

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

## **Sur la synchronisation des systèmes oscillants non linéaires**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 67 (1950), p. 321-392

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1950\\_3\\_67\\_\\_321\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1950_3_67__321_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# SUR LA SYNCHRONISATION

## DES SYSTÈMES OSCILLANTS

### NON LINÉAIRES

PAR M. JULES HAAG.



#### INTRODUCTION.

Le problème de la synchronisation est un problème très important, tant au point de vue mécanique qu'au point de vue électrique.

Dans le cas particulier d'un oscillateur linéaire uniquement soumis à une résistance visqueuse et à une force sinusoïdale, sa solution est élémentaire. Mais ce cas est purement théorique et l'on peut s'en éloigner beaucoup dans la pratique.

Le problème général se pose de la manière suivante :

Étant donné un système dont les mouvements autonomes comprennent un ou plusieurs mouvements périodiques, on le soumet à des forces perturbatrices périodiques ou bien indépendantes du temps. Parmi les mouvements ainsi perturbés, *existe-t-il un mouvement périodique stable* et, dans le second cas, *quelle est la période de ce mouvement ?*

Si les équations différentielles des mouvements autonomes sont linéaires et à coefficients constants, on a affaire à un *oscillateur linéaire*. Ses mouvements autonomes comprennent alors une *infinité de mouvements périodiques*. Dans un précédent travail (III), j'ai résolu complètement le problème de la synchronisation de cette espèce d'oscillateurs, en supposant que *les forces perturbatrices sont suffisamment petites* vis-à-vis des forces principales.

Mais il existe des oscillateurs *non linéaires*, en particulier la classe importante des *oscillateurs de relaxation*. Pour ceux-ci, on a *un seul mouvement autonome périodique*. L'étude de leur synchronisation fait l'objet du présent Mémoire.

Dans le Chapitre I, est exposée la *théorie générale*, pour un oscillateur à  $n$  degrés de liberté, soumis à des *forces perturbatrices infiniment petites*. Dans le cas où ces forces dépendent du temps, on doit supposer que *leur période et les périodes propres sont proportionnelles à des nombres entiers assez simples*. Si cette dernière condition n'est remplie qu'approximativement, la synchronisation peut encore avoir lieu; mais, il faut alors que les forces synchronisantes aient une intensité assez grande pour pouvoir imposer leur période au système, contrairement à ce qui se passe dans le cas des oscillateurs linéaires.

Si les forces perturbatrices sont *indépendantes du temps*, il existe un mouvement perturbé périodique, dont on peut calculer approximativement la période au moyen d'une formule *généralisant la formule d'Airy*. Ce cas comprend en particulier le *couplage* de plusieurs oscillateurs non linéaires.

La théorie dont nous venons d'esquisser les grandes lignes repose sur une théorie préliminaire concernant les équations différentielles à solution périodique, laquelle a été développée dans (I). Elle est valable moyennant certaines hypothèses sur les fonctions figurant dans ces équations, lesquelles se traduisent par des hypothèses analytiques sur la nature des forces agissant sur l'oscillateur. Nous avons jugé inutile d'explicitier celles-ci, le lecteur pouvant aisément les déduire de (I).

Le Chapitre II, très court, est réservé aux oscillateurs à *un seul degré de liberté*. Il contient une étude géométrique directe de la stabilité.

Le Chapitre III, également très court, est une application à *l'oscillateur de M. Abelé*.

Le Chapitre IV est consacré aux *oscillateurs de relaxation*. Dans deux Mémoires antérieurs (IV et V), j'avais fait une étude asymptotique de leurs mouvements autonomes. En appliquant la théorie générale du Chapitre I et utilisant les formules asymptotiques obtenues dans (IV) et (V), je résous, en première approximation, le problème de la synchronisation et du couplage de ces oscillateurs.

Le Chapitre V est l'application du précédent à deux exemples concrets.

Le premier est *l'oscillateur de van der Pol*; je me borne à indiquer rapidement les résultats qui le concernent.

Le deuxième est l'oscillateur ayant une *courbe fondamentale en dents de scie*. Il n'a sans doute pas grand intérêt par lui-même. Mais, il présente l'avantage de permettre une *étude directe* et rigoureuse de la synchronisation par force sinusoïdale. Cette étude conduit d'abord à une *vérification des formules asymptotiques* déduites du Chapitre IV.

En second lieu, elle peut être faite numériquement pour de *grandes forces synchronisantes*. On constate ainsi que la synchronisation sous-harmonique est possible *quel que soit le rapport des périodes*, pourvu que la force synchronisante ait une intensité suffisante.

Il serait intéressant de chercher si cette conclusion est valable pour les

autres oscillateurs de relaxation, par exemple pour celui de van der Pol. Il serait également désirable de savoir jusqu'à quel point la théorie générale du Chapitre I s'applique à des forces perturbatrices non infiniment petites. Ce sont là des problèmes qui paraissent fort difficiles; je ne les ai pas abordés.

Dans ce qui va suivre, nous aurons à nous reporter aux publications suivantes de l'auteur :

I. *Sur l'existence et la stabilité des solutions périodiques de certains systèmes différentiels* [Ann. Éc. Norm., (3), t. 65, 1948, p. 299 à 335].

II. *Sur la stabilité des points invariants d'une transformation* [Bull. Sc. math., (2), t. 73, 1949, p. 1 à 12].

III. *Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté* [Ann. Éc. Norm., (3), t. 64, 1947, p. 285 à 338].

IV. *Étude asymptotique des oscillations de relaxation* [Ann. Éc. Norm., (3), t. 60, 1943, p. 35 à 111].

V. *Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation* [Ann. Éc. Norm., (3), t. 61, 1944, p. 73 à 117].

Les références correspondantes seront repérées par le chiffre romain ci-dessus correspondant.

Les références au présent travail seront désignées par le numéro de l'équation ou du paragraphe, suivi d'un point et du numéro du Chapitre écrit en chiffre arabe.

## CHAPITRE I.

### THÉORIE GÉNÉRALE.

1. *Définition générale d'un système oscillant.* — Soit un système à  $n$  degrés de liberté, soumis *en permanence* à des forces indépendantes du temps, que nous appellerons les *forces principales*. Nous supposons que parmi les mouvements obéissant à ces forces, existe un <sup>(1)</sup> *mouvement périodique*, de période  $T$ , appelée *période propre* du système. Un tel système sera dit *système oscillant* ou encore *oscillateur* à  $n$  degrés de liberté.

On peut déterminer sa position et sa vitesse par  $m = 2n$  variables  $z_1, z_2, \dots, z_m$ . Pour faciliter le langage, nous appellerons  $P$  le point de l'espace  $(E_m)$  qui a pour coordonnées cartésiennes les  $z_i$  et  $P_0$  la position initiale de  $P$ , c'est-à-dire sa position au temps zéro.

---

(1) On pourrait supposer qu'il en existe une infinité, dépendant de  $p$  paramètres arbitraires. Mais, les oscillateurs linéaires étant mis à part, nous n'en connaissons aucun qui remplisse cette condition. Nous n'en ferons donc pas l'étude, bien qu'elle résulte de (I), tout aussi bien que la théorie développée dans le présent Chapitre.

Quand le système est animé d'un mouvement périodique, le point P décrit une courbe fermée, ou *cycle*, (C). Le point P<sub>0</sub> est un point quelconque Q de ce cycle, sa position dépendant du choix arbitraire de l'origine des temps.

Pour que le mouvement du système soit périodique, il faut et il suffit que P<sub>0</sub> soit sur (C). De telles conditions initiales seront dites *conditions normales*. Elles ne peuvent être réalisées *physiquement* d'une manière rigoureusement exacte. Dès lors, pour que l'oscillation périodique puisse être effectivement obtenue, il faut qu'elle soit *stable*, c'est-à-dire que des *conditions initiales voisines des conditions normales* donnent naissance à un *mouvement tendant asymptotiquement vers le mouvement périodique* pour  $t = +\infty$ . On peut encore dire que si P<sub>0</sub> est suffisamment voisin de (C), la trajectoire de P tend asymptotiquement vers (C).

La condition pour qu'il en soit ainsi résulte des nos 24, I et 6, II. Les  $z_i$  vérifient un système de  $m$  équations différentielles du premier ordre. A ce système correspond un *système linéaire associé* permettant de calculer, par une équation algébrique de degré  $m$ , les  $m$  *décroissements*. L'un de ceux-ci est égal à un. La condition nécessaire <sup>(1)</sup> et suffisante de stabilité est que les  $m - 1$  *décroissements autres que 1 aient un module*  $< 1$ .

Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons cette condition remplie.

2. *Forces perturbatrices*. — Ajoutons aux forces principales des *forces perturbatrices, très petites* par rapport aux premières. Les équations différentielles du mouvement perturbé sont de la forme

$$(1) \quad \frac{dz_i}{dt} = f_i(z) + \lambda g_i(z, t) \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Les  $f_i$  correspondent aux forces principales, les  $\lambda g_i$  aux forces perturbatrices. Le facteur  $\lambda$  est très petit et sera considéré comme un infiniment petit du premier ordre. Nous conviendrons de le supposer positif, ce qu'on peut toujours obtenir en changeant de signe les  $g_i$ . Il mesure en quelque sorte *l'intensité des forces perturbatrices*.

Si les  $g_i$  dépendent de  $t$ , elles admettent la période T par rapport à cette variable. Les forces correspondantes seront alors dites *forces synchronisantes*.

Les mouvements correspondant à  $\lambda = 0$  seront appelés les *mouvements autonomes*.

Le système (1) ci-dessus rentre dans le type étudié au n° 26, I. D'après le théorème du n° 34, I, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Si les forces perturbatrices sont assez petites, il existe un mouvement périodique obéissant à l'ensemble de toutes les forces.*

---

(1) Dans (1), j'ai seulement démontré que la condition est suffisante. Dans (II), j'ai démontré qu'elle est nécessaire et suffisante. Il suffit d'appliquer le théorème du n° 4, II à la transformation ponctuelle faisant correspondre au point P<sub>0</sub> la position P<sub>1</sub> de P au temps T.

Ce théorème résulte aussi des nos 9 à 11, II.

Sa validité est toutefois subordonnée à l'existence d'au moins une racine de l'équation en  $\mu$ . Voici la signification concrète de cette équation.

Supposons qu'on ait choisi l'origine des temps pour le mouvement périodique autonome, en fixant le point  $P_0$  correspondant (n° 1). L'instant  $t$  du passage de  $P$  en un point quelconque  $P_t$  de  $(C)$  est déterminé, à un multiple de  $T$  près. Nous l'appellerons la *phase* en ce point, par analogie avec la terminologie des mouvements sinusoïdaux. Les coordonnées de  $P_t$  sont des fonctions périodiques déterminées  $Z_i(t)$ .

Quand on se donne les fonctions  $g_i$ , l'origine des temps est imposée à l'avance; le temps  $t$  correspondant sera appelé la *phase de la force synchronisante*. La même origine sert pour la définition du mouvement périodique perturbé.

Soit  $Q_i(\lambda)$  la position au temps  $t$  du point  $P$  correspondant à ce mouvement. Lorsque  $\lambda$  tend vers zéro, le mouvement perturbé tend vers le mouvement autonome. Le point  $Q_0(\lambda)$  tend vers un point  $P_\mu$  déterminé de  $(C)$ . Plus généralement,  $Q_i(\lambda)$  tend vers  $P_{t+\mu}$ . On peut donc dire que  $\mu$  représente l'avance de phase du mouvement limite sur la force synchronisante.

Posons, avec les notations de (I) :

$$(2) \quad G(\mu) = A_1(T, g) = \sum_{k=1}^m \int_0^T H_k^1(t) g_k[Z(t), t - \mu] dt.$$

L'équation en  $\mu$  est, d'après (75, I),

$$(3) \quad G(\mu) = 0.$$

A chaque racine de cette équation et à chaque valeur suffisamment petite de  $\lambda$  correspond un mouvement perturbé périodique.

Comme au n° 1, ce mouvement n'est *physiquement* réalisable que s'il est stable. La condition nécessaire et suffisante de stabilité, pour  $\lambda$  suffisamment petit, est que l'indice de stabilité  $\sigma$  soit  $< 0$  (cf. nos 35 et 36, I; 12 et 13, II).

Nous appellerons  $\Lambda$  la limite supérieure des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles le mouvement périodique stable existe. Il serait évidemment désirable de pouvoir la déterminer. Mais, c'est là un problème qui paraît fort difficile. D'après la démonstration des nos 29 à 36, I, nous sommes seulement en mesure de calculer un nombre  $\Lambda' < \Lambda$ . Il est d'ailleurs possible que  $\Lambda$  n'existe pas ou, plus exactement, soit infini (cf. n° 19.5).

3. Calcul de l'indice de stabilité. — D'après (105, I), on a  $\sigma = K_1^1$ . Son calcul par la formule (107, I) peut être poussé plus loin et considérablement simplifié.

Commençons par expliciter les fonctions  $\varphi_i$  définies par (78, I). Le groupe constitué par la solution fondamentale périodique  $y_i^1 = Z_i(t)$  est nécessairement

un groupe simple, puisque  $S_1 = 1$  est une racine simple. Nous avons donc (n° 13, I)

$$(4) \quad \varphi_i = \sum_{q=1}^m A_q(t, g) y_i^q(t) + \sum_{q=2}^m \frac{S_q}{1-S_q} A_q(T, g) y_i^q(t).$$

La partie de  $K_1^1$  provenant des  $\varphi_i$  s'écrit  $K' + K''$ , avec (1)

$$K' = \int_0^T \left[ \sum_q A_q(t, g) X_q \right] dt, \quad K'' = \sum_{q=2}^m \frac{S_q}{1-S_q} A_q(T, g) \int_0^T X_q dt,$$

$$X_q = \sum_k \sum_h \sum_i H_k^1 p_{khi} y_h^1 y_i^q.$$

On a, d'après (1, I),

$$\frac{dy_k^q}{dt} = \sum_i p_{ki} y_i^q;$$

d'où

$$\frac{d^2 y_k^q}{dt^2} = \sum_i p_{ki} \frac{dy_i^q}{dt} + \sum_i y_i^q \frac{d}{dt} (p_{ki}).$$

Or,  $p_{ki}$  est la fonction obtenue en remplaçant les  $z$  par les  $Z$  dans  $f_{ki} = \frac{\partial f_k}{\partial z_i}$ . Comme  $f_k$  ne dépend pas de  $t$ , on a

$$\frac{d}{dt} (p_{ki}) = \sum_h p_{kih} Z_h = \sum_h p_{khi} y_h^1.$$

On déduit de ces deux formules

$$X_q = \sum_k H_k^1 \left( \frac{d^2 y_k^q}{dt^2} - \sum_i p_{ki} \frac{dy_i^q}{dt} \right)$$

ou, d'après (47, I),

$$X_q = \sum_k H_k^1 \frac{d^2 y_k^q}{dt^2} + \sum_i \frac{dH_i^1}{dt} \frac{dy_i^q}{dt} = \frac{dY_q}{dt},$$

en posant

$$(5) \quad Y_q = \sum_k H_k^1 \frac{dy_k^q}{dt}.$$

Soit maintenant  $F(t)$  une fonction quelconque de  $t$ ; on a

$$(6) \quad \int_0^T X_q F(t) dt = [Y_q F]_0^T - \int_0^T Y_q F'(t) dt.$$

(1) Pour simplifier l'écriture, nous convenons que, dans les sommations où l'indice est seulement écrit sous  $\sum$ , cet indice doit prendre toutes les valeurs de 1 à  $m$ .

Prenons  $F = A_q(t, g)$ . Nous avons, en nous reportant à (24, I), remarquant que  $A_q(0, g) = 0$  et tenant compte de (3),

$$K' = \sum_{q=2}^m Y_q(T) A_q(T, g) - \sum_q \int_0^T \left( \sum_i H_i^q g_i \right) Y_q dt.$$

L'intégrale ci-dessus s'écrit, d'après (5),

$$\int_0^T \left[ \sum_i \sum_k H_i^q H_k^1 g_i \frac{dy_k^1}{dt} \right] dt.$$

Or,

$$\sum_k H_k^1 \frac{dy_k^1}{dt} = - \sum_k y_k^1 \frac{dH_k^1}{dt}, \quad \text{car} \quad \sum_k H_k^1 y_k^1 = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Le crochet s'écrit donc

$$- \sum_i \sum_k H_i^q g_i y_k^1 \frac{dH_k^1}{dt}.$$

D'où

$$K' = \sum_{q=2}^m Y_q(T) A_q(T, g) + \int_0^T \left[ \sum_q \sum_i \sum_k H_i^q g_i y_k^1 \frac{dH_k^1}{dt} \right] dt.$$

Or,  $\sum_q H_i^q y_k^1 = 0$  si  $i \neq k$  et 1 si  $i = k$ . Donc,

$$(7) \quad K' = \sum_{q=2}^m Y_q(T) A_q(T, g) + \int_0^T \left( \sum_k g_k \frac{dH_k^1}{dt} \right) dt.$$

4. Prenons maintenant  $F(t) = 1$ . Nous avons

$$\int_0^T X_q dt = Y_q(T) - Y_q(0).$$

Or,  $H_k^1(T) = H_k^1(0)$ , d'après (19, I). Puis, d'après (18, I) et en supposant tous les groupes simples,  $y_k^1(t+T) = S_q y_k^1(t)$ . En dérivant par rapport à  $t$ , puis faisant  $t=0$ , on voit que

$$Y_q(T) - Y_q(0) = \frac{S_q - 1}{S_q} Y_q(T).$$

D'où

$$K'' = - \sum_{q=2}^m A_q(T, g) Y_q(T).$$

Nous avons donc

$$K_1' = \int_0^T \left( \sum_k g_k \frac{dH_k^1}{dt} \right) dt + \int_0^T \left( \sum_k \sum_h H_k^1 y_h^1 q_{kh} \right) dt.$$



La première intégrale s'écrit, en intégrant par parties,

$$\left[ \sum_k g_k H_k^1 \right]_0^T - \int_0^T \sum_k H_k^1 \left( \sum_h q_{kh} y_h^1 + \frac{\partial g_k}{\partial t} \right) dt.$$

Le terme intégré est nul, car la fonction entre crochets admet la période  $T$ . Il reste finalement  $\sigma = -\Lambda_1 \left( T, \frac{\partial g}{\partial t} \right)$ , soit

$$(8) \quad \sigma = G'(\mu).$$

Nous appellerons *racine stable* de l'équation (3) toute racine  $\mu_1$  vérifiant la condition  $G'(\mu_1) < 0$ . C'est une racine *simple* et telle que  $g(\mu)$  passe du signe + au signe - quand  $\mu$  traverse  $\mu_1$  en croissant.

5. *Domaine de stabilité.* — Nous appelons ainsi le domaine  $(D_0)$  dans lequel doit se trouver la position initiale  $P_0$  pour que le mouvement tende asymptotiquement vers le mouvement périodique. Physiquement, il détermine l'ensemble des conditions de lancement du système donnant asymptotiquement lieu à un mouvement périodique. Sa connaissance a donc une grande importance pratique. Malheureusement, sa détermination *exacte* est un problème généralement fort difficile et non résolu. Nous pouvons seulement préciser un domaine  $(\bar{D}_0)$ , que nous appellerons *domaine réduit*, qui est certainement inclus dans  $(D_0)$ .

Supposons d'abord qu'il s'agisse des *mouvements autonomes*, c'est-à-dire qu'il n'y ait pas de forces perturbatrices. Supposons en outre que la condition de stabilité donnée à la fin du n° 1 soit satisfaite. Dans ce cas,  $(\bar{D}_0)$  est une sorte de tube entourant le cycle  $(C)$  et dont les dimensions transversales sont d'autant plus petites que le maximum  $s$  des modules des décrets est plus voisin de  $un$ . Par exemple, si  $n = 1$ ,  $(\bar{D}_0)$  est la bande comprise entre les courbes  $(C)$  et  $(C')$ . Mais, bien entendu, le domaine *complet*  $(D_0)$  peut être plus étendu. Nous verrons (n° 19.5) qu'il peut comprendre tout le plan.

Si  $P_0$  appartient à  $(D_0)$ , le point  $P_n$  correspondant au temps  $nT$  tend, pour  $n = +\infty$ , vers un certain point  $Q$  de  $(C)$ ; ce point détermine la *phase limite du mouvement*. Les points  $P_0$  correspondant à un même point  $Q$  constituent, dans  $(D_0)$ , une surface  $(S_Q)$  de  $(E_m)$ . (Sur la figure 1, cette surface est une ligne). Si  $P_0$  est sur  $(S_Q)$ , il en est évidemment de même de tous les  $P_n$ ; la surface  $(S_Q)$  est invariante pour la transformation  $(P_0, P_1)$ .

Supposons maintenant que  $p$  décrets aient un module  $> 1$ . La surface  $(S_Q)$  devient une multiplicité à  $m - p - 1$  dimensions. Le domaine  $(D_0)$  constitué par toutes les  $(S_Q)$  n'a plus que  $m - p$  dimensions; c'est un *domaine restreint de stabilité*. Son interprétation concrète est la suivante. Il est impossible de réaliser *physiquement* des conditions initiales amenant  $P_0$  sur  $(D_0)$ ; mais on peut s'en approcher beaucoup. Dans ce cas,  $P_0$  est très voisin d'une  $(S_Q)$ . Le

point  $P_n$  commence par se rapprocher de  $Q$  et semble, pendant un temps très long, tendre vers lui; le mouvement semble tendre vers le mouvement périodique. Mais si  $n$  augmente indéfiniment,  $P_n$  finit par s'éloigner de  $Q$  et le mouvement s'écarte de plus en plus du mouvement périodique. Ceci prouve que, dans les vérifications expérimentales, il faut attendre longtemps pour être assuré de la stabilité d'un mouvement périodique. (Cf. n° 7, III.)

Supposons que les décrets puissent varier avec un certain paramètre et que  $p$  d'entre eux aient un module tendant vers 1 par valeurs  $< 1$ , les  $m-p-1$  autres modules restant inférieurs à un nombre fixe  $< 1$ . Le domaine  $(D_0)$  a

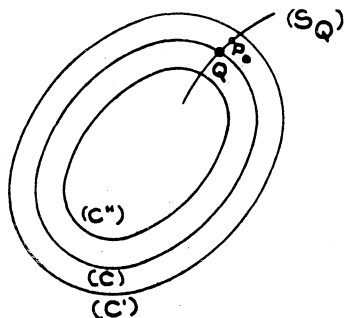


Fig. 1.

toujours  $m$  dimensions, mais tend vers une multiplicité à  $m-p$  dimensions comprenant le cycle  $(C)$ ; il s'aplatit de plus en plus. Dans le cas de la figure 1, il se réduit à la limite au cycle  $(C)$  lui-même.

6. Considérons maintenant le cas où il y a des forces perturbatrices périodiques et supposons l'indice de stabilité négatif pour une certaine racine  $\mu$  de l'équation (3), à laquelle correspond le point  $Q_\mu$ , que nous appellerons *point de synchronisation*. Pour toute valeur suffisamment petite de  $\lambda$ , nous avons un cycle  $(C_\lambda)$ . Sur ce cycle, le point  $Q_0(\lambda)$  a une position déterminée, qui tend vers  $Q_\mu$  quand  $\lambda$  tend vers zéro.

Autour de  $Q_0(\lambda)$  existe un domaine de stabilité  $D_0(\lambda)$ , à  $m$  dimensions, qui est l'ensemble des positions initiales  $P_0$  donnant lieu à un mouvement tendant vers le mouvement périodique. La trajectoire issue d'un tel point  $P_0$  admet  $(C_\lambda)$  pour courbe asymptote.

Quelle est la limite de  $D_0(\lambda)$  quand  $\lambda$  tend vers zéro? On peut être tenté de croire que c'est la multiplicité  $(S_Q)$  du n° 5 correspondant au point  $Q_\mu$ , puisque, pour  $\lambda = 0$ , il faut que  $P$  parte d'un point de cette multiplicité pour que  $P_n$  tende vers  $Q_\mu$  pour  $n$  infini. Mais ce raisonnement n'est pas correct.

Dans la réalité,  $\lambda$  a une valeur déterminée, aussi petite qu'on veut, mais fixe; et l'on doit chercher la limite de  $P_n$  pour  $n = \infty$  avant de faire tendre  $\lambda$  vers zéro. Il est possible (cf. n° 18.5) que le domaine  $D_0(\lambda)$ , au lieu d'être aplati comme

sur la figure 2, comprenne au contraire tout le cycle  $(C_n)$ . On peut imaginer par exemple que, quel que soit le point de départ  $P_0$ , voisin de ce cycle, les points  $P_1, P_2, \dots$  restent toujours dans ce voisinage et que l'un d'eux finisse par pénétrer dans le domaine *réduit* couvert de hachures, après quoi le point  $P_n$  tend nécessairement vers  $Q_0(\lambda)$ . S'il en est ainsi, la limite de  $D_0(\lambda)$  pour  $\lambda = 0$  est le domaine de stabilité des mouvements autonomes (n° 5).

On peut encore présenter ceci sous une autre forme, plus analytique. Admettons que  $D_0(\lambda)$  comprenne toute la courbe  $(C_\lambda)$ . Puis, prenons sur  $(C_\lambda)$  un point  $H_0(\lambda)$ , position de  $P$  au temps  $\theta \neq nT$  dans le mouvement périodique.

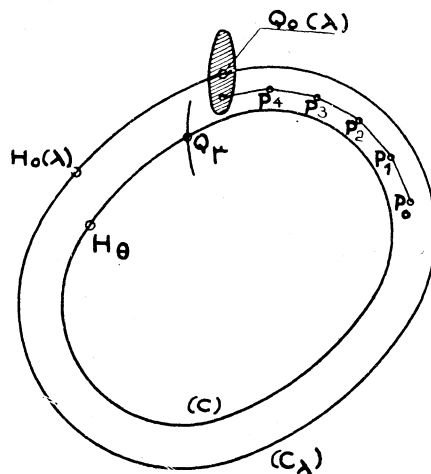


Fig. 2.

Si,  $\theta$  restant constant,  $\lambda$  tend vers zéro,  $H_0(\lambda)$  tend vers un certain point  $H_0$  de  $(C)$ . Cela posé, faisons partir, au temps zéro, deux points  $P$  et  $P'$ , le premier de  $Q_0(\lambda)$  et le second de  $H_0(\lambda)$ . La distance  $PP'$  au temps  $t$  est une fonction  $D(t, \lambda)$ . On a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(t, \lambda) = 0 \quad (\text{quel que soit } \lambda);$$

donc,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [\lim_{t \rightarrow \infty} D(t, \lambda)] = 0.$$

Au contraire, la limite de  $D(t, \lambda)$  pour  $\lambda = 0$  est une fonction périodique déterminée de  $t$ , qui n'a pas de limite pour  $t = \infty$ . On n'a donc *pas le droit d'invertir l'ordre des passages à la limite*.

7. *Cas où les forces perturbatrices ont une période  $T'$  voisine de la période propre  $T$ .* — Ce cas a été traité au n° 39, I en supposant que l'oscillateur et sa période propre dépendaient d'un certain paramètre. Mais cette hypothèse est inutile et l'on peut exposer la solution d'une manière plus simple.

