

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur quelques équations aux différences mêlées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 65 (1948), p. 337-353

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__337_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1948, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS

AUX DIFFÉRENCES MÊLÉES

PAR M. PAUL MONTEL.

1. Le théorème de Jacobi sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction analytique non constante admettant