les produits que nous considérons sont ceux qui possèdent $n-2$ sphères invariantes linéairement distinctes, dans la famille linéaire des U_i, c'est-à-dire tels que $h=-1$ soit racine d'ordre $n-2$ de $\Delta(h)=0$ et que les équations [(6), chap. I] associées

$$(T-T')\lambda=0 \tag{14}$$

forment un système de rang 2. Le système des U_i n'est pas orthogonal, en vertu d'une remarque déjà faite, et nous supposons par exemple que t_{12} n'est pas nul. Les deux premières équations (14)

$$\left\{\begin{array}{l} t_{12}\lambda_2+t_{13}\lambda_3+\ldots+t_{1j}\lambda_j+\ldots+t_{1n}\lambda_n=0, \\ -t_{12}\lambda_1+t_{23}\lambda_3+\ldots+t_{2j}\lambda_j+\ldots+t_{2n}\lambda_n=0, \end{array}\right. \tag{15}$$

sont distinctes et définissent λ_1 et λ_2 en fonction des autres λ_j; il faut donc, et il suffit, que les $n-2$ autres équations (14), soit

$$-t_{1i}\lambda_1-t_{2i}\lambda_2-\ldots-t_{i-1,i}\lambda_{i-1}+t_{i,i+1}\lambda_{i+1}+\ldots+t_{in}=0 \qquad (3\leqq i\leqq n), \tag{16}$$

soient des combinaisons linéaires de (15), ce qui fournit les $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ conditions essentielles

$$t_{12}t_{ij}-t_{1i}t_{2j}+t_{1j}t_{2i}=0 \qquad (3\leqq i<j\leqq n). \tag{17}$$

Si t_{12} était nul, mais $t_{rs}\neq 0$, on remplacerait (17) par $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ autres conditions semblables où les indices fixes 1, 2 seraient remplacés par r, s. Observons en passant que la transformation $\overline{V_n\ldots V_2V_1}$, inverse de $\overline{U_n\ldots U_2U_1}$, a les mêmes invariances, et que, par suite, les relations (17) sont équivalentes aux relations analogues entre les t_{ij}^{-1} :

$$t_{12}^{-1}t_{ij}^{-1}-t_{1i}^{-1}t_{2j}^{-1}+t_{1j}^{-1}t_{2i}^{-1}=0 \qquad (3\leqq i<j\leqq n). \tag{18}$$

Ceci posé, les sphères invariantes cherchées sont obtenues en résolvant (15) par rapport à λ_1 et λ_2, et forment une famille linéaire $\sum_{i=3}^{n}\lambda_i\Phi_i$ d'ordre $n-2$, dont des sphères de base sont les $n-2$ sphères

$$\Phi_i=t_{2i}U_1-t_{1i}U_2+t_{12}U_i \qquad (i=3, 4, \ldots, n). \tag{19}$$

Ces Φ_i sont bien linéairement distinctes puisque les U_i de même indice le sont et que t_{12} n'est pas nul, et, se trouvant dans un espace E_{n-1}, elles se coupent suivant un cercle D.

16. Si X_1 désigne l'une des sphères Φ_i, on a vu au paragraphe 2 qu'il existe $n-1$ autres sphères $X'_2, X'_3, \ldots, X'_n$ de la famille des U_i, orthogonales à X_1, et telles qu'ait lieu l'équivalence directe

$$\overline{U_n\ldots U_2U_1}=\overline{X'_n\ldots X'_3X'_2X_1}.$$

Les sphères invariantes qui sont orthogonales à X_1 sont invariantes par le produit partiel $\overline{X'_n \ldots X'_3 X'_2}$ et forment une famille linéaire d'ordre $n-3$ dans la famille de ces X'_i. Si X_2 est l'une d'elles, on peut lui associer $n-2$ sphères $X''_3, X''_4, \ldots, X''_n$ de cette dernière famille, assurant l'équivalence directe

$$\overline{X'_n \ldots X'_3 X'_2} = \overline{X''_n \ldots X''_4 X''_3 X_2},$$

donc l'égalité

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{X''_n \ldots X''_4 X''_3 X_2 X_1},$$

où $X_1 X_2 = 0$ et où les X''_i sont orthogonales à X_1 et X_2. De proche en proche, on aboutit à l'égalité

$$\overline{U_n \ldots U_2 U_1} = \overline{X_n X_{n-1} X_{n-2} \ldots X_2 X_1}, \tag{20}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}$ forment un système orthonormal de la famille des sphères invariantes, et orthogonal aux deux autres sphères X_{n-1}, X_n du produit.