Posons

$$(9) \quad T = T'(1 + \lambda\beta).$$

L'équation (1) peut s'écrire

$$(10) \quad \frac{dz_i}{dt} = (1 + \lambda\beta)f_i(z) + \lambda\bar{g}_i(z, t),$$

avec

$$(11) \quad \dot{\bar{g}}_i(z, t) = g_i(z, t) - \beta f_i(z).$$

Faisons jouer aux  $\bar{g}_i$  le rôle de fonctions perturbatrices; elles admettent, comme les  $g_i$ , la période  $T'$  par rapport à  $t$ . Quant au système principal, obtenu en supprimant les  $g_i$  dans (10), il admet la solution  $Z_i[(1 + \lambda\beta)t]$ , de période  $T'$ , car si  $t$  augmente de  $T'$ ,  $(1 + \lambda\beta)t$  augmente de  $T$ , d'après (9). Nous rentrons donc dans le cas examiné précédemment (1).

8. Appelons  $\bar{G}(\mu)$  ce que devient la formule (2) quand on y remplace les  $g_i$  par les  $\bar{g}_i$ . On a

$$\bar{G}(\mu) = A_1(T, \bar{g}) - \beta A_1(T, f).$$

Or,  $f_k(t) = Z_k(t) = y_k^1(t)$ . Donc,

$$A_1(T, f) = \int_0^T \left[ \sum_k H_k^1(t) y_k^1(t) \right] dt = T,$$

puisque le crochet vaut  $un$ . D'où

$$(12) \quad \bar{G}(\mu) = G(\mu) - \beta T, \quad \bar{G}'(\mu) = G'(\mu).$$

L'équation en  $\mu$  s'écrit

$$(13) \quad \beta T = G(\mu).$$

Elle est identique à (109, I), car  $\frac{\Delta T}{\lambda}$  vaut ici  $\frac{T - T'}{\lambda} = \beta T'$ , dont la limite pour  $\lambda = 0$  est  $\beta T$ .

Quant à l'indice de stabilité, il est toujours donné par la formule (8).

9. Cette formule peut être établie *directement*, en utilisant (II). Dans le voisinage du point Q du cycle (C), prenons un point quelconque de coordonnées  $z_i = Z_i$ ,  $\bar{z}_i = Z_i + x_i$  pour  $i > 1$ . Supposons que P parte de ce point au moment où la phase de la force synchronisante a la valeur  $x_1$ . Au bout d'un

(1) Signalons toutefois que les fonctions principales  $(1 + \lambda\beta)f_i(z)$  dépendent ici de  $\lambda$ , tandis qu'elles n'en dépendaient pas au n° 2. Mais on se rend aisément compte que la démonstration des nos 26 à 36, I subsiste intégralement si les  $f_i$  dépendent de  $\lambda$ . Les fonctions  $Z_i$  en dépendent aussi et il suffit d'admettre qu'elles sont continues pour  $\lambda = 0$ , ainsi que leurs dérivées. Dans les équations (76, I) et (105, I), on doit remplacer les  $Z_i$  par leurs valeurs pour  $\lambda = 0$ .

temps  $t = F(x, \lambda)$ , voisin de  $T$ ,  $P$  est de nouveau dans le voisinage de  $Q$ . Nous déterminons  $t$  par la condition que  $z_1$  reprenne la valeur  $Z_1$  et nous appelons  $Z_i + X_i$  les valeurs des autres  $z_i$  à cet instant. Posons

$$(4) \quad X_1 = x_1 + F(x, \lambda) - T = F_1(x, \lambda), \quad X_i = F_i(x, \lambda) \quad \text{pour } i > 1.$$

Les fonctions  $F_i$  sont parfaitement déterminées et satisfont aux conditions imposées aux fonctions  $f_i$  de (II), sous réserve que les  $f_i, g_i$  du n° 1 ci-dessus satisfassent à certaines conditions classiques, résultant de la théorie des équations différentielles.

Les formules (14) définissent une *transformation ponctuelle* dans l'espace  $(x)$ , dépendant du paramètre  $\lambda$ . Pour  $\lambda = 0$ , les fonctions  $F, F_2, \dots, F_m$  dépendent uniquement des variables  $x_i$  d'indice  $i > 1$ . Si ces  $x_i$  sont nuls, il en est de même des  $X_i$  correspondants; de plus, on a  $F(0, 0) = T = T'$ ; donc,  $X_1 = x_1$  quel que soit  $x_1$ . Nous avons donc, pour  $\lambda = 0$ , la *multiplicité invariante*  $x_i = 0$  pour  $i > 1$ .

Avec les notations du n° 6, II, nous avons identiquement  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} = 0$  pour  $i > 1$ . Donc, en faisant une substitution linéaire convenable sur les  $z_i$  d'indice  $> 1$ , nous pouvons supposer que les  $x_i$  sont *variables canoniques*. Dans ces conditions, l'équation (34, II) s'écrit, en se reportant au n° 15, II :  $\frac{\partial F_1}{\partial \lambda} = 0$ , soit

$$\beta T + \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0.$$

Si l'on y remplace  $x_1$  par  $-\mu$ , on obtient l'équation en  $\mu$ ; de sorte que

$$G(\mu) = -\frac{\partial F}{\partial \lambda}.$$

L'indice de stabilité est, d'après (44, II),  $\sigma = c_{11}$ . Utilisons maintenant les formules (45, II). La fonction  $F$  étant indépendante de  $x_1$  pour  $\lambda = 0$ , les dérivées  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_k}$  sont nulles et il reste

$$\sigma = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial x_1} = -\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial \mu} = G'(\mu),$$

c'est-à-dire la formule (8) ci-dessus.

10. Dans la pratique, le problème se pose de la manière suivante. *Les périodes  $T$  et  $T'$  sont données et l'on peut faire varier à volonté l'intensité des forces synchronisantes. Ceci revient à se donner le rapport*

$$(15) \quad \frac{T}{T'} = 1 + \gamma,$$

$\gamma$  étant petit vis-à-vis de l'unité; et à faire varier le facteur  $\lambda$ , qui règle l'inten-

sité des forces synchronisantes. Il s'agit alors de savoir s'il existe des valeurs de  $\lambda$  permettant de réaliser la synchronisation.

En comparant (9) et (15), on a  $\beta = \frac{\gamma}{\lambda}$ . Si  $\lambda$  tend vers zéro,  $\beta$  tend vers l'infini et l'équation (13) n'a plus de racines, car son second membre est une fonction périodique et bornée de  $\mu$ . On peut donc affirmer que *la synchronisation est impossible pour des valeurs infiniment petites de  $\lambda$ , sauf si  $\gamma$  est rigoureusement nul.*

Supposons que l'on connaisse la limite supérieure  $\Lambda$  du n° 2 en fonction de  $\beta$ , soit  $\Lambda = F(\beta)$ . Si l'inégalité  $\lambda < F\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)$  peut être vérifiée pour certaines valeurs de  $\lambda$ , la synchronisation est possible. Mais, *elle exige que l'intensité des forces synchronisantes dépasse une certaine limite  $\lambda_0$ , d'autant plus élevée que  $\gamma$  est plus grand, c'est-à-dire que le rapport des périodes est plus éloigné de l'unité.* Si cet éloignement est trop grand, il peut arriver que la fonction  $F\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)$  soit  $> \lambda$  quel que soit  $\lambda$ ; dans ce cas, la synchronisation est impossible.

On aperçoit ici une *différence essentielle avec la synchronisation d'un oscillateur linéaire*, du fait que celle-ci peut être, en principe, obtenue avec une force synchronisante arbitrairement petite (1).

Les considérations qui précèdent manquent évidemment de précision, parce que nous ne connaissons pas la fonction  $F(\beta)$ . Nous les rendons plus claires, au Chapitre V, sur un exemple concret, pour lequel nous calculerons numériquement la limite  $\lambda_0$ .

11. *Synchronisation sous-harmonique.* — Supposons que  $\frac{T}{T'}$  soit *rigoureusement* égal à la fraction irréductible  $\frac{N}{N'}$ . Le mouvement périodique autonome et les forces perturbatrices admettent la période commune  $T'' = N'T = NT'$ . Par conséquent, on peut appliquer les résultats des nos 2 à 4.

Dans la formule (2), on doit intégrer de zéro à  $N'T$ . Voyons ce que cela donne.

Posons  $\frac{2\pi}{T} = \omega$ ,  $\frac{2\pi}{T'} = \omega'$ . Les fonctions  $g_k(z, z', t)$  peuvent être développées en séries de Fourier de la variable  $\omega't$ ; les coefficients de ces séries sont des fonctions des  $z_i, z'_i$ . En portant dans (2), on obtient, sous le signe  $\int$ , une série analogue, mais dont les coefficients sont maintenant des fonctions de  $t$ , de période  $T$  et peuvent à leur tour être développées en séries de Fourier de la variable  $\omega t$ . Nous avons alors à calculer des intégrales telles

---

(1) En supposant qu'il n'existe pas d'autres forces perturbatrices, en particulier pas de frottement constant (cf. n° 21, III).

que  $\int_0^{T''} \cos p\omega t \cos p'\omega' t dt$ . Comme  $p\omega T'' = 2\pi pN'$  et  $p'\omega' T'' = 2\pi p'N$  sont multiples de  $2\pi$ , cette intégrale n'est différente de zéro que si  $p\omega = p'\omega'$ , soit  $\frac{p}{p'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{T}{T'} = \frac{N}{N'}$ . Donc,  $p = qN$ ,  $p' = qN'$ ,  $q$  entier. On en conclut que les forces synchronisantes peuvent être réduites à leurs harmoniques de rang multiple de  $N'$ . Elles admettent alors la période  $T$ . Donc, au lieu de calculer  $G(\mu)$  en intégrant de zéro à  $T''$ , on peut intégrer seulement de zéro à  $T$ , ce qui donne la fonction  $H(\mu)$ . On a ensuite

$$(16) \quad G(\mu) = N'H(\mu).$$

12. Si  $\frac{T}{T'}$  est seulement très voisin de  $\frac{N}{N'}$ , soit

$$(17) \quad \frac{T}{T'} = \frac{N}{N'}(1 + \lambda\beta),$$

on peut appliquer les résultats du n° 8, sous réserve de remplacer  $T$  par  $T''$  dans l'équation (13). En tenant compte de (16), on obtient l'équation en  $\mu$ .

$$(18) \quad \beta T = H(\mu).$$

L'indice de stabilité est

$$(19) \quad \sigma = N'H'(\mu).$$

Dans le cas particulier où  $N' = 1$ , c'est-à-dire si la fréquence propre est sous-multiple de la fréquence de la force synchronisante, on obtient la synchronisation sous-harmonique. On doit alors garder tous les harmoniques de la force. Si la force est sinusoïdale, on est nécessairement dans ce cas.

Remarquons encore que si  $N' > 1$ , la période  $T''$  du mouvement synchronisé est un multiple de la période propre  $T$ . Le cycle  $(C_i)$  comporte, avant sa fermeture,  $N'$  boucles voisines du cycle  $(C)$ .

Comme au n° 10, si le rapport  $\frac{T}{T'}$  n'est pas exactement égal à  $\frac{N}{N'}$ , soit  $\frac{T}{T'} = \frac{N}{N'}(1 + \gamma)$ , la synchronisation n'est possible que si l'intensité des forces synchronisantes est assez grande.

13. Limitation des nombres  $N$  et  $N'$ . — Quel que soit le rapport  $\frac{T}{T'}$ , on peut l'approcher autant qu'on veut par une fraction  $\frac{N}{N'}$ . On peut être tenté d'en conclure que la synchronisation est possible quelle que soit la période  $T'$  de la force synchronisante. Voyons si cette conclusion est justifiée.

Supposons que l'on calcule  $\frac{N}{N'}$  par la méthode des fractions continues. On est assuré que le nombre  $\gamma$  du n° 11 est, en valeur absolue, inférieur à  $\frac{1}{NN'}$ . Il peut

être évidemment beaucoup plus petit, même nul. Mais, il peut aussi être de l'ordre de  $\frac{1}{NN'}$ . Soit  $\beta_0$  le maximum imposé à  $\beta$  pour que l'équation (18) ait des racines. Il lui correspond une limite inférieure  $\lambda_0$  de  $\lambda$ , qui vaut  $O\left(\frac{1}{\beta_0 NN'}\right)$ .

Par ailleurs (n° 41), la fonction  $H(\mu)$  se calcule en réduisant chaque fonction  $g_k(z, z', t)$  à ses harmoniques de rang multiple de  $N'$ . Les produits par  $H_k'(t)$  des coefficients de ces harmoniques doivent, à leur tour, être réduits à leurs harmoniques de rang multiple de  $N$ . Or, on sait <sup>(1)</sup> que les coefficients de Fourier de rang  $n$  valent au plus  $O\left(\frac{1}{n}\right)$  si la fonction est à variation bornée et  $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  si la dérivée de cette fonction est à variation bornée. Dans le premier cas, on aura  $\beta_0 = O\left(\frac{1}{NN'}\right)$  et, dans le second cas,  $\beta_0 = O\left(\frac{1}{N^2 N'^2}\right)$ . Donc,  $\lambda_0 = O(1)$  ou  $O(NN')$ . Il peut alors arriver, surtout dans le deuxième cas, que  $\lambda_0$  dépasse la limite supérieure  $\Lambda$  (n° 2), auquel cas la synchronisation sera impossible.

Nous ne connaissons pas  $\Lambda$ , mais seulement le nombre  $\Lambda' < \Lambda$  (n° 2). En reprenant la discussion du n° 47, I et remarquant que les fonctions  $A_i(t, f)$  et  $\varphi_i$  sont ici multipliées par  $N'$ , on voit que  $\Lambda' = O\left(\frac{1}{N'^4}\right)$ . Si  $N'$  est très grand,  $\Lambda'$  est  $< \lambda_0$  et nous ne pouvons pas affirmer que la synchronisation soit possible. Il en est de même pour  $N' = 1$ , si  $\lambda_0 = O(N)$  et si  $N$  est très grand.

Observons enfin que, si  $\lambda$  est grand, on ne sera pas assuré que le décrement ait un module  $< 1$ , même si l'indice de stabilité est  $< 0$ .

Pour ces diverses raisons, il y a lieu de penser que *la synchronisation n'est possible que si le rapport  $\frac{T}{T'}$  est voisin d'une fraction dont le numérateur et surtout le dénominateur sont assez petits.*

Mais, bien entendu, il s'agit là d'une simple présomption et non d'une certitude. Nous verrons d'ailleurs (n° 19.5) un exemple pour lequel la synchronisation est toujours possible, à condition que la force synchronisante soit assez grande.

14. *Synchronisation par une force sinusoïdale.* — Nous avons vu (n° 12) que *la synchronisation harmonique ou sous-harmonique est seule possible.*

Soit  $g_k(t) = R_k \cos(\omega' t + \alpha_k)$ . Nous avons

$$(20) \quad G(\mu) = L \cos \omega' \mu + M \sin \omega' \mu,$$

---

<sup>(1)</sup> Cf. VALIRON, *Théorie des fonctions*, p. 182 et 183.



avec

$$(21) \quad \begin{cases} L = \sum_{k=1}^m R_k \int_0^T H_k^1(t) \cos(\omega' t + \alpha_k) dt, \\ M = \sum_{k=1}^m R_k \int_0^T H_k^1(t) \sin(\omega' t + \alpha_k) dt. \end{cases}$$

L'équation (18) devient, en posant  $\omega' \mu = \nu$ ,

$$(22) \quad \beta T = L \cos \nu + M \sin \nu.$$

Le nombre  $\lambda_0$  du n° 13 vaut

$$(23) \quad \lambda_0 = \frac{|\gamma| T}{\sqrt{L^2 + M^2}}.$$

*L'amplitude de la force synchronisante doit dépasser une limite d'autant plus élevée que le rapport  $\frac{T}{T'}$  est plus éloigné de N.*

Si cette condition est remplie, l'équation (22) admet deux racines  $\nu_0$  et  $\nu_1$  entre 0 et  $2\pi$ . Il est inutile de leur ajouter des multiples de  $2\pi$ , car cela équivaut à augmenter la phase de la force synchronisante d'un tel multiple.

*L'indice de stabilité est, d'après (19),*

$$(24) \quad \sigma = \omega'(-L \sin \nu + M \cos \nu).$$

Il a un signe différent pour  $\nu = \nu_0$  et  $\nu = \nu_1$ . La racine stable est celle qui le rend négatif.

15. *Forces perturbatrices indépendantes de t.* — Dans ce cas, la fonction  $G(\mu)$  est une constante  $G$ ; l'inconnue  $\mu$  n'existe plus. Mais, nous en avons une autre, qui est la période  $T'$  du mouvement perturbé périodique. Cette période est donnée, en première approximation, c'est-à-dire à  $O(\lambda^2)$  près, par les formules (9) et (13). Appelons  $\Delta T = T' - T$  l'accroissement de période dû aux forces perturbatrices. On a

$$(25) \quad \Delta T = -\lambda G.$$

Ceci est une généralisation de la formule d'Airy, classique en Chronométrie pour les oscillateurs linéaires utilisés en Horlogerie.

Notre système perturbé peut évidemment être considéré comme un système oscillant (n° 1). Il admet un décrement égal à  $un$ ; les  $m - 1$  autres décrets sont voisins de ceux du système non perturbé. Comme ceux-ci ont, par hypothèse, un module  $< 1$ , il en est de même des nouveaux décrets, pourvu que  $\lambda$  soit assez petit.

En résumé, *si les forces perturbatrices sont assez petites, il existe un mouvement perturbé périodique stable, dont la période est donnée, en première approximation, par la formule (25).*

16. Revenons au n° 14, en supposant que *des forces telles que les précédentes s'ajoutent aux forces synchronisantes*. L'équation (22) devient

$$(26) \quad \beta T - G = L \cos \nu + M \sin \nu$$

et la condition de synchronisation est remplacée par

$$(27) \quad L^2 + M^2 > (\beta T - G)^2.$$

Si  $G$  est assez grand, *il peut se faire que l'intensité de la force synchronisante doive être augmentée*.

17. *Couplage de plusieurs systèmes*. — Considérons  $n$  systèmes oscillants stables  $(\Sigma_\alpha)$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, n$ ). Nous appelons  $z_{\alpha i}$  les variables correspondant à  $(\Sigma_\alpha)$ ,  $i$  variant entre 1 et le double du nombre des degrés de liberté. La solution périodique, de période  $T_\alpha$ , sera désignée par  $Z_{\alpha i}(t + \mu_\alpha)$ ,  $\mu_\alpha$  désignant une constante arbitraire. Les solutions fondamentales du système associé seront  $y_{\alpha i}^j(t + \mu_\alpha)$ , l'indice  $j = 1$  étant réservé à  $Z_{\alpha i}(t + \mu_\alpha)$ . Il leur correspond les fonctions  $H_{\alpha i}^j(t + \mu_\alpha)$ .

Cela posé, soumettons nos  $n$  systèmes à un *léger couplage* (par inertie ou dynamique). Nous obtenons le système (S), dont le mouvement est déterminé par les équations différentielles

$$(28) \quad \frac{dz_{\alpha i}}{dt} = f_{\alpha i}(z) + \lambda g_{\alpha i}(z).$$

Les fonctions principales  $f_{\alpha i}$  ne contiennent que les variables  $z_{\alpha j}$ ; mais les fonctions perturbatrices  $g_{\alpha i}$  contiennent toutes les variables  $z_{\beta j}$ .

Supposons maintenant que *les périodes propres  $T_\alpha$  admettent approximativement un multiple commun  $T'$  et posons*

$$(29) \quad T_\alpha = \frac{T'}{N_\alpha} (1 + \lambda \gamma_\alpha) \quad (N_\alpha \text{ entier}).$$

Nous allons chercher *si notre nouveau système admet un mouvement périodique stable de période  $T$  voisine de  $T'$ , soit*

$$(30) \quad T = \frac{T'}{1 + \lambda \rho},$$

$\rho$  étant inconnu pour le moment.

Portant dans (29), nous posons

$$(31) \quad T_\alpha = \frac{T}{N_\alpha} (1 + \lambda \varepsilon_\alpha), \quad \varepsilon_\alpha = \gamma_\alpha + \rho(1 + \lambda \gamma_\alpha).$$

Nous pouvons écrire, comme au n° 7,

$$(32) \quad \frac{dz_{\alpha i}}{dt} = (1 + \lambda \varepsilon_\alpha) f_{\alpha i}(z) + \lambda \bar{g}_{\alpha i}(z),$$

$$(33) \quad \bar{g}_{\alpha i} = g_{\alpha i} - \varepsilon_\alpha f_{\alpha i}.$$

Les  $\bar{g}_{\alpha i}$  sont les nouvelles fonctions perturbatrices. Le nouveau système principal admet la solution périodique  $Z_{\alpha i}[(1 + \lambda \varepsilon_{\alpha})t + \mu_{\alpha}]$ , laquelle admet la période  $T$ . Nous pouvons donc appliquer la théorie générale au système (32).

18. La solution périodique ci-dessus dépend des  $n$  paramètres  $\mu_{\alpha}$ ; nous aurons donc  $n$  équations en  $\mu$  (nos 26 et 28, I). Posons

$$(34) \quad G_{\alpha}(\mu) = \sum_k \int_0^T H_{\alpha k}^1(t + \mu_{\alpha}) g_{\alpha k}(Z) dt,$$

les  $Z$  figurant dans  $g_{\alpha k}$  étant les fonctions  $Z_{\beta i}(t + \mu_{\beta})$ . La fonction  $G_{\alpha}(\mu)$  dépend donc des  $n$  variables  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ . En répétant le calcul du n° 8, on voit que les équations en  $\mu$  s'écrivent

$$(35) \quad \varepsilon_{\alpha} T = G_{\alpha}(\mu) \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n).$$

Dans ces équations figurent les  $n + 1$  inconnues  $\mu_{\alpha}$  et  $T$ . Le système est donc indéterminé et il semble, au premier abord, que l'on ne puisse pas calculer  $T$ . Mais, si l'on change, dans la formule (34),  $t$  en  $t + C$  et les  $\mu$  en  $\mu - C$ ,  $C$  désignant une constante arbitraire, on voit, en tenant compte de la périodicité de la fonction sous le signe  $\int$ , que la fonction  $G_{\alpha}(\mu)$  ne change pas <sup>(1)</sup>. Dès lors, on peut choisir  $C$  pour annuler par exemple  $\mu_1$  et l'on n'a plus que les  $n$  inconnues  $T, \mu_2, \dots, \mu_n$ . En éliminant les  $\mu$  et remplaçant  $T$  par (30), on obtient une équation ne contenant plus que l'inconnue  $\varphi$ , ce qui détermine la période du mouvement du système (S).

Ayant  $\varphi$ , on en déduit les  $\mu_{\alpha}$ .

19. Il nous reste maintenant à voir si ce mouvement est stable. Les indices de stabilité sont donnés par l'équation (105, I). Mais, le calcul des  $K_{\beta}^{\alpha}$  est ici plus compliqué qu'au n° 3.

Nous avons toujours la formule (4), avec cette seule différence que l'on remplace l'indice  $i$  par le double indice  $\alpha i$  et que  $q$  doit prendre les valeurs du groupe  $(\alpha)$ . De plus,  $S_q$  doit être remplacé par  $S_{\alpha q} = S_{\alpha q}^{N_{\alpha}}$ , du fait que la période <sup>(2)</sup> est  $T = N_{\alpha} T_{\alpha}$ . Enfin, les  $g_i$  sont remplacés par les  $\bar{g}_i$ .

La formule (104, I) devient

$$K_{\beta}^{\alpha} = \sum_k \sum_h \int_0^T H_{\beta k}^1 \left( \sum_i p_{khi} \varphi_{\beta i} + \bar{q}_{\beta kh} \right) \bar{y}_{\alpha h}^1 dt.$$

Le facteur  $p_{khi}$  n'est  $\neq 0$  que si les indices  $h, k, i$  appartiennent au même

(1) Voir un raisonnement analogue au n° 10, III.

(2) Il s'agit de la période limite pour  $\lambda = 0$ .

groupe, ce qui n'est possible que si  $\alpha = \beta$ . Donc, pour  $\alpha \neq \beta$ , on a  $K_\beta^\alpha = L_\beta^\alpha$ , en posant

$$(36) \quad L_\beta^\alpha = \sum_k \sum_h \int_0^T \frac{\partial g_{\beta k}}{\partial z_{\alpha h}} \Pi_{\beta k}^1 Y_{\alpha h}^1 dt$$

et remarquant que  $\frac{\partial f_{\beta k}}{\partial z_{\alpha h}} = 0$ .

Pour  $\alpha = \beta$ , on a toujours le terme  $L_\alpha^\alpha$ , calculé avec les  $\bar{g}_{\alpha k}$ . On a en plus le terme  $K'_\alpha + K''_\alpha$ ,  $K'_\alpha$  et  $K''_\alpha$  désignant les expressions analogues à  $K'$  et  $K''$  du n° 3. En se reportant aux calculs des nos 3 et 4, on a

$$K_\alpha^\alpha = \int_0^T \left( \sum_k \bar{g}_{\alpha k} \frac{d\Pi_{\alpha k}^1}{dt} \right) dt + \int_0^T \left( \sum_h \sum_k \Pi_{\alpha k}^1 Y_{\alpha h}^1 \frac{\partial \bar{g}_{\alpha k}}{\partial z_{\alpha h}} \right) dt.$$

En effectuant une intégration par parties sur la première intégrale, il vient

$$(37) \quad K_\alpha^\alpha = - \sum_{\beta \neq \alpha} L_\alpha^\beta.$$

en tenant compte de ce que  $f_{\alpha k}$  ne contient pas les  $z_{\beta i}$ .

20. L'équation de stabilité est de degré  $n$ . Mais, elle admet *a priori* la racine  $\sigma = 0$ , puisque (S) est un système oscillant et admet par conséquent le décrement  $S = 1$  (n° 1). On le vérifie d'ailleurs immédiatement en additionnant toutes les colonnes du déterminant (105, I) et tenant compte de (37). *La condition de stabilité est que les  $n - 1$  racines non nulles aient une partie réelle négative.*

S'il en est ainsi, on est assuré que le système (S) admet un mouvement périodique stable, pourvu que  $\lambda$  soit assez petit, c'est-à-dire que le couplage soit assez faible et que les périodes propres admettent un multiple commun avec une approximation suffisante.

Ceci généralise la théorie du couplage des oscillateurs linéaires.

21. *Oscillateurs quasi linéaires.* — Nous pouvons obtenir à volonté des systèmes oscillants du type défini au n° 1, en utilisant la théorie générale de (III). Il nous suffit en effet de prendre le système du n° 2, III dans le cas où les  $Q_i$  sont indépendants de  $t$ , en nous arrangeant pour qu'il existe un mouvement périodique stable (nos 10 et 11, III). Citons comme exemples simples le pendule ou le balancier de montre, munis d'un échappement.

L'oscillateur ainsi constitué peut, à son tour, être soumis à des forces perturbatrices telles que celles introduites au n° 2 et proportionnelles au facteur infiniment petit  $\lambda$ ; nous pouvons évidemment lui appliquer la méthode générale qui vient d'être exposée.

Il convient toutefois d'observer que la détermination du présent oscillateur comporte aussi un autre facteur  $\lambda$  (n° 2, III), que l'on peut appeler  $\varphi$  pour éviter toute confusion, mais qui n'en est pas moins un facteur très petit (1). Dès lors, les nouvelles forces perturbatrices peuvent être purement et simplement incorporées dans les anciennes; ce qui nous ramène à la théorie des oscillateurs linéaires. Pour cette raison, l'oscillateur que nous venons d'imaginer peut être appelé un oscillateur *quasi linéaire*.

On peut lui appliquer indifféremment la théorie générale de (III) en groupant toutes les forces perturbatrices (anciennes et nouvelles), ou bien la présente théorie, en considérant  $\varphi$  comme fixe et  $\lambda$  comme infiniment petit. Il est bien évident que les deux points de vue doivent conduire au même résultat.

Les variables les plus commodes sont les variables  $(x_i, y_i)$  définies par (10, III), qui déterminent l'amplitude et la phase instantanées correspondant à chaque période propre. En utilisant ces variables, j'ai vérifié effectivement l'identité annoncée ci-dessus. Mais, ce calcul ne comportant d'autre intérêt que le contrôle mutuel des deux théories, je ne le reproduirai pas, afin de ne pas trop allonger le présent Mémoire. Nous en verrons toutefois un exemple (Chap. III), concernant l'oscillateur de M. Abelé.

## CHAPITRE II.

### OSCILLATEUR A UN SEUL DEGRÉ DE LIBERTÉ.

#### 1. Oscillations autonomes. — Soit

$$(1) \quad x'' = f(x, x')$$

l'équation différentielle du mouvement. On peut ramener cette équation à un système de deux équations du premier ordre en posant, d'une manière générale,

$$x = h_1(z_1, z_2), \quad x' = h_2(z_1, z_2),$$

les  $h_i$  désignant des fonctions continues, ainsi que leurs dérivées premières et secondes. On suppose de plus que leur jacobien est  $\neq 0$  dans le domaine où l'on fera varier  $x$  et  $x'$ .

Le changement de variables le plus simple, mais pas nécessairement le plus avantageux, est

$$(2) \quad x = z_1, \quad x' = z_2.$$

---

(1) On pourrait s'affranchir de cette restriction, en considérant par exemple un pendule muni d'un échappement puissant, susceptible d'entretenir des oscillations de grande amplitude, 90° par exemple. Mais la théorie de (III) ne serait plus applicable; seule la théorie du présent Chapitre pourrait être utilisée pour l'étude des petites perturbations d'un tel oscillateur.

Il donne

$$(3) \quad z_1' = z_2, \quad z_2' = f(z_1, z_2).$$

L'intégration de ce système se ramène à l'équation différentielle du premier ordre

$$(4) \quad z_2 dz_2 = f(z_1, z_2) dz_1$$

et à la quadrature

$$(5) \quad t = \int \frac{dz_1}{z_2}.$$

Nous supposons l'existence d'un *mouvement périodique autonome*, défini par la fonction  $X(t)$ , de période  $T$ . Avec la notation du n° 17, I, nous avons

$$(6) \quad p_{11} = 0, \quad p_{12} = 1, \quad p_{21} = f'_x(X, X'), \quad p_{22} = f'_{x'}(X, X').$$

La formule (122, I) se réduit à

$$(7) \quad \Delta(t) = \int_0^t f'_{x'}(X, X') dt.$$

La *condition de stabilité* est  $\Delta(T) < 0$ , soit

$$(8) \quad \int_0^T f'_{x'}(X, X') dt < 0.$$

Le *décroissement* autre que *un* est  $S = e^{\Delta(T)}$ .

2. On peut retrouver ceci par la représentation géométrique du n° 1.1. Pour simplifier l'écriture, remplaçons  $z_1$  et  $z_2$  par  $x$  et  $y$ . Au mouvement périodique correspond un *cycle* (C), décrit, dans le sens rétrograde, par le point  $P(X, Y)$ , quand  $t$  croît de zéro à  $T$ . Nous appellerons  $P_0$  la position de  $P$  au temps zéro, qui peut être choisie arbitrairement sur (C).

Considérons maintenant un mouvement quelconque. Le point  $M(x, y)$  décrit une trajectoire quelconque issue de  $M_0$ . Soient  $u$  et  $v$  les composantes du vecteur  $\overrightarrow{PM}$ . On a

$$u' = v, \quad v' = f(X + u, Y + v) - f(X, Y).$$

Développons le second membre de la deuxième équation par la formule de Taylor; nous avons, en appelant  $p$  et  $q$  les fonctions  $p_{21}$  et  $p_{22}$  du n° 1 :

$$v' = up + vq + R,$$

$R$  désignant une forme quadratique en  $u, v$ , à coefficients bornés (1). Appelons

→

---

(1) Nous supposons que  $f$  admet des dérivées premières et secondes continues et bornées dans le voisinage de (C).

maintenant  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires de PM. Des équations précédentes, on déduit

$$(9) \quad \theta' = p \cos^2 \theta + q \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta + \frac{R}{r} \cos \theta,$$

$$(10) \quad \frac{r'}{r} = (\dot{p} + 1) \sin \theta \cos \theta + q \sin^2 \theta + \frac{R}{r} \sin \theta.$$

Pour  $0 < t < T$ , le dernier terme de chacune de ces équations a un module  $< Mr_0$ ,  $M$  désignant une constante <sup>(1)</sup>.

Si l'on néglige le dernier terme de (9), on commet sur  $\theta$  une erreur de module  $< Nr_0$ ,  $N$  désignant une autre constante <sup>(2)</sup>. Or, si l'on pose  $\operatorname{tg} \theta = m$ , l'équation obtenue devient une équation de Riccati. Si l'on écrit  $m(T) = m(0)$ , on obtient une équation du second degré par rapport à la constante d'intégration. Il y a donc deux solutions pour lesquelles on a  $\theta(T) = \theta(0)$ , à  $k\pi$  près. Mais, l'une d'elles est connue; c'est l'angle polaire  $\alpha$  de la tangente PT. En effet, on a  $Y' = f(X, Y)$ ; d'où  $Y'' = pY + qY'$ . En tenant compte de  $Y' = Y \operatorname{tg} \alpha$ , on obtient

$$(11) \quad \alpha' = p \cos^2 \alpha + q \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Il y a donc une direction  $P_0 \lambda$  telle que, si  $M_0$  est sur cette droite, la position  $M_1$  de  $M$  au temps  $T$  s'y trouve aussi, avec une erreur angulaire  $\widehat{\lambda P_0 M_1} = o(r_0)$ .

3. L'équation (10) s'écrit, en tenant compte de (9) et à  $o(r_0)$  près

$$\frac{r'}{r} = (\theta' + 1) \operatorname{tg} \theta.$$

D'autre part, soit  $V$  la vitesse de  $P$ . On a  $V \cos \alpha = X' = Y$ ,  $V \sin \alpha = Y'$ . Dérivant logarithmiquement la première formule et tenant compte de la seconde, on obtient

$$\frac{V'}{V} = (\alpha' + 1) \operatorname{tg} \alpha.$$

(1) D'après l'hypothèse faite sur la fonction  $f$ ,  $r$  admet une dérivée par rapport à  $r_0$  et cette dérivée est continue (cf. VALIRON, t. II, p. 313). Donc  $r = o(r_0)$ ; d'où  $R = o(r_0^2)$ , ce qui justifie la conclusion ci-dessus.

(2) D'une façon générale, soit  $x' = f(x, t) + \lambda$  une équation différentielle où  $\lambda$  désigne une fonction inconnue de  $t$ , mais dont le module est  $< \varepsilon$ . Soit  $X$  la solution correspondant à la valeur initiale  $x_0$ , pour  $\lambda = 0$ . Posons  $x = X + u$ . On a, en supposant l'existence et la continuité de  $f'_x$ ,  $u' = up + \lambda$ , avec  $p = f'_x(X + \rho u, t)$  ( $0 < \rho < 1$ ). Comme  $u_0 = 0$ , on en déduit

$$u = \int_0^t \lambda(t') e^{q(t-t')} dt', \quad q(t') = \int_0^{t'} p(t'') dt''.$$

Supposons  $|f'_x| < m$ , quels que soient  $x$  et  $t$ . On a  $|q(t')| < m(t-t')$ . D'où

$$|u| < \varepsilon \int_0^t e^{m(t-t')} dt' = \frac{\varepsilon}{m} (e^{mt} - 1).$$

Éliminant  $p$  entre (9) et (11), on a, à  $o(r_0)$  près,

$$q(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\alpha) = \frac{\theta' + 1}{\cos^2\theta} - \frac{\alpha' + 1}{\cos^2\alpha} = (\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\alpha) \left( \frac{r'}{r} + \frac{V'}{V} \right) + (\theta' - \alpha') (1 + \operatorname{tg}\theta \operatorname{tg}\alpha).$$

D'où

$$q = \frac{r'}{r} + \frac{V'}{V} + (\theta' - \alpha') \operatorname{cotg}(\theta - \alpha).$$

Intégrant de zéro à  $T$  et tenant compte de la périodicité de  $V$ ,  $\alpha$  et  $\theta$ , nous obtenons, à  $o(r_0)$  près,

$$\log \frac{r_1}{r_0} = \int_0^T q dt = \Delta(T).$$

On retrouve les résultats du n° 1.

4. D'après le n° 9, II, il existe une courbe  $(\gamma_0)$ , issue de  $P_0$ , telle que si  $M_0$

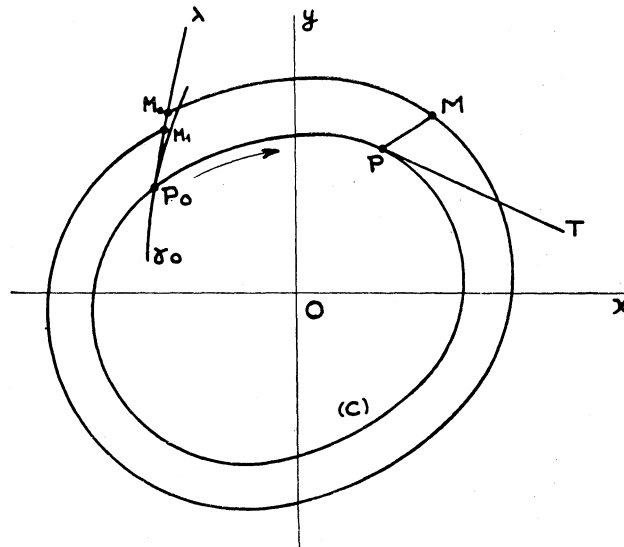


Fig. 3.

est sur cette courbe, le point  $M_n$  correspondant à  $t = nT$  tend vers  $P_0$  pour  $n = \infty$ . Ces points  $M_n$  sont évidemment tous sur  $(\gamma_0)$ . La démonstration précédente nous montre que la tangente en  $P_0$  à  $(\gamma_0)$  est la droite  $P_0\lambda$  et que la distance  $P_0M_n$  décroît asymptotiquement en progression géométrique de raison  $S$ .

5. Revenons au système (3). Les solutions fondamentales du système linéaire associé sont (n° 49, I)  $X'(t)$ ,  $X''(t)$  et  $U_1 = X'V_1$ ,  $U_2 = X''V_2$ , en posant

$$V_1 = \int \frac{e^{\lambda t}}{X'^2} dt, \quad V_2 = \int \frac{e^{\lambda t}}{X'^2} f_x(X, X') dt$$



et choisissant les constantes d'intégration de telle manière que l'on ait

$$X'X''(V_2 - V_1) = e^\Delta$$

et

$$V_1(t + T) = SV_1(t), \quad V_2(t + T) = SV_2(t).$$

On a ensuite

$$H_1^1(t) = U_2 e^{-\Delta}, \quad H_2^1(t) = -U_1 e^{-\Delta}.$$

6. *Synchronisation.* — Soit  $J = \lambda g(x, x', t)$  l'accélération perturbatrice, admettant la période  $T' = \frac{T}{1 + \lambda \beta}$ , conformément à la formule (9.4). En se reportant aux équations (3), on voit que  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = g(x, x', t)$ . La fonction  $G(\mu)$  est, d'après (2.4),

$$(12) \quad G(\mu) = - \int_0^T U_1(t) g(X, X', t - \mu) e^{-\Delta(t)} dt.$$

On en déduit l'équation en  $\mu$  et l'indice de stabilité par (13.4) et (8.4).

Si la force perturbatrice ne dépend pas de  $t$ , on a, à  $O(\lambda^2)$  près :

$$(13) \quad \Delta T = T' - T = \int_0^T U_1 J e^{-\Delta} dt.$$

Cette formule généralise la formule d'Airy.

Le mouvement périodique perturbé est *stable* si la force perturbatrice est assez petite (n° 15.1).

### CHAPITRE III.

#### L'OSCILLATEUR DE M. ABELÉ <sup>(1)</sup>.

1. *Étude préalable d'un cas plus général.* — Supposons que la fonction  $f$  du Chapitre II soit de la forme <sup>(2)</sup>

$$(1) \quad f(z, z') = 2z'G(y)F(z, z') - z, \quad y = \sqrt{z^2 + z'^2}.$$

La fonction  $G(y)$  s'annule pour  $y = \rho > 0$  et la dérivée  $G'(\rho)$  est  $< 0$ . On a la solution périodique évidente  $X = \rho \cos t$ . La condition (8.2) devient

$$(2) \quad I = \int_0^{2\pi} F(\rho \cos t, -\rho \sin t) \sin^2 t dt > 0.$$

<sup>(1)</sup> *Ann. franç. Chron.*, 1942, p. 105 à 195.

<sup>(2)</sup> Cette formule non homogène suppose qu'on a choisi l'unité de temps. Si celle-ci était arbitraire, on devrait faire précéder le dernier terme du facteur  $\omega^2$ . Nous ne le faisons pas, pour simplifier l'écriture. De plus, nous remplaçons la lettre  $x$  par  $z$ .

Il y a évidemment une infinité de fonctions  $F$  remplissant cette condition et par suite une *infinité d'oscillateurs admettant une oscillation sinusoïdale stable, dont l'amplitude et la période sont choisies à l'avance.*

En particulier, la condition (2) est certainement remplie si la fonction  $F$  est identiquement positive.

2. Employons les variables signalées au n° 21.4; elles sont définies par les formules

$$(3) \quad z = y \cos \varphi, \quad z' = -y \sin \varphi, \quad \varphi = t + x.$$

Les fonctions  $x$  et  $y$  vérifient le système

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = 2GF \sin \varphi \cos \varphi, \quad \frac{dy}{dt} = 2y GF \sin^2 \varphi \quad (1).$$

On a, en posant  $G'(\varphi) = m$ ,

$$(5) \quad \begin{cases} p_{11} = 0, & p_{12} = 2mF(\rho \cos t, -\rho \sin t) \sin t \cos t, \\ p_{21} = 0, & p_{22} = 2\rho mF(\rho \cos t, -\rho \sin^2 t) \sin t. \end{cases}$$

Le système linéaire associé est, en appelant  $u$  et  $v$  les fonctions inconnues :

$$(6) \quad u' = \rho m F \sin 2t, \quad v' = 2\rho \rho m F \sin^2 t.$$

Son intégrale générale est

$$(7) \quad u = AV(t) + B, \quad v = Ae^{\Delta t},$$

avec

$$(8) \quad \Delta(t) = 2\rho m \int_0^t F \sin^2 t dt, \quad V(t) = m \int_0^t e^{\Delta} F \sin 2t dt.$$

Le *décroissement* est

$$(9) \quad S = e^{\Delta(2\pi)},$$

ce qu'on aurait pu obtenir aussi par le n° 1.2.

Les solutions fondamentales sont

$$(10) \quad y_1^1 = 1, \quad y_1^2 = 0; \quad y_2^1 = V(t) + c, \quad y_2^2 = e^{\Delta}, \quad c = \frac{V(2\pi)}{S-1}.$$

D'où l'on déduit

$$(11) \quad H_1^1 = 1, \quad H_1^2 = -e^{-\Delta}[V(t) + c].$$

3. *Synchronisation.* — Soit  $\lambda g(z, z', t)$  l'accélération perturbatrice. En revenant au changement de variables (3), on voit que les fonctions perturbatrices du système (4) sont

$$(12) \quad g_1 = -\frac{g}{y} \cos \varphi, \quad g_2 = -g \sin \varphi.$$

(1) De ces équations on peut déduire facilement que si l'on suppose  $0 < m < F < M$  et  $M|G| < h < 1$ , pour  $0 < \rho - R < y < \rho + R$ ;  $g(y) > 0$  pour  $\rho - R < y < \rho$ ,  $g(y) < 0$  pour  $\rho < y < \rho + R$ ;  $\rho - R < y_0 < \rho + R$ ;  $y$  tend vers  $\rho$  et  $x'$  vers zéro pour  $t = +\infty$ ; le mouvement tend vers le mouvement sinusoïdal (cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1567-68).

Portant dans (2.1), on a

$$(13) \quad G(\mu) = \int_0^{2\pi} g(\rho \cos t, -\rho \sin t, t - \mu) \left[ e^{-\Delta(V+c) \sin t - \frac{\cos t}{\rho}} \right] dt.$$

D'où l'équation en  $\mu$  et l'indice de stabilité.

Si l'on connaît explicitement la fonction  $F(z, z')$  et si les données sont entièrement numériques, on peut continuer l'application de la méthode générale. Nous allons le faire pour l'oscillateur conçu et réalisé par M. Abelé.

4. *Oscillateur de M. Abelé.* — Les fonctions  $G$  et  $F$  ont les expressions suivantes <sup>(1)</sup> :

$$(14) \quad G(y) = \rho^2 - y^2, \quad F(z, z') = \frac{a}{\rho^2 - azz' + \sqrt{(\rho^2 - azz')^2 + \rho^2(y^2 - \rho^2)}},$$

où  $a$  désigne une constante positive <sup>(2)</sup>.

La fonction  $F$  est compliquée. Mais, la constante  $a$  vaut <sup>(3)</sup>  $1,81 \cdot 10^{-5}$ ; elle est très petite. Comme  $|zz'| < y^2 < \rho^2$ , on peut négliger  $azz'$  devant  $\rho^2$  et l'on a, avec une erreur relative de l'ordre de  $10^{-5}$ ,

$$(15) \quad F = \frac{a}{\rho(\rho + y)}.$$

Comme  $m = -2\rho$ , la première formule (8) donne immédiatement

$$(16) \quad \Delta(t) = -aw, \quad w = t - \sin t \cos t.$$

D'où

$$(17) \quad S = e^{-2\pi a} = 1 - 2\pi a + O(a^2).$$

La deuxième formule (8) donne ensuite, à  $O(a^2)$  près,

$$(18) \quad V(t) = -\frac{a}{\rho} \sin^2 t.$$

La constante  $c$  est nulle et la formule (13) devient, à  $O(a^2)$  près,

$$(19) \quad G(\mu) = -\frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} g(\rho \cos t, -\rho \sin t, t - \mu) (\cos t + a \sin^3 t) dt.$$

5. Examinons le cas où l'on synchronise par une *force sinusoïdale*. Soit

<sup>(1)</sup> *Loc. cit.*, p. 139.

<sup>(2)</sup> Sa signification physique est la suivante. En régime de démarrage, le décrétement logarithmique des oscillations est  $2\pi a$ ; il doit être positif pour que l'amplitude augmente.

<sup>(3)</sup> *Loc. cit.*, p. 188.

$g = \cos \omega t$ , avec  $\omega = 1 + \lambda \beta$ . Comme on doit faire  $\lambda = 0$  sous le signe  $\int$  de (19), on peut prendre  $g = \cos t$  et l'on a

$$(20) \quad G(\mu) = -\frac{\pi}{\rho} \left( \cos \mu + \frac{3a}{4} \sin \mu \right).$$

L'équation en  $\mu$  est

$$(21) \quad 2\beta\rho = -\cos \mu - \frac{3a}{4} \sin \mu.$$

On peut pratiquement négliger le second terme du second membre. Pour que la synchronisation soit possible, il faut que l'on ait

$$(22) \quad -1 < 2\beta\rho < 1.$$

L'indice de stabilité est

$$\sigma = \frac{\pi}{\rho} \left( \sin \mu - \frac{3a}{4} \cos \mu \right) \simeq \frac{\pi}{\rho} \sin \mu.$$

La racine stable est comprise entre 0 et  $-\pi$ . Le mouvement est en retard sur la force.

Dans le cas d'une force perturbatrice indépendante du temps, la formule (25.4) donne, à  $O(\lambda^2)$  et  $O(\lambda a)$  près,

$$(23) \quad \Delta T = 2\pi \frac{\lambda}{\rho} \int_0^{2\pi} g(\rho \cos t, -\rho \sin t) \cos t \, dt.$$

6. *Oscillateur Abelé considéré comme un oscillateur quasi linéaire.* — Le premier terme du second membre de (1) vaut approximativement  $2a \frac{z'}{\rho} (\rho - y)$ ; il est très petit. On peut donc considérer l'oscillateur de M. Abelé comme un oscillateur linéaire soumis à l'accélération perturbatrice  $2a \frac{z'}{\rho} (\rho - y)$ . Dès lors, on peut lui appliquer la théorie générale de (III).

Revenons à la synchronisation par une force sinusoïdale. Avec les notations du n° 13, III, nous avons (1)

$$\omega = 1, \quad h = \lambda, \quad F(q, q') = \frac{2aq'(\rho - y)}{\rho}.$$

Les formules (20, III) donnent immédiatement

$$H(y) = 0, \quad J(y) = \frac{2a}{\rho} y(y - \rho).$$

Les équations (21, III) s'écrivent ensuite, en remarquant que  $x$  et  $\varepsilon$  sont ici  $\mu$  et  $-2\lambda\beta + O(\lambda^2)$ ,

$$(24) \quad \cos \mu = -2\beta y, \quad \lambda \sin \mu = 2a(\rho - y) \frac{y'}{\rho};$$

(1) Nous remplaçons ici le facteur  $\lambda$  du n° 13, III par 1.

d'où

$$(25) \quad \lambda^2 = 4\gamma^2[\lambda^2\beta^2 + \alpha(\gamma - \rho)^2], \quad \alpha = \frac{a^2}{\rho^2}.$$

Cette équation détermine l'amplitude du mouvement synchronisé. Les conditions (25, III) s'écrivent

$$(26) \quad \gamma > \frac{2}{3}\rho, \quad \alpha(\gamma - \rho)(2\gamma - \rho) + \lambda^2\beta^2 > 0.$$

Posons

$$(27) \quad 2\beta\gamma = z, \quad \frac{\lambda^2\beta^2k^2}{a^2} = u, \quad 2\beta\rho = k.$$

L'équation (25) et les inégalités (26) deviennent

$$(28) \quad u = \frac{z^2(z - k)^2}{1 - z^2},$$

$$(29) \quad z > \frac{2k}{3}, \quad u > (2z - k)(k - z).$$

Il faut que  $u$  soit  $> 0$ ; donc,  $z < 1$ . La première condition (29) exige alors  $k < \frac{3}{2}$ , ce que nous supposons. La deuxième inégalité (29) s'écrit, d'après (28),

$$(30) \quad (k - z)(z^3 - 2z + k) > 0.$$

On peut interpréter graphiquement en construisant la courbe  $(z, u)$  pour  $\frac{2k}{3} < z < 1$ . On a

$$\frac{du}{dz}(1 - z^2)^2 = 2z(k - z)(z^3 - 2z + k).$$

D'après (30), les arcs stables sont les arcs ascendants. Une discussion élémentaire, que nous ne reproduisons pas, conduit aux conclusions suivantes :

*La synchronisation est possible si petit que soit  $\lambda$ , pour  $\beta < \frac{1}{2\rho}$ ; pour  $\frac{1}{2\rho} < \beta < \frac{3}{4\rho}$ , elle n'est possible que si  $\lambda$  dépasse une certaine limite; pour  $\beta > \frac{3}{4\rho}$ , elle est impossible.*

7. Si  $\lambda$  tend vers zéro, les formules (24) donnent, à la limite,  $\gamma = \rho$  et  $\cos \mu = -2\rho\beta$ . La deuxième formule diffère de (21) par le terme en  $a \sin \mu$ . Mais, il ne faut pas oublier que les fonctions  $H(\gamma)$  et  $J(\gamma)$  du n° 14, III doivent être calculées en supposant  $x$  et  $y$  constants, c'est-à-dire en supprimant les forces perturbatrices. Dans le cas actuel, on doit donc faire  $a = 0$  et la différence ci-dessus disparaît.

L'équation (21) est théoriquement plus exacte; pratiquement, la différence est insignifiante, vu la petitesse de  $a$ .

En ce qui concerne la stabilité, nous devons retrouver la condition  $\sin \mu < 0$  du n° 5. Effectivement, si l'on se reporte à la discussion mentionnée au n° 6, on constate que dans le premier cas, qui seul convient pour  $\lambda$  infiniment petit,  $z$  est  $> k$  sur l'arc stable; donc  $y > \rho$ . La deuxième formule (24) nous montre alors que  $\sin \mu$  est bien négatif. *La concordance entre les deux méthodes est parfaite.*

8. Si la force perturbatrice est indépendante du temps, on a, d'après (26, III):

$$(31) \quad \beta = \frac{-1}{2\pi y \lambda} \int_0^{2\pi} g(y \cos \varphi, -y \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

$$(32) \quad \int_0^{2\pi} g(y \cos \varphi, -y \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

La deuxième équation détermine l'amplitude et la première donne la perturbation de période. Ces deux formules mettent en évidence *l'intérêt de l'oscillateur de M. Abelé considéré comme appareil horaire.*

Dans un appareil horaire ordinaire (montre ou pendule), le mouvement est entretenu par l'échappement, lequel introduit généralement un défaut d'isochronisme. Si les résistances passives ou le couple moteur varie, l'amplitude des oscillations varie également; d'où résulte une variation de marche (avance aux petites amplitudes).

Avec l'appareil de M. Abelé, l'entretien du mouvement est assuré par l'appareil lui-même et la perturbation de période résultant d'une force perturbatrice quelconque est donnée par la formule (31), la perturbation d'amplitude étant donnée par (32). Si la force perturbatrice est une résistance passive, donc une fonction impaire de  $\sin \varphi$ , la formule (31) donne  $\beta = 0$ ; la perturbation de marche est nulle, malgré la perturbation subie par l'amplitude.

En somme, *l'oscillateur de M. Abelé fonctionne comme un chronomètre qui serait entretenu par un échappement isochrone*, tel que l'échappement à détente; ce qui est un avantage très appréciable.

## CHAPITRE IV.

### OSCILLATEUR DE RELAXATION.

1. *Formules générales.* — Dans (IV) et (V), nous avons fait une étude approfondie du mouvement autonome. Les résultats de cette étude devant être constamment utilisés dans le présent Chapitre, nous allons d'abord rappeler quelques notations et formules essentielles.

L'équation différentielle du mouvement perturbé est (1)

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(x)}{\varepsilon} \frac{dx}{dt} - x + \lambda F(x, x', t).$$

Nous avons appelé *courbe fondamentale* la courbe ( $\Gamma$ ) représentant la fonction (2)

$$(2) \quad \varphi(x) = \int_0^x f(x) dx.$$

En ce qui concerne cette courbe, nous nous bornerons à considérer les deux cas suivants :

*Cas I.* — La courbe est *analytique* dans toute sa partie utile et a la forme indiquée sur la figure 4.

*Cas II.* — Elle comprend trois arcs analytiques ayant la forme indiquée sur la figure 5.

Dans les deux cas, nous admettrons que *l'origine est centre de symétrie*.

Nous appellerons ( $a, \varphi_A$ ) les coordonnées du *point terminal* A du cycle et nous poserons au voisinage de ce point

$$(3) \quad x = a - \xi, \quad \varphi = \varphi_A - A\xi + O(\xi^2).$$

Nous appellerons ( $b, \varphi_B$ ) les coordonnées du point le plus bas de ( $\Gamma$ ).

Dans le cas I, nous poserons, au voisinage de ce point,

$$(4) \quad x = b + \xi, \quad \varphi = \varphi_B + B\xi^2 + O(\xi^3).$$

Dans le cas II, nous poserons

$$(5) \quad \begin{cases} x = b + \xi, & \varphi = \varphi_B + B\xi + O(\xi^2) & (\text{à droite de B}); \\ x = b - \xi, & \varphi = \varphi_B + C\xi + O(\xi^2) & (\text{à gauche de B}). \end{cases}$$

Les coefficients A, B, C sont des constantes positives.

2. Pour transformer l'équation (1) en un système de deux équations du premier ordre, on pourrait utiliser indifféremment les variables du Chapitre II, ou celles du Chapitre III, ou les *variables de Liénard*. Nous adopterons celles-ci, parce que ce sont celles que nous avons employées dans (IV) et (V). Rappelons leur définition.

La première est  $x$ ; la deuxième est la variable  $y$  définie par les formules suivantes :

$$(6) \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{u}{\varepsilon}, \quad y = \varphi - u.$$

(1) Nous supposons qu'on a choisi l'unité de temps de telle manière que  $\omega = 1$ .

(2) Dans (IV) et (V), nous avons  $\lambda$  au lieu de  $\varphi$ .

Rappelons la formule

$$(7) \quad \frac{du}{dx} = \varphi'(x) - \frac{\varepsilon^2 x}{u}.$$

Au mouvement périodique autonome correspond, dans le plan  $(x, y)$ , le cycle  $(C)$  représenté schématiquement sur les figures 4 et 5. Ce cycle est symétrique par rapport à  $O$ . Il est parcouru dans le sens rétrograde quand  $t$  croît.

Nous prendrons pour *origine des temps*, dans le mouvement périodique autonome, l'instant où le point  $M(x, y)$  traverse  $S$  de gauche à droite, c'est-à-dire l'instant où l'oscillateur passe à sa position d'équilibre dans le sens positif.

Si l'on pose  $z_1 = x, z_2 = y$ , on a, en introduisant tout de suite le déphasage  $\mu$  :

$$(8) \quad \frac{dz_1}{dt} = \frac{z_2 - \varphi(z_1)}{\varepsilon}, \quad \frac{dz_2}{dt} = -\varepsilon z_1 + \lambda \varepsilon F\left(z_1, \frac{z_2 - \varphi}{\varepsilon}, t - \mu\right).$$

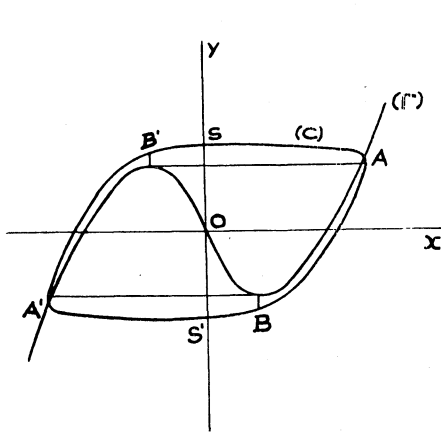


Fig. 4.

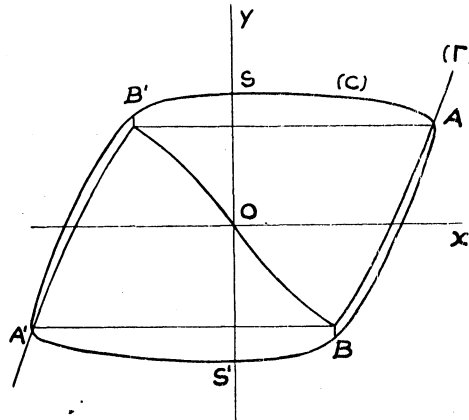


Fig. 5.

Les coefficients du système linéaire associé sont, en convenant une fois pour toutes que les lettres  $x, y$  se rapportent à un point de  $(C)$ ,

$$(9) \quad p_{11} = -\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon}, \quad p_{12} = \frac{1}{\varepsilon}, \quad p_{21} = -\varepsilon, \quad p_{22} = 0.$$

Les fonctions perturbatrices sont

$$(10) \quad g_1 = 0, \quad g_2 = \varepsilon F\left(x, -\frac{u}{\varepsilon}, t - \mu\right).$$

En appliquant la formule (122, I) et tenant compte de (6), on a, en appelant  $M$  un point quelconque de l'arc  $SAS'$ ,

$$(11) \quad \Delta(M) = \int_S^M \frac{d\varphi}{u}.$$

Grâce à la symétrie de la courbe fondamentale, le *décroissement* est  $S = e^{2\Delta'}$ , en posant  $\Delta' = \Delta(S')$ .



3. *Solutions fondamentales du système linéaire associé.* — On en connaît une *a priori* (n° 38, 1) :

$$(12) \quad y_1^1 = \frac{dx}{dt} = -\frac{u}{\varepsilon}, \quad y_2^1 = \frac{dy}{dt} = -\varepsilon x;$$

ce qu'on peut vérifier directement au moyen de (7) et (9).

La deuxième s'écrit

$$(13) \quad y_1^2 = \varepsilon u V_1, \quad y_2^2 = \varepsilon x V_2,$$

les fonctions  $V_1$  et  $V_2$  étant déterminées, sur l'arc  $SAS'$ , de la manière suivante. Nous posons d'abord, pour tout point  $M$  de l'arc  $SA$ , sauf le point  $A$  :

$$(14) \quad V_1^1(M) = \int_S^M \frac{e^\Delta}{u^2} dx + C,$$

$C = V_1(S)$  désignant une constante *inconnue*. De l'identité

$$(15) \quad y_1^1(t) y_2^2(t) - y_2^1(t) y_1^2(t) = e^{\Delta(t)},$$

on déduit

$$(16) \quad \varepsilon^2 V_1(M) - V_2(M) = \frac{e^{\Delta(M)}}{ux}.$$

Cette formule nous permet de calculer  $V_2(M_1)$  en un point  $M_1$  arbitrairement choisi sur  $SA$ . Nous avons ensuite, de  $M_1$  à  $A$  *inclus* (1)

$$(17) \quad V_2(M) = V_2(M_1) + \int_{M_1}^M \frac{e^\Delta}{ux^2} dx.$$

4. On a, par hypothèse, en appelant  $T$  la période

$$y_i^2(t+T) = S y_i^2(t).$$

D'autre part, si l'on change  $t$  en  $t + \frac{T}{2}$ ,  $x(t)$  se change en  $-x(t)$ ; comme  $\varphi'(x)$  est une fonction paire, les  $p_{ij}$  des formules (9) sont invariants. Il s'ensuit que  $y_i^2\left(t + \frac{T}{2}\right)$  est une solution du système associé et l'on peut poser

$$y_i^2\left(t + \frac{T}{2}\right) = C_1 y_i^1(t) + C_2 y_i^2(t).$$

D'où

$$y_i^2(t+T) = S y_i^2(t) = -C_1 y_i^1(t) + C_2 [C_1 y_i^1(t) + C_2 y_i^2(t)].$$

Donc,  $C_1(C_2 - 1) = 0$ ,  $C_2^2 = S$ ; d'où  $C_1 = 0$ , puisque  $C_2 \neq 1$ .

Remplaçant  $t$  par  $t + \frac{T}{2}$  dans (15), il vient

$$-C_2 e^{\Delta(t)} = e^{\Delta\left(t + \frac{T}{2}\right)}.$$

Donc,  $C_2 = -e^{\Delta'}$ .

(1) Et même, si l'on veut, jusqu'à  $S'$  exclu.

Les formules (13) nous montrent ensuite que *les fonctions*  $V_i(M)$  *doivent être multipliées par*  $e^{\Delta}$  *quand*  $M$  *décrit un demi-cycle dans le sens rétrograde.*

Cela étant, posons, pour tout point  $M$  de l'arc  $S'A$ , sauf  $A$  :

$$(18) \quad V_1(M) = \int_S^M \frac{e^{\Delta}}{u^3} dx + C', \quad C' = C e^{\Delta}.$$

En utilisant la formule (16), nous pouvons donc calculer  $V_2(M_2)$  pour un point  $M_2$  arbitrairement choisi sur  $S'A$ . Nous avons ensuite  $V_2(M)$ , de  $M_2$  à  $A$  inclu <sup>(1)</sup>, par la formule (17), où  $M_1$  est simplement remplacé par  $M_2$ .

Cette méthode et celle du n° 3 nous permettent de calculer  $V_2(A)$  de deux manières différentes. En égalant les deux résultats, on aura la constante  $C$ .

5. *Calcul de la fonction*  $G(\mu)$ . — Elle est donnée par la formule (2.1).

Posons

$$(19) \quad X_1 = V_1 e^{-\Delta}.$$

Nous avons  $H_2' = -\varepsilon u X_1$ ; puis, d'après (10) :

$$(20) \quad G(\mu) = -\varepsilon^2 \int_0^T u X_1 F dt = \varepsilon^3 \int_{(C)} X_1(M) F(M) dx,$$

le cycle  $(C)$  devant être parcouru dans le sens rétrogradé.

Soit  $M$  un point quelconque de l'arc  $SAS'$  et  $M'$  le point symétrique par rapport à  $O$ . D'après la propriété établie au n° 4, on a  $X_1(M') = X_1(M)$ ; nous dirons que  $X_1(M)$  est une *fonction paire*.

Posons

$$(21) \quad D(F) = \int_{(SAS')} X_1(M) F(M) dx,$$

$F(M)$  désignant ce que devient la fonction  $F(x, -\frac{u}{\varepsilon}, t - \mu)$  pour les valeurs de  $x, u, t$  correspondant au point  $M$ . Appelons  $\bar{F}(M)$  la fonction égale à  $-F(M')$ . La formule (20) s'écrit

$$(22) \quad G(\mu) = \varepsilon^3 [D(F) + D(\bar{F})].$$

En particulier, si  $F(M)$  est une fonction paire, la fonction  $G(\mu)$  est identiquement nulle; la synchronisation est impossible si la force perturbatrice dépend de  $t$ ; si elle n'en dépend pas, elle ne perturbe pas la période <sup>(2)</sup>.

(1) Et même, si l'on veut, jusqu'à  $S$  exclu.

(2) Plus exactement, la perturbation de période vaut au plus  $O(\lambda^2)$ . De même, dans le cas d'une force périodique, nous ne pouvons affirmer l'impossibilité de la synchronisation, pour  $\lambda$  infiniment petit, que si la fréquence de la force n'est pas exactement un multiple de la fréquence propre, ce qui est toujours le cas dans la pratique. Dans le cas théorique où le rapport des fréquences serait rigoureusement entier, nous ne pouvons rien dire. Pour savoir ce qui se passe, il faudrait reprendre la théorie générale de (I) dans le cas où la fonction  $G(\mu)$  est identiquement nulle.

Si  $F(M)$  est une fonction impaire, on a, au contraire,

$$(23) \quad G(\mu) = 2\varepsilon^3 D(F).$$

6. *Cas où  $\varepsilon$  est très petit.* — En considérant  $\varepsilon$  comme un *infinitement petit principal* et utilisant les développements asymptotiques calculés dans (IV), on peut démontrer l'existence et indiquer le moyen de calcul des développements asymptotiques des diverses fonctions ou nombres intervenant dans la présente théorie. Si l'on en juge par la complexité des calculs concernant l'oscillation autonome, il faut s'attendre à des calculs laborieux. Pour ne pas trop allonger le présent travail, nous ne reproduirons pas les démonstrations auxquelles il vient d'être fait allusion. De plus, nous nous contenterons de calculer le premier terme du développement asymptotique de la fonction  $G(\mu)$ .

En ce qui concerne l'ordre infinitésimal, nous adopterons la définition donnée au n° 8, IV. L'ordre exponentiel sera représenté par le symbole  $O(\exp)$ .

Rappelons que les développements asymptotiques calculés dans (IV) sont de nature différente suivant qu'on se trouve sur l'arc SA, l'arc AB, ou l'arc BS'. On passe de l'un à l'autre par des développements intermédiaires, utilisant les *variables de raccordement*. Le *point de raccordement*  $M_1$  peut être choisi arbitrairement entre certaines limites. Nous rappelons ci-dessous les limites entre lesquelles doit être compris l'ordre  $\alpha$  de l'écart  $\xi_1$  :

*Avant A* :  $0 \leq \alpha < 2$  (nos 24 et 10, IV);

*Après A* :  $1 < \alpha < 2$  (n° 29, IV);

*Avant B* :  $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$ , cas I (n° 33, IV);  $M_1$  en B, cas II (n° 32, IV);

*Après B* :  $0 \leq \alpha < \frac{2}{3}$ , cas I;  $0 \leq \alpha < 2$ , cas II (nos 36 et 10, IV).

Rappelons aussi le principe suivant lequel s'effectuent les raccordements. On connaît le développement *avant*. Le développement *après* est connu à une constante additive près. Cette constante se calcule en égalant les termes constants (c'est-à-dire indépendants de  $\xi$ ) des deux développements.

#### I. — Calcul de $\Delta$ .

7. *Arc SA.* — On a (n° 27, IV)

$$(24) \quad u = \varphi - \varphi_A + O(\varepsilon^2);$$

d'où

$$(25) \quad \Delta = \log \frac{\varphi_A - \varphi}{\varphi_A} + O(\varepsilon^2).$$

8. *Voisinage de A.* — Nous utilisons les *variables de raccordement* définies par (n<sup>os</sup> 19, 21, 24, IV) (1)

$$(26) \quad \xi = \theta s, \quad s = Z - W, \quad W = 1 - e^{-Z}, \quad ds = W dZ, \quad \Lambda^2 \theta = a \varepsilon^2.$$

On a (n<sup>o</sup> 30, IV)

$$(27) \quad u = \Lambda \theta W + O(\theta^2).$$

D'où

$$\Delta = -Z + O(\theta) + c \quad (c = \text{const.}).$$

Au point de raccordement de SA, on a (n<sup>o</sup> 25, IV)  $Z = -\log s + O\left(\frac{1}{s}\right)$ . D'où  $\Delta = \log \xi - \log \theta + c + O(\theta)$ . En comparant avec le développement de la formule (25), on en déduit  $c = \log \theta \Lambda - \log \varphi_\Lambda$ . Donc

$$(28) \quad \Delta = -Z + \log \frac{\theta \Lambda}{\varphi_\Lambda} + O(\varepsilon^2).$$

Au point de raccordement de AB, on a  $Z = s + 1 + O(e^{-s})$ ; donc

$$\Delta = -1 + \log \frac{\theta \Lambda}{\varphi_\Lambda} + O(\varepsilon^2) + \text{termes en } \xi.$$

9. *Arc AB.* — On a (n<sup>os</sup> 31 et 52, IV)

$$(29) \quad u = \varepsilon^2 \frac{x}{\varphi'} + \varepsilon^4 \frac{x(\varphi' - x\varphi'')}{\varphi'^4} + O(\varepsilon^6).$$

D'où

$$\Delta = -\frac{p(x)}{\varepsilon^2} + \log \frac{a\varphi'}{x} + O(\varepsilon^2) + c \quad (c = \text{const.}),$$

avec

$$(30) \quad p(x) = \int_x^a \frac{\varphi'^2}{x} dx.$$

Au point de raccordement avec A, on a  $\Delta = \log \Lambda + c + O(\varepsilon^2) + \text{termes en } \xi$ . En comparant avec le développement du n<sup>o</sup> 8, on obtient

$$c = -1 + \log \frac{\theta}{\varphi_\Lambda} + O(\varepsilon^2).$$

Donc

$$(31) \quad \Delta = -\frac{p(x)}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{a\varphi'\theta}{\varphi_\Lambda x} + O(\varepsilon^2).$$

10. *Voisinage de B (cas I).* — On utilise la variable de raccordement définie par (n<sup>o</sup> 24, IV)

$$(32) \quad \xi = \theta_1 s, \quad B^2 \theta_1^2 = b \varepsilon^2,$$

(1) Ici, Z est changé en  $-Z$ .

à laquelle est associée la variable  $Z$  vérifiant

$$ds = W dZ, \quad W = s^2 - Z,$$

et asymptotique à  $s^2$  pour  $s = +\infty$  (n° 32, IV). On a alors, d'après (93, IV),

$$(33) \quad u = B\theta_1^2 W + O(\theta_1^3).$$

D'où

$$(34) \quad \Delta = P(s) + O(\theta_1) + c \quad (c = \text{const.}),$$

avec

$$(35) \quad P(s) = 2 \int_0^s \frac{s}{W} ds.$$

Au point de raccordement de AB, on a, d'après (84, IV),

$$\frac{s}{W} = 2s^2 + \frac{1}{2s} + \dots$$

D'où

$$(36) \quad P(s) = g + \frac{4}{3}s^3 + \log s + \text{série en } \frac{1}{s^3},$$

avec

$$(37) \quad g = P(s_1) - \frac{4}{3}s_1^3 - \log s_1 + \int_{s_1}^{+\infty} \left( \frac{2s}{W} - 4s^2 - \frac{1}{s} \right) ds,$$

$s_1$  pouvant être choisi arbitrairement entre zéro et  $+\infty$ .

En remplaçant  $s$  par  $\frac{\xi}{\theta_1}$ , on a

$$\Delta = c + g - \log \theta_1 + O(\theta_1) + \text{termes en } \xi.$$

En développant (31), on a, d'autre part, en posant  $q = p(b)$ ,

$$\Delta = -\frac{q}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{2aB\theta}{b\varphi_A} + O(\varepsilon^2) + \text{termes en } \xi.$$

En comparant, on obtient

$$(38) \quad c = -g - 1 - \frac{q}{\varepsilon^2} + \log \frac{2aB\theta_1}{b\varphi_A} + O(\theta_1).$$

Au point de raccordement avec BS', on a (n° 59, IV)

$$\frac{s}{W} = \frac{1}{s} - \frac{H}{s^3} + \dots$$

D'où

$$(39) \quad P(s) = 2 \log(-s) - g_1 + \frac{H}{s^2} + \dots,$$

avec

$$(40) \quad g_1 = -P(s_1) + 2 \log(-s_1) + 2 \int_{-\infty}^{s_1} \left( \frac{s}{W} - \frac{1}{s} \right) ds \quad (s_1 \text{ arbitraire entre zéro et } -\infty).$$

On a donc

$$(41) \quad \Delta = c - g_1 - 2 \log \theta_1 + O(\theta_1) + \text{termes en } \xi.$$

11. *Voisinage de B* (cas II). — On peut appliquer les formules (29) et (31) jusqu'au point B. Elles donnent en ce point

$$u_B = \varepsilon^2 \frac{b}{B}, \quad \Delta(B) = -\frac{g}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{aB\theta}{b\varphi_A}.$$

A gauche de B, la variable de raccordement est définie par les formules (nos 21, 36, IV)

$$(42) \quad \xi = \theta_1 s, \quad C^2 \theta_1 = b\varepsilon^2, \quad s = W - Z, \quad W = (Z_0 + 1)e^{Z - Z_0 - 1}, \quad Z_0 = \frac{C}{B}.$$

On a

$$(43) \quad u = C\theta_1 W + O(\theta_1^2);$$

d'où

$$(44) \quad \Delta = Z - Z_0 - 1 - \frac{g}{\varepsilon^2} + \log \frac{aB\theta}{b\varphi_A} + O(\theta_1).$$

Pour  $s$  très grand, on a (n° 38, IV)

$$Z = \log s + Z_0 - \log(Z_0 + 1) + \text{série en } \frac{1}{s};$$

d'où

$$(45) \quad \Delta = -\frac{g}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{aB\theta}{b\varphi_A(Z_0 + 1)\theta_1} + \text{termes en } \xi.$$

12. *Arc BS'* (cas I). — On a (n° 43, IV)

$$(46) \quad u = \varphi - \varphi_B + O(\theta_1^2);$$

d'où, en se rappelant que  $-\varphi_B = \varphi_A$ ,

$$(47) \quad \Delta = \log \frac{\varphi - \varphi_B}{\varphi_A} + \Delta' + O(\theta_1^2).$$

Au point de raccordement avec B, le développement de  $\Delta$  est

$$\log \frac{B}{\varphi_A} + \Delta' + \text{termes en } \xi.$$

En comparant avec (41), on obtient

$$(48) \quad \Delta' = c - g_1 + \log \frac{\varphi_A}{B\theta_1^2} = -1 - g - g_1 - \frac{g}{\varepsilon^2} + \log \frac{2a\theta}{b\theta_1} + O(\theta_1).$$

En utilisant les données numériques du n° 3, V, on trouve approximativement  $g = 0,295$  et  $g_1 = 0,343$ . On en déduit le *décroissement*

$$(49) \quad S = e^{2\Delta'} = 0,151 e^{-\frac{2g}{\varepsilon^2} - \frac{8}{\varepsilon^3} \alpha^4} \left( \frac{B}{b^2} \right)^{\frac{4}{3}},$$

avec une erreur relative  $O(\theta_1) = O\left(\frac{2}{\varepsilon^{\frac{2}{3}}}\right)$ .

13. Arc BS' (cas II). — On a encore la formule (47), sauf l'erreur, qui vaut ici  $O(\theta_1) = O(\varepsilon^2)$ . Dans le voisinage de B, le développement de  $\Delta$  est  $\log \frac{C}{\varphi_A} + \Delta' + \text{termes en } \xi$ . En comparant avec (45), on obtient

$$(50) \quad \begin{aligned} \Delta' &= -\frac{q}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{aB\theta}{bC(Z_0+1)\theta_1} + O(\varepsilon^2) \\ &= -\frac{q}{\varepsilon^2} - 1 + \log \frac{a^2 B^2 C}{b^2 A^2 (B+C)} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

D'où

$$(51) \quad S = \frac{a^4 B^4 C^2}{b^4 A^4 (B+C)^2} e^{-\frac{2q}{\varepsilon^2} - 2}.$$

On voit que, dans tous les cas, *le décrement est infiniment petit d'ordre exponentiel*. Donc, *la stabilité des oscillations autonomes augmente très rapidement quand  $\varepsilon$  diminue, c'est-à-dire quand le caractère de relaxation devient plus accentué*. Ceci est à rapprocher de la propriété démontrée au n° 15, IV concernant *l'accumulation des trajectoires*. A chaque tour, la distance du point M au cycle décroît en progression géométrique de raison  $O(\exp)$ .

14. Nous rassemblons ci-dessous les valeurs de  $e^\Delta$  et de  $u$ . Les nombres inscrits à droite sont l'ordre de l'erreur relative pour la première colonne, de l'erreur absolue pour la seconde.

	$e^\Delta$ .	$u$ .
Arc SA.....	$\frac{\varphi_A - \varphi}{\varphi_A}, 2$	$\varphi - \varphi_A, 2$
Voisinage de A.....	$\frac{A\theta}{\varphi_A} e^{-z}, 2$	$A\theta W, 4$
Arc AB.....	$\frac{a\theta\varphi'}{x\varphi_A} e^{-1-\frac{p}{\varepsilon^2}}, 2$	$\varepsilon^2 \frac{x}{\varphi'}, 4$
Voisinage de B (cas I)...	$\frac{2aB\theta\theta_1}{b\varphi_A} e^{-1-g-\frac{q}{\varepsilon^2}+P(s)}, \frac{2}{3}$	$B\theta_1^2 W, 2$
A gauche de B (cas II)...	$\frac{aB\theta}{b\varphi_A} e^{-1-\frac{q}{\varepsilon^2}+z-z_0}, 2$	$C\theta_1 W, 2$
Arc BS'.....	$\frac{\varphi - \varphi_B}{\varphi_A} e^{\Delta'}, \frac{4}{3} \text{ (cas I)}, 4 \text{ (cas II)}$	$\varphi - \varphi_B, \frac{4}{3} \text{ (cas I)}, 4 \text{ (cas II)}$ .

On a enfin, avec une erreur relative  $O(\theta_1)$  :

$$e^{\Delta'} = \frac{2a\theta}{b\theta_1} e^{-1-g-s_1-\frac{q}{\varepsilon^2}}, \text{ (cas I)}; \quad e^{\Delta'} = \frac{a^2 B^2 C}{b^2 A^2 (B+C)} e^{-1-\frac{q}{\varepsilon^2}} \text{ (cas II)}$$

II. — Calcul de D (F).

15. Calcul de la constante C. — La formule (14) s'écrit, d'après le tableau précédent :

$$(52) \quad V_1(M_1) = C + H(x_1) + \varepsilon^2 R(x_1), \quad H(x_1) = -\frac{1}{\varphi_A} \int_0^{x_1} \frac{dx^2}{(\varphi - \varphi_A)^2}.$$

D'où, par (16) et (17), en prenant  $M_1$  au point de raccordement avec A,

$$V_2(A) = \varepsilon^2 C + \varepsilon^2 H(x_1) + \varepsilon^4 R(x_1) - \frac{e^{\Delta_1}}{u_1 x_1} + \frac{0}{a^2 \varphi_A} K(s_1) + 0^2 \rho(s_1),$$

avec

$$K(s_1) = \int_0^{s_1} \frac{e^{-z}}{W} ds = W_1 = Z_1 - s_1.$$

Comme  $V_2(A)$  est indépendant de  $x_1$ , on ne doit garder que les termes constants au second membre, en supposant qu'on remplace les fonctions de  $x_1$  par leurs développements suivant la variable  $\xi_1$ , et les fonctions de  $s_1$  par leurs développements asymptotiques. Le seul terme non infiniment petit est  $-\frac{e^{\Delta_1}}{u_1 x_1} = \frac{1}{\varphi_A x_1} + O(\varepsilon^2)$ . Le terme constant de son développement est  $\frac{1}{a \varphi_A}$ . On a donc

$$(53) \quad V_2(A) = \varepsilon^2 C + \frac{1}{a \varphi_A} + O(\varepsilon^2).$$

16. Prenons  $M_2$  sur BA, à distance finie de B. Nous avons, d'après (18),

$$V_1(M_2) - C' = \int_{S'}^{M_2} \frac{e^{\Delta}}{u^3} dx.$$

Sur  $S'M_2$ ,  $u$  vaut  $O(0_1)$  entre  $S'$  et B; puis  $O(\varepsilon^2)$  dès que  $x - b = O(1)$ . Donc, le minimum de  $u$  vaut certainement  $O(\varepsilon^2)$ . D'autre part,  $\Delta$  est minimum en B. Sur  $S'M_2$ , son maximum est atteint soit en  $S'$ , soit en  $M_2$ . Mais,  $\Delta_2 - \Delta'$  vaut asymptotiquement  $\frac{q - p(x_2)}{\varepsilon^2}$ . Comme  $q - p(x_2) = \int_b^{x_2} \frac{\varphi^{1/2}}{x} dx$  vaut  $O(1)$ ,  $\Delta_2 - \Delta' = O(\varepsilon^{-2})$ ; donc, c'est  $\Delta_2$  qui est le maximum de  $\Delta$  et l'on a

$$(54) \quad V_1(M_2) = C' + O(\varepsilon^{-6} e^{\Delta_2});$$

d'où

$$V_2(M_2) = \varepsilon^2 C' + O(\varepsilon^{-4} e^{\Delta_2}) - \frac{e^{\Delta_2}}{u_2 x_2} = \varepsilon^2 C' + O(\exp),$$

d'après le tableau du n° 14.

Nous avons ensuite, d'après (17),

$$V_2(A) - V_2(M_2) < \frac{e^{\Delta(A)}}{x_2^2} \int_{M_2}^A \frac{dx}{u} = \frac{e^{\Delta(A)}}{\varepsilon x_2^2} t(AM_2),$$

le dernier facteur représentant le temps de parcours de l'arc  $AM_2$ . On sait, d'après (6, IV), que ce temps vaut  $O(\varepsilon)$ . D'autre part,  $e^{\Delta(A)}$  vaut  $O(\theta) = O(\varepsilon^2)$ , d'après le tableau du n° 14. Donc,  $V_2(A) - V_2(M_2)$  vaut au plus  $O(\varepsilon^2)$  et par suite

$$V_2(A) = \varepsilon^2 C' + O(\varepsilon^2).$$



Comparant avec (53), on a

$$\varepsilon^2 C + \frac{1}{a\varphi_A} + O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 C' + O(\varepsilon^2).$$

En tenant compte de la deuxième formule (18) et se rappelant que  $e^{\Delta'} = O(\exp)$ , on obtient

$$(55) \quad C = \frac{-1}{\varepsilon^2 a\varphi_A} + O(1).$$

17. Calcul de  $X_1$ . — Sur SA, nous avons (n° 15) :

$$(56) \quad \varepsilon^2 V_1 = -\frac{1}{a\varphi_A} + O(\varepsilon^2);$$

d'où (n° 14)

$$(57) \quad X_1 = \frac{1}{\varepsilon^2 a(\varphi - \varphi_A)} + O(1), \quad \text{sur SA.}$$

Au voisinage de A, on a, d'après (16),

$$\varepsilon^2 V_1 = \frac{e^{\Delta}}{ux} + \int \frac{e^{\Delta}}{ux^2} dx = \frac{e^{-z}}{a\varphi_A W} + O(0) + h \quad (h = \text{const.}).$$

Pour  $s$  très grand, on a asymptotiquement

$$\frac{e^{-z}}{W} = \frac{1}{-1 + e^z} = \frac{1}{-1 + \frac{1}{s} + \dots} = -1 + \dots$$

Le terme constant du second membre est donc  $h - \frac{1}{a\varphi_A}$ . En comparant avec (56), on a  $h = 0$ . D'où (n° 14)

$$(58) \quad X_1 = \frac{A}{a^2 \varepsilon^4 W} + O(\varepsilon^{-2}) \quad (\text{voisinage de A}).$$

Sur S'B, on a (nos 16 et 14) :

$$(59) \quad \varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = -\frac{1}{a\varphi_A} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{cas I}) \quad \text{ou} \quad O(\varepsilon^2) \quad (\text{cas II}).$$

D'où

$$(60) \quad X_1 = -\frac{1}{\varepsilon^2 a(\varphi - \varphi_B)} + O(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}) \quad (\text{cas I}) \quad \text{ou} \quad O(1) \quad (\text{cas II}) \quad (\text{sur S'B}).$$

Au voisinage de B, on a, d'après (16) et (17) :

$$\varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = \frac{e^{\Delta - \Delta'}}{ux} + \int \frac{e^{\Delta - \Delta'}}{ux} dx.$$

Dans le cas I, ceci donne

$$\varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = \frac{e^{s_1 + P(s)}}{b\varphi_A W} + O(\theta_1) + h \quad (h = \text{const.}).$$

Pour  $-s$  très grand, le premier terme vaut asymptotiquement (n° 10)

$$\frac{s^2 \left( 1 + \frac{11}{s^2} + \dots \right)}{b \varphi_A s^2 \left( 1 - \frac{11}{s^2} + \dots \right)} = \frac{1}{b \varphi_A} + \dots$$

Le terme constant du second membre est donc  $\frac{1}{b \varphi_A} + h$ . En comparant avec (59), on a  $h = -\frac{a+b}{ab \varphi_A}$ . D'où

$$(61) \quad X_1 = \frac{1}{b B \theta_1^2 \varepsilon^2} \left[ \frac{1}{W} - \frac{a+b}{a} e^{-s_1 - P(s)} \right] + O\left(\varepsilon^{-\frac{8}{3}}\right) \quad [\text{voisinage de B (cas I)}].$$

Dans le cas II, on a

$$\varepsilon^2 V_1 e^{-\Delta'} = \frac{B+C}{b B \varphi_A} \frac{e^{z-z_0}}{W} + O(\theta_1) + h.$$

Pour  $s$  très grand, on a asymptotiquement

$$\frac{e^{z-z_0}}{W} = \frac{s}{(Z_0+1)(s - \log s + \dots)} = \frac{1}{Z_0+1} + \dots$$

Le terme constant du second membre est  $h + \frac{1}{b \varphi_A}$  et  $h$  a la même valeur que dans le cas I. On en déduit

$$(62) \quad X_1 = \frac{C}{b^2 \varepsilon^4} \left[ \frac{1}{W} - \frac{a+b}{a(Z_0+1)} e^{z_0-z} \right] + O(\varepsilon^{-2}) \quad [\text{voisinage de B (cas II)}].$$

18. Soit  $M_1$  sur  $AB$ ,  $M_2$  sur  $M_1A$ ,  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  les ordres de  $\xi_1 = x_1 - b$  et  $\xi_2 = x_2 - b$ . Nous supposons  $\xi_2 - \xi_1 \geq O(\xi_2)$ . On a, d'après (9) :

$$\Delta_2 - \Delta_1 = \frac{p(x_1) - p(x_2)}{\varepsilon^2} + \dots, \quad p(x_1) - p(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\varphi^{1/2}}{x} dx.$$

Dans le cas I,

$$p_1 - p_2 = O(\xi_2^3 - \xi_1^3) = O(\varepsilon^{3\alpha_2}), \quad \frac{p_1 - p_2}{\varepsilon^2} = O(\varepsilon^{3\alpha_2-2}).$$

Si  $\alpha_2 < \frac{2}{3}$ , on a donc

$$(63) \quad e^{\Delta_1 - \Delta_2} = O(\exp).$$

Dans le cas II, on a  $p_1 - p_2 = O(\xi_2 - \xi_1) = O(\varepsilon^{\alpha_2})$ ; même conclusion si  $\alpha_2 < 2$ .

Nous avons maintenant, d'après (17) et (11) :

$$(64) \quad V_2(M_2) - V_2(M_1) = \int_{M_1}^{M_2} \frac{e^\Delta d\Delta}{\varphi' x^2} = \frac{e^{\Delta_2}}{\varphi_2' x_2^2} - \frac{e^{\Delta_1}}{\varphi_1' x_1^2} + J,$$

avec

$$J = \int_{M_1}^{M_2} \frac{u(2\varphi' + x\varphi'')}{x^3 \varphi'^3} e^\Delta d\Delta.$$

La fraction sous le signe  $\int$  de  $J$  vaut au plus  $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\varphi_1^4}\right) = O(\varepsilon^{2-4\alpha_1})$ . Donc,  $|J| \leq e^{\Delta} O(\varepsilon^{2-4\alpha_1})$  et l'on peut écrire, en tenant compte de (63),

$$(65) \quad V_2(M_2) - V_2(M_1) = e^{\Delta} \left[ \frac{1}{\varphi_2' x_2^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha_1}) \right].$$

19. Cela posé, soit  $M$  un point quelconque de l'arc  $BA$ , tel que l'ordre  $\alpha$  de  $\xi = x - b$  soit  $\leq \frac{1}{2}$  (n° 6). Prenons  $M_2$  tel que  $\xi_2 = k\xi$ , le nombre fixe  $k$  étant compris entre zéro et 1. Prenons  $M_1$  tel que  $\frac{1}{2} < \alpha_1 < \frac{2}{3}$ , ce qui entraîne  $\alpha_2 = \alpha < \alpha_1$ , donc  $\xi_1 < \xi_2$ . Nous avons d'abord (65). Mais, les conditions imposées à  $M_1$  et à  $M_2$ , au n° 18, sont remplies par les points  $M_2$  et  $M$  ci-dessus. On a donc

$$V_2(M) - V_2(M_2) = e^{\Delta} \left[ \frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha}) \right].$$

Ajoutons à (65); comme  $e^{\Delta_1 - \Delta} = O(\exp)$ , on a

$$V_2(M) = V_2(M_1) + e^{\Delta} \left[ \frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha}) \right].$$

Or,

$$V_2(M_1) = e^{\Delta_1} \left[ \varepsilon^2 X_1(M_1) - \frac{1}{u_1 x_1} \right].$$

Le point  $M_1$  pouvant être pris pour point de raccordement, nous pouvons lui appliquer les formules (61) et (62), qui nous montrent que le crochet ci-dessus a un ordre infinitésimal fini. Comme  $e^{\Delta_1 - \Delta} = O(\exp)$ , on a asymptotiquement

$$V_2(M) = e^{\Delta} \left[ \frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha}) \right];$$

d'où

$$\varepsilon^2 V_1(M) = e^{\Delta} \left[ \frac{1}{ux} + \frac{1}{\varphi' x^2} + O(\varepsilon^{2-4\alpha}) \right].$$

Mais,  $\frac{1}{ux}$  vaut asymptotiquement  $\frac{\varphi'}{\varepsilon^2 x^2}$ . Dans le crochet, le rapport du second terme au premier vaut  $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\varphi'^2}\right)$ , soit  $O(\varepsilon^2)$  dans le cas II et  $O(\varepsilon^{2-2\alpha})$  dans le cas I. Comme  $2\alpha \leq 1$ , on a asymptotiquement, dans tous les cas :

$$(66) \quad X_1(M) = \frac{\varphi'}{\varepsilon^2 x^2} + O(\varepsilon^{-2}) \quad \text{sur BA.}$$

Nous connaissons maintenant la valeur asymptotique de la fonction  $X_1(M)$  tout le long de l'arc  $SAS'$ .

20. *Force perturbatrice fonction de  $x$ .* — Nous supposons que cette fonction et sa dérivée sont continues et valent  $O(1)$ . Appelons  $M_1, M_2, M_3, M_4$  les points

de raccordement rencontrés successivement quand on parcourt SAS' dans le sens rétrograde. L'intégrale  $D(F)$  se décompose en cinq intégrales  $D_1, \dots, D_5$ , correspondant respectivement aux arcs  $SM_1, \dots, M_4 S'$ .

D'après (57),  $D_1 = O(\varepsilon^{-2})$ . D'après (58),  $D_2 = \int_{s_1}^{s_2} F(M) X_1 \theta ds$  vaut  $O(\varepsilon^{-2})$ . Il en est de même de  $D_4$  et  $D_5$ , d'après (61), (62), (60). Enfin, d'après (66),  $D_3 = O(\varepsilon^{-4})$ . On a donc la formule asymptotique

$$D(F) = \varepsilon^{-4} \int_A^B F(M) \frac{d\varphi}{x^2}.$$

D'après le n° 5, nous pouvons remplacer  $F(x)$  par  $\frac{F(x) - F(-x)}{2}$ . En appliquant la formule (23) ci-dessus et la formule (25.1), l'accroissement de période est donné par

$$(67) \quad \Delta T = -\frac{\lambda}{\varepsilon} \int_A^B \frac{F(x) - F(-x)}{x^2} d\varphi.$$

21. *Force résistante fonction de la vitesse.* — Bornons-nous à considérer le cas où cette force est de la forme  $\pm \lambda k |v|^m$ ,  $m \geq 0$ ,  $k > 0$ ; le signe à prendre est opposé à celui de  $v$ .

Nous avons d'abord, d'après (6) :

$$(68) \quad F = -\frac{k}{\varepsilon^m} (-u)^m \text{ sur SA,} \quad F = \frac{k}{\varepsilon^m} u^m \text{ sur AS'}$$

On a, en gardant les notations du n° 20,

$$D_1 = \frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \int_S^{M_1} (\varphi_A - \varphi)^{m-1} dx.$$

Si  $m > 0$ , on peut intégrer jusqu'en A. L'erreur commise sur  $D_1$  vaut, en appelant  $\alpha_1$  l'ordre de  $\xi_1$ ,  $O(\varepsilon^{-m-2+m\alpha_1}) = O(\varepsilon^{m-2})$ , car  $\alpha_1$  peut être pris infiniment voisin de 2.

L'intégrale  $D_2$  est du même ordre que  $\varepsilon^{m-2} \int_{z_1}^{z_2} |W|^m dZ = \varepsilon^{m-2} [O(s_2) + O(s_1^m)]$  d'après les développements asymptotiques du n° 8. Le crochet vaut  $O(\varepsilon^{\alpha_2-2}) + O(\varepsilon^{m\alpha_1-2m}) = O(1)$ , car on peut prendre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  infiniment voisins de 2. Donc,  $D_2 = O(\varepsilon^{m-2})$  et l'on peut écrire asymptotiquement

$$(69) \quad D_1 + D_2 = \frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \int_0^a (\varphi_A - \varphi)^{m-1} dx \quad (m > 0),$$

$$(70) \quad D_1 + D_2 = O(\varepsilon^{-2}) \quad (m = 0).$$

Bien entendu, dans tout ce qui précède, le symbole  $O(\varepsilon^n)$  indique un ordre infinitésimal infiniment peu inférieur à  $n$ .

22. Nous avons ensuite

$$D_3 = k \varepsilon^{m-4} \int_a^{x_3} x^{m-2} \varphi^{1-m} dx,$$

en remplaçant la borne inférieure par  $a$ , ce qui donne, pour l'intégrale, une erreur  $O(\xi_2) = O(\varepsilon^{\alpha_2}) = O(\varepsilon^2)$ .

Dans le cas I,  $D_4$  est de l'ordre de

$$\varepsilon^{-m-2} \theta_1^{2m-1} \int_{s_3}^{s_1} \left[ \frac{1}{W} - \frac{a+b}{a} e^{-g_1 - P(s)} \right] W^m ds.$$

Pour le deuxième terme du crochet, on peut prendre  $s_3 = +\infty$ . Pour  $s$  très grand, ce deuxième terme vaut  $O\left(\frac{1}{s^2}\right)$  et  $W = O(s^2)$ ; la fonction sous le signe  $\int$  vaut  $O(s^{2m-2})$ ; l'intégrale vaut  $O(s_3^{2m-1})$  si  $m \geq \frac{1}{2}$  et  $O(1)$  si  $m < \frac{1}{2}$ . Or,  $s_1 = O\left(\varepsilon^{\alpha_1 - \frac{2}{3}}\right)$ ,  $\alpha_1$  pouvant être pris infiniment voisin de  $\frac{2}{3}$ . Dans les deux cas, l'intégrale vaut  $O(1)$ .

Pour le premier terme du crochet, même conclusion en ce qui concerne la borne supérieure. Pour  $s$  très grand,  $W = O\left(\frac{1}{s}\right)$ ; la borne inférieure donne  $O(s^{2-m})$  si  $m \leq 2$ ,  $O(1)$  si  $m > 2$ . Or,  $s_3 = O\left(\varepsilon^{\alpha_3 - \frac{2}{3}}\right)$ ,  $\alpha_3$  pouvant être pris infiniment voisin de  $\frac{2}{3}$ . Dans les deux cas, l'intégrale vaut encore  $O(1)$ . Il s'ensuit que  $D_4 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)$ .

Si  $m < 2$ , on peut prendre  $x_3 = b$  dans  $D_3$ . Sinon,

$$D_3 = O(\varepsilon^{m-4} \xi_3^{2-m}) = O[\varepsilon^{2\alpha_3 - 4 + m(1-\alpha_3)}].$$

En prenant  $\alpha_3 = \frac{2}{3} - o$ , ceci donne  $D_3 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)$ . En définitive, on peut écrire asymptotiquement

$$(71) \quad D_3 + D_4 = k \varepsilon^{m-4} \int_a^b x^{m-2} \varphi^{1-m} dx \quad \text{si } m < 2;$$

$$(72) \quad D_3 + D_4 = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right) \quad \text{si } m \geq 2 \quad (\text{cas I}).$$

Dans le cas II, on peut toujours prendre  $x_3 = b$ . L'intégrale  $D_4$  est de l'ordre de

$$\varepsilon^{m-2} \int_0^{s_1} \left[ \frac{1}{W} - \frac{a+b}{a(Z_0+1)} e^{Z_0 - Z} \right] W^m ds.$$

Pour  $s$  très grand, le crochet vaut  $O\left(\frac{1}{s}\right)$  et  $W = O(s)$ ; donc, l'intégrale vaut  $O(s^m) = O[\varepsilon^{m(\alpha_4 - 2)}]$ . Comme on peut prendre  $\alpha_4 = 2 - o$ ,  $D_4 = O(\varepsilon^{m-2})$  et l'on a encore (71).

23. Enfin,

$$D_{\bar{s}} = -\frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \int_{M_1}^{S'} (\varphi - \varphi_B)^{m-1} dx.$$

Dans le cas I, on peut prendre  $M_1$  en B si  $m > \frac{1}{2}$ . Si  $m \leq \frac{1}{2}$ , l'intégrale vaut  $O(\xi_4^{2m-1})$  et  $D_{\bar{s}} = O(\varepsilon^{-m-2+(2m-1)\alpha_4}) = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right)$ .

Dans le cas II, mêmes conclusions qu'au n° 21.

On peut donc écrire asymptotiquement

$$(73) \quad D_{\bar{s}} = \frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \int_0^b (\varphi - \varphi_B)^{m-1} dx \quad \text{si } m > \frac{1}{2} \quad (\text{cas I}) \quad \text{ou} \quad m > 0 \quad (\text{cas II}),$$

$$(74) \quad D_{\bar{s}} = O\left(\varepsilon^{\frac{m-8}{3}}\right) \quad \text{si } m \leq \frac{1}{2} \quad (\text{cas I}); \quad O(\varepsilon^{-2}) \quad \text{si } m = 0 \quad (\text{cas II}).$$

24. En se reportant aux formules précédentes, on obtient le tableau ci-dessous :

$$(75) \quad D(F) = k \varepsilon^{m-4} \int_a^b x^{m-2} \varphi'^{1-m} dx \quad \text{si } m < 1;$$

$$(76) \quad D(F) = \frac{k}{a} \varepsilon^{-m-2} \left[ \int_0^b (\varphi - \varphi_B)^{m-1} dx + \int_0^a (\varphi_A - \varphi)^{m-1} dx \right] \quad \text{si } m > 1;$$

$$(77) \quad D(F) = k \varepsilon^{-3} \left( \frac{a+b}{a} + \log \frac{b}{a} \right) \quad \text{si } m = 1.$$

25. La formule (77) correspond au cas d'une *résistance visqueuse*. La *perturbation de période* est

$$(78) \quad \Delta T = -2 \lambda k \left( \frac{a+b}{a} + \log \frac{b}{a} \right).$$

A titre de contrôle, cette formule peut être établie *directement* de la manière suivante. L'introduction de la force perturbatrice  $-\lambda kx'$  équivaut à augmenter la fonction  $f(x)$  de  $\lambda k\varepsilon$ , comme le montre l'équation (1). Or, la partie principale de la période est donnée par  $\varepsilon T = 2 \int_B^A \frac{d\varphi}{x}$ . D'où l'on déduit, à  $O(\lambda^2)$  près,

$$\varepsilon \Delta T = 2 \lambda k \int_b^a \varepsilon \frac{dx}{x} + \frac{2}{a} \Delta \varphi_A - \frac{2}{b} \Delta \varphi_B.$$

Or,  $\Delta \varphi_B = -\Delta \varphi_A = \lambda k \varepsilon b$ . On retrouve bien (78).

Un calcul élémentaire montre que  $\Delta T$  est  $> 0$  ou  $< 0$  suivant que  $\frac{b}{a}$  est supérieur ou inférieur à 0,28 environ.

26. Signalons encore le cas du *frottement constant*, qui correspond à  $m = 0$ . On a, d'après (75),

$$(79) \quad \Delta T = \frac{2 \lambda k}{\varepsilon} \int_b^a \frac{\varphi'}{x^2} dx.$$

*La période est augmentée.*

Pour une *résistance proportionnelle au carré de la vitesse*, on a  $m = 2$ . La formule (76) donne

$$(80) \quad \Delta T = - \frac{2 \lambda k}{a \varepsilon} \int_b^a x \varphi' dx.$$

Cette fois, *la période est diminuée.*

Ces exemples montrent que *l'effet des résistances passives sur la période d'un oscillateur de relaxation est totalement différent de ce qu'il est pour un oscillateur linéaire.*

27. *Synchronisation par une force sinusoïdale.* — Nous envisageons tout de suite le cas de la *synchronisation sous-harmonique* (n° 14.1).

Soit  $\lambda \cos \omega' t$  la force synchronisante, avec

$$(81) \quad \omega' = \omega (1 + \gamma), \quad \gamma = \lambda \beta, \quad \omega = \frac{2 \pi N}{T}.$$

Nous avons, d'après (20) :

$$(82) \quad G(\mu) = L \cos \nu + M \sin \nu, \quad \nu = \omega \mu;$$

$$(83) \quad L = 2 \varepsilon^3 \int_s^{s'} X_1 \cos \alpha dx, \quad M = 2 \varepsilon^3 \int_s^{s'} X_1 \sin \alpha dx, \quad \alpha = \omega t,$$

$t$  désignant le temps de parcours de l'arc SM du cycle autonome, donné par les formules asymptotiques de (IV).

Comme au n° 20, on a asymptotiquement

$$(84) \quad L = \frac{2}{\varepsilon} \int_A^B \frac{\varphi'}{x^2} \cos \alpha dx, \quad M = \frac{2}{\varepsilon} \int_A^B \frac{\varphi'}{x^2} \sin \alpha dx.$$

Sur AB, on a, d'après (26, IV),

$$(85) \quad \varepsilon t = E(M) + O(\varepsilon^2),$$

avec

$$(86) \quad E(M) = \int_M^A \frac{d\varphi}{x}.$$

D'autre part,  $\varepsilon T = 2 E(B) + O(\varepsilon^2)$ . D'où

$$(87) \quad \alpha = \pi N \frac{E(M)}{E(B)}.$$

Posons

$$(88) \quad L + iM = \frac{2}{\varepsilon} K.$$

On a

$$(89) \quad K = \int_A^B \frac{\varphi'}{x^2} e^{ix} dx = -\frac{E(B)}{\pi N} \int_0^{N\pi} \frac{e^{ix}}{x} dx.$$

En intégrant par parties, on peut écrire

$$(90) \quad \int_0^{N\pi} \frac{e^{ix}}{x} dx = i \frac{a+b}{ab} + i \frac{E(B)}{\pi N} \int_0^{N\pi} \frac{e^{ix}}{x\varphi'} dx.$$

Dans le cas II, on peut continuer indéfiniment cette opération; K se présente alors sous la forme d'une série asymptotique en  $\frac{E(B)}{\pi N}$ . Dans le cas I, on doit s'en tenir à la formule (90). Dans les deux cas, on voit que  $K = O\left(\frac{1}{N}\right)$ . On en conclut que si  $N = O(\varepsilon^{-2})$ , les formules (84) ne sont plus suffisantes; il faut intégrer aussi sur SA et sur BS'. En outre, il faut ajouter au second membre de (87) la valeur de  $\alpha$  au point A, car cette valeur vaut  $O(1)$ , du fait que le temps de parcours de SA vaut  $O(\varepsilon)$ . Le calcul devient plus compliqué. Nous le ferons seulement sur l'exemple concret envisagé au Chapitre V.

28. L'équation en  $\mu$  s'écrit

$$(91) \quad \beta T = L \cos \nu + M \sin \nu.$$

La condition de synchronisation est, si N est petit vis-à-vis de  $\varepsilon^{-2}$ ,

$$(92) \quad \lambda > |\gamma| \frac{E(B)}{\rho} = \lambda_0, \quad \rho = |K|.$$

Comme  $\rho = O\left(\frac{1}{N}\right)$ , la limite inférieure  $\lambda_0$  est approximativement proportionnelle à N. Il en est d'ailleurs de même si  $N = O(\varepsilon^{-2})$ , car L et M valent alors  $O(\varepsilon)$ ; donc,  $\lambda_0 = O(\varepsilon^{-2})$ .

S'il existe des forces perturbatrices indépendantes de  $t$ , il faut ajouter les valeurs correspondantes de  $-G$  au premier membre de (91); cela modifie évidemment  $\lambda_0$ . Par exemple, si l'oscillateur est soumis au frottement constant du n° 26, le premier membre de (91) doit être augmenté de  $\frac{2k}{\varepsilon} I$ , I désignant l'intégrale de la formule (79). En supposant  $\rho > kI$ , on a  $\lambda_0 = \frac{\gamma E(B)}{\rho - kI}$  ou  $\frac{-\gamma E(B)}{\rho + kI}$ , suivant que  $\gamma$  est  $> 0$  ou  $< 0$ ;  $\lambda_0$  est augmenté dans le premier cas, diminué dans le second.

Bien entendu, il y aurait à tenir compte, comme au n° 10.1, de la compatibilité de cette limite inférieure avec la limite supérieure  $\Lambda$ , laquelle nous est inconnue.

L'indice de stabilité est

$$(93) \quad \sigma = G'(\mu) = \omega(-L \sin \nu + M \cos \nu).$$

Comme  $\omega = O(N\varepsilon)$  et que L, M valent  $O\left(\frac{1}{N\varepsilon}\right)$ , on a  $\sigma = O(1)$ .



29. *Couplage élastique de deux oscillateurs identiques.* — Convenons de sur-ligner les lettres correspondant au deuxième oscillateur et supposons que le couplage ait pour effet d'ajouter le terme  $\lambda k(\bar{x} - x)$  au second membre de l'équation (1). Dans l'équation analogue relative au deuxième oscillateur, le terme additif est opposé au précédent. Ce couplage serait obtenu en reliant les deux oscillateurs par un ressort.

Avec les notations des nos 16.1 et 19.1, on a

$$(94) \quad \begin{cases} g_{11} = g_{21} = 0, & g_{12} = -g_{22} = k\varepsilon(z_{21} - z_{11}), \\ H_{12}^1 = -\varepsilon u X_1, & H_{22}^1 = -\varepsilon \bar{u} X_1, & y_{11}^1 = x & y_{21}^1 = \bar{x}. \end{cases}$$

La correspondance entre les variables  $x$  et  $\bar{x}$  est définie comme suit. Appelons  $\mu$  l'avance de phase du deuxième oscillateur sur le premier. Soient M et  $\bar{M}$  les deux points homologues du cycle (C), lequel est le même pour les deux oscillateurs, puisque ceux-ci sont identiques. La correspondance entre ces deux points est déterminée par la condition que le temps de parcours de l'arc  $M\bar{M}$  soit égal à  $\mu$ . Si l'on intervertit les deux oscillateurs,  $\mu$  se change en  $-\mu$ .

Cela posé, la formule (34.1) nous donne

$$(95) \quad G_1(\mu) = 2k\varepsilon^3 \int_s^{s'} X_1(\bar{x} - x) dx = 2k\varepsilon^3 D(\bar{x} - x),$$

d'après (21). La fonction  $G_2(\mu)$  est obtenue par la même formule que ci-dessus, avec interversion des points M et  $\bar{M}$ . Il équivaut de garder la même formule, mais en changeant  $\mu$  en  $-\mu$ .

L'intégrale

$$(96) \quad J(\mu) = D(\bar{x})$$

est une fonction déterminée de  $\mu$ . Avec ces notations, on a

$$G_1(\mu) = 2k\varepsilon^3 [J(\mu) - J(0)].$$

La fonction  $G_2(\mu)$  s'en déduit en changeant  $\mu$  en  $-\mu$ .

Appelons  $T' = T(1 + \lambda\beta)$  la nouvelle période. Avec les notations du n° 16.1, nous avons

$$N_\alpha = 1, \quad \gamma_\alpha = 0, \quad \rho = \beta, \quad \varepsilon_\alpha = \beta.$$

Les équations (35.1) deviennent

$$\beta T = 2k\varepsilon^3 [J(\mu) - J(0)] = 2k\varepsilon^3 [J(-\mu) - J(0)].$$

D'où l'on déduit

$$(97) \quad J(\mu) = J(-\mu).$$

Cette équation détermine la différence de phase. On a ensuite l'accroissement de période par la formule

$$(98) \quad \Delta T = 2\lambda k\varepsilon^3 [J(\mu) - J(0)].$$

30. Voyons la *stabilité*. Dans la formule (36.1), on doit seulement faire  $h=1$  et  $k=2$ , comme il résulte des formules (94). On a

$$L_1^2 = \int_0^T H_{12}^2 J_{21}^2 \frac{g_{12}}{z_{21}} dt = 2k\varepsilon^3 \int_S^{S'} X_1 \bar{x} dx = 2k\varepsilon^3 J(\mu) = L.$$

D'après (97),  $L_2^1 = L$  et, d'après (37.1),  $K_1^1 = K_2^2 = -L$ . L'équation de stabilité est, d'après (105.1) :

$$\begin{vmatrix} -L - \sigma & L \\ L & -L - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Sa racine non nulle est  $\sigma = -2L$ . La *condition de stabilité*, pour  $\lambda$  infiniment petit, est donc

$$(99) \quad J(\mu) > 0.$$

31. L'équation (97) admet la solution évidente  $\mu = 0$ . Il lui correspond un mouvement périodique dans lequel *les deux oscillateurs sont en phase*; le couplage n'agit pas, puisque  $\bar{x} - x = 0$ . La formule (98) donne alors  $\Delta T = 0$ , comme il était à prévoir.

Si l'on change  $\mu$  en  $\mu + \frac{T}{2}$ ,  $\bar{x}$  devient  $-\bar{x}$ ; on a donc l'identité

$$(100) \quad J\left(\mu + \frac{T}{2}\right) = -J(\mu).$$

D'où l'on déduit  $J\left(\frac{T}{2}\right) = -J(0)$ ,  $J(0) = -J\left(-\frac{T}{2}\right)$ . Donc,  $\mu = \frac{T}{2}$  est une autre solution de l'équation (97). Dans le mouvement correspondant, *les deux oscillateurs sont en opposition*. La formule (98) donne alors

$$(101) \quad \Delta T = -4\lambda k\varepsilon^3 J(0).$$

32. Cherchons la *valeur asymptotique* de  $J(\mu)$ , pour  $\varepsilon$  infiniment petit. D'après le n° 20, on a asymptotiquement

$$(102) \quad \varepsilon^4 J(\mu) = \int_a^b \frac{\bar{x}}{x^2} \varphi'(x) dx.$$

En particulier,

$$\varepsilon^4 J(0) = \int_a^b \frac{\varphi'}{x} dx = -\frac{\varepsilon T}{2}, \quad \text{d'où} \quad \varepsilon^4 J\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\varepsilon T}{2}.$$

La condition (99) n'est pas remplie pour  $\mu = 0$ ; elle l'est pour  $\mu = \frac{T}{2}$ . Donc, *le mouvement pour lequel les deux oscillateurs sont en phase est instable; le mouvement pour lequel ils sont en opposition est stable.*

33. Je dis maintenant qu'il n'y a *pas d'autre solution* que les deux précédentes.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\varepsilon\mu = \nu, \quad \varepsilon^2 J(\mu) = K(\nu), \quad \nu_1 = \frac{\varepsilon T}{2}.$$

L'équation (97) s'écrit

$$(103) \quad K(\nu) - K(-\nu) = 0.$$

Posons maintenant

$$z(M) = \int_A^M \frac{-\varphi'}{x} dx = \varepsilon t_A^M,$$

en appelant  $t_A^M$  la durée du parcours de A à M.

Supposons  $0 < \mu < \frac{T}{2}$ , donc  $0 < \nu < \nu_1$ . Sur AB, prenons le point  $M_1$  tel que  $t_{M_1}^B = \mu$ ; donc

$$(104) \quad \nu = z(B) - z(M_1) = \nu_1 - z(M_1).$$

La formule (102) s'écrit

$$(105) \quad K(\nu) = \int_A^B \frac{-\bar{x}}{x} dz = K' + K'', \quad K' = \int_A^{M_1}, \quad K'' = \int_{M_1}^B.$$

Pour  $K'$ ,  $\bar{M}$  est sur l'arc MB; donc

$$b \leq \bar{x} < x; \quad \frac{-\bar{x}}{x} > -1; \quad K' > z(A) - z(M_1) = -z(M_1).$$

Pour  $K''$ ,  $\bar{M}$  est sur l'arc  $A'M_1$  symétrique de  $AM_1$ ; donc

$$-\bar{x} > x_1 > x, \quad \frac{-\bar{x}}{x} > 1, \quad K'' > z(B) - z(M_1) = \nu,$$

d'après (104). D'où l'on déduit

$$K(\nu) = K' + K'' > \nu - z(M_1) = 2\nu - \nu_1.$$

L'identité (100) s'écrit  $K(\nu + \nu_1) = -K(\nu)$ . On en déduit  $-K(-\nu) = K(\nu_1 - \nu)$ . Comme  $0 < \nu_1 - \nu < \nu_1$ , on a  $K(\nu_1 - \nu) > 2(\nu_1 - \nu) - \nu_1 = \nu_1 - 2\nu$ . Donc,  $K(\nu) - K(-\nu) > 2\nu - \nu_1 + \nu_1 - 2\nu = 0$ . L'équation (103) n'est par vérifiée. En définitive,

**THÉORÈME.** — *Dans le couplage élastique de deux oscillateurs de relaxation identiques, il n'y a que deux mouvements périodiques; l'un, pour lequel les oscillateurs sont en phase, est instable; l'autre, pour lequel ils sont en opposition, est stable.*

## CHAPITRE V.

## APPLICATION A DEUX EXEMPLES CONCRETS.

1. *Oscillateur de Van der Pol.* — Nous avons (n° 29, V)

$$\varphi = \frac{x^3}{3} - x, \quad a = 2, \quad \varphi_A = -\varphi_B = \frac{2}{3}, \quad b = 1, \quad A = 3, \quad B = 1,$$

$$\theta = \frac{2}{9} \varepsilon^2, \quad \theta_1 = \varepsilon^{\frac{2}{3}}.$$

La formule (31.4) nous donne

$$p(x) = \int_x^a \frac{(x^2 - 1)^2}{x} dx = -\log x + x^2 - \frac{x^4}{4} + \log a - a^2 + \frac{a^4}{4}.$$

D'où

$$q = \frac{3}{4} + \log a - a^2 + \frac{a^4}{4}.$$

La valeur  $a = 2$  n'est que la partie principale. En réalité, on a (n° 51, V)

$$a = 2 + 2,338 \varepsilon^{\frac{1}{3}} - \varepsilon^2 \left( 1,099 - \frac{4}{9} \log \varepsilon \right) - \frac{2}{3} (2,296 - 2 \log \varepsilon) \varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^{\frac{8}{3}}\right),$$

$$a = 2 + 2,338 \varepsilon^{\frac{1}{3}} + \varepsilon^2 \left( \frac{16}{9} \log \varepsilon - 2,63 \right) + O\left(\varepsilon^{\frac{8}{3}}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\frac{q}{\varepsilon^2} = 1,443 \varepsilon^{-2} + 10,52 \varepsilon^{-\frac{2}{3}} - 11,84 + 8 \log \varepsilon + O\left(\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right).$$

La formule (49.4) nous donne alors

$$(1) \quad S = 0,0298 \varepsilon^{-\frac{4}{3}} e^{23,68 - 21,04 \varepsilon^{-\frac{2}{3}} - 2,886 \varepsilon^{-2}}.$$

Par exemple, pour  $\varepsilon = 0,2$ , on trouve  $S = 0,98 \cdot 10^{-41}$ .

On voit que *le décrétement est extrêmement petit*; le mouvement périodique autonome s'établit pratiquement aussitôt après la première oscillation.

2. Pour la *résistance visqueuse* du n° 25.4, on a  $\Delta T = -1,614 \lambda k$ .

Pour le *frottement constant* du n° 26.4, on a  $\Delta T = \frac{\lambda k}{\varepsilon}$ .

Pour la force perturbatrice  $-\lambda kx$ , on a, d'après (68.4),  $\Delta T = -1,614 \frac{\lambda k}{\varepsilon}$ .

3. Dans le cas de la *synchronisation par force sinusoidale*, on a, avec les notations du n° 27.4,

$$E(M) = \int_x^2 \frac{x^2 - 1}{x} dx = 2 - \log 2 - \frac{x^2}{2} + \log x, \quad E(B) = 1,5 - \log 2 = 0,80685;$$

$$\alpha = \pi N \frac{1,30685 - \frac{x^2}{2} + \log x}{0,80685};$$

$$\frac{-\varepsilon \pi N}{1,6137} L = \int_A^B \frac{d(\sin \alpha)}{x}; \quad \frac{-\varepsilon \pi N}{1,6137} M = \int_A^B \frac{d(-\cos \alpha)}{x}.$$

En calculant les intégrales ci-dessus par les trapèzes, on trouve

N.....	1.	3.	5.	7.	9.	
$\varepsilon L$ .....	0,106	0,0236	0,0113	0,00705	0,00492	
$\varepsilon M$ .....	-0,624	-0,226	-0,1403	-0,1017	-0,0798	
$\varepsilon \sqrt{L^2 + M^2}$ .	0,633	0,227	0,1418	0,1019	0,0798	
N.....	11.	13.	15.	17.	19.	$\infty$ .
$\varepsilon L$ .....	0,00369	0,00292	0,00240	0,00202	0,00173	0
$\varepsilon M$ .....	-0,0656	-0,0558	-0,0485	-0,0430	-0,0385	0
$\varepsilon \sqrt{L^2 + M^2}$ .	0,0656	0,0558	0,0485	0,0430	0,0385	0

La *condition de synchronisation* est  $\sqrt{L^2 + M^2} > \beta T$ . Or, d'après (63,V), on a asymptotiquement  $\varepsilon T = 1,614$ . En portant dans l'inégalité précédente, on trouve que *la limite inférieure de*  $\frac{1}{\beta}$  *a les valeurs suivantes :*

2,55 7,11 11,47 15,83 20,2 24,6 29 33,3 37,6 42.

En divisant ces nombres par N, on trouve les quotients

2,55 2,37 2,29 2,26 2,25 2,24 2,23 2,22 2,21 2,21.

On voit que la limite ci-dessus est *à peu près proportionnelle* à N (cf. n° 28.4).

Les quotients ci-dessus sont les limites inférieures  $\lambda_0$  (n° 28.4) dans le cas le plus défavorable où  $\gamma = \frac{1}{N}$ .

4. *Autre exemple.* — Il s'agit de l'oscillateur du n° 22, V. On se trouve dans le cas II (n° 2.4). On a

$$\varphi = -x \text{ pour } 0 < x < 1, \quad \varphi = x - 2 \text{ pour } x > 1,$$

$$a = 3, \quad \varphi_A = 1, \quad b = 1, \quad A = B = C = 1, \quad \theta = 3\varepsilon^2, \quad \theta_1 = \varepsilon^2.$$

La formule (31.4) donne

$$p(x) = \log a - \log x, \quad q = \log a.$$

La valeur exacte de  $a$  est (n° 26, V)

$$a = 3 + \varepsilon^2 \left( 1 + 3 \log \frac{3}{2} + 4 \log \varepsilon \right) + O(\varepsilon^4).$$

D'où

$$q = \log 3 + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{3} + \log \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \log \varepsilon \right) + O(\varepsilon^4).$$

Le *décroissement* est, d'après (52.4),

$$(2) \quad S = \frac{81}{4} e^{\frac{-2 \log a}{\varepsilon^2} - 2} = 9 \varepsilon^{-\frac{8}{3}} e^{\frac{-2 \log 3}{\varepsilon^2} - \frac{8}{3}}.$$

Par exemple, pour  $\varepsilon = 0,2$ , on a approximativement  $S = 2,23 \cdot 10^{-20}$ .

5. Pour la *résistance visqueuse* du n° 25.4, on a

$$\Delta T = -2 \lambda k \left( \frac{4}{3} - \log 3 \right) = -0,469 \lambda k.$$

Pour le *frottement constant*, la formule (79.4) donne  $\Delta T = \frac{4 \lambda k}{3 \varepsilon}$ . Pour la force perturbatrice  $-\lambda k x$ , la formule (67.4) donne

$$\Delta T = -\frac{2 \lambda k}{\varepsilon} \log 3 = -2,2 \frac{\lambda k}{\varepsilon}.$$

6. *Synchronisation par une force sinusoidale*. — La formule (86.4) donne

$$E(M) = \log 3 - \log x, \quad E(B) = \log 3.$$

D'où

$$\alpha = \pi N \frac{\log 3 - \log x}{\log 3}, \quad x = 3 e^{-m \alpha}, \quad m = \frac{\log 3}{\pi N}.$$

La formule (89.4) s'écrit alors

$$K = -\frac{m}{3} \int_0^{N\pi} e^{m+i\alpha} d\alpha = \frac{4m}{3(m+i)}.$$

D'où

$$L = \frac{8m^2}{3\varepsilon(m^2+1)}, \quad M = \frac{-8m}{3\varepsilon(m^2+1)}.$$

L'équation de synchronisation s'écrit, d'après (91.4),

$$(3) \quad 3\beta \log 3 = \frac{4m}{m^2+1} (m \cos \nu - \sin \nu).$$

L'indice de stabilité est, d'après (93.4),

$$(4) \quad \sigma = \frac{-8}{3(m^2+1)} (m \sin \nu + \cos \nu).$$

7. *Étude directe.* — L'intérêt de cet oscillateur réside en ce que l'on peut en faire l'étude directe et, par suite, *contrôler la théorie générale* faisant l'objet du présent Mémoire.

Nous nous contenterons d'examiner le cas de la *synchronisation sous-harmonique* par une force sinusoïdale.

Pour  $-1 < x < 1$ , l'équation différentielle du mouvement est

$$(5) \quad x'' - \frac{x'}{\varepsilon} + x = \lambda \cos \varphi, \quad \varphi = \omega t - \nu, \quad \omega = \frac{2\pi}{T'}, \quad T' = \frac{T}{N(1 + \lambda\beta)}.$$

L'intégrale générale est

$$(6) \quad x = Ce^{rt} + C'e^{r't} + \lambda X,$$

$r$  et  $r'$  désignant respectivement les petite et grande racines de l'équation caractéristique

$$r^2 - \frac{r}{\varepsilon} + 1 = 0$$

et  $X$  la fonction

$$(7) \quad X = -\frac{\varepsilon}{\Delta} [\varepsilon(\omega^2 - 1) \cos \varphi + \omega \sin \varphi], \quad \Delta = \varepsilon^2(\omega^2 - 1)^2 + \omega^2.$$

D'après le n° 26, V, on a  $T = \frac{2 \log 3}{\varepsilon} + O(\varepsilon)$ ; donc (n° 6),

$$\omega = \frac{\varepsilon}{m} + O(\varepsilon^3).$$

Si  $N$  est fini, on a asymptotiquement  $\Delta = \varepsilon^2 \frac{m^2 + 1}{m^2}$ ; d'où

$$(8) \quad X = \frac{m}{m^2 + 1} (m \cos \varphi - \sin \varphi) + O(\varepsilon^2).$$

Pour  $x > 1$  ou  $x < -1$ , il suffit de changer  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$ , donc  $r$  en  $-r$  et  $r'$  en  $-r'$ . Nous conviendrons de *surligner toutes les lettres correspondantes*. En particulier, on a  $\bar{X}(\varphi) = X(-\varphi)$ .

En résolvant la formule (6) et celle qui donne la vitesse  $v$  par rapport à  $C$  et  $C'$ , on obtient les *fonctions invariantes*

$$(9) \quad r' \log(\xi + \lambda Y) - r \log(\eta + \lambda Z)$$

et

$$(10) \quad -\frac{t}{\varepsilon} + \log(\xi + \lambda Y) + \log(\eta + \lambda Z),$$

en posant

$$(11) \quad \xi = x - rv, \quad \eta = v - rx, \quad Y = -X + r\omega X', \quad Z = rX - \omega X', \quad X' = \frac{dX}{d\varphi}.$$

Cette invariance signifie que, pour des conditions initiales déterminées, chacune des fonctions ci-dessus garde la même valeur tant que  $x$  ne sort pas de l'intervalle  $(-1, +1)$ . Pour  $x > 1$  ou  $x < -1$ , on a deux fonctions analogues, obtenues en surlignant et changeant le signe de  $\varepsilon$ ,  $r$ ,  $r'$ .

8. *Équation de synchronisation.* — Employons la méthode du n° 9.1. Partons du point A d'abscisse +1, avec la phase  $\varphi_1$  et la vitesse négative  $v_1$ , supposée assez voisine de la vitesse normale  $V_1$  pour que le mobile atteigne A', d'abscisse -1, sans revenir auparavant en A. Nous arrivons en A' avec la phase  $\varphi_2$  et la vitesse  $v_2$ ; nous y revenons avec la phase  $\varphi_3$  et la vitesse  $v_3$ ; nous atteignons A avec la phase  $\varphi_4$  et la vitesse  $v_4$  et nous y revenons avec la phase  $\varphi_5$  et la vitesse  $v_5$ . Au point  $(\varphi_1, v_1)$  nous faisons correspondre le point  $(\varphi_5 - 2N\pi, v_5)$ .

Cherchons d'abord les *variables canoniques*. Pour  $\lambda = 0$ , nous avons  $v_5 = P(v_1)$  et  $\varphi_5 - 2N\pi = \varphi_1 + Q(v_1)$ , P et Q désignant des fonctions déterminées. On a d'abord  $dv_5 = P'(v_1)dv_1$ . On en déduit que  $v_1$  est la deuxième variable canonique  $x_2$ ; le décrément correspondant est  $S = P'(v_1)$ .

La première variable canonique est

$$(12) \quad x_1 = v_1 Q'(V_1) + (1 - S)\varphi_1.$$

On a en effet

$$dX_1 = Q'(V_1)dv_5 + (1 - S)d\varphi_5 = Q'(V_1)Sdv_1 + (1 - S)[d\varphi_1 + Q'(V_1)dv_1] = dx_1.$$

L'équation de synchronisation s'écrit maintenant

$$Q'(V_1) \frac{\partial v_5}{\partial \lambda} + (1 - S) \frac{\partial \varphi_5}{\partial \lambda} = 0.$$

Si l'on appelle  $t_i$  les temps correspondant aux  $\varphi_i$ , on a

$$\varphi_5 - \varphi_1 = \omega(t_5 - t_1) = \frac{2\pi N}{T}(1 + \lambda\beta)(t_5 - t_1);$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial \lambda} = \frac{2\pi N}{T} \left[ \frac{\partial(t_5 - t_1)}{\partial \lambda} + \beta T \right].$$

L'équation précédente s'écrit donc

$$(13) \quad \beta T = \frac{\partial(t_5 - t_1)}{\partial \lambda} - \frac{T}{2\pi N(1 - S)} Q'(V_1) \frac{\partial v_5}{\partial \lambda}.$$

Le second membre est la fonction  $H(\mu)$  du Chapitre I.

9. Le calcul peut être considérablement simplifié si l'on tient compte de la *symétrie de la courbe fondamentale*. Posons

$$v_3 = F(v_1, t_1, \lambda), \quad t_3 - t_1 = G(v_1, t_1, \lambda).$$

Si l'on change  $x$  en  $-x$  et  $\lambda$  en  $-\lambda$ , l'équation (5) ne change pas; donc,

$$(14) \quad v_5 = -F(-v_3, t_3, -\lambda), \quad t_5 - t_3 = G(-v_3, t_3, -\lambda).$$

Pour  $\lambda = 0$ , les fonctions F et G dépendent seulement de  $v_1$ ; appelons  $s$  et  $g$  leurs



dérivées pour  $v_1 = V_1$ . Les dérivées  $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$  et  $\frac{\partial G}{\partial \lambda}$  sont, pour  $\lambda = 0$ , des fonctions de  $v_1$  et  $\varphi_1$ . Appelons A et B leurs valeurs pour  $v_1 = V_1$ ; ce sont des fonctions de  $\varphi_1$ .

Si l'on change  $\varphi$  en  $\varphi + N\pi$  et  $\lambda$  en  $(-1)^N \lambda$ , l'équation (5) ne change pas; il en est donc de même des fonctions F et G. Quant aux fonctions A et B, elles sont multipliées par  $(-1)^N$ . Or, pour les conditions normales, on a  $\varphi_3 = \varphi_1 + N\pi$ ,  $-V_3 = V_1$ . On en conclut que, pour ces conditions, les dérivées partielles des seconds membres de (14) par rapport à  $\lambda$  ont les valeurs respectives  $(-1)^N A$  et  $(-1)^{N+1} B$ .

Cela posé, différencions totalement les formules (14) à partir des conditions normales :

$$dv_3 = s dv_3 + (-1)^N A d\lambda, \quad dt_3 - dt_5 = -g dv_3 + (-1)^{N+1} B d\lambda.$$

D'autre part,

$$dv_3 = s dv_1 + A d\lambda, \quad dt_3 - dt_1 = g dv_1 + B d\lambda.$$

Donc,

$$dv_3 = s^2 dv_1 + A[(-1)^N + s] d\lambda, \quad dt_3 - dt_1 = (1-s)g dv_1 + [B + (-1)^{N+1} B - gA] d\lambda.$$

On en déduit d'abord (n° 8) que  $S = s^2$  et  $Q'(V_1) = \frac{2\pi N}{T}(1-s)g$ .

L'équation (13) devient ainsi

$$\beta T = [1 - (-1)^N] \left( \frac{gA}{1+s} - B \right).$$

Si N est pair, le second membre est nul; la synchronisation est impossible pour les petites valeurs (1) de  $\lambda$ , comme nous l'avons déjà vu dans le cas général (n° 5.4). Nous supposons donc dorénavant N impair, auquel cas l'équation de synchronisation devient

$$(15) \quad \beta T = \frac{2gA}{1+s} - 2B.$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer  $s$ ,  $g$ , A, B.

10. Égalons les différentielles de la fonction (9) aux temps  $t_1$  et  $t_2$ , pour les conditions normales :

$$\frac{-dv_2 + r'Y_2 d\lambda}{\xi_2} - r \frac{dv_2 + Z_2 d\lambda}{\eta_2} = \frac{-dv_1 + r'Y_1 d\lambda}{\xi_1} - r \frac{dv_1 + Z_1 d\lambda}{\eta_1}.$$

D'où l'on tire

$$(16) \quad v_2 dv_2 = a_2 d\lambda + \frac{\xi_2}{\xi_1} (v_1 dv_1 - a_1 d\lambda),$$

---

(1) Mais pas nécessairement pour les grandes valeurs, comme nous le verrons plus loin (n° 18).

en posant

$$(17) \quad \zeta = \zeta_1 \eta, \quad a = \frac{r' Y \eta - r Z \zeta_2}{\rho} = v \omega X' + X \left( x - \frac{v}{\varepsilon} \right), \quad \rho = 1 - r^2.$$

On en déduit, en augmentant les indices d'une unité, surlignant et remarquant que  $v_3 = -v_1$ ,  $\zeta_3 = \zeta_1$ ,  $\bar{a}_3 = \bar{a}_1$  :

$$-v_1 dv_3 = \bar{a}_1 d\lambda + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} (v_2 dv_2 - \bar{a}_2 d\lambda)$$

ou, en tenant compte de (16),

$$dv_3 = s dv_1 + A d\lambda,$$

avec

$$(18) \quad s = -\frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 \zeta_2}, \quad A v_1 = -s a_1 - \bar{a}_1 + \frac{\zeta_1}{\zeta_2} (\bar{a}_2 - a_2).$$

11. Égalons de même les différentielles de la fonction (10) :

$$-\frac{dt_2}{\varepsilon} + \frac{Y_2 d\lambda - r dv_2}{\zeta_2} + \frac{Z_2 d\lambda + dv_2}{\eta_2} = -\frac{dt_1}{\varepsilon} + \frac{Y_1 d\lambda - r dv_1}{\zeta_1} + \frac{Z_1 d\lambda + dv_1}{\eta_1}.$$

D'où l'on tire

$$(19) \quad dt_2 - dt_1 = \frac{b_2}{\zeta_2} dv_2 - \frac{b_1}{\zeta_2} dv_1 + \left( \frac{c_2}{\zeta_2} - \frac{c_1}{\zeta_1} \right) d\lambda,$$

en posant

$$(20) \quad b = \varepsilon(\xi - r\eta) = r(x - 2\varepsilon v), \quad c = \varepsilon(\xi Z + \eta Y) = rX(2\varepsilon x - v) - b\omega X'.$$

Augmentons les indices d'une unité et surlignons, en remarquant que  $\bar{b}_3 = -\bar{b}_1$  et  $\bar{c}_3 = \bar{c}_1$

$$dt_3 - dt_2 = -\frac{\bar{b}_1}{\zeta_1} dv_3 - \frac{\bar{b}_2}{\zeta_2} dv_2 + \left( \frac{\bar{c}_1}{\zeta_1} - \frac{\bar{c}_2}{\zeta_2} \right) d\lambda.$$

Ajoutons à (19) et remplaçons  $dv_3$  et  $dv_2$  par leurs valeurs (n° 8); en prenant les coefficients de  $dv_1$  et  $d\lambda$ , nous obtenons

$$g = -\frac{b_1}{\zeta_1} - s \frac{\bar{b}_1}{\zeta_1} + \frac{v_1}{\zeta_1 v_2} \left( b_2 - \bar{b}_2 \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right) = \frac{2r^2(v_1 + v_2)}{\varepsilon \zeta_1 \zeta_2},$$

$$B = -A \frac{\bar{b}_1}{\zeta_1} + \left( \frac{b_2}{\zeta_2} - \frac{\bar{b}_2}{\zeta_2} \right) \frac{a_2 \zeta_1 - a_1 \zeta_2}{\zeta_1 v_2} + \frac{\bar{c}_1}{\zeta_1} - \frac{c_1}{\zeta_1} + \frac{c_2}{\zeta_2} - \frac{\bar{c}_2}{\zeta_2}.$$

On a

$$1 + s = \frac{2r^2(v_1 + v_2)(v_1 v_2 + 1)}{\varepsilon \zeta_1 \zeta_2}, \quad \frac{g}{1 + s} = \frac{1}{v_1 v_2 + 1}.$$

L'équation (15) s'écrit

$$\frac{\beta T}{2} (v_1 v_2 + 1) = A - B(v_1 v_2 + 1).$$

En remplaçant B par la formule ci-dessus, on trouve que le coefficient de A est  $\frac{\nu_1 D}{\zeta_1}$ , en posant  $D = r \left( \frac{1}{\varepsilon} - 2\varepsilon + \nu_1 - \nu_2 - 2\varepsilon\nu_1\nu_2 \right)$ . Puis, en ordonnant par rapport aux  $a_i$ , on obtient

$$(21) \quad \frac{\beta T}{2} (\nu_1\nu_2 + 1) = \bar{D} \left( \frac{a_1}{\zeta_1} - \frac{a_2}{\zeta_2} \right) + D \left( \frac{\bar{a}_2}{\zeta_2} - \frac{\bar{a}_1}{\zeta_1} \right) + (1 + \nu_1\nu_2) \left( \frac{c_1}{\zeta_1} - \frac{c_2}{\zeta_2} - \frac{\bar{c}_1}{\zeta_1} + \frac{\bar{c}_2}{\zeta_2} \right).$$

En remplaçant les  $a_i$ ,  $c_i$  par leurs valeurs, on trouve que le coefficient de  $X_1$  est  $-\frac{1}{\varepsilon}(1 + \varepsilon\nu_2)$ ; celui de  $X'_1$  est un. Remarquons maintenant que si l'on change  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$ ,  $r$  en  $-r$ ,  $X$  en  $\bar{X}$  et  $X'$  en  $\bar{X}'$ , le second membre de (21) change de signe. Il est invariant si l'on change  $\varepsilon$  en  $-\varepsilon$ ,  $\nu_1$  en  $\nu_2$ ,  $\nu_2$  en  $\nu_1$ ,  $X_1$  en  $-X_2$ ,  $X_2$  en  $-X_1$ ,  $X'_1$  en  $X'_2$ ,  $X'_2$  en  $X'_1$ . On en déduit les autres coefficients et l'on obtient finalement l'équation de synchronisation sous la forme

$$(22) \quad \frac{\beta T}{2} (\nu_1\nu_2 + 1)\varepsilon = -X_1(1 + \varepsilon\nu_2) + X_2(\varepsilon\nu_1 - 1) \\ + \bar{X}_1(\varepsilon\nu_2 - 1) - \bar{X}_2(\varepsilon\nu_1 + 1) + \varepsilon\omega(X'_1 + X'_2 - \bar{X}'_1 - \bar{X}'_2).$$

D'après (13.4), l'expression de  $\beta T$  est la fonction  $G(\mu)$ . L'indice de stabilité est  $\sigma = G'(\mu)$ , d'après (8.4). D'après (5) ci-dessus, on a  $\frac{d}{d\mu} = -\omega \frac{d}{d\varphi}$ ; d'où

$$(23) \quad \frac{\sigma}{2} (\nu_1\nu_2 + 1)\varepsilon = \omega X'_1(\varepsilon\nu_2 + 1) + \omega X'_2(1 - \varepsilon\nu_1) \\ + \omega \bar{X}'_1(1 - \varepsilon\nu_2) + \omega \bar{X}'_2(\varepsilon\nu_1 + 1) + \varepsilon\omega^2(X_1 + X_2 - \bar{X}_1 - \bar{X}_2).$$

12. *Formules asymptotiques.* — Les formules précédentes sont rigoureusement exactes quel que soit  $\varepsilon$ . Voyons maintenant ce qu'elles deviennent asymptotiquement quand  $\varepsilon$  est infiniment petit, c'est-à-dire quand on a véritablement un oscillateur de relaxation.

Pour les conditions normales, la formule (23, V), où l'on doit changer  $r$  en  $-r$ , nous donne  $\nu_1 = -r$ , d'où  $\bar{\eta}_1 = 0$ . Pour obtenir la partie principale de  $\bar{\eta}_1$ , il faut reprendre le calcul de  $\nu_1$ .

Partons du point terminal avec une vitesse nulle. Nous avons

$$x = C(e^{-r't} - r^2 e^{-r'^t}), \quad \nu = rC(e^{-r't} - e^{-r'^t});$$

d'où

$$\bar{\eta} = \nu + rx = C\rho r e^{-r't} = \frac{\rho r x e^{-\rho r't}}{1 - r^2 e^{-\rho r't}}.$$

Pour  $x = 1$ , on a (p. 86, V)

$$t = r' \log a + r + \frac{r^3}{2} + \dots, \quad -\rho r't = -\frac{\log a}{\varepsilon^2} + 3 \log a - 1 + O(\varepsilon^2).$$

D'où

$$\bar{\eta}_1 = 27\varepsilon e^{-\frac{\log a}{\varepsilon^2} - 1} = O(\exp).$$

D'autre part, on a la valeur asymptotique (p. 95, V)  $v_2 = -2r'$ . D'où l'on déduit les parties principales :

$$\begin{aligned} \xi_1 = \bar{\xi}_1 = 1, \quad \eta_1 = -2r, \quad \xi_2 = 1, \quad \bar{\xi}_2 = -3, \quad \eta_2 = \bar{\eta}_2 = -2r', \\ \zeta_1 = -2r, \quad \bar{\zeta}_1 = \bar{\eta}_1, \quad \zeta_2 = -2r', \quad \bar{\zeta}_2 = 6r'. \end{aligned}$$

Portant dans (18), on a

$$s = -\frac{9}{2} e^{-\frac{\log a}{\varepsilon^2} - 1}.$$

En élevant au carré, on retrouve (2).

On a maintenant (1), d'après (52, V),  $\frac{\varepsilon T}{2} = \log 3$ ; l'équation (22) s'écrit

$$3\beta \log 3 = X_1 - X_2 - 3\bar{X}_1 - \bar{X}_2 + O(\varepsilon^2).$$

Mais,  $t_2 - t_1 = O(\varepsilon)$ ; donc,  $\varphi_2 - \varphi_1 = O(\varepsilon^2) = X_2 - X_1 = \bar{X}_2 - \bar{X}_1$ . D'autre part,  $t_1$  vaut asymptotiquement  $\frac{T}{2}$ ; donc,  $\varphi_1 = \pi - \nu$ . L'équation (22) s'écrit donc asymptotiquement

$$3\beta \log 3 = -4\bar{X}_1 = \frac{4m}{m^2 + 1} (m \cos \nu - \sin \nu).$$

On retrouve bien la formule (3).

13. *Étude numérique de la synchronisation.* — Pour avoir des renseignements plus précis sur le mécanisme de la synchronisation, en particulier pour les grandes valeurs de  $\lambda$ , j'ai fait une étude numérique du problème, en prenant  $\varepsilon = 0,2$  et faisant varier le rapport  $N' = \frac{T}{T'}$  entre 10 et 12.

Supposons qu'on parte d'un point quelconque, avec une vitesse quelconque et une phase quelconque pour la force synchronisante. Le point M finit nécessairement par sortir du segment AA'. En effet, s'il n'en sortait pas, son abscisse serait de la forme (6) et tendrait vers  $\pm \infty$  suivant le signe de C' (2).

Supposons, par exemple, qu'il sorte par A, avec une vitesse non infiniment petite (3). Tant qu'il ne revient pas en A, on a une équation de la forme

$$(24) \quad x = Ce^{-rt} + C'e^{-r't} + \lambda \bar{X},$$

avec

$$(25) \quad C = \frac{\bar{\xi}_0 + \lambda \bar{Y}_0}{\rho}, \quad C' = r \frac{\bar{\eta}_0 + \lambda \bar{Z}_0}{\rho}.$$

(1) Dans (52, V), T désigne la demi-période; il faut donc doubler.

(2) Sauf si  $C = C' = 0$  et si le maximum de  $\lambda \bar{X}$  est  $< 1$ . On a, dans ce cas, un mouvement périodique sinusoïdal; mais, il est évidemment instable, car il suffit de modifier infiniment peu les conditions initiales pour que C et C' ne soient pas nuls.

(3) Il est évidemment possible que cette vitesse soit infiniment petite. S'il en est de même de l'accélération, c'est-à-dire de  $\lambda \cos \varphi_0 - 1$ , la durée du retour sera très petite. Mais, il ne saurait en être ainsi indéfiniment pour les sorties par A ou A'.

Le retour en A se fait au bout d'un temps fini, pour lequel l'exponentielle  $e^{-r't}$  est extrêmement petite vis-à-vis de l'autre <sup>(1)</sup>. On peut donc, pour ce retour, négliger le second terme de la formule (24). La vitesse  $v_1$  est alors donnée par

$$(26) \quad v_1 = -r - \lambda \bar{Z}_1 + O(\exp).$$

A partir de ce moment et à  $O(\exp)$  près, le mouvement ne dépend plus que

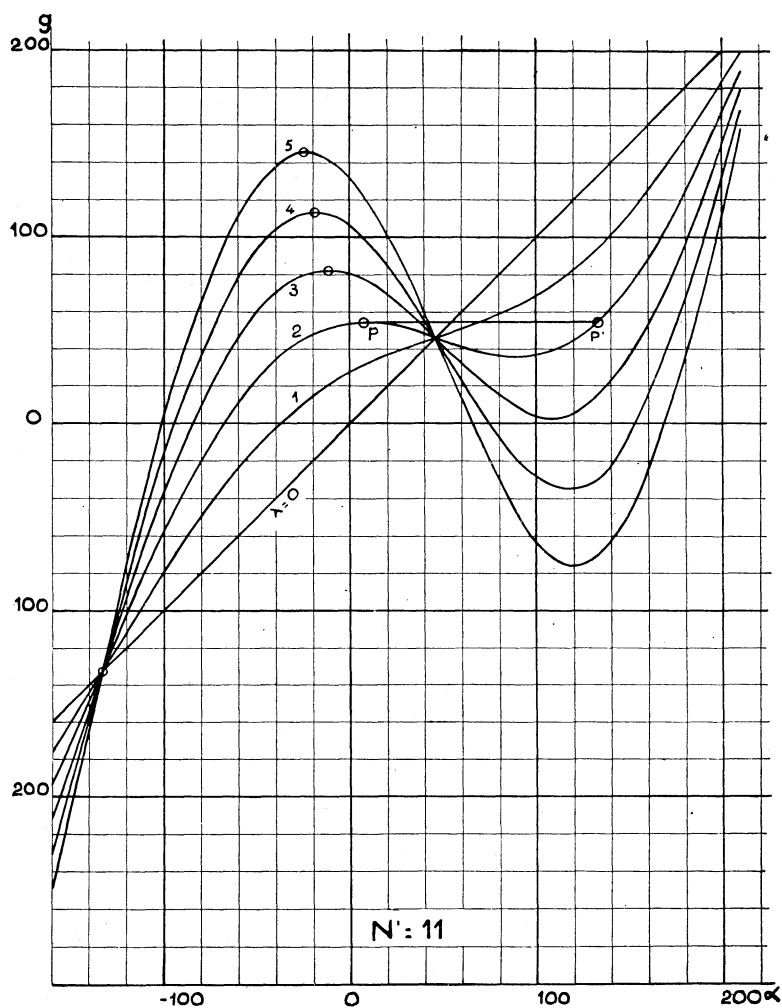


Fig. 6.

d'un seul paramètre, qui est la phase  $\varphi_1 = \alpha$ . C'est là une propriété fondamentale, inhérente au caractère accentué de relaxation.

(1) Par exemple, pour  $t = 2,6$  le rapport des deux exponentielles vaut à peu près  $0,67 \cdot 10^{-5}$ . La durée normale de l'aller et retour étant approximativement 5,66, l'erreur relative commise en négligeant le second terme de (24) est de l'ordre de  $10^{-10}$ .

La valeur de  $\alpha$  est donnée par l'équation

$$(27) \quad g(\alpha) = h,$$

en posant (1)

$$(28) \quad g(\alpha) = \alpha + \omega r' \log[1 - \lambda \bar{X}(\alpha)], \quad h = \varphi_0 + \omega r' \log C,$$

et désignant par  $\varphi_0$  la phase au départ de A. On peut l'obtenir, pour toute valeur de  $h$ , en construisant une fois pour toutes la courbe ( $g$ ) représentant la fonction  $g(\alpha)$ . Cette courbe peut affecter les différentes formes indiquées par la figure 6 (2). Si  $\lambda$  est petit, elle n'a pas de tangente horizontale; il y a une seule racine et  $\alpha$  peut prendre n'importe quelle valeur. Si  $\lambda$  dépasse une certaine valeur  $\lambda'$ , dépendant de  $N'$ , la courbe a des tangentes horizontales. Suivant la valeur de  $h$ , l'équation (27) peut admettre une ou plusieurs racines, dont on doit seulement retenir la plus petite qui soit  $> \varphi_0$ .

De toute manière, la vitesse  $v_1 = -r - \lambda \bar{Z}_1(\alpha)$  doit être négative. Or,  $g'(\alpha) = r' \frac{r + \lambda \bar{Z}(\alpha)}{1 - \lambda \bar{X}(\alpha)}$  a le signe de  $-v_1$ . Donc, la racine à adopter est toujours telle que  $g'(\alpha)$  soit  $> 0$ ; c'est l'abscisse du point de rencontre de la droite  $\Delta$  d'ordonnée  $h$  avec un arc de la courbe ( $g$ ) à pente positive. Il s'ensuit que, pour  $\lambda > \lambda'$ , il faut exclure de l'intervalle de variation de  $\alpha$  le segment compris entre le point le plus haut de la courbe et le point de rencontre de la tangente en ce point avec la courbe.

14. Supposons qu'on se donne la valeur numérique de  $\alpha$ . On peut calculer  $\varphi_2$  et  $v_2$  (n° 8), soit par la formule (6) en résolvant l'équation  $x = -1$ , soit en utilisant l'invariance des fonctions (9) et (10). C'est cette dernière méthode qui nous a paru la plus commode pour le calcul des points de synchronisation et des décréments correspondants.

En tenant compte de (26), on a

$$\xi_1 + \lambda Y_1 = \frac{r}{\varepsilon} + \lambda H_1, \quad \eta_1 + \lambda Z_1 = -2r + \lambda K_1,$$

en posant

$$H = -X - r^2 \bar{X} + r(X' - \bar{X}'), \quad K = Z - \bar{Z}.$$

Les inconnues  $v_2$  et  $\varphi_2$  sont ensuite déterminées par le système

$$(29) \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{r}{\omega} \gamma, \quad \log(\xi_2 + \lambda Y_2) = \log(\xi_1 + \lambda Y_1) + r^2 \gamma,$$

en posant

$$\gamma = \log(-\eta_2 - \lambda Z_2) - \log(-\eta_1 - \lambda Z_1).$$

(1) Nous supposons  $\lambda$  assez petit pour que  $1 - \lambda \bar{X}(\alpha)$  soit  $> 0$  quel que soit  $\alpha$ .

(2) Sur cette figure, ainsi que dans les suivantes, l'unité d'angle est le degré.

On le résout par approximations successives, en devinant les valeurs de  $v_2$ ,  $\varphi_2$  substituées dans  $\gamma$ . La première équation donne  $\varphi_2$ ; puis, la deuxième donne  $v_2$ . La deuxième approximation est toujours suffisante, la première l'est souvent.

On a ensuite  $\varphi_3$  en faisant  $x = -1$  dans (24), négligeant la deuxième exponentielle et remplaçant C par  $\frac{\bar{\xi}_2 + \lambda \bar{Y}_2}{\rho}$ . La constante C étant négative, on a, en posant  $\varphi_3 = N\pi + \alpha_1$  et tenant compte de ce que N est impair :

$$g(\alpha_1) = \varphi_3 - N\pi + \omega r' \log \frac{-\bar{\xi}_2 - \lambda \bar{Y}_2}{\rho} = f(\alpha).$$

Le second membre étant connu numériquement, on a  $\alpha_1$  en coupant la courbe ( $g$ ) par la droite d'ordonnée  $h = f(\alpha)$ . On peut alors construire la courbe ( $\alpha_1$ ) donnant la phase  $N\pi + \alpha_1$  à la fin de la première alternance (1) en fonction de la phase  $\alpha$  au début de cette alternance. Par des itérations successives, on en déduit la courbe ( $\alpha_p$ ) donnant la phase  $pN\pi + \alpha_p$  au bout de la  $p^{\text{ième}}$  alternance.

15. *Remarque.* — Pour que les calculs précédents soient valables, il faut que le point M arrive en A' avec une vitesse négative assez grande en valeur absolue. Cette condition peut ne pas être remplie si  $\lambda$  est grand.

Le mouvement de A à A' est donné par une équation se déduisant de (24) en changeant  $r$  en  $-r$ ,  $r'$  en  $-r'$ ,  $\bar{X}$  en X. Les constantes C et C' sont données par les formules (25), où l'on fait les mêmes changements. Si  $C' < 0$ , il est évident que le point A' est sûrement atteint. Mais, il n'est pas sûr qu'il en soit de même si  $C' > 0$ . Il peut se faire que le point M rebrousse chemin, sous l'effet de la force périodique, avant d'arriver en A' et qu'il revienne en A avec une vitesse positive. Il y reviendra de nouveau ultérieurement (n° 13) et finira par atteindre A' au bout d'un certain nombre d'oscillations analogues. Le calcul devient alors très compliqué, quoique faisable.

Il convient donc d'écartier les cas où C' est positif, ou même négatif, mais voisin de zéro; car, dans ce dernier cas, on n'est pas sûr que la vitesse  $v_2$  sera assez grande pour que les conclusions du n° 13 soient légitimes.

16. *Pour que le mouvement soit périodique*, il faut et il suffit que, pour une valeur paire de  $p$ , soit  $p = 2q$ , la différence  $\alpha_p - \alpha$  soit un multiple de  $2\pi$ , soit  $\alpha_p - \alpha = 2k\pi$ . Pendant une période, le point M effectue  $p$  alternances, donc  $q$  allers et retours; et la phase de la force augmente de  $2(pN + k)\pi$ .

---

(1) Nous appelons *alternance* le passage de A (vitesse positive) à A' (vitesse négative), ou de A' (vitesse négative) à A (vitesse positive).

Le cas intéressant est évidemment celui pour lequel  $q = 1$ , de telle manière que la période ne comprenne qu'un seul aller et retour, comme dans le mouvement périodique autonome.

Il peut arriver, plus particulièrement, que l'on ait  $\alpha_p = \alpha$ . Dans ce cas, les deux alternances ont même durée. La période vaut  $NT'$ .

17. Pour découvrir les mouvements ci-dessus, il suffit, d'une manière générale, de couper la courbe  $(\alpha_p)$  par la droite  $\alpha_p = \alpha + 2k\pi$ . A tout point de rencontre correspond un mouvement synchronisé. Un tel point sera dit *point de synchronisation*.

Pour que le mouvement correspondant soit stable, il faut et il suffit que le décrement correspondant ait un module  $< 1$ . Or, ce décrement est la dérivée  $F'_p(\alpha)$ . Donc, la condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un point de synchronisation est que la tangente en ce point à la courbe  $(\alpha_p)$  ait une pente comprise entre  $-1$  et  $+1$ .

Dans le cas où  $p = 1$ , cette pente est le *décrement par alternance*, que nous avons appelé  $s$  au n° 9. Si  $p = 2$ , on a le décrement  $S$  du n° 4.

Le décrement peut être évalué graphiquement, en traçant la tangente ci-dessus. Mais, ce procédé est peu précis. Dans le cas où  $p = 1$ , on a la formule suivante :

$$s(\bar{\xi}_2 + \lambda \bar{Y}_2) \left( 1 - \frac{\lambda r' \bar{X}'_1}{1 - \lambda \bar{X}_1} \right) = \bar{\xi}_2 - \lambda(X_2 + rX'_2) - \frac{\lambda\omega(\bar{\xi}_2 + \lambda Y_2)H'_1}{\rho\varepsilon(\bar{\xi}_1 + \lambda Y_1)} - \frac{2\lambda\omega r^2(\eta_2 + \lambda Z_2)K'_1}{\rho(\eta_1 + \lambda Z_1)}$$

Malgré sa complication, cette formule se prête bien au calcul numérique, parce que la plupart des quantités qui y figurent ont déjà été calculées antérieurement (n° 13).

18. *Exemples numériques.* — Nous allons indiquer quelques exemples, au sujet desquels nous signalerons les différentes particularités qui peuvent se présenter.

I.  $N' = 11$ ,  $\lambda = 1$ . — La figure 7 reproduit la courbe  $(\alpha_1)$ , qui coupe la droite  $D$ , d'équation  $\alpha_1 = \alpha$ , aux points A et B. Le second seul est *stable*. Les flèches indiquent les valeurs prises par la phase à la fin des alternances successives, en partant d'une phase quelconque. On voit clairement que ces valeurs tendent vers l'abscisse de B et l'on se rend compte de la rapidité avec laquelle cette limite est pratiquement atteinte. On constate que la synchronisation a lieu quelles que soient les conditions initiales; le domaine de stabilité est *infini* (n° 6.1).

II.  $N' = 11$ ,  $\lambda = 2$ . — La courbe  $\lambda = 2$  de la figure 6 possède une tangente horizontale  $PP'$ . Les abscisses des points P et P' sont respectivement 7 et 133.



On en déduit l'intervalle de variation (133, 367) pour  $\alpha$ . La courbe ( $\alpha_1$ ) est (fig. 8) EABGG'F. Elle présente *une discontinuité* pour  $\alpha = 324$  environ; l'ordonnée  $\alpha_1$  passe brusquement de 367 à 493. Elle coupe la droite D en A et B; A est *stable*, B est instable.

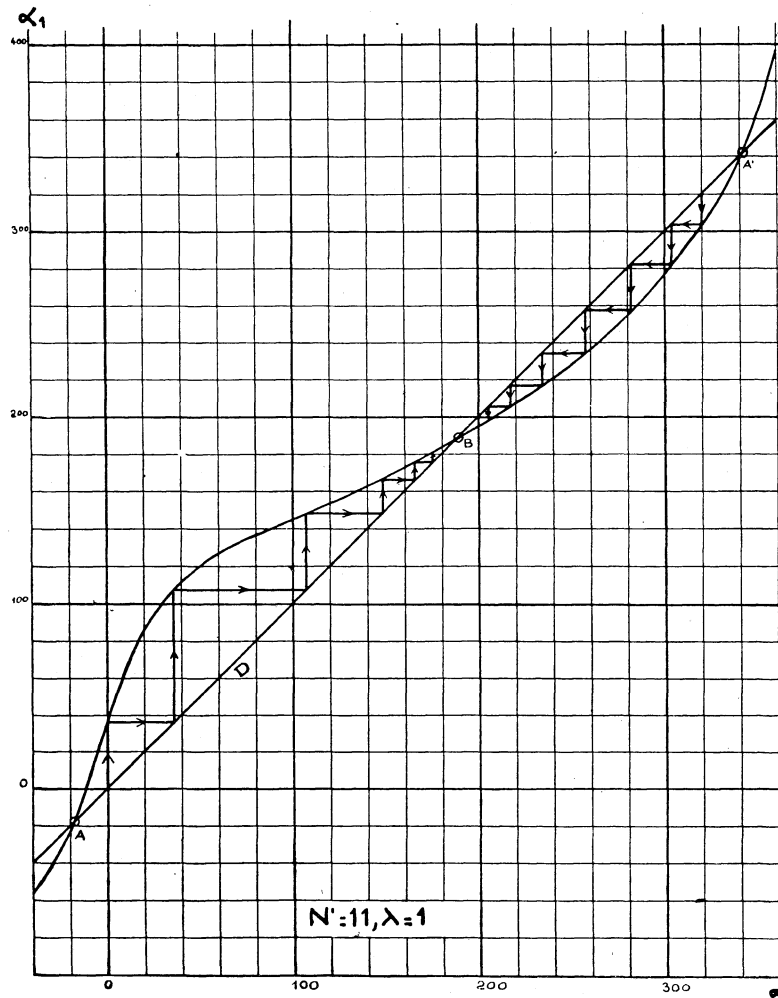


Fig. 7.

La courbe ( $\alpha_2$ ) est HABII'JJ'K. Elle passe toujours par A et B, bien entendu. Elle présente *deux discontinuités*. Pour une valeur de  $\alpha$  très légèrement supérieure à 320,  $\alpha_2$  passe brusquement de 367 à 493, par suite de la discontinuité subie par  $\alpha_1$ . Pour  $\alpha = 324$ ,  $\alpha_2$  passe de 493 à 540 environ.

La courbe ( $\alpha_3$ ) présenterait trois discontinuités, provenant des deux discontinuités de  $\alpha_2$  et de celle de  $\alpha_1$ . Plus généralement, la courbe ( $\alpha_p$ ) présente  $p$  discontinuités.

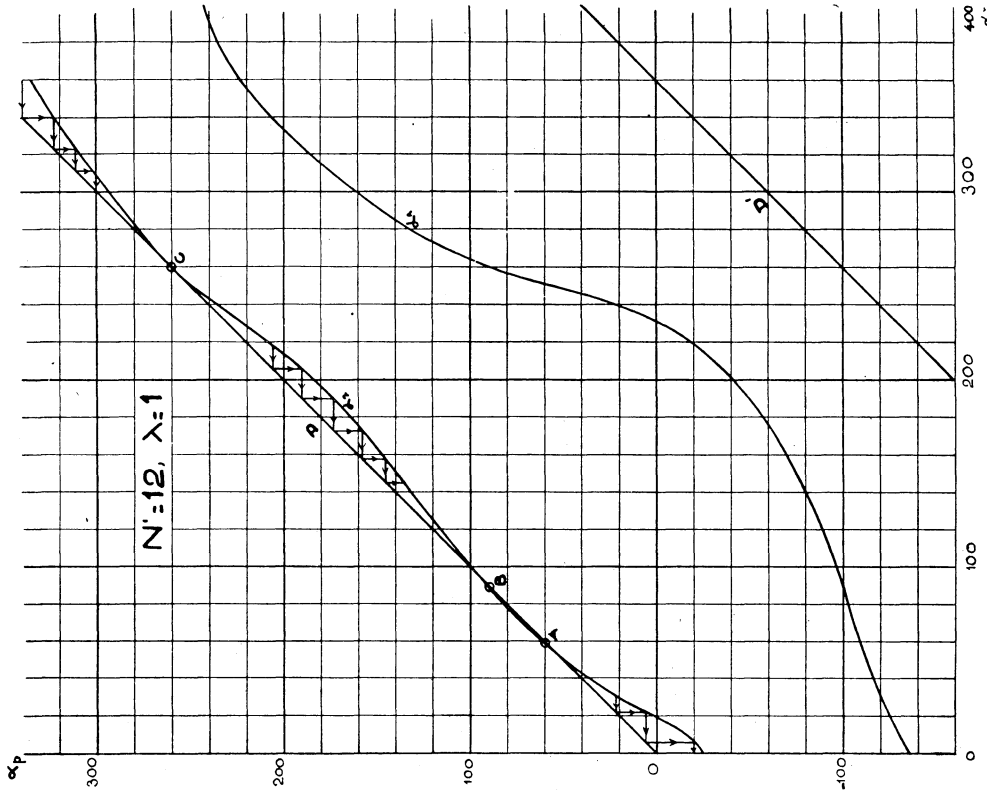


Fig. 9.

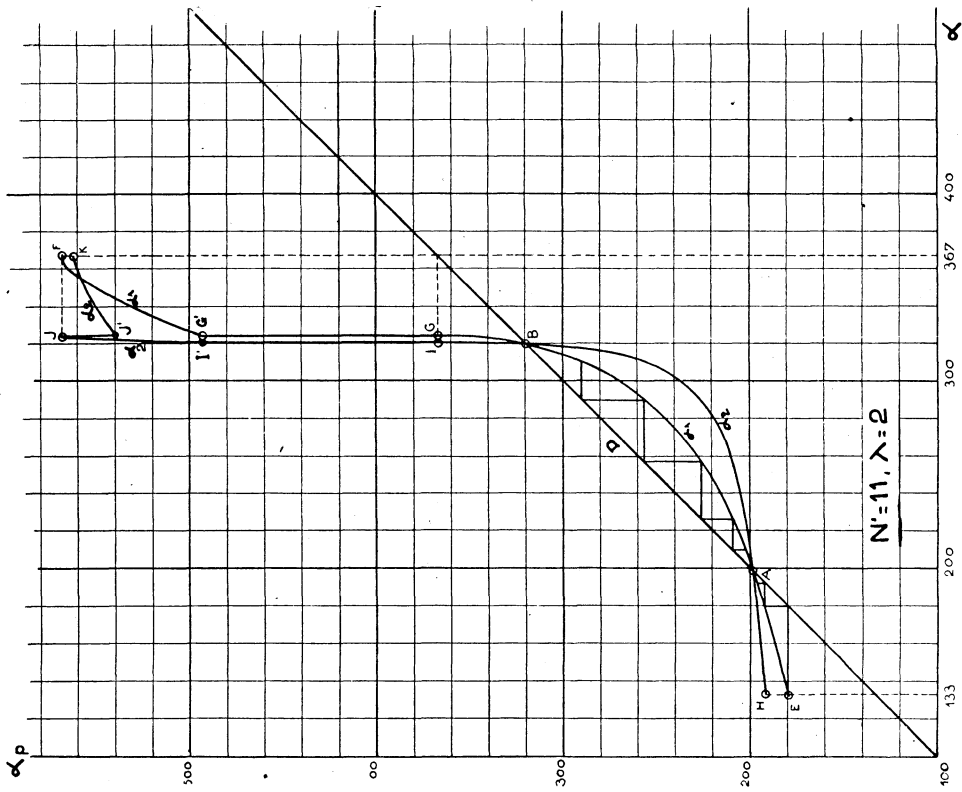


Fig. 8.

III.  $N' = 12$ ,  $\lambda = 1$ . — La courbe ( $\alpha_1$ ) est comprise entre D et D'; il n'y a pas de synchronisation par alternance. La courbe ( $\alpha_2$ ) coupe la droite D en deux points très rapprochés A et B; elle lui est à peu près tangente au point C. Le point B est stable à droite et à gauche; le point C est stable à droite, instable à

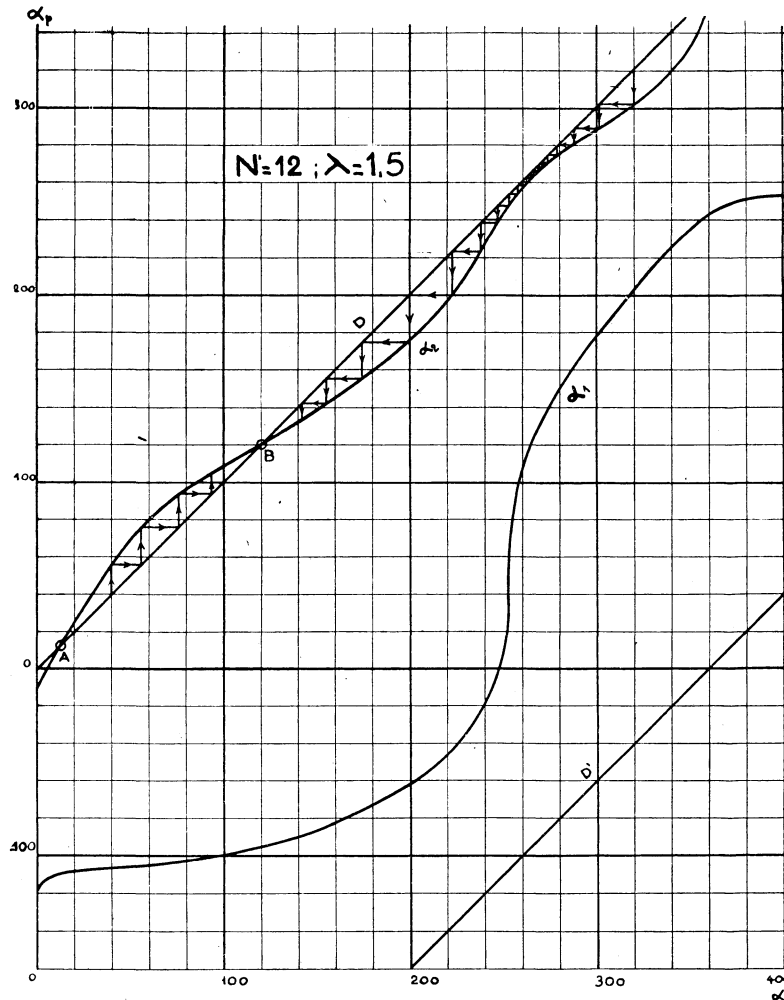


Fig. 10.

*gauche*. Si la valeur initiale de  $\alpha$  est comprise entre 60 et 260,  $\alpha$  tend vers 90, abscisse de B. Si la valeur initiale de  $\alpha$  est comprise entre 260 et 420,  $\alpha$  tend vers 260, abscisse de C.

IV.  $N' = 12$ ,  $\lambda = 1,5$  (fig. 10). — Cas analogue au précédent, avec cette seule différence que la courbe ( $\alpha_2$ ), tout en s'approchant beaucoup de D, ne lui est plus tangente.

V.  $N' = 12$ ,  $\lambda = 1,75$  (fig. 11). — L'intervalle de variation va de 103 à 385.

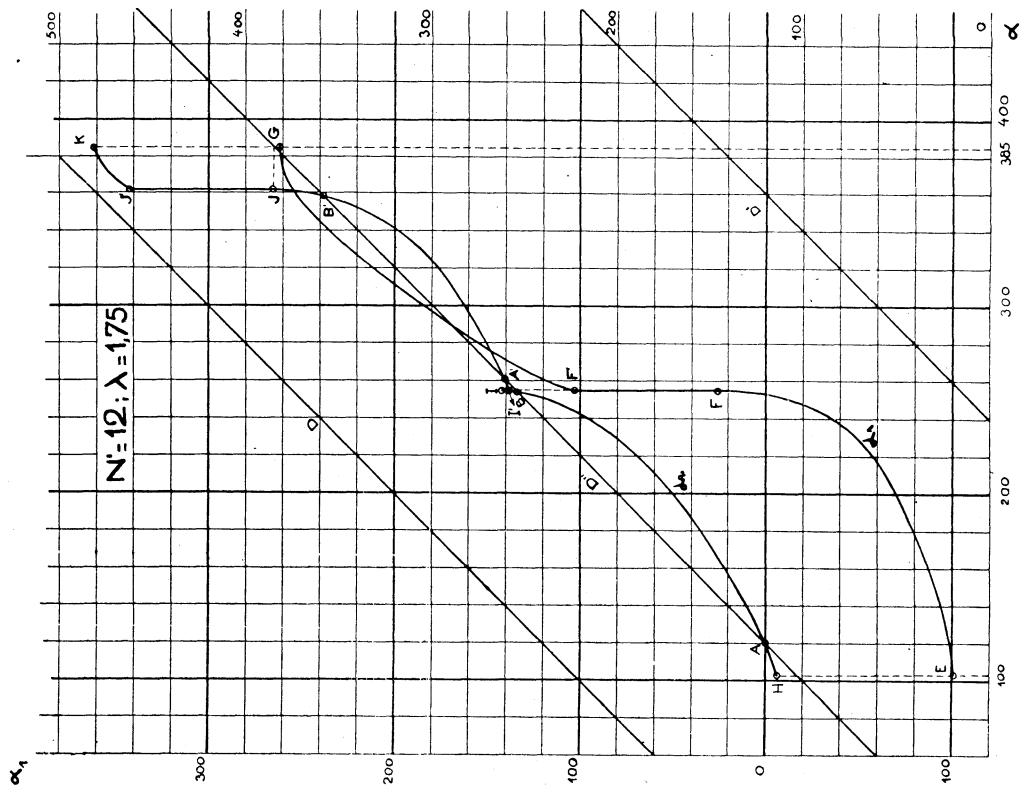


Fig. 11.

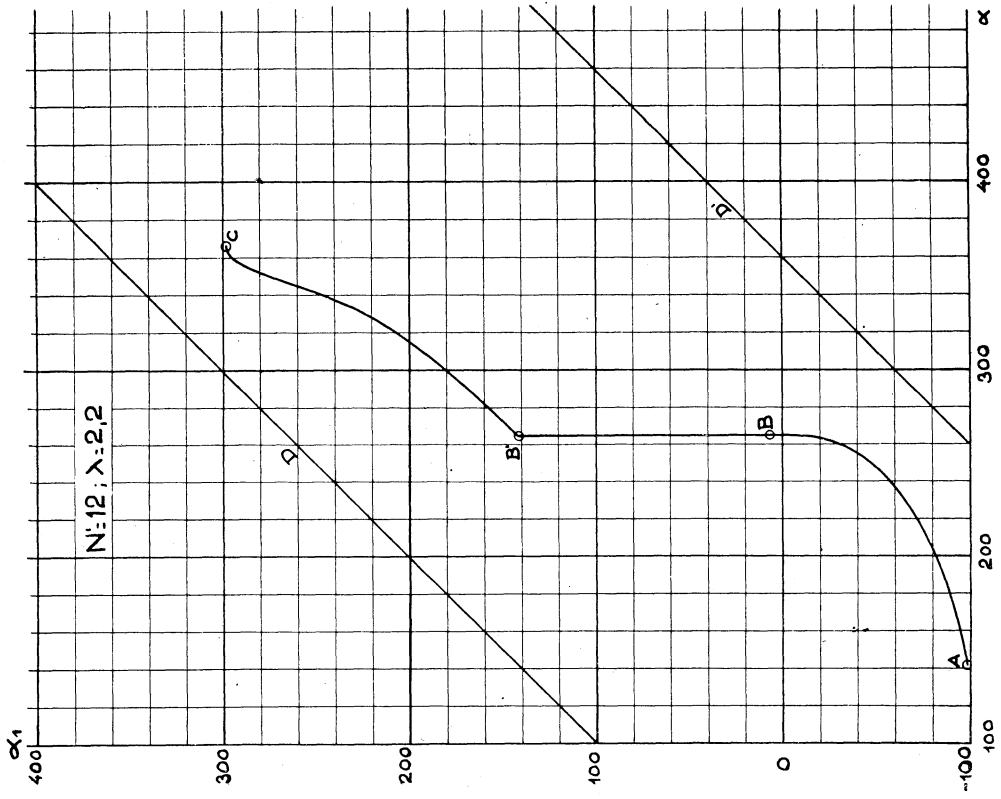


Fig. 12.

La courbe ( $\alpha_1$ ), ou EFF'G, ne coupe ni D, ni D'. Elle a une discontinuité FF' pour  $\alpha = 225$ ,  $\alpha_1$  passant de 25 à 103.

Pour diminuer l'encombrement, on a descendu la courbe ( $\alpha_2$ ), ainsi que la droite D, qui vient en D''; l'échelle correspondante est indiquée à droite. La courbe ( $\alpha_2$ ), ou HABII'AB'JJ'K, possède deux discontinuités : II' et JJ'. Elle coupe D'' en A, B, A', B'; A et A' sont stables, B et B' sont instables.

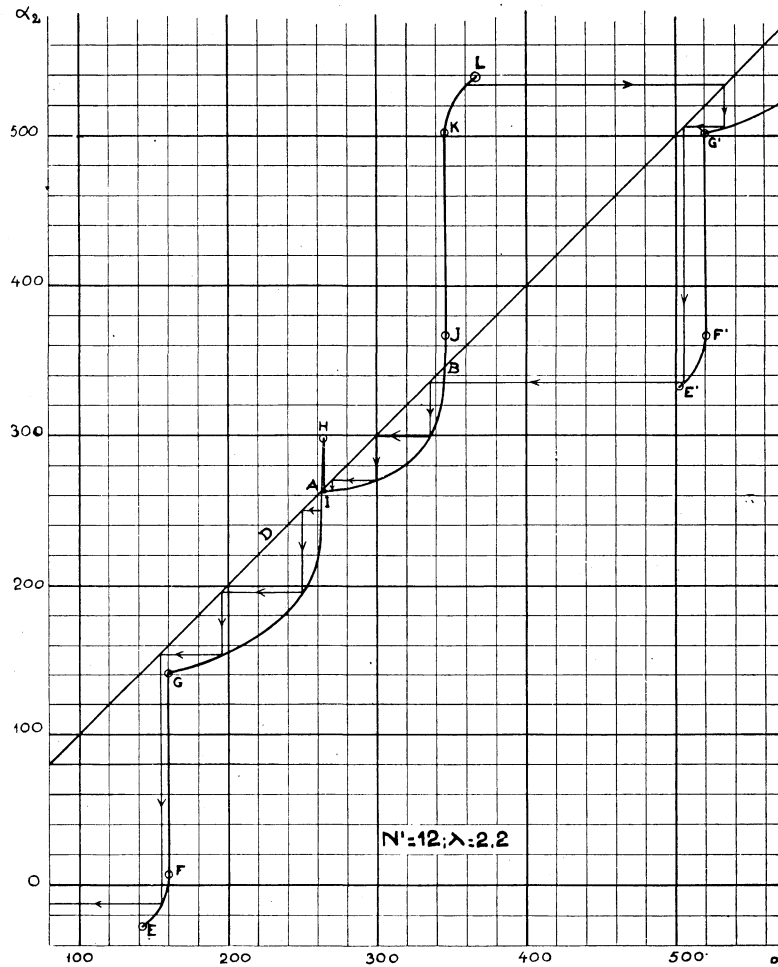


Fig. 13.

Pour ne pas embrouiller le dessin, on n'a pas tracé les cheminements indiquant les phases atteintes après les doubles alternances successives. Mais, il est facile de voir qu'en partant d'un point quelconque de l'arc HAB, on arrive en A; en partant d'un point quelconque de l'arc BII'A'B', on arrive en A'; en partant d'un point quelconque de l'arc B'JJ'K, on arrive au point A'' déduit de A par la translation 360 suivant les deux axes.

VI.  $N' = 12$ ,  $\lambda = 2,2$ . — L'intervalle de variation va de 142 à 367. La

courbe ( $\alpha_1$ ) (*fig. 12*), ne coupe ni D, ni D'; elle présente la discontinuité BB' pour  $\alpha = 265$  environ.

La courbe ( $\alpha_2$ ) (*fig. 13*) possède trois discontinuités. La première FG a lieu pour  $\alpha = 160$  environ, parce que  $\alpha_1$  traverse la valeur  $-95 = 265 - 360$ , qui donne la discontinuité BB' (*fig. 12*) pour  $\alpha_2$ ; on a donc  $FG = BB'$ . La deuxième

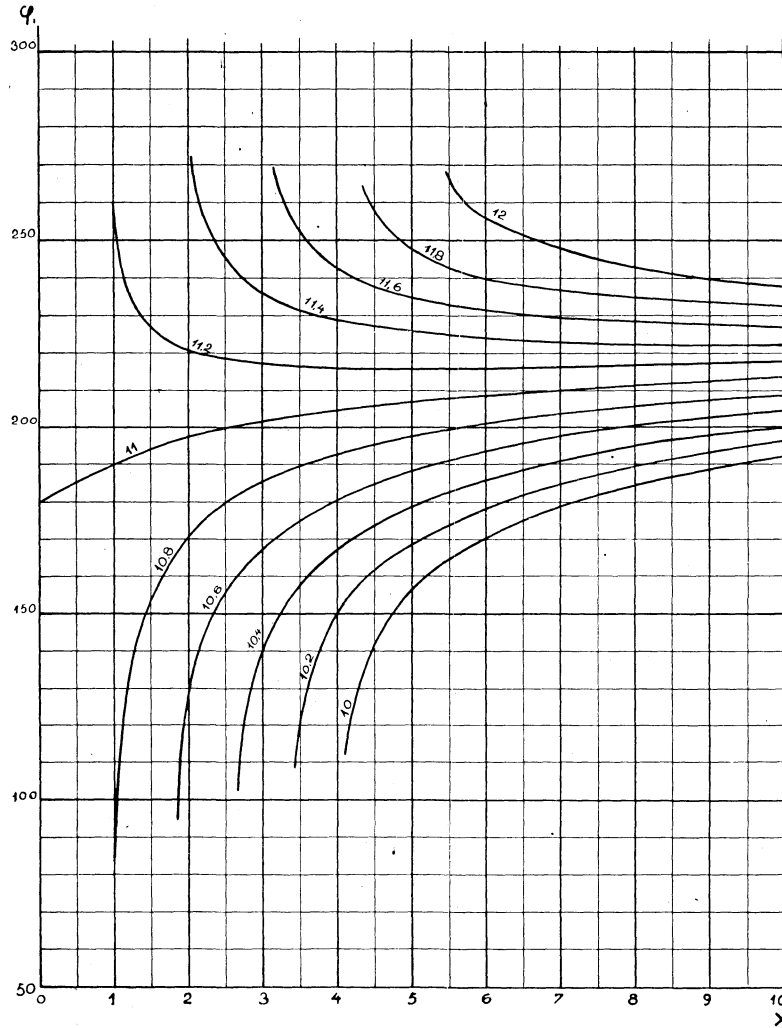


Fig. 14.

discontinuité HI a lieu pour  $\alpha = 265$ , du fait que  $\alpha_1$  subit la discontinuité BB'. La troisième  $JK = BB'$  a lieu pour  $\alpha = 346$  environ, parce que  $\alpha_1$  traverse la valeur 265.

L'arc E'F'G'..., déduit de EFG... par la translation 360 suivant les deux axes, est le début de la courbe correspondant à une augmentation de  $\alpha$  égale à 360.

Il y a deux points de synchronisation A et B, tous deux instables.

19. *Possibilité de la synchronisation par alternance quel que soit le rapport des périodes.* — J'ai fait le calcul des points de synchronisation stables pour des valeurs de  $N'$  échelonnées de 0,2 entre 10 et 12. Pour  $N' = 11$ , la synchronisation a lieu quel que soit  $\lambda$ . Pour  $\lambda = 0$ , la limite de  $\alpha$  est donnée par l'équation (22), où l'on fait  $\beta = 0$ . On a, d'autre part, d'après les résultats

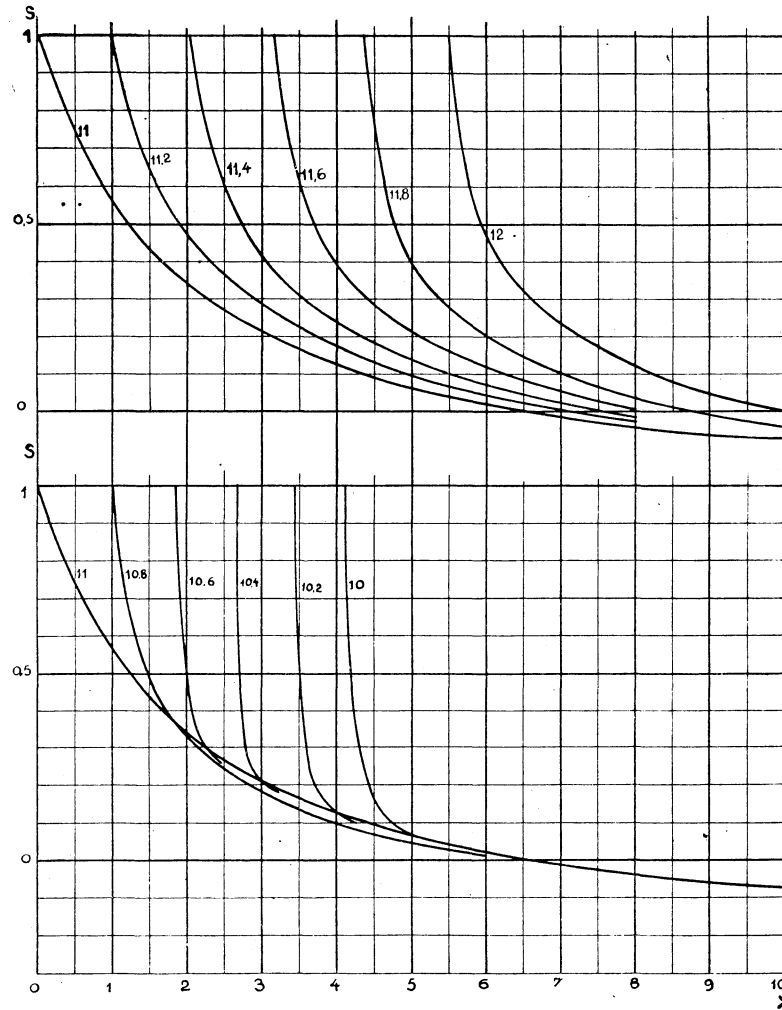


Fig. 15.

obtenus dans (V) <sup>(1)</sup> et le calcul de la trajectoire correspondant au mouvement périodique autonome

$$v_1 = -r = -0,2087, \quad v_2 = -10,54, \quad t_2 - t_1 = 0,66975, \quad T = 12,912.$$

(1) Je signale à ce propos une erreur commise dans le calcul du temps  $t_s$  de la page 97 (due à une fausse lecture de logarithme). Au lieu de 0,73877, il faut lire 0,72497; ce qui ramène l'erreur de la formule asymptotique à 0,00606 au lieu de 0,01986 et l'erreur relative à 0,0084 au lieu de 0,027. La vérification est donc encore meilleure que ce que j'avais annoncé.

En portant dans (22), on trouve

$$\beta T = -0,002435 \cos \varphi_1 - 0,244 \sin \varphi_1.$$

Pour  $\beta = 0$ , on trouve que la racine stable est  $\varphi_1 = 179^\circ,4$ . La formule asymptotique (2) donnerait  $178^\circ,2$ ; l'accord est bon.

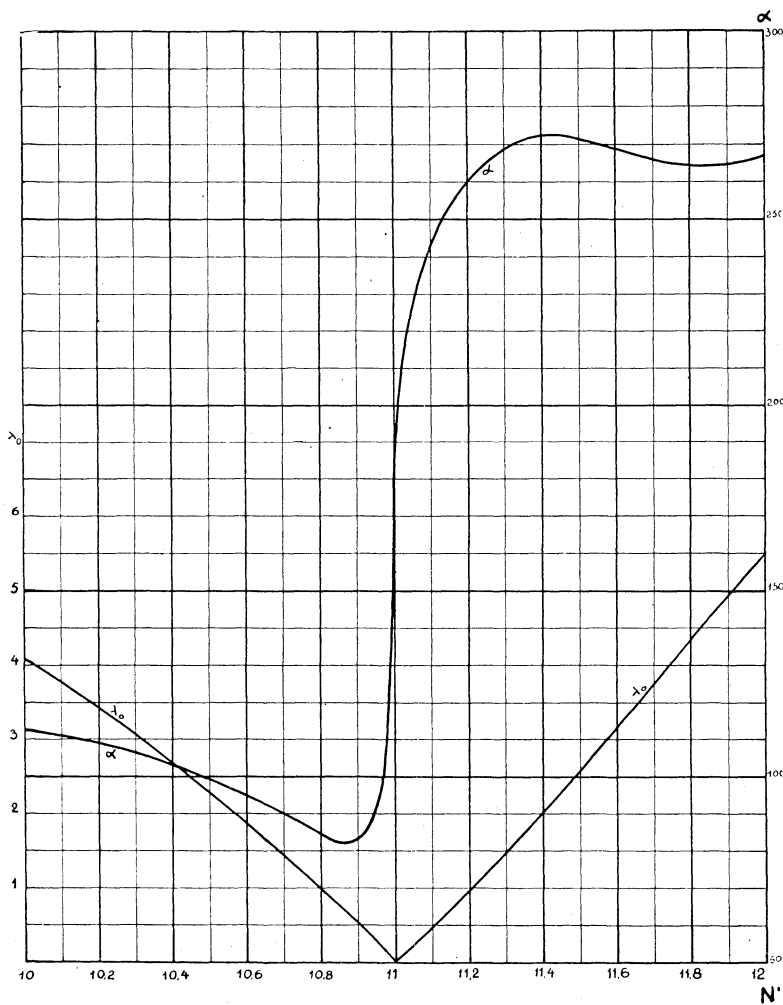


Fig. 16.

Pour les autres valeurs de  $N'$ , la synchronisation n'est possible que si  $\lambda$  dépasse une certaine valeur  $\lambda_0$ , fonction de  $N'$ . On s'en rend compte sur la figure 14.

La figure 15 donne le *décroissement  $s$  par alternance*. Pour  $\lambda = \lambda_0$ , ce décroissement vaut  $un$ .

La figure 16 donne  $\lambda_0$  en fonction de  $N'$ , ainsi que la valeur correspondante de  $\alpha$ .

Ceci nous montre que *quel que soit le rapport  $N'$  des périodes, il est toujours*



*possible de synchroniser, à condition que l'intensité de la force synchronisante soit suffisamment grande.*

A vrai dire, cette proposition n'a été établie qu'en faisant varier  $N'$  entre les deux nombres pairs consécutifs 10 et 12. Mais, il est probable qu'elle est générale, sans que nous puissions toutefois l'affirmer avec une entière certitude.

Les courbes de la figure 15 montrent que, pour les grandes valeurs de  $\lambda$ ,  $s$  devient  $< 0$ . On pourrait craindre qu'il devienne  $< -1$ , ce qui rendrait la synchronisation instable. En conséquence, j'ai calculé la limite de  $s$  pour  $\lambda = \infty$ . On trouve d'abord que la limite de  $\alpha$  (point de synchronisation) est la racine de l'équation  $\bar{X}(\alpha) = 0$  pour laquelle  $\bar{X}'(\alpha) > 0$ . Puis, la limite de  $s$  est  $-e^{-\frac{r\pi}{\omega}}$ . Elle est toujours  $> -1$ . On ne peut évidemment en conclure que  $s$  demeure compris entre  $-1$  et  $+1$  quel que soit  $\lambda$ ; mais, cela paraît probable.

On peut enfin se demander *si les conclusions précédentes sont valables pour tous les oscillateurs de relaxation*. Cela me paraît assez vraisemblable; mais, la démonstration rigoureuse reste à faire et constitue sans doute un problème fort difficile.