ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE LELONG

Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 67 (1950), p. 393-419

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__393_0>

PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES
DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES
DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION

PAR M. PIERRE LELONG.

I. — Introduction.

1. Nous rappellerons tout d'abord un résultat de H. Poincaré [1] : si $f(z_1, \ldots, z_p) = f(M)$ est une fonction holomorphe des p variables complexes $z_1, z_2 \ldots, z_p$, $\log|f(M)|$ est égal à une fonction harmonique $H(M)$ de l'espace R^{2p} (R^{2p} désigne l'espace à $2p$ dimensions réelles, support de l'espace C^p des p variables complexes z_i), augmentée d'un potentiel $U^\mu(M) = \int \frac{d\mu(Q)}{MQ^{2p-2}}$ où μ est une distribution positive portée par la variété $f(z_1, \ldots, z_p) = 0$ avec une densité constante.

Comme préliminaire, nous donnerons de ce résultat une démonstration très simple déjà esquissée dans un travail antérieur [2], où nous avions rattaché le le théorème de Poincaré à une propriété générale des fonctions plurisousharmoniques.

Nous adopterons ici un point de vue élémentaire et nous tirerons les conséquences d'une propriété simple de la moyenne $\lambda[\log|f|; M; R]$ de $\log|f|$, prise sur une sphère [3] $S(M; R)$ de centre M, de rayon R : λ est une fonction continue, non décroissante, convexe de $u_0 = \log R$. Cette propriété (valable d'ailleurs également pour les fonctions plurisousharmoniques) est prise comme point de départ; elle permet d'établir rapidement le théorème de Poincaré : celui-ci donne, en substance, la décomposition de F. Riesz de la fonction $\log|f(M)|$, sousharmonique dans R^{2p}.

---

(1) *Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* (*Act. Math.*, 22, 1899, p. 159).

(2) *Les fonctions plurisousharmoniques* (*Ann. E. N. S.*, 69, 1945, p. 324, *cf.* théorème 4). La définition des fonctions plurisousharmoniques est rappelée au paragraphe V de ce travail.

(3) S(M; R) désigne la frontière de la boule pleine B(M; R), de centre M, de rayon R.

La convexité de $\lambda(\log R)$ fournit toutefois notablement plus et donne des précisions sur la distribution μ, c'est-à-dire sur l'aire de la variété $f=0$. Nous démontrerons la propriété simple suivante du continu formé par une variété analytique complexe V^{p-1} (l'indice supérieur indique le nombre de dimensions complexes) : l'aire (à $2p-2$ dimensions réelles) de la variété à l'intérieur d'une boule $B(M; R)$ de centre M, de rayon R, a la valeur

$$\sigma(R) = \tau_{2p-2}\nu(M; R)R^{2p-2},$$

où τ_{2p-2} est la mesure de la boule unité dans C^{p-1} et $\nu(M; R)$ désigne une fonction *non décroissante* de R, pour laquelle $\nu(M, 0)$ est égal à l'ordre de multiplicité de M sur la variété; en conséquence $\sigma(R)$ est toujours au moins égal à l'aire découpée par $B(M; R)$ sur le plan ou le cône tangent en M à la variété; $\nu(M; R)$ que nous appellerons *le degré moyen* de la variété dans la boule $B(M; R)$ est une fonction de R qui croît dans le cas d'une variété algébrique depuis l'ordre de M sur la variété jusqu'au degré de celle-ci quand R augmente indéfiniment. La propriété indiquée peut être considérée comme une précision métrique au théorème des fonctions implicites, celui-ci étant essentiellement un théorème d'existence. Elle suppose seulement $B(M; R)$ contenue dans le domaine où la variété est définie. Elle permet, étant donnée une division simpliciale de l'espace, de majorer le nombre des simplexes qui contiennent des points de la variété. On verra qu'elle correspond à une particularité de la distribution de masse d'une fonction plurisousharmonique.

Les variétés analytiques complexes seront, sauf indication contraire, définies d'une manière globale, c'est-à-dire en annulant (pour une variété V^{p-1} dans C^p) une fonction analytique f. On sait d'ailleurs qu'on peut passer de la définition locale (donnée de Cousin) à la définition globale dans une boule $B(M; R)$ ou dans un domaine cylindrique défini par $z_i \in d_i$, $(1 \leqq i \leqq p)$ quand les d_i sont simplement connexes.

Terminons cet avant-propos par une remarque : en passant de $\log|f|$ à la moyenne $\lambda[\log|f|; M; R]$, on réalise pour les masses μ qui interviennent dans la décomposition de Poincaré un balayage qui conserve le caractère plurisousharmonique de la fonction.

Nombre de résultats élémentaires de la théorie des fonctions, et des polynomes en particulier (on se reportera pour un exemple aux théorèmes 5 et 6 et à leurs corollaires, au paragraphe V du présent travail), sont démontrés pour $p=1$ en utilisant explicitement la possibilité d'isoler les zéros d'une fonction $f(z)$ qui sont portés par un compact K (ensemble fermé et borné) de C^1, grâce à l'opération de la division qui consiste à écrire $f(z) = P(z)f_1(z)$, avec $f_1(z) \neq 0$ pour $z \in K$; $P(z)$ est un polynome qui ne s'annule plus dans le complémentaire de K.

Il est clair qu'il n'existe pas pour $p \geqq 2$ d'opération *algébrique* sur les fonctions de p variables permettant d'effectuer une telle décomposition sur l'ensemble des zéros. Le passage à la théorie du potentiel, une fois effectuée la décomposition de Poincaré-Riesz, donne sous forme additive, et relativement à $\log|f|$, toutes les facilités de décomposition que l'algèbre ne fournit plus pour $p \geqq 2$. Toutefois, le potentiel de Poincaré des masses portées par un sous-ensemble compact d'une variété analytique V^{p-1} n'est jamais une fonction plurisousharmonique. L'étude de la moyenne λ faite ici revient à opérer, plutôt qu'une décomposition des masses, une modification de la distribution qui n'altère pas le caractère plurisousharmonique et permet de conserver à certaines propriétés simples des fonctions analytiques le caractère élémentaire qu'elles ont pour $p=1$.

II. — Convexité de la moyenne sphérique $\lambda[\log|f|; M; R]$ par rapport à $\log R$; démonstration du théoréme de Poincaré.

2. Nous considérerons dans ce paragraphe des sphères concentriques $S(M; R)$ de centre M, de rayon variable R, contenues à l'intérieur d'un domaine D où est définie une fonction $f(z_1, z_2, \ldots, z_p)$ analytique des p variables complexes z_k. Par abréviation, si $M=[z_1, z_2, \ldots, z_p]$ on notera aussi $S(z_k; R)$, $B(z_k; R)$ respectivement la sphère et la boule de centre M, de rayon R, quand il sera utile d'expliciter les coordonnées de M.

On désignera par ω_{2p} la mesure (à $2p-1$ dimensions réelles) de la sphère unité $S(M; 1)$; si α_k $(1 \leqq k \leqq p)$ sont p paramètres complexes liés par $\sum_1^p |\alpha_k|^2 = 1$, on aura en posant $\alpha_k = r_k e^{i\theta_k}$, avec $\sum_1^p r_k^2 = 1$:

$$d\omega_{2p}(\alpha_k) = d\theta_1 d\theta_2 \ldots d\theta_p r_2 dr_2 \ldots r_p dr_p$$

et $S(M; 1)$ est décrite pour $0 \leqq \theta_k < 2\pi$, $\sum_2^p r_j^2 \leqq 1$. On a $\omega_{2p} = \int d\omega_{2p} = \dfrac{2\pi^p}{(p-1)!}$.

On désignera par $\lambda[\log|f|; M; R]$ la moyenne de $\log|f|$ sur $S(M; R)$ on posera :

$$(1) \qquad I(\zeta) = \lambda[\log|f|; z_k; R] = \omega_{2p}^{-1} \int \log|f(z_1+\zeta\alpha_1, \ldots, z_p+\zeta\alpha_p)|\, d\omega_{2p}(\alpha_k).$$

Il est immédiat que $I(\zeta)$ ne dépend que de $R=|\zeta|$; la multiplication de ζ par $e^{i\varphi}$ équivaut en effet à augmenter de φ tous les arguments θ_k des paramètres α_k dans l'intégration (1). On peut donc prendre tout d'abord la moyenne de $\log|f(z_1+\zeta e^{i\varphi}\alpha_1, \ldots, z_p+\zeta e^{i\varphi}\alpha_p)|$ par rapport à φ en posant :

$$(2) \qquad U(z_k; \alpha_j; \zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z_1+\zeta e^{i\varphi}\alpha_1, \ldots, \zeta_p+\zeta e^{i\varphi}\alpha_p)|\, d\varphi$$

et calculer (1) en remplaçant $\log|f|$ par U sous le signe d'intégration ; U est une fonction non décroissante, convexe de $u_0 = \log R$, à valeurs sur la droite réelle demi-fermée $-\infty \leqq U < \infty$; $\lambda[\log|f|;\ z_k;\ R]$ est donc une fonction non décroissante, convexe (donc continue) de $\log R$.

En particulier, la continuité de $\log|f|$ entraîne

$$\log|f(z_k)| = \lim_{R=0} \lambda[\log|f|;\ z_k;\ R] \leqq \lambda[\log|f|;\ z_k;\ R],$$

qui est la propriété classique de la moyenne pour les fonctions sousharmoniques dans l'espace R^{2p}, et caractérise ces fonctions quand on est assuré de la semi-continuité supérieure. En résumé on a déjà établi que $\log|f|$ est (si $f \not\equiv 0$) une fonction sousharmonique; il en résulte que la moyenne λ n'a pas la valeur $-\infty$ pour $R > 0$. Nous énoncerons :

Proposition 1. — *La moyenne* $\lambda[\log|f|;\ z_k;\ R]$ *de* $\log|f|$ *sur une sphère* $S(z_k;\ R)$ *est une fonction continue, convexe, non décroissante de* $u_0 = \log R$.