De même que les Φ_i, $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}$ se coupent suivant le cercle D, et le produit $\overline{X_{n-2} \ldots X_2 X_1}$ est un retournement autour de ce cercle. C'est l'équivalent anallagmatique du retournement autour d'une droite. $\overline{X_n X_{n-1}}$ est une rotation anallagmatique, autour d'une hypersphère à $n-2$ dimensions, dont les deux sphères X_{n-1}, X_n sont orthogonales à l'axe D du retournement.

L'angle de X_{n-1} et X_n se déduit de l'égalité des $\text{dét}(T+T')$ relatifs à deux produits d'inversions directement équivalents. T se rapportant toujours aux U_i, l'égalité (20) entraîne, grâce aux orthogonalités réalisées chez les X_i, l'égalité

$$\Delta(1) = \text{dét}(T+T') = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 2 & 2(X_{n-1}X_n) \\ 0 & 0 & \ldots & 2(X_{n-1}X_n) & 2 \end{vmatrix} = 2^n[1-(X_n X_{n-1})^2],$$

donc

$$\sin(\widehat{X_n, X_{n-1}}) = \sqrt{\frac{\Delta(1)}{2^n}}. \tag{21}$$

17. Considérons le bipoint A_n commun à tous les U_i d'indice $i<n$. C'est un sommet du n-sphère formé par tous les U_i. Les relations (17), relatives à $j=n$, expriment que les sphères $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_{n-1}$ sont orthogonales à U_n; leur expression (19) montre d'autre part qu'elles passent par A_n, donc elles passent par le cercle commun à toutes les sphères passant par A_n et orthogonales à U_n, et qui forment une famille linéaire d'ordre $n-2$. Ce cercle est la hauteur du n-sphère, abaissée du sommet A_n sur la face opposée U_n, et coupe U_n suivant un bipoint B_n, qui constitue le pied de cette hauteur. Les deux cercles D et $A_n B_n$

se rencontrent puisqu'ils sont sur l'hypersphère à deux dimensions commune aux $n-3$ sphères $\Phi_3, \Phi_4, \ldots, \Phi_{n-1}$. Ils se rencontrent effectivement en B_n : en effet, la hauteur est l'intersection de toutes les sphères $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i U_i$ orthogonales à U_n, c'est-à-dire telles que

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_{in} \lambda_i = 0,$$

et se détermine par les équations

$$\frac{U_1}{t_{1n}} = \frac{U_2}{t_{2n}} = \ldots = \frac{U_{n-1}}{t_{n-1,n}}; \tag{22}$$

B_n s'obtient donc à l'aide du système

$$U_i B_n = t_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \qquad \text{et} \qquad U_n B_n = 0. \tag{23}$$

Nous savons déjà que $\Phi_3 B_n = \Phi_4 B_n = \ldots = \Phi_{n-1} B_n = 0$, et il suffit de vérifier que $\Phi_n B_n$ est également nul, ce qui est immédiat à l'aide de (19) et (23).

Un raisonnement déjà utilisé pour le tétraèdre montre que le cercle inverse de D par rapport à U_1 est l'axe du retournement anallagmatique associé à $\overline{U_1 U_n \ldots U_3 U_2}$, et passe donc par le pied B_1 de la hauteur abaissée du sommet A_1 (intersection des U_i d'indice $i > 1$) sur U_1. D passe donc aussi par B_1 et l'on a le

THÉORÈME. — *Dans un n-sphère vérifiant les conditions (17), l'axe du retournement qui constitue l'une des composantes du produit* $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$ *est le cercle* [24] *qui joint les pieds des hauteurs situés sur les deux faces extrêmes* U_1, U_n.

Le même raisonnement montre aussi que *l'angle de la rotation anallagmatique qui constitue l'autre composante se conserve dans une permutation circulaire des* U_i.

18. Complétons ces résultats dans le cas particulièrement intéressant où les U_i sont des plans formant un n-èdre. Les sommets A_i et les pieds B_i des hauteurs sont des points, et l'axe D du retournement est la droite joignant les pieds B_1, B_n qui sont sur les deux plans extrêmes de $\overline{U_n \ldots U_2 U_1}$. Avec des notations qui généralisent celles employées pour le tétraèdre, nous posons

$$\begin{cases} U_i = \vec{e}_i . \overrightarrow{A_n P} & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ U_n = \vec{e}_n . \overrightarrow{B_n P} = \vec{e}_n . \overrightarrow{A_n P} - d & (d > 0), \end{cases} \tag{24}$$

où les $\vec{e}_i$ sont tous unitaires.

---

[24] Le fait que les pieds des deux hauteurs sont cocycliques est vrai pour tous les n-sphères de E_{n-1}.

Les Φ_i sont des plans, ainsi que les X_i; en particulier, X_{n-1} et X_n sont perpendiculaires à B_1B_n, et le produit $\overline{X_nX_{n-1}}$ n'est rien autre qu'une translation $\mathfrak{T}$ parallèle à D.

La direction de D est celle d'un vecteur de la forme

$$\vec{\chi}=\sum_{i=1}^{n-1} l_i \vec{e}_i$$

parallèle à l'intersection des $n-2$ plans (19), donc orthogonal aux $n-2$ vecteurs

$$(25) \qquad \vec{\nu}_j = t_{2j}\vec{e}_1 - t_{1j}\vec{e}_2 + t_{12}\vec{e}_j \qquad (j=3, 4, \ldots, n).$$

On déduit aisément de (17) le tableau des produits scalaires

$$(26) \qquad \begin{cases} \vec{\nu}_j.\vec{e}_1 = t_{2j}, \\ \vec{\nu}_j.\vec{e}_2 = -t_{1j}+t_{12}t_{2j} \qquad (i, j=3, 4, \ldots, n), \\ \vec{\nu}_j.\vec{e}_i = t_{12}t_{ij}, \end{cases}$$

de sorte que $\vec{\nu}_j$ est orthogonal aux $\vec{e}_i$ d'indice $i>j$. On peut ainsi vérifier que

$$(27) \qquad \vec{\chi} = -\sum_{i=1}^{n-1} t_{in}^{-1}\vec{e}_i$$

répond à la question; il s'agit en effet d'annuler $n-2$ produits scalaires

$$\vec{\chi}.\vec{\nu}_j = -\sum_{i=1}^{n-1} t_{in}^{-1}\vec{e}_i.\vec{\nu}_j = -t_{1n}^{-1}t_{2j}+t_{2n}^{-1}(t_{1j}-t_{12}t_{2j})-t_{12}\sum_{i=3}^{n-1} t_{in}^{-1}t_{ij}.$$

Les relations (18) où l'on fait $j=n$ s'écrivent

$$-t_{12}t_{in}^{-1} = t_{12}^{-1}t_{in}^{-1} = t_{1i}^{-1}t_{2n}^{-1} - t_{1n}^{-1}t_{2i}^{-1} \qquad (3 \leqq i \leqq n-1),$$

et permettent, par l'expression qu'elles donnent de t_{in}^{-1}, de mettre $\vec{\chi}.\vec{\nu}_j$ sous la forme

$$\vec{\chi}.\vec{\nu}_j = -t_{1n}^{-1}\left(t_{2j}+\sum_{i=3}^{n-1} t_{2i}^{-1}t_{ij}\right)+t_{2n}^{-1}\left(t_{1j}+t_{12}^{-1}t_{2j}+\sum_{i=3}^{n-1} t_{1i}^{-1}t_{ij}\right) \qquad (3 \leqq j \leqq n).$$

Les deux parenthèses ne sont pas d'autre chose que

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_{2i}^{-1}t_{ij} = \sum_{i=1}^{n} t_{2i}^{-1}t_{ij} - t_{2n}^{-1}t_{nj},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} t_{1i}^{-1}t_{ij} = \sum_{i=1}^{n} t_{1i}^{-1}t_{ij} - t_{1n}^{-1}t_{nj},$$

où les premières sommes aux seconds membres sont nulles en vertu de $T^{-1}T = 1$ et du fait que j diffère de 1 et 2, et la nullité de $\vec{\chi}.\vec{\nu}_j$ s'ensuit aussitôt.

De (27) on déduit aussi aisément, pour la mesure de $\vec{\chi}$,

$$\vec{\chi}^2 = \sum_{i,j=1}^{n-1} t_{in}^{-1} t_{jn}^{-1} \vec{e}_i . \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} t_{in}^{-1} t_{jn}^{-1} t_{ij},$$

ou, grâce à $t_{nn}^{-1} = 1$ et

$$\sum_{j=1}^{n-1} t_{ij} t_{jn}^{-1} = -t_{in} \qquad (i < n),$$

$$(28) \qquad \vec{\chi}^2 = -\sum_{i=1}^{n-1} t_{in} t_{in}^{-1}.$$

17. La valeur (11) de $|\vec{\chi}|$ établie pour le tétraèdre est également valable pour ces n-èdres, grâce à la singularité du système des n-plans dans E_{n-1}. En associant tout d'abord l'expression de (28), linéaire par rapport aux t_{in}^{-1}, aux $n-1$ équations de réciprocité des t_{ij} et t_{in}^{-1} :

$$\sum_{i=1}^{n} t_{ji} t_{in}^{-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1),$$

l'élimination des t_{in}^{-1} d'indice $i < n$ $(t_{nn}^{-1} = 1)$ définit $\vec{\chi}^2$ par l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \ldots & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & \ldots & t_{n-1,n} & \vec{\chi}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(29) \qquad \vec{\chi}^2 = -\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & t_{34} & \ldots & t_{3,n-1} & t_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \ldots & \ldots & \cdot\cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \ldots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Grâce à des combinaisons évidentes entre les deux premières lignes et chacune des 3^e, 4^e, ..., $(n-1)^{\text{ième}}$ lignes, où l'on utilise les relations (17), on peut éliminer $t_{3n}, t_{4n}, \ldots, t_{n-1,n}$ dans ces dernières lignes, ce qui donne pour $\overset{\rightarrow 2}{\chi}$ l'équation

$$t_{12}^{n-3}\overset{\rightarrow 2}{\chi} = -\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & t_{23} & t_{24} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ t_{23} & -t_{13}+t_{12}t_{23} & t_{12} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ t_{24} & -t_{14}+t_{12}t_{24} & t_{12}t_{34} & t_{12} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . \\ t_{2,n-1} & -t_{1,n-1}+t_{12}t_{2,n-1} & t_{12}t_{3,n-1} & t_{12}t_{4,n-1} & \ldots & t_{12} & 0 \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \ldots & t_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Effectuons des combinaisons analogues entre les deux premières colonnes et les $n-3$ suivantes afin d'éliminer $t_{3n}, t_{4n}, \ldots, t_{n-1,n}$ dans celles-ci. En posant

$$\alpha_i = -t_{1i} + t_{12}t_{2i} \qquad (i = 3, 4, \ldots, n-1),$$
$$\beta_i = t_{12}^2 + t_{1i}^2 + t_{2i}^2 - t_{12}t_{1i}t_{2i} \qquad (i = 3, 4, \ldots, n-1),$$
$$\gamma_{ij} = t_{1i}t_{1j} + t_{2i}t_{2j} - t_{12}t_{2i}t_{1j} \qquad (3 \leqq i < j \leqq n-1),$$

il vient

$$(30) \qquad t_{12}^{2n-6}\overset{\rightarrow 2}{\chi} = -\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & t_{23} & t_{24} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{1n} \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_4 & \ldots & \alpha_{n-1} & t_{2n} \\ t_{23} & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_{34} & \ldots & \gamma_{3,n-1} & 0 \\ t_{24} & \alpha_4 & \gamma_{34} & \beta_4 & \ldots & \gamma_{4,n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . \\ t_{2,n-1} & \alpha_{n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \ldots & \beta_{n-1} & 0 \\ t_{1n} & t_{2n} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Il s'agit de rattacher cette expression de $\overset{\rightarrow 2}{\chi}$ au « sinus de l'angle $(n-1)$ èdre » $A_n\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_{n-1}$, formé par les vecteurs normaux aux faces issues du sommet A_n, qui se définit par la racine carrée du déterminant δ d'ordre $n-1$ d'éléments $\vec{e}_i.\vec{e}_j (i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$, c'est-à-dire de

$$(31) \qquad \delta = \frac{1}{2^{n-1}}\begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1,n-1} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & \ldots & t_{2,n-1} \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1,n-1} & t_{2,n-1} & t_{3,n-1} & \ldots & 2 \end{vmatrix}.$$

La nature irrégulière du système des n-plans U_i se traduisant par

$$\text{dét}(T+T') = \begin{vmatrix} 2 & t_{12} & t_{13} & \ldots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ t_{12} & 2 & t_{23} & \ldots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ \ldots & . & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{1,n-1} & t_{2,n-1} & t_{3,n-1} & \ldots & 2 & t_{n-1,n} \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \ldots & t_{n-1,n} & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

(31) s'écrit encore

$$
(32)\qquad 2^n\,\delta = -\begin{vmatrix}
2 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1n}\\
t_{12} & 2 & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2n}\\
t_{13} & t_{23} & 2 & t_{34} & \dots & t_{3,n-1} & t_{3n}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
t_{1,n-1} & t_{2,n-1} & t_{3,n-1} & t_{4,n-1} & \dots & 2 & t_{n-1,n}\\
t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \dots & t_{n-1,n} & 0
\end{vmatrix}.
$$

Opérons sur ce déterminant comme nous avons fait sur (29). La division par 2 des 3^e, 4^e, ..., $(n-1)^{\text{ième}}$ lignes, après les combinaisons avec les deux premières qui en ont fait disparaître t_{3n}, t_{4n}, ..., $t_{n-1,n}$, donne d'abord

$$
2^3\,t_{12}^{n-3}\,\delta = -\begin{vmatrix}
2 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1n}\\
t_{12} & 2 & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2n}\\
t_{23} & -t_{13}+t_{12}t_{23} & t_{12} & 0 & \dots & 0 & 0\\
t_{24} & -t_{14}+t_{12}t_{24} & t_{12}t_{34} & t_{12} & \dots & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
t_{2,n-1} & -t_{1,n-1}+t_{12}t_{2,n-1} & t_{12}t_{3,n-1} & t_{12}t_{4,n-1} & \dots & t_{12} & 0\\
t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & t_{4n} & \dots & t_{n-1,n} & 0
\end{vmatrix};
$$

en combinant de manière analogue les 3^e, 4^e, ... et $(n-1)^{\text{ième}}$ colonnes avec les deux premières, et en les divisant ensuite par 2, on remplace enfin (32) par l'expression

$$
(33)\qquad 2^{6-n}\,t_{12}^{2n-6}\,\delta = -\begin{vmatrix}
2 & t_{12} & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1} & t_{1n}\\
t_{12} & 2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} & t_{2n}\\
t_{23} & \alpha_3 & \frac{1}{2}\beta_3 & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} & 0\\
t_{24} & \alpha_4 & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \frac{1}{2}\beta_4 & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
t_{2,n-1} & \alpha_{n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} & \dots & \frac{1}{2}\beta_{n-1} & 0\\
t_{1n} & t_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{vmatrix}.
$$

Les déterminants aux seconds membres de (30) et (33) sont deux formes quadratiques en t_{1n}, t_{2n} dont nous voulons établir la proportionnalité. On voit tout de suite que, dans le premier, les coefficients de t_{1n}^2 et de t_{2n}^2 valent 2^{n-4} fois les coefficients homologues du second. Le coefficient de $-t_{1n}t_{2n}$ dans (30) est la somme des deux déterminants

$$
\begin{vmatrix}
0 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1}\\
t_{23} & \beta_3 & \gamma_{34} & \dots & \gamma_{3,n-1}\\
t_{24} & \gamma_{34} & \beta_4 & \dots & \gamma_{4,n-1}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
t_{2,n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \dots & \beta_{n-1}
\end{vmatrix}
+
\begin{vmatrix}
t_{12} & t_{23} & t_{24} & \dots & t_{2,n-1}\\
\alpha_3 & \beta_3 & \gamma_{34} & \dots & \gamma_{3,n-1}\\
\alpha_4 & \gamma_{34} & \beta_4 & \dots & \gamma_{4,n-1}\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
\alpha_{n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \dots & \beta_{n-1}
\end{vmatrix},
$$

que la transposition du deuxième permet de remplacer par le déterminant unique

$$(34)\qquad \begin{vmatrix} t_{12} & \alpha_4 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} \\ 2t_{23} & \beta_3 & \gamma_{34} & \dots & \gamma_{3,n-1} \\ 2t_{24} & \gamma_{34} & \beta_4 & \dots & \gamma_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2t_{2,n-1} & \gamma_{3,n-1} & \gamma_{4,n-1} & \dots & \beta_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant symétrique (33), le terme semblable a pour coefficient

$$2\begin{vmatrix} t_{12} & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_{n-1} \\ t_{23} & \frac{1}{2}\beta_3 & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} \\ t_{24} & \frac{1}{2}\gamma_{34} & \frac{1}{2}\beta_4 & \dots & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{2,n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{3,n-1} & \frac{1}{2}\gamma_{4,n-1} & \dots & \frac{1}{2}\beta_{n-1} \end{vmatrix},$$

2^{n-4} fois moins grand que (34) comme on le voit aisément. Nous avons ainsi établi que, pour tous les n-èdres en question, $\vec{\chi}^2$ a la valeur remarquable 4δ, soit encore

$$(35)\qquad |\vec{\chi}| = 2\sqrt{\delta}.$$

L'expression

$$(36)\qquad \vec{\tau} = d\vec{\chi}$$

de la translation $\mathcal{T} = \overline{X_n X_{n-1}}$ obtenue en (12) pour le cas $n = 4$ est encore valable puisqu'elle se déduit des expressions de $\vec{\chi}$ et $\vec{\chi}^2$ qui conservent leur forme.

20. Dans la symétrie de $\overline{U_n \dots U_2 U_1}$ par rapport à U_1, et qui conduit au produit $\overline{U_1 U_n \dots U_2}$, la droite D est remplacée par sa symétrique par rapport à U_1, et la mesure $2d\sqrt{\delta}$ de $|\vec{\tau}|$ est conservée. Si donc on désigne par $d_i (i = 1, 2, \dots, n)$ la longueur de la hauteur $A_i B_i$ sur U_i et par $\sqrt{\delta_i}$ le sinus de l'angle [25] $(n-1)$-èdre $A_i \vec{e}_1 \dots \vec{e}_{i-1} \vec{e}_{i+1} \dots \vec{e}_n$, que l'on peut appeler supplé-

[25] Chaque $\vec{e}_i$ a le sens de $\overrightarrow{A_i B_i}$, pour que d_i soit positif. Cet angle $(n-1)$-èdre n'est donc pas exactement le supplémentaire de l'angle $(n-1)$-èdre A_i du n-èdre, au sens de la géométrie élémentaire, mais son symétrique par rapport à A_i.

mentaire de l'angle $(n-1)$-èdre du n-èdre, de sommet A_i, on a $d_1\sqrt{\delta_1}=d_n\sqrt{\delta_n}$, et, par permutation circulaire,

$$d_1\sqrt{\delta_1}=d_2\sqrt{\delta_2}=\ldots=d_n\sqrt{\delta_n}. \tag{37}$$

Ces relations ne sont pas particulières aux n-èdres considérés ici, mais s'appliquent à tout n-èdre de E_{n-1}. Si V désigne le volume du n-èdre et s_i l'aire de la base U_i, on a

$$V=\frac{1}{n-1}s_i d_i,$$

tandis que

$$V^{n-2}=\frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-2}}\sqrt{\delta_i}\,\frac{s_1 s_2\ldots s_n}{s_i};$$

par conséquent, après multiplication de ces deux égalités,

$$V^{n-1}=\frac{(n-2)!}{(n-1)^{n-1}}s_1 s_2\ldots s_n d_i\sqrt{\delta_i} \tag{38}$$

fournit la valeur commune des produits (37), pour un n-èdre quelconque, en fonction du volume et des aires des faces. En fonction de ces mêmes quantités, la translation (36) d'un n-èdre du type que nous venons d'étudier a la mesure

$$|\vec{\tau}|=\frac{2(n-1)^{n-1}}{(n-2)!}\,\frac{V^{n-1}}{s_1 s_2\ldots s_n}. \tag{39}$$

(37) exprime encore que, dans un n-èdre quelconque, les aires des faces sont proportionnelles aux sinus des angles $(n-1)$-èdres supplémentaires opposés, et la valeur commune de ces rapports est $\dfrac{2(n-1)V}{|\vec{\tau}|}$ pour nos n-èdres particuliers.