On pourra, remarquons le, se contenter de supposer f holomorphe *sur la sphère* $S(z_k;\ R)$, cette condition entraînant d'après un résultat bien connu que f soit holomorphe dans le domaine $B(z_k;\ R)$ qu'elle limite, pour $p \geqq 2$.

3. La fonction $\log|f|$ étant sousharmonique, on a par la décomposition de Riesz

$$\log|f(M)| = H(M) - U^{\mu}(M),$$

où $U^{\mu}(M) = \int d\mu(Q)\, MQ^{2-2p}$ est un potentiel de masses positives. Pour achever la démonstration du théorème de Poincaré, il suffit de préciser la distribution μ. D'après (2), si f ne s'annule pas dans $B(z_k;\ R)$, on a, quels que soient les α_k et $|\zeta| \leqq R$,

$$\log|f(z_k)| = U(z_k;\ \alpha_k;\ \zeta) = \lambda[\log|f|;\ z_k;\ |\zeta|];$$

$\log|f|$ est donc harmonique dans tout domaine où f ne s'annule pas; la distribution μ est portée par la variété $f = 0$.

Pour préciser, calculons selon la formule de Gauss la masse $\mu(S)$ portée par un élément S d'une division simpliciale T de l'espace; nous supposerons que T possède les propriétés suivantes : S est un cylindre défini par $z_i \subset d_i$, où d_i est un domaine simplement connexe, de frontière f_i rectifiable, à tangente continue, sauf en un nombre fini de points; de plus f_i ne porte aucun des points $z_i^{(\nu)}$ correspondant aux valeurs de z_i pour lesquelles f s'annule identiquement par rapport aux $p-1$ autres variables. Si F est la frontière de S, on a $F = \sum_1^p F_i$ avec $F_i = d_1 \times d_2 \ldots \times d_{i-1} \times f_i \times d_{i+1} \ldots \times d_p$. D'autre part, remarquons que la normale à la face F_i n'est autre que la normale ν_i à f_i dans le plan de f_i. On a donc, par le calcul élémentaire du flux $\varphi(S)$,

$$(3)\quad \varphi(S) = \sum_i \int \frac{\partial \log|f|}{\partial \nu_i}\, dF_i = \sum_{i=1}^{p} \int_{z_k \in d_k} ds_1\, ds_2 \ldots ds_{i-1}\, ds_{i+1} \ldots ds_p \int_{f_i} \frac{\partial \log|f|}{\partial \nu_i}\, df_i,$$

où $ds_k (k \neq i)$ est l'élément d'aire de d_k. Désignons par $n_i[z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}; (d_i); z_{i+1} \ldots z_p]$ le nombre de zéros de f pour lesquels $z_i \subset d_i$, en fonction des $z_k (k \neq i)$ supposés donnés, par $\sigma_i(S)$ l'aire de la projection sur le sous-espace C^{p-1} des $z_k (k \neq i)$ de la partie de la variété $f = 0$ intérieure à S. On a

$$(4) \qquad \varphi(S) = 2\pi \sum_1^p \int n_i[z_1, \ldots z_{i-1}; (d_i); z_{i+1}, \ldots z_p]\, ds_1 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p$$

$$\varphi(S) = 2\pi \sum_1^p \sigma_i(S).$$

Dans le passage de (3) à (4), le nombre entier positif ou nul n_i peut être non défini pour certaines valeurs (z_k), $(k \neq i)$, si f_i porte un zéro de f; mais d'après la restriction faite plus haut sur la frontière de S, cette éventualité n'a lieu que pour un ensemble de mesure nulle dans le champ

$$[d_1 \times d_2 \ldots \times d_{i-1} \times d_{i+1} \ldots \times d_p].$$

La propriété $\varphi(S) = 2\pi \sum_i \sigma_i(S)$ s'étend à une somme de simplexes et par suite à un ensemble ouvert quelconque. Si $\bar{D}$ est un domaine fermé sur lequel f est holomorphe et si l'aire $\sigma(F)$ à $2p - 2$ dimensions réelles de l'intersection de sa frontière F avec la variété $f = 0$ est nulle, on a $\sigma_i(F) \leqq \sigma(F) = 0$. On en déduit

$$(5) \qquad \varphi(\bar{D}) = 2\pi \sum_1^p \sigma_i(D).$$

Par suite, *la quantité* $\sum_1^p \sigma_i$ *somme des projections sur les sous-espaces coordonnés d'un élément de variété* V^{p-1} *est un invariant des transformations unitaires de* C^p.

Considérons un élément $d\sigma$ de la variété contenue dans une boule $B(M; \eta)$ centrée sur la variété et faisons le calcul de $\sum_1^p d\sigma_i$ par rapport à un repère pour lequel $z_1 = 0$ est la variété linéaire tangente en M à $d\sigma$. Il est aisé de voir qu'on peut choisir η assez petit pour que les projections $d\sigma_k$ de $d\sigma$ satisfassent :

$$|d\sigma_1 - d\sigma| < \varepsilon\, d\sigma \qquad \text{et} \qquad d\sigma_k < \varepsilon\, d\sigma \qquad \text{si } k \neq 1.$$

On a donc $\left| d\sigma - \sum_1^p d\sigma_i \right| < p\,\varepsilon\, d\sigma.$

D'où :

L'aire d'une variété V^{p-1} *est égale à la somme de ses projections sur les sous-espaces coordonnés.*

Nous n'insisterons pas sur ce résultat rencontré ici incidemment : il est vrai ([4]) pour une variété V^q quel que soit $q < p$ et se démontre aisément par le calcul direct.

A partir de (4) on a alors, pour la masse $\mu(D)$,

$$\mu(D) = [(2p-2)\,\omega_{2p}]^{-1}\varphi(D) = 2\pi\omega_{2p}^{-1}(2p-2)^{-1}\sum_1^p \sigma_i(D);$$

$$\mu(D) = \omega_{2p-2}^{-1}\sum_1^p \sigma_i(D) = \omega_{2p-2}^{-1}\,\sigma(D). \tag{6}$$

La démonstration du théorème de Poincaré est ainsi achevée : $\log|f|$ *est une fonction sousharmonique de* R^{2p}; *la distribution de masse positive correspondante est portée par la variété* $f=0$, *avec une densité constante égale à* ω_{2p-2}^{-1} *où* ω_{2p-2} *est l'aire de la sphère unité* $\sum_1^{p-1} |z_i|^2 = 1$.

Remarque. — Considérons une transformation ponctuelle G définie par

$$Z = A + iB = G(z_1, z_2, \ldots, z_p) \tag{7}$$

du domaine $S = E[z_k \subset d_k;\ 1 \leqq k \leqq p]$ de C^p dans $C^1(Z)$; on suppose la transformation G continue. Le second membre de (4) conserve un sens sous des hypothèses assez générales; nous supposerons que la variété $Z=0$, définie dans S par les équations $A=0$, $B=0$ a une mesure $2p-2$ dimensionnelle finie σ; dans ces conditions on a $\sigma_i \leqq \sigma$, et l'intégrale

$$\sigma_i(S) = \int n_i[z_1, \ldots, z_{i-1}; (d_i); z_{i+1}, \ldots, z_p]\, ds_1 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p \tag{8}$$

a un sens.

Considérons (7) comme une application de $C^1(z_i)$ dans $C^1(Z)$ quand on fixe les $p-1$ variables z_j où j est différent de i, et désignons respectivement par n_i^+, n_i^- le nombre des points $z_i^{(n)}$ qui donnent $Z=0$ par l'application avec conservation ou au contraire avec modification de l'orientation du plan $C^1(z_i)$ au voisinage de $z_i^{(n)}$; on aura $n_i = n_i^+ + n_i^-$. D'où : $\sigma_i(S) = \sigma_i^+(S) + \sigma_i^-(S)$.

D'autre part, dans la transformation $z_i \to Z$, on a évidemment

$$n_i^+ - n_i^- = \chi_i[0; z_j; G(f_i)]$$

où le second membre désigne le degré *algébrique* de la représentation de $Z=0$ pour $z_i \subset d_i$, à z_j constants $(j \neq i)$, ou, si l'on préfère, ce nombre calculé par l'intégrale de Kronecker dans le plan $C^1(Z)$ relativement à $Z=0$ et à $G(f_i)$ image de f_i. Finalement, on aura

$$K_i = \int_{z_j \subset d_j} \chi_i[0; z_j; G(f_i)]\, ds_1 \ldots ds_{i-1} ds_{i+1} \ldots ds_p = \sigma_i^+ - \sigma_i^-.$$

([4]) *Voir* WIRTINGER, *Monatshefte für Math. und Physik*, 44, 1936, p. 343.

Ainsi $K = \sum_i K_i = \sum_i (\sigma_i^+ - \sigma_i^-)$ ne dépend que de l'image G(F) de la frontière F de S, et du repère choisi dans C^p.

La propriété s'étend à un domaine D somme de simplexes S : *la quantité* $\sum_i [\sigma_i^+(D) - \sigma_i^-(D)]$ *se calcule à partir de l'image de la frontière de* D, *et du repère* T_0 de C^p.

En supposant pour fixer les idées $K > 0$, la somme $W = \sum_i \sigma_i(D)$ relative à la variété $G = 0$ dans D est minima quand on a $\sum_i \sigma_i^-(D) = 0$, et dans ce cas on a

$$W = \sum_i \sigma_i(D) = \sum_i \sigma_i^+(D) = K;$$

elle n'est fonction que de l'image G(F) *de la frontière de* D *et du repère* T_0. En particulier : *pour une transformation intérieure par rapport à chacune des variables* z_i, *la quantité* W *se calcule à partir de* G(F). *Pour une transformation quelconque* G′ *telle que* $G'(F) = G(F)$ *on a nécessairement*

$$W' = \Sigma \sigma'_i (D) \geqq W.$$

III. — Propriétés de l'intersection d'une variété V^{p-1} avec une boule de rayon variable.

4. Nous considérerons une variété analytique à $p-1$ dimensions complexes V^{p-1} dans C^p à l'intérieur de domaines sphériques; d'après une remarque déjà faite, dans de tels domaines V^{p-1} peut toujours être considérée comme la variété zéro d'une fonction f.

Soit f holomorphe dans la boule $B(M; R_0)$; et soit $B(M; R)$ une boule de rayon variable $R < R_0$. Nous démontrerons :

THÉORÈME 1. — *La moyenne* $\lambda[\log|f|; M; R]$ *sur la sphère* $S(M; R)$ *est une fonction dérivable de* R *pour* $p \geqq 2$; *on a*

$$\sigma(R) = \tau_{2p-2} R^{2p-2} \frac{d\lambda}{d \log R}, \tag{9}$$

où $\sigma(R)$ *désigne l'aire de la variété* $f = 0$ *contenue dans* $B(M; R)$; $\tau_{2p-2} = (2p-2)^{-1} \omega_{2p-2}$ *est la mesure de la boule unité* $\sum_2^p |z_k|^2 \leqq 1$.

Désignons par $\mu_-(R)$ la masse portée par la boule *ouverte* $B(z_k; R)$ dans la distribution μ relative à $\log|f|$, et par $\mu_+(R)$ la masse portée par la même boule *fermée*. On a $\mu_-(R) = \mu_+(R)$ si la frontière $S(z_k; R)$ porte une masse nulle, c'est-à-dire, d'après le théorème de Poincaré, coupe la variété V^{p-1} définie par $f = 0$ suivant un ensemble de points d'aire $2p-2$ dimensionnelle nulle. S'il en est ainsi, on a, d'après (6),

$$\sigma(R) = \omega_{2p-2}\mu(R) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{d}{dR}\log|f(z_k + R\alpha_k)|\,R^{2p-1}\,d\omega_{2p}(\alpha_k),$$

$$\sigma(R) = \frac{\omega_{2p}}{2\pi}R^{2p-2}\frac{d}{d\log R}\lambda[\log|f|;\, z_k;\, R],$$

qui démontre (9).

Reste à établir que la sphère $S(z_k;\, R)$ ne peut porter une aire $2p-2$ dimensionnelle positive de points de V^{p-1}. S'il en était ainsi, il existerait un point P de l'intersection au voisinage duquel V^{p-1} serait représentée par des équations $z'_k - z_k = \psi_k(t_1, \ldots, t_{p-1})$, et où, par suite, l'équation $\Sigma|\psi_k(t_j)|^2 - R^2 = 0$ serait satisfaite pour un ensemble ω de valeurs (t_j) de mesure $2p-2$ dimensionnelle positive. En explicitant $t_j = t'_j + it''_j$, l'équation s'écrit $H(t'_j, t''_j) = 0$, $1 \leqq j \leqq p-1$, où H est une fonction analytique des variables réelles t'_j, t''_j.

Si l'on avait $H \equiv 0$ sur (ω), l'équation $\Sigma|\psi_k(t_j)|^2 - R^2 = 0$ serait une identité; il existerait donc une variété irréductible V_1^{p-1} appartenant à V^{p-1} et portée par $S(z_k;\, R)$; ce qui est impossible, car dans la boule $B(z_k;\, R')$, de rayon R' un peu plus grand que R, V_1^{p-1} serait définie par une équation $g(z_k) = 0$, g ne s'annulant pas sur $S(z_k;\, R')$.

Donc $H = 0$ définit une variété analytique réelle de dimension $2p-3$; l'ensemble d'intersection de V^{p-1} avec $S(z_k;\, R)$ a une mesure $2p-3$ dimensionnelle finie. On a $\mu_-(R) = \mu_+(R)$, ce qui établit aussi l'existence de $\dfrac{d\lambda}{d\log R}$ et l'impossibilité pour la courbe convexe $\lambda = F(\log R)$ d'avoir des sommets pour $p \geqq 2$.

Remarques. — 1° L'exemple $f = z_1 - a = 0$, montre que λ n'a pas en général de dérivée seconde continue pour $p = 2$, ni de dérivée d'ordre q continue pour $q \geqq p$;

2° L'égalité (9) est valable aussi pour $p = 1$, avec $\tau_0 = \frac{1}{2\pi}$;

3° Le théorème de Poincaré a pour conséquence directe que λ est fonction convexe de $u_{2p-2} = -\frac{1}{R^{2p-2}}$. Cette propriété est *moins précise* que la convexité par rapport à $u_0 = \log R$ si $p \geqq 2$. Soient en effet $\lambda = \lambda[R(u)]$, où $\lambda(R)$ et $R(u)$ sont des fonctions croissantes et dérivables : la croissance convexe de λ par rapport à u s'exprime par

$$\lambda' R' > 0, \qquad \lambda''_{u^2} = \lambda''_{R^2}(R'_u)^2 + \lambda'_R R''_{u^2} \geqq 0$$

ou

$$\frac{d}{dR}\log\lambda'_R \geqq \frac{d}{du}(R'_u)^{-1} = \alpha. \tag{10}$$

Le calcul des valeurs α_0 et α_{2p-2} relatives aux deux variables

$$u_0 = \log R, \quad u_{2p-2} = -\frac{1}{R^{2p-2}}$$

donne

$$\alpha_0 = -\frac{1}{R}, \qquad \alpha_{2p-2} = \frac{1-2p}{R}.$$

Par suite, on a $\alpha_0 > \alpha_{2p-2}$ dès que p est au moins égal à 2, ce qui établit d'après (10) que la convexité en $u_0 = \log R$ est la propriété la plus précise des deux.

5. Nous allons étudier la courbe convexe $C(M)$ qui représente la fonction

$$\lambda[\log|f|;\, M;\, R] = F(\log R).$$

Nous supposerons que les boules $B(M;R)$ considérées demeurent portées par un compact D_1 intérieur au domaine D dans lequel f est analytique et vérifie $|f| \leqq A$, D_1 étant d'ailleurs aussi voisin de D que l'on voudra. Dans ces conditions, $\lambda = F(\log R)$ est une fonction définie pour $-\infty < \log R < \log d(M)$, $d(M)$ étant la distance de M à la frontière de D_1; la courbe $C(M)$ est constituée par un arc croissant convexe qui aboutit à droite à un point de coordonnées $u_1 = \log d(M)$, $\lambda_1 \leqq \log A$.

Si $f(M) \neq 0$, on a $\lambda = \log|f(M)|$ pour $-\infty < \log \delta_M$, où δ_M est la distance de M à la variété $f = 0$ dans D_1: la courbe $C(M)$ débute par une demi-droite horizontale $\lambda = \log|f(M) = \text{const.}$, et se prolonge éventuellement par un arc convexe de longueur finie.

Si l'on a $f(M) = 0$, c'est-à-dire si le centre des boules $B(M;R)$ est pris sur la variété V^{p-1}, λ tend vers $-\infty$ en même temps que $\log R$. Nous allons préciser cette branche infinie toujours par des considérations simples; nous supposerons que M est pris pour origine dans C^p, et nous utiliserons le développement de f en série de polynomes homogènes de degrés croissants

$$f(z_k) = \psi_\nu(z_k) + \psi_{\nu+1}(z_k) + \ldots, \qquad 1 \leqq k \leqq p, \tag{11}$$

ψ_ν est le premier de ces polynomes non identiquement nul; ν est l'ordre de multiplicité de M sur V^{p-1}. Comme plus haut nous poserons

$$z_i = \zeta\alpha_i, \qquad \text{avec} \quad \sum_i |\alpha_i|^2 = 1, \qquad 1 \leqq i \leqq p$$

et

$$f(\zeta\alpha_k) = \zeta^\nu[\psi_\nu(\alpha_k) + \zeta\psi_{\nu+1}(\alpha_k) + \ldots] = \zeta^\nu \Phi(\zeta;\, \alpha_k),$$

de sorte que l'on a

$$\lambda[\log|f|;\, M;\, R] = \nu \log R + \lambda[\log|\Phi|;\, 0;\, 1].$$

Le calcul de la moyenne de $\log|\Phi|$ est fait en considérant ζ comme un paramètre; on a vu que cette moyenne ne dépend en fait que de $|\zeta| = R$ et est une fonction non décroissante, convexe, continue de $\log R$; sa valeur pour $\zeta = 0$ est

$$\gamma_M = \lambda[\log|\psi_\nu(\alpha_k)|;\ 0;\ 1].$$

On a donc

$$\lambda[\log|f|;\ M;\ R] = \nu \log R + \gamma_M + \varepsilon(R),$$

où $\varepsilon(R)$ *est une fonction convexe non décroissante de* R *avec* $\lim\limits_{R=0} \varepsilon(R) = 0$.

Nous allons préciser $\varepsilon(R)$ en fonction de quantités liées à la variété $f = 0$.

Étant donné un faisceau (π) de plans analytiques complexes issus d'un point M, nous définirons une mesure $d\pi$ sur le faisceau : nous poserons

$$d\pi = \omega_{2p}^{-1}\, dE,$$

où dE est la mesure (à $2p-1$ dimensions réelles) de l'ensemble E d'intersection de (π) avec $S(M;\ 1)$; chaque plan du faisceau coupe $S(M;\ 1)$ selon un grand cercle; E est engendré par les cercles d'intersection relatifs aux plans de (π). On peut aussi, comme on le voit aisément, poser

$$d\pi = \frac{1}{2}\omega_{2p-1}^{-1}\, dE',$$

où E′ est l'ensemble parcouru par le point m défini sur le cercle d'intersection par la condition qu'une des coordonnées α_k, par exemple α_1, soit réel et positif.

Si $\varphi(\alpha_k)$ est une fonction homogène, c'est-à-dire est définie sur le faisceau des plans issus de M, on aura

$$\int \varphi(\alpha_k)\, d\pi = \omega_{2p}^{-1} \int \varphi(\alpha_k)\, dE.$$

Dans ces conditions désignons par $n(t;\ \alpha_k)$ le nombre de racines en ζ de l'équation

(12) $$\Phi(\zeta;\ \alpha_k) = 0,$$

pour lesquelles $0 < |\zeta| < t$, en fonction du plan d'équations $z_k = \zeta\alpha_k$ défini par les paramètres $\alpha_k\ (1 \leqq k \leqq p)$. On a

(13) $$n(t;\ \alpha_k) = \frac{d}{d\log t}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Phi(te^{i\theta};\ \alpha_k)|\, d\theta - \log|\psi_\nu(\alpha_k)|\right].$$

Prenons les moyennes, le point (α_k) parcourant la sphère unité, on aura

$$n(t) = \int n(t;\ \alpha_k)\, d\pi = \frac{d}{d\log t}\big[\lambda[\log|\Phi|;\ 0;\ 1] - \gamma_M\big].$$

Nous poserons

(14) $$N(M;\ R) = \int_0^R \frac{n(t)}{t}\, dt = \int_0^R \frac{dt}{t} \int n(t;\ \alpha_k)\, d\pi.$$

On obtient

$$\lambda[\log|\Phi|;\, 0;\, 1] = \gamma_M + N(M;\, R).$$

Finalement

$$(15)\qquad \lambda[\log|f|;\, M;\, R] = \nu \log R + \gamma_M + N(M;\, R) = \nu\int_0^R \frac{dt}{t} + \gamma_M + \int_0^R \frac{n(t)}{t}\,dt.$$

Désignons d'autre part par $\sigma_1(t)$ l'aire découpée par $B(M;\, t)$ sur le cône tangent en M d'équation $\psi_\nu = 0$, et par $s(t)$ la mesure (à $2p-1$ dimensions réelles) de l'ensemble E_t balayé sur la sphère $S(M;\, t)$ par le faisceau π_t des plans issus de M qui intersectent la variété en un point autre que M à l'intérieur de la boule $B(M;\, t)$; nous conviendrons que $s(t)$ est calculée comme une projection de la variété faite à partir de M, l'élément projetant étant un plan analytique $z_k = \zeta\alpha_k (1 \leqq k \leqq p)$ issu de M; pour préciser, sur un cercle d'intersection d'un tel plan par $S(M;\, t)$, un point est compté avec la multiplicité $n(t;\, \alpha_k)$. Dans ces conditions, on a

$$(16)\qquad \sigma_1(t) = \tau_{2p-2}t^{2p-2}\frac{d}{d\log t}\lambda[\log|\psi_\nu|;\, 0;\, t] = \nu\tau_{2p-2}t^{2p-2}$$

et

$$(17)\qquad s(t) = \omega_{2p}t^{2p}n(t).$$

D'où, d'après (15), $\sigma(R)$ désignant l'aire de la variété elle-même dans $B(M;\, R)$:

$$(18_a)\qquad \sigma(R) = \tau_{2p-2}R^{2p-2}\frac{d}{d\log R}\lambda[\log|f|;\, M;\, R] = \sigma_1(R) + \frac{s(R)}{2\pi R}$$

$$(18_b)\qquad \lambda[\log|f|;\, M;\, R] = \gamma_M + \int_0^R \frac{\sigma_1(t)}{t^{2p-1}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^R \frac{s(t)}{t^{2p}}\,dt.$$

De ces différentes expressions nous retiendrons surtout (15), qui donne l'expression de la moyenne $\lambda[\log|f|;\, M;\, R]$ dans une boule $B(M;\, R)$ en fonction de la constante γ_M et *de quantités liées à la variété* $f = 0$; $n(t)$ *est dans* (15) *la mesure du faisceau* π_t *qui intersecte la variété dans* $B(M;\, t)$, *chaque plan étant compté pour le nombre de points d'intersection dans* $B(M;\, t)$ différents de M. D'autre part, nous poserons

$$\nu(R) = \frac{d}{d\log R}\lambda[\log|f|;\, R],$$

$\nu(R)$ sera appelé *le degré en moyenne de la variété* $f = 0$ *dans* $B(M;\, R)$; *il a la valeur*

$$\nu(R) = \nu(0) + n(R),$$

où $\nu(0) = \nu$ est la multiplicité de M sur la variété.

Nous énoncerons pour résumer le résultat concernant la variété V^{p-1} :

THÉORÈME 2. — 1° *L'aire* $\sigma(R)$ *découpée sur une variété* V^{p-1} *par une boule* $B(M;\, R)$ *centrée sur elle est toujours au moins égale à l'aire* $\sigma_1(R)$ *découpée sur le* *plan (ou le cône) tangent en* M, *sous la seule réserve que la variété* V^{p-1} *soit définie sur* $B(M\,;R)$.

2° *La différence* $\sigma(R)-\sigma_1(R)$ *est une fonction non décroissante de* R *égale d'après* (18_a) *au quotient par* $2\pi R$ *de l'aire* $s(R)$, *projection de* $\sigma(R)$ *sur la sphère* $S(M\,;R)$ *faite au moyen des plans analytiques complexes issus de* M. *Le degré moyen de la variété* V^{p-1} *dans* $B(M\,;R)$, *soit* $\nu(R)$, *quotient de* $\sigma(R)$ *par la mesure* $\tau_{2p-2}R^{2p-2}$ *de la boule de rayon* R *dans* C^{p-1}, *est égal à l'ordre de multiplicité* $\nu=\nu(0)$ *de* M *sur la variété, augmenté d'une quantité non décroissante* $n(R)$; $n(R)$ *est la mesure du faisceau* (π_R) *des plans analytiques complexes issus de* M *qui intersectent* V^{p-1} *à l'intérieur de* $B(M\,;R)$ *en des points différents de* M, *chaque plan de* (π_R) *étant compté pour le nombre de ces points d'intersection.*

Remarques. — 1° Si l'on considère le continu à $2p-2$ dimensions formé par la variété V^{p-1}, passant par M, l'inégalité $\sigma(R)\geqq\tau_{2p-2}R^{2p-2}$ exclut certaines singularités tels les points coniques pour $p\geqq 2$, singularités que présentent les variétés analytiques réelles dans l'espace R^{2p}.

2° Si l'on considère la mesure $\pi(R)$ du faisceau (π_R) des plans analytiques complexes sécants définis plus haut, on a $\pi(R)\leqq n(R)$; par suite l'intégrale $\int\pi(R)\frac{dR}{R}$ converge quand R tend vers zéro; de plus puisque $n(R)$ est non décroissant, on a nécessairement $\pi(R)\leqq n(R)=o\left(\frac{1}{\log\frac{1}{R}}\right)$.

3° Si, pour une boule $B(M, R_0)$, l'aire $\sigma(R_0)$ n'est pas plus grande que l'aire $\sigma_1(R_0)$ découpée sur le cône tangent, alors on a $\sigma(R)=\sigma_1(R)$ pour $0<R\leqq R_0$. Dans ce cas la *variété se décompose en une variété formée par le cône* $\psi_\nu=0$, *et une autre variété qui n'a pas de point dans* $B(M\,;R)$. En effet s'il existait un point $P[\zeta_0\,;\alpha_j^0]$ sur la variété définie par $\Phi(\zeta\,;\alpha_j)=0$, pour lequel $|\zeta|<R_0$, il existerait une fonction implicite $\zeta=h(\alpha_j)$ définie au voisinage des valeurs considérées (α_j^0), ce qui entraîne $n(t\,;\alpha_j)\geqq 1$ pour $R_0>t\geqq R'_0>|\zeta_0|$, (α_j) appartenant à un voisinage de (α_j^0) dont la mesure sur la sphère unité des (α_j) est positive. On aura donc $n(t)>0$ dès que t surpassera R'_0, contrairement à l'hypothèse. Donc $\varphi(\zeta\,;\alpha_j)$ ne s'annule pas dans $B(M\,;R_0)$, et la variété est définie dans $B(M\,;R_0)$ par $\psi_\nu=0$. *On a l'identité de la division* $f\equiv\psi_\nu f_1$, $f=0$ définissant la variété dans $B(M\,;R_0)$.

IV. — Application aux recouvrements simpliciaux.

6. Nous désignerons dans ce paragraphe par T_ρ une division de l'espace en simplexes égaux, obtenue en formant une grille composée de tous les hyperplans de R^{2p} (à $2p-1$ dimensions réelles) :

$$x_k=\alpha_k+t_k\rho \qquad \text{ou} \qquad y_j=\beta_j+t'_j\rho, \tag{19}$$

où t_k, t'_j, $(1 \leq k \leq p, 1 \leq j \leq p)$ prennent toutes les valeurs entières positives et négatives; le point de coordonnées (α_k, β_j) est l'origine de T_ρ; le nombre positif ρ est le pas de la grille.

Un simplexe de T_ρ est le domaine fermé obtenu en faisant varier t_k, t', chacun d'eux parcourant l'intervalle de deux entiers consécutifs.

Étant donné un simplexe a_s, nous serons amenés à lui associer tous ceux de T_ρ qui ont avec lui un point commun au moins: ils seront dits contigus à a_s et désignés par $a'_{s.j}$. L'ensemble

$$A_s = a_s + \sum_j a'_s.$$

constitue l'élément d'un recouvrement simplicial $T_{3\rho}$ de R^{2p}; il est clair que si l'on excepte les points situés sur les hyperplans (19) de la grille T_ρ, le degré du recouvrement $T_{3\rho}$ est au plus égal à 3^{2p}.

Nous dirons qu'une variété analytique complexe V^{p-1} est définie sur un domaine de T_ρ si elle est définie sur un certain nombre de simplexes *fermés* de T_ρ, donc dans un domaine ouvert un peu plus grand contenant ceux-ci. Un simplexe de T_ρ est défini par $z_i \subset d_i$, où d_i est un carré; une variété V^{p-1} donc a_s peut toujours être considérée comme définie globalement comme variété zéro dans a_s et même dans un domaine de même forme, un peu plus grand.

Nous dirons que la grille T_ρ est normale pour une variété V^{p-1} si aucun des hyperplans (19) ne contient une variété $z_i =$ const. appartenant à V^{p-1}; il revient au même de dire que T_ρ est normale par rapport à la distribution μ associée à $\log |f|$, f étant une fonction analytique qui ne s'annule que sur V^{p-1}.

Nous démontrerons :

Proposition 2. — *Soit V^{p-1} une variété analytique complexe définie localement sur un domaine simplicial* E *de* T_ρ, *la grille* T_ρ *étant supposée normale par rapport à* V^{p-1}. *Soit* N *le nombre des simplexes* a_s *de* T_ρ *qui possèdent les propriétés suivantes :*

a. a_s *contient au moins un point de* V^{p-1} ;

b. $A_s = a_s + \sum_j a'_{s.j}$ *formé par la réunion de* a_s *et de ses contigus appartient encore à* E.

Alors, on a

$$N \leq \frac{3^{2p}\sigma}{\tau_{2p-2}\rho^{2p-2}}, \tag{20}$$

où σ *est l'aire de* V^{p-1} *contenue dans* $E' = \sum_s A_s \subset E$, E' *étant l'ensemble des* a_s *satisfaisant à a et à b augmenté de leurs contigus.*

En effet, si A_s est construit à partir d'un élément a_s satisfaisant a et b, on a $A_s \subset E$, d'où $\Sigma A_s = E' \subset E$. Soit σ_s l'aire de la variété dans A_s; il existe un point M_s de V^{p-1} dans a_s d'après a, a_s étant l'élément central de A_s. Considérons la boule $B(M_s, \rho)$; elle est contenue dans A_s. On a donc, d'après le théorème 1,

$$\sigma_s \geqq \tau_{2p-2}\rho^{2p-2},$$
$$\sum_s \sigma_s \geqq N\tau_{2p-2}\rho^{2p-2}.$$

Par ailleurs, sauf sur un ensemble d'aire nulle sur V^{p-1} formé de points des hyperplans (19) de T_ρ, le degré du recouvrement $T_{3\rho}$ constitué par les A_s est au plus 3^{2p}. On a donc, si σ désigne l'aire de V^{p-1} dans $E' = \sum_s A_s$,

$$3^{2p}\sigma \geqq \sum_s \sigma_s \geqq N\tau_{2p-2}\rho^{2p-2},$$

qui démontre (20).

De là nous déduirons :

Théorème 3. — *Soit une variété analytique complexe V^{p-1} définie localement sur un domaine D fermé, d'aire totale σ sur D; soit η_ρ un ensemble de points de D qui possèdent les propriétés suivantes :*

a. ils sont à distance ρ au plus ($\rho > 0$) de la variété V^{p-1};

b. ils sont points intérieurs de D, à distance au moins $\delta = 3\rho\sqrt{2p}$ de la frontière.

Alors η_ρ peut être recouvert par N boules égales B_i, de diamètre δ; la mesure $2p-2$ dimensionnelle du recouvrement $R = \sum_i B_i$, soit

$$A_{2p-2}(R) = \tau_{2p-2}N\left(\frac{\delta}{2}\right)^{2p-2},$$

étant bornée par $K_p\sigma$.

On peut également obtenir un recouvrement R' de η_ρ par des boules égales B'_i centrées sur V^{p-1}, de rayon $2\rho\sqrt{2p}$ pour lequel on a

$$A_{2p-2}(R') = \tau_{2p-2}N(2\rho\sqrt{2p})^{2p-2} \leqq K'_p\sigma.$$

Les coefficients K_p, K'_p ne dépendent que de p.

En effet, fixons l'origine (α_k, β_j) de la grille T_ρ donnée par (19) de manière qu'elle soit normale par rapport à la variété V^{p-1}. Soit E_1 l'ensemble des a_s de T_ρ qui satisfont aux conditions : 1° a_s contient un point au moins de la variété V^{p-1}; 2° $A_s = a_s + \sum_j a'_{s,j}$ formé par la réunion de a_s et de ses contigus contient un point au moins de η_ρ.

Nous poserons $E' = \sum_s A_s$, E′ étant ainsi la réunion de tous les éléments de la grille $T_{3\rho}$ construits autour d'un a_s appartenant à E_1. On a $E_1 \subset E' \subset D$; en effet, un point de E′ est à une distance au plus $\delta = 3\rho\sqrt{2p}$ de l'ensemble η_ρ d'après 1°, donc appartient à D d'après la condition b de l'énoncé.

D'autre part on a $\eta_\rho \subset E'$ puisque, si M appartient à η_ρ, la boule $B(M;\rho)$ contient un point de V^{p-1}; le simplexe a_s de T_ρ qui porte ce dernier satisfait évidemment aux conditions 1° et 2°; M appartient donc sinon toujours à a_s, du moins nécessairement à l'élément A_s associé. Finalement on a établi : $\eta_\rho \subset E' \subset D$.

Il suffit de considérer maintenant la variété V^{p-1} définie sur le domaine simplicial E de T_ρ qu'occupe E′; les éléments a_s de E_1 satisfont aux conditions de la Proposition 3 par rapport à E; soit N leur nombre, on a

$$N \leqq \frac{3^{2p}\sigma(E')}{\tau_{2p-2}\,\rho^{2p-2}}, \tag{21}$$

où $\sigma(E') < \sigma$ est l'aire de la variété V^{p-1} sur $E' = \sum_s A_s$.

Soit B_s la boule circonscrite à A_s; elle est de diamètre $\delta = 3\rho\sqrt{2p}$. On a donc, d'après la majoration (21),

$$A^{2p-2}(R) = \tau_{2p-2} N \left(\frac{\delta}{2}\right)^{2p-2} \leqq K_p \sigma(E') \leqq K_p \sigma,$$

avec $K_p = p^{p-1}\, 3^{4p-2}\, 2^{1-p}$.

On obtient le recouvrement R′ de l'énoncé en choisissant dans l'élément central a_s de $A_s \subset E'$ un point M_s et prenant la boule $B'_s = B'(M_s, 2\rho\sqrt{2p})$ comme élément de recouvrement; R′ recouvre E′, donc aussi η_ρ et l'on a

$$A^{2p-2}(R') = \tau_{2p-2} N (2\rho\sqrt{2p})^{2p-2} \leqq K'_p \sigma(E') \leqq K'_p \sigma,$$

avec $K'_p = p^{p-1}\, 3^{2p}\, 2^{3p-3}$ calculé à partir de (20).

Le théorème 3 est établi; on pourra d'une façon plus précise remplacer σ par $\sigma(E')$; on pourra également ne considérer pour le calcul de σ que les points de la varité V^{p-1} à distance au plus δ de l'ensemble η_ρ étudié.

V. — Propriétés relatives aux fonctions plurisousharmoniques et aux familles de fonctions analytiques.

7. Rappelons qu'une fonction V définie dans un domaine D de C^p y est dite plurisousharmonique si elle satisfait aux conditions suivantes (A) :

a. Elle est à valeurs réelles prises sur la droite demi-fermée $-\infty \leqq V < +\infty$; on n'a pas $V \equiv -\infty$ dans D.

b. Elle est bornée supérieurement sur tout compact.

c. Si l'on considère sur un plan P^1 analytique à une dimension complexe un domaine d où elle est définie, elle est sousharmonique ou est identique à $-\infty$ dans d.

Nous avons démontré ([5]) que les propriétés (A) entraînaient la semi-continuité supérieure de V.

Dans ces conditions la démonstration faite au début du paragraphe II s'applique si l'on remplace $\log|f|$, par une fonction plurisousharmonique V, et l'on obtient :

Proposition 1 *bis*. — *Si* V *est une fonction plurisousharmonique dans la boule* B(M ; R), *la moyenne* $\lambda[V; M; R]$ *est une fonction convexe, non décroissante, continue de* $u_0 = \log R$.

L'inégalité $V(M) \leqq \lambda[V; M; R]$ donne une démonstration du résultat connu ([6]) : *une fonction plurisousharmonique dans* C^p *est une fonction sousharmonique dans* R^{2p}. Mais, suivant une remarque faite au paragraphe III, n° 4, la convexité par rapport à $u_0 = \log R$ est une propriété plus précise pour la moyenne λ que la convexité par rapport à $u_{2p-2} = -\frac{1}{R^{2p-2}}$; celle-ci est vraie d'une fonction sousharmonique quelconque dans R^{2p}; il en résulte que *la distribution* μ *relative à une fonction plurisousharmonique* V *qu'on décompose dans un domaine borné* D *sous la forme*

$$V(M) = H(M) - \int \frac{d\mu(Q)}{MQ^{2p-2}} = H(M) - U^{\mu}(M), \tag{21}$$

n'est pas une distribution positive quelconque sur D ; (21) est, rappelons-le, la décomposition de Riesz de la fonction sousharmonique V(M) dans R^{2p} sous la forme d'une fonction harmonique dans D (mais non plurisousharmonique en général) diminuée du potentiel $U^{\mu}(M)$ relatif à l'espace R^{2p}.

Suivant une notation utilisée plus haut, nous désignerons par $\mu_-(R)$ la masse portée par la boule *ouverte* B(M, R). On a alors

$$\mu_-(R) = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \left(\frac{d\lambda}{d\log R}\right)_- = \left(\frac{d\lambda}{du_{2p-2}}\right)_-.$$

La même égalité subsiste entre μ_+ masse de la boule compacte et la dérivée à droite de λ ; nous écrirons simplement :

$$\mu(R) = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \frac{d\lambda}{d\log R} = \frac{d\lambda}{du_{2p-2}}, \tag{22}$$

étant entendu qu'on prendra μ_- et dérivée à gauche, ou μ_+ et dérivée à droite si S(M ; R) porte une masse $\mu_+ - \mu_-$ non nulle.

([5]) *Les fonctions plurisousharmoniques* (*Ann. E. N. S.*, 62, 1945, p. 308, théorème 1).

([6]) *Ibid.*, p. 316, théorème 2.

8. Avant de tirer les conséquences de la Proposition 1 *bis*, rappelons quelques propriétés classiques des fonctions sousharmoniques.

Une famille de fonctions sousharmoniques sera dite famille F dans un domaine D si elle possède les deux propriétés :

a. il existe sur tout compact K de D une borne supérieure finie $A(F, K)$ pour les fonctions de la famille;

b. il n'existe pas de fonction limite dans la famille qui soit identiquement $-\infty$.

Il est bien connu que si *a* était réalisé sans que *b* le soit, une suite V_n appartenant à la famille convergerait uniformément vers $-\infty$ dans D.

Pour une famille F il est immédiat d'après la décomposition de F. Riesz que la masse $\mu(V; K)$ relative à une fonction V de la famille et portée par un compact $K \subset D$ a une borne $\beta(F, K)$ finie.

Rappelons encore : pour une famille F de fonctions sousharmoniques dans D, la moyenne $\lambda[V; M; R]$ est une fonction également continue de M et de R, pour $R \geqq \delta > 0$, et $B(M; R)$ portée par un compact $\Delta \subset D$. Plus précisément on a

$$(23)\qquad \frac{d\lambda}{du_{2p-2}} = (2p-2)^{-1} R^{2p-2} \frac{d\lambda}{d \log R} \leqq \beta(F, \Delta).$$

Faisons intervenir maintenant la proposition 1 *bis* spéciale aux fonctions plurisousharmoniques : $\dfrac{d\lambda}{d\log R}$ est une fonction non décroissante; (22) permet d'énoncer :

THÉORÈME 3. — *Pour une famille F de fonctions plurisousharmoniques dans* D *et pour toute boule* $B(M; R)$ *portée par un compact* $\Delta \subset D$, *la dérivée (à gauche ou à droite)* $\dfrac{d\lambda}{d\log R}$ *est bornée. On a*

$$(24)\qquad \frac{d\lambda}{d\log R} = (2p-2)\frac{\mu(M; R)}{R^{2p-2}} \leqq (2p-2)\frac{\beta(F, D_1)}{\delta^{2p-2}} = \omega(F, \Delta).$$

D_1 *désigne un domaine compact intermédiaire* $\Delta \subset D_1 \subset D$ et $\delta > 0$ *la plus courte distance d'un point de* Δ *à la frontière de* D_1. Nous poserons encore :

$$(25)\qquad \nu(M; R) = \frac{d}{d\log R}\lambda[V; M; R].$$

On a donc $\nu(M; R) \leqq \omega(F, \Delta)$ pour $B(M; R) \subset \Delta$ et $V \in F$.

De plus, $\nu(M; R)$ est fonction non décroissante de R.

COROLLAIRES. — 1° *Une fonction plurisousharmonique ne possède pas de masse ponctuelle.*

En effet, d'après (24), on a $\mu(M; R) \leqq \omega(V; \Delta) R^{2p-2}(2p-2)^{-1}$, donc $\mu(M; R)$ tends vers zéro avec R, et même est de l'ordre de R^{2p-2}.

2° *Si une fonction* V *est plurisousharmonique dans* D, *ou bien elle a une masse nulle (auquel cas elle est la partie réelle d'une fonction analytique de variables complexes), ou bien il existe un point* $M_0 \subset D$, *un nombre* $R_0 > 0$ *et un nombre* $a > 0$ *tel que toute boule* $B(M_0; R) \subset D$ *et de rayon* $R > R_0$ *contienne une masse*

$$\mu(M_0; R) \geqq a R^{2p-2}(2p-2)^{-1}.$$

En effet, il existe au moins une boule $B(M_0; R_0)$ avec $\mu(M_0; R_0) > 0$, et $\nu(M_0; R_0) = a > 0$; on a alors pour $R > R_0 : \nu(M_0; R) \geqq \nu(M_0; R_0)$.

En particulier si V est défini dans tout l'espace C^p et n'y est pas la partie réelle d'une fonction entière, on a, à partir d'une certaine valeur de R,

$$\mu(O; R) \geqq a' R^{2p-2} \qquad (a' > 0). \tag{26}$$

3° *Si l'on considère une fonction plurisousharmonique* V, *la distribution associée* μ, *et la restriction* $\bar{\mu}$ *de* μ *a un compact* K de C^p, *alors le potentiel* $U^{\bar{\mu}}$ *n'est jamais une fonction plurisousharmonique hors de* K.

En effet $U^{\bar{\mu}}$ est défini dans tout l'espace et y est de masse totale bornée; $\bar{\mu}$ s'évanouit donc identiquement. Nous n'insisterons pas sur cette remarque qu'on pourrait notablement préciser; elle montre que le potentiel de Poincaré relatif à un sous-ensemble fermé d'une variété analytique V^{p-1} n'est jamais une fonction plurisousharmonique.

9. Le théorème 3 permet de préciser les propriétés d'une famille F de fonctions sousharmoniques quand cette famille est formée de fonctions *plurisousharmoniques*; $\lambda[V; M; R]$ est alors une fonction également continue de M et de $u_0 = \log R$ *pour toutes valeurs de* R, $B(M; R)$ appartenant à un compact $\Delta \subset D$.

Nous démontrerons la propriété suivante d'une telle famille F :

Théorème 4. — *Soit dans* D *une famille* F *de fonctions plurisousharmoniques et deux boules* $B(M; R)$, $B(M_0; R_0)$, *avec* $R \leqq R_0$, *portées par un compact* $\Delta \subset D$ *tel qu'on passe par déplacement de* $B(M_0; R_0)$ *à* $B(M; R_0)$ *à l'intérieur de* Δ. *Alors on a*

$$\lambda[V; M; R] - \lambda[V; M_0; R_0] = \xi\left[k_1 + \frac{2p-2}{R_0^{2p-2}}\beta\right].MM_0 + \theta'\omega(\log R - \log R_0), \tag{27}$$

où k_1, β, ω *sont des constantes positives ne dépendant que de* F *et de* Δ, *et* ξ *et sont dans les intervalles* $-1 \leqq \xi \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 1$.

Pour établir (27), partons de la décomposition de F. Riesz :

$$V(M) = H(M) - U^{\mu}(M)$$

faite dans un domaine fermé D_1 intermédiaire : $\Delta \subset D_1 \subset D$; H(M) est harmonique dans D_1; $U^\mu(M)=\int d\mu(Q)MQ^{2p-2}$ est un potentiel de masse portée par D_1. Pour $V \in F$, les fonctions $H(M)$ sont également continues dans Δ. On a donc :

$$(28)\qquad |\lambda[H;M;R]-\lambda[H;M_0;R_0]|=|H(M)-H(M_0)|\leqq k_1(F,\Delta).MM_0.$$

D'autre part le calcul de $\lambda[U^\mu;M;R]$ revient à subsistuer dans U^μ au noyau $h(M,Q)=MQ^{2-2p}$, le noyau continu $h_R(M,Q)$ qui vaut $h(M,Q)$ si $MQ\geqq R$ et vaut R^{2-2p} si $MQ\leqq R$. On a donc

$$(29)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}}h_R(M,Q)\right|\leqq\frac{2p-2}{R^{2p-2}}.$$

D'où

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}}\lambda[U^\mu;M;R]\right|\leqq\frac{2p-2}{R^{2p-2}}\beta(F,D_1);$$

$\beta(F,D_1)$ est une borne supérieure de la masse portée par $D_1\subset D$ pour $V\in F$. On a donc

$$(30)\qquad |\lambda[V;M;R_0]-\lambda[V;M_0;R_0]|\leqq k_1(F,\Delta).MM_0+\frac{2p-2}{R^{2p-2}}\beta(F,D_1).MM_0$$

et d'autre part, d'après (24),

$$(31)\qquad 0\leqq\nu(M_0;R)=\frac{d}{d\log R}\lambda[V;M_0;R]\leqq\nu(M_0;R_0)\leqq\omega(F,\Delta).$$

Finalement (27) est établi comme conséquence de (30) et (31).

Pour qu'une famille de fonctions plurisousharmoniques soit une famille F dans D, il faut et il suffit qu'elle soit bornée sur tout compact de D et qu'on ait $\lambda[V;M_0;R_0]\geqq a$ pour une boule $B(M_0;R_0)$ donnée dans D. Comme conséquence de (27) nous énoncerons :

Corollaire. — *Soit dans* D *une famille* F *de fonctions plurisousharmoniques,* Δ *un compact contenu dans* D : *il existe deux constantes* a, ω, *dépendant de* Δ *et de* F, *mais non de* $V\in F$, *telles que pour toute boule* $B(M,R)\subset\Delta$, *on ait*

$$(32)\qquad \lambda[V;M;R]\geqq a+\omega\log R.$$

Soit en effet D_1 un domaine fermé intermédiaire $\Delta\subset D_1\subset D$, toute boule de rayon $\delta>0$, centrée sur Δ étant portée par D_1. Pour $R>\delta$, et $B(M;R)\subset\Delta$, $\lambda[V;M;R]$ a une borne inférieure finie, comme il résulte de (30) et d'une condition $\lambda[V;M_0;\delta]\geqq a$ imposée en M_0 pour définir F. D'autre part, pour $R\leqq\delta$, (32) est vérifiée d'après le théorème 4, ce qui établit une inégalité de la forme (32) dans tous les cas.

En particulier (32) montre que si l'on a $V(M)=-\infty$, la moyenne $\lambda[V;M;R]$ est, quand R tend vers zéro, de l'ordre de log R comme dans le cas $V=\log|f|$, et f analytique. On remarquera aussi le caractère d'uniformité, le coefficient de log R étant borné par ω pour toute fonction $V \in F$ et tout point $M \in \Delta$.

10. *Application aux fonctions et aux variétés analytiques.* — Les résultats précédents s'appliquent aux familles de fonctions analytiques f dans un domaine D : on associera à f deux nombres, a_f, b_f, $a_f > 0$, de manière que les fonctions $V = a_f \log|f| + b_f$ forment une famille ayant le caractère F dans D.

Définition. — *Nous appellerons degré moyen d'une variété analytique complexe* V^{p-1} *dans une boule* $B(M; R)$ *la quantité*

$$\nu(M; R) = \frac{\sigma(R)}{\tau_{2p-2} R^{2p-2}} = \frac{d}{d \log R} \lambda[\log|f|; M; R], \tag{33}$$

où $\sigma(R)$ *est l'aire* ($2p-2$ *dimensionnelle*) *de la variété dans* $B(M; R)$.

La définition résulte de l'étude locale faite au parapraphe III, n° 5; elle suppose que la variété est définie sur la boule $B(M; R)$ *fermée*, c'est-à-dire dans une boule ouverte $B(M; R')$ un peu plus grande; dans cette dernière la variété peut être définie en annulant une fonction analytique f; d'où la seconde expression (33).

Le théorème 4 permet d'énoncer :

Théorème 5. — *Soit* Φ *une famille de fonctions analytiques* f *dans* D; *si* a_f, b_f *sont associés à* $f \in \Phi$, *avec* $a_f > 0$, *de manière que la famille des fonctions*

$$V = a_f \log|f| + b_f$$

soit bornée supérieurement sur tout compact de D *et n'ait pas la fonction limite* $-\infty$, *alors :*

1° *Pour toute boule* $B(M; R)$ *sur un compact* $\Delta \subset D$, $a_f \nu(M; R)$ *défini par* (33) *est borné supérieurement; il en est de même des quantités* $a_f \sigma(R) R^{2-2p}$ *relatives aux variétés* $f = 0$;

2° *En particulier les quantités* $a_f \nu(M)$, *où* $\nu(M) = \nu(M; 0)$ *est la multiplicité de* M *sur la variété* $f = 0$, *sont bornées supérieurement pour* $M \in \Delta$, $f \in \Phi$;

3° *Il existe deux nombres* a, ω *qui ne dépendent que de* Φ *et de* Δ, *tels que,* $B(M; \rho)$ *étant portée par* Δ, *on ait*

$$|f(M)| \geqq [e^{a-b_f} \rho^{\omega}]^{\frac{1}{a_f}} \tag{34}$$

en tout point M *dont la distance à la variété* $f = 0$ *est au moins* $\rho > 0$, *et pour toute fonction* $f \in \Phi$.

Pour démontrer 3° on applique à $V = a_f \log|f| + b_f$ le Corollaire du théorème 4 et l'inégalité (32); on a

$$V(M) = \lambda[V; M; \rho] \geqq a + \omega \log \rho.$$

On obtient ainsi (34) : on remarquera que la constante a dépend du comportement de la famille dans l'ensemble du domaine D ainsi que du compact Δ, tandis que le coefficient ω de $\log\rho$ peut être remplacé par $\nu(M, R_0)$, R_0 étant un nombre fixe supérieur à ρ, sous la seule réserve que $B(M; R_0)$ soit porté par Δ.

Considérons le cas particulier où l'on peut choisir $a_f = 1$, $b_f = 0$:

Corollaire. — *Étant donnée une famille Φ de fonctions analytiques f bornées en module dans* D *et n'ayant pas la fonction limite nulle :*

1° *Le degré moyen $\nu(M; R)$ de la variété $f = 0$ est borné supérieurement pour $B(M; R)$ portée par un compact $\Delta \subset D$ et $f \in \Phi$; de même la quantité $\sigma(R)R^{2-2p}$, où $\sigma(R)$ est l'aire de la variété dans $B(M; R)$.*

2° *En particulier $\nu(M; 0)$ ordre de M sur la variété $f = 0$ est borné dans Δ.*

3° *Il existe deux nombres A, ω positifs, ne dépendant que de Δ et de Φ tels qu'on ait*

$$|f(M)| \geqq A\rho^{\omega} \tag{35}$$

lorsque $B(M; \rho)$ est portée par Δ et ne contient pas de point de la variété $f = 0$; ω est une borne supérieure du degré moyen $\nu(M; R_0)$ de la variété $f = 0$, R_0 étant un nombre fixe supérieur à ρ, tel que les boules $B(M; R_0)$ considérées soient portées par Δ.

11. L'intérêt de la notion de degré moyen d'une variété V^{p-1} dans une boule est marqué par le résultat suivant :

Théorème 6. — *Si une suite f_n de fonctions holomorphes converge uniformément dans* D *vers une fonction f non identiquement nulle, alors pour toute boule $B(M; R)$ dans* D, *les degrés moyens $\nu_n(M; R)$ relatifs aux variétés $f_n = 0$ convergent vers $\nu(M; R)$ degré moyen relatif à la variété $f = 0$; la convergence est uniforme en* M *et en* R, *pour $R \geqq a > 0$, et $B(M; R)$ portée par un compact intérieur à* D.

La propriété énoncée par le théorème 6 distingue en effet le degré moyen $\nu(M; R)$ du degré local $\nu(M; 0)$, ordre de multiplicité de M sur la variété. Pour celui-ci on a seulement

$$\nu(M; 0) \geqq \lim_n \sup \nu_n(M; 0).$$

Pour établir le théorème 6 remarquons que les fonctions $\log|f_n|$ forment une famille F. Il en est de même des fonctions

$$\log|g_n^M(Q)| = \log|f_n(Q - M)|,$$

où M appartient à un compact δ intérieur à D. Les fonctions

$$\psi_n^M(\log R) = \lambda[\log|f_n|; M; R] = \lambda[\log|g_n^M|; O; R]$$

sont également continues, convexes, croissantes de $\log R$ et sont définies pour $0 \leq R < b$, b étant choisi de manière que les boules $B(M; R)$ considérées, pour $M \in \delta$, appartiennent à un compact $\Delta \subset D$.

Quand $f_n \to f$, $\lambda[\log|f_n|; M; R] \to \lambda[\log|f|; M; R]$; il s'agit de fonctions également continues pour $M \in \delta$ et R appartenant à un intervalle $0 < a \leq R \leq b$; la convergence est uniforme. Pour établir la même propriété en ce qui concerne les dérivées $\nu_n(M; R)$ par rapport à $\log R$, il suffit de montrer leur égale continuité dans les mêmes conditions. Or si la famille des dérivées (où n, et $M \in \delta$ sont des paramètres) des fonctions $\psi_n^M(\log R)$ n'était pas formée de fonctions croissantes également continues, il existerait trois suites n_j, M_j, R_j, avec $n_j \to +\infty$, $M_j \to M_0$, $R_j \to R_0$ et $\gamma_j(Q) = f_n(Q - M_j) \to \gamma_0(Q)$ holomorphe sans que $\frac{d}{d\log R}\lambda[\log|\gamma_j|; O; R_j] = \frac{d\lambda_j}{d\log R}$ tende vers la dérivée relative à γ_0, R_0. Or on a

$$\left(\frac{d\lambda_0}{d\log R}\right)_- \leq \liminf\left(\frac{d\lambda_j}{d\log R}\right)_- \leq \limsup_j\left(\frac{d\lambda_j}{d\log R}\right)_+ \leq \left(\frac{d\lambda_0}{d\log R}\right)_+$$

et l'égalité deux quantités extrêmes a été établie au théorème 1. Le théorème 6 est ainsi démontré. Ainsi qu'on le voit, il repose essentiellement sur le fait qu'une sphère $S(M; R)$ ne porte pas une variété V^{p-1}; la notion de degré moyen d'une variété s'étendrait sans peine en utilisant au lieu de boules, des domaines simplement connexes semblables à un domaine de base dont la frontière F possède la même propriété; il suffit de prendre F pseudo-convexe *au sens strict* pour l'un des deux domaines limitrophes.

12. *Cas des polynomes.* — Dans les cas des polynomes on peut préciser l'égalité (27) du théorème 4. Pour $p = 1$ on établit facilement à l'aide de la décomposition $\log|P_n| = \log|A_n| + \sum_1^n \log|z - a_i|$, qu'on a, n désignant le degré du polynome

$$\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|; M; R\right] - \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|; M'; R'\right] = \xi\frac{MM'}{R_1} + \theta(\log R - \log R'), \tag{36}$$

avec $R_1 = \max(R, R')$, ξ et θ définis comme dans (27).

Pour $p \geq 2$ la décomposition de $\log|P_n|$ sous la même forme n'est plus possible et le potentiel de Poincaré étendu à la variété algébrique $P_n = 0$, diverge. Nous montrerons cependant que (36) subsiste avec une légère modification.

Posons

$$z_k = \zeta\alpha_k = \zeta'^{-1}\alpha_k.$$

On a

$$P_n(z_k) = \zeta^n\psi_n(\alpha_k) + \zeta^{n-1}\psi_{n-1}(\alpha_k) = \ldots = \zeta^n\Psi(\zeta'; \alpha_k). \tag{37}$$

En procédant comme au paragraphe III, n° 5, pour l'étude de la branche infinie de la courbe convexe $\lambda = F(\log R)$, on a

$$(38)\qquad \lambda[\log|P_n|;\, M;\, R] = n\log R + \lambda[\log|\Psi|;\, o;\, 1] = n\log R + \gamma_\infty + N_1(M;\, R),$$

avec

$$(39_a)\qquad N_1(M;\, R) = \int_0^{\frac{1}{R}} n_1(t)\frac{dt}{t} = \int_0^{\frac{1}{R}} \frac{dt}{t}\,\omega_{2p}^{-1}\int n_1(t;\, \alpha_k)\, d\omega_{2p}(\alpha_k),$$

et $\gamma_\infty = \lambda[\log|\psi_n|;\, o;\, 1]$; $n_1(t;\, \alpha_k)$ est le nombre de racines de $\Psi = o$ pour lesquelles $|\zeta'| = |\zeta^{-1}| \leqq t$, en fonction des α_k. On a encore

$$(39_b)\qquad \nu(M;\, R) = n - n_1(t) = \frac{d\lambda}{d\log R}.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME 7. — *Pour une variété algébrique* $P_n = o$, *le degré moyen* $\nu(M;\, R)$ *varie en croissant du nombre entier* $\nu(M;\, o)$, *multiplicité de* M *sur la variété, jusqu'au degré* n *de celle-ci. L'aire* $\sigma(R)$ *de la variété dans une boule* $B(M;\, R)$ *satisfait à* $\sigma(R) \leqq n\tau_{2p-2}\, R^{2p-2}$; *l'égalité pour une seule boule entraîne que* P_n *soit un polynome homogène.*

La démonstration se fait à partir des égalités (39) comme au théorème 2.

Dans le but d'étendre (36) aux polynomes de p variables, nous démontrerons maintenant :

PROPOSITION 3. — *On a uniformément sur tout compact*

$$\log|P_n(M)| = \lim_{R=\infty}[n\log R + \gamma_\infty - V_R(M)],$$

où $V_R(M) = \int d\mu(Q)\, g(M, Q)$ *est le potentiel relatif à la fonction de Green de la boule* $B(O;R)$ *et à la distribution de Poincaré restreinte à l'intersection de la variété* $P_n = o$ *avec la boule* $B(O;\, R)$.

On a, en effet,

$$(40)\qquad \log|P_n(M)| = H_R(M) - V_R(M),$$

où

$$H_R(M) = \omega_{2p}^{-1}\int \log|P_n(Q)|\frac{R^2 - r^2}{R^2}\left(\frac{R}{MQ}\right)^{2p} d\omega_{2p}(Q)$$

est la fonction harmonique dans $B(O;\, R)$, qui coïncide avec $\log|P_n|$ sur la frontière de la boule; on a posé $r = OM$; pour passer à la limite, posons encore $r = \beta R$, $\widehat{OM, OQ} = u$; on a

$$H_R(M) = n\log R + (1-\beta^2)\,\omega_{2p}^{-1}\int \log|\Psi(\zeta';\, \alpha_k)|\,(1+\beta^2 - 2\beta\cos u)^{-p}\, d\omega_{2p}(Q).$$

La quantité à intégrer est maintenant bornée supérieurement; on peut passer à la limite pour $R \to \infty$, $\beta \to 0$ et écrire

$$H_R(M) = n \log R + \gamma_\infty + \varepsilon(M; R), \tag{41}$$

où $\varepsilon(M; R)$ est une fonction harmonique de M qui tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{R}$ sur tout compact, ce qui établit la Proposition 3.

L'étude de $\lambda[\log|P_n|; M; \rho]$ est ainsi ramenée à celle de $\lambda[V_R; M; \rho]$. En supposant $OM \leqq r < R - \rho$, et reprenant la notation adoptée plus haut où $h_\rho(M, Q)$, $g_\rho(M, Q)$ désignent les noyaux obtenus à partir de

$$h(M, Q) = MQ^{2-2p}$$

et de $g(M, Q)$ par médiation, Q étant fixe, le premier point parcourant la sphère $S(M; \rho)$, on a

$$g_\rho(M, Q) = h_\rho(M, Q) - R^{2p-2}(OQ.Q'M)^{2-2p};$$

Q' est le conjugué de Q par rapport à $B(O; R)$. On en déduit

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} g_\rho(M, Q)\right| \leqq (2p-2)\left[\min(\rho^{1-2p}, MQ^{1-2p}) + R^{2p-2} OQ^{2-2p} Q'M^{1-2p}\right],$$

En posant $t = MQ < R + r = \tau$, on a

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} g_\rho(M, Q)\right| \leqq (2p-2)\left[\min(\rho^{1-2p}, t^{1-2p}) + (R-r)^{1-2p}\right].$$

En intégrant sur les masses situées dans $B(O; R)$ et désignant par $\sigma(t)$ l'aire de la variété $P_n = 0$ dans la boule $B(M; t)$, on a

$$\tau_{2p-2}\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} \lambda[V_R; M; \rho]\right| \leqq \frac{\sigma(\rho)}{\rho^{2p-1}} + \int_\rho^\tau \frac{d\sigma(t)}{t^{2p-1}} + \frac{\sigma(\tau)}{(R-r)^{2p-1}},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} \lambda[V_R; M; \rho]\right| \leqq (2p-1)\int_\rho^\tau \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt + \frac{2\nu(\tau)}{\tau}(1 + \varepsilon_R). \tag{42}$$

Le dernier terme tend vers zéro quand $R \to \infty$; le premier est majoré par $(2p-1)\int_\rho^\infty \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt \leqq (2p-1)\frac{n}{\rho}$. Nous énoncerons, en remarquant que la convergence uniforme $\varepsilon(M; R) \to 0$ dans (41) pour la fonction harmonique entraîne celle des dérivées partielles :

Théorème 8. — *L'indice désignant le degré du polynome P_n, on a*

$$\left|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{M}} \lambda[\log|P_n|; M; \rho]\right| \leqq (2p-1)\frac{n}{\rho}, \tag{43}$$

quels que soient P_n, M, ρ.

On a, de plus,

$$(44)\quad \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;\, M;\, R\right]-\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;\, M';\, R'\right]=(2p-1)\xi\frac{MM'}{R_1}+\theta(\log R-\log R'),$$

où $R_1=\max(R, R')$, ξ *et* θ *sont dans les intervalles* $-1\leqq\xi\leqq+1$, $0\leqq\theta\leqq 1$.

Le résultat (44) généralise (36), mais la constante $C_p=2p-1$ qui figure au second membre, n'est probablement pas la meilleure possible pour $p\geqq 2$.

Définition. — Nous dirons qu'un ensemble de polynomes P_n appartient à une famille (Φ) si les fonctions $\frac{1}{n}\log|P_n|$ forment une famille F de fonctions plurisousharmoniques, c'est-à-dire possèdent les deux propriétés : les fonctions $\frac{1}{n}\log|P_n|$ sont bornées supérieurement sur tout compact; il n'existe pas de suite partielle qui converge vers $-\infty$ sur un domaine (auquel cas la convergence serait uniforme).

Si l'on pose

$$m_E(P_n)=\max_{M\in E}\sqrt[n]{|P_n(M)|},$$

pour qu'un ensemble de polynomes forment une famille (Φ), il faut et il suffit que $m_E(P_n)$ soit compris entre deux nombres *positifs* fixes a et b, E étant une boule de rayon positif. Nous laisserons ici de côté la détermination de la classe (C) des ensembles E qu'on peut substituer à une boule de rayon non nul pour que la condition $0<a\leqq m_E(P_n)\leqq b$ entraîne que les polynomes P_n forment une famille (Φ). Contentons-nous de remarquer que d'après les résultats précédents tout ensemble borné ouvert de C^p appartient à (C), car il contient une boule de rayon non nul.

13. Indiquons quelques corollaires utiles pour l'étude des séries de fractions rationnelles où l'on doit *minorer* les quantités $|P_n|$. On procédera comme au corollaire du théorème 5, en remarquant d'après (44) qu'il suffit de se donner

$$\lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;\; 0;\; 1\right]=\log\beta(P_n)$$

pour pouvoir minorer $|P_n|$ au voisinage de la variété $P_n=0$, sur un compact. Pour que $\beta(P_n)$ reste compris entre deux nombres positifs fixes, il faut et il suffit que la famille de polymomes soit une famille (Φ). On pourra donc remplacer $\beta(P_n)$ par tout nombre calculé à partir de P_n, qui possède la même propriété. En résumé il sera commode d'associer à chaque polynome *d'une part son degré n, d'autre part un second coefficient qui reste compris entre deux nombres positifs pour une famille* (Φ).

Envisageons deux cas :

1° On prend comme second coefficient le nombre $\beta(P_n)$ défini plus haut. Alors (44), où l'on a

$$\frac{1}{n}\log|P_n(M)| \leq \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n(M)|;\ M;\ R\right],$$

permet de majorer $|P_n|$ sur tout compact K en fonction de n et de $\beta(P_n)$; mais de plus, à partir de (44), on minore $|P_n|$ sur K en tout point à distance $\rho > 0$ de la variété $P_n = 0$. Insistons sur ce dernier point : en supposant $\rho < 1$ et prenant pour K la boule $B(O; L)$, $L > 1$, on aura d'après (44),

$$\frac{1}{n}\log|P_n(M)| = \lambda\left[\frac{1}{n}\log|P_n|;\ M;\ \rho\right] \geq \log\beta(P_n) - (2p-1)L + \log\rho$$

ou

$$(45)\qquad |P_n(M)| \geq [\alpha(K)]^n[\beta(P_n)]^{-n}\rho^n,$$

avec $\log\alpha(K) = -(2p-1)L$. D'après une remarque déjà faite, on pourra améliorer l'exposant de ρ en le remplaçant par une borne supérieure du degré moyen dans les boules de rayon 1 portées par K.

2° On donnera à la propriété un caractère algébrique en choisissant un coefficient calculable au moyen des coefficients de P_n. A titre d'exemple, soit

$$(46)\qquad S(P_n) = [\Sigma|A_\alpha|^2]^{\frac{1}{2n}},$$

où $\Sigma|A_\alpha|^2$ désigne la somme des carrés des coefficients de P_n. On a

$$S^{2n}(P_n) = \frac{1}{(2\pi)^p}\int|P_n^2(e^{i\theta_1}, \ldots, {}^{i\theta_p})|\,d\theta_1, \ldots, d\theta_p,$$

d'où l'on déduit pour $R \geq 1$

$$\lambda\left[\frac{1}{n}\log|\rho_n|;\ 0;\ R\right] \leq \log S + \log R + \log\chi_p,$$

avec $\chi_p = \max_{n=\infty}\sqrt[n]{C_{n+p}^p}$, C_{n+p}^p désignant suivant l'usage un nombre de combinaisons.

D'autre part, le maximum de $\frac{1}{n}\log|P_n|$ sur $B(0; 1)$ vaut au moins $\log S(P_n)$. La famille des fonctions plurisousharmoniques

$$V = \frac{1}{n}\log|P_n| - \log S(P_n)$$

est donc une famille *F*, et en procédant comme plus haut on obtient :

A tout domaine borné K *correspond un coefficient* $\alpha'(K) > 0$ *qui ne dépend* *que de* K *et du nombre de dimensions p de l'espace complexe, tel que l'on ait*

$$|P_n(M)| \geqq [\alpha'(K)]^n [S(P_n)]^{-n} \rho^n, \tag{47}$$

pour $M \in K$, *situé à distance au moins* ρ *de la variété* $P_n = 0$, *la quantité* $S(P_n)$ *étant définie par* (46).

Le résultat est applicable à tout polynome quel que soit son degré n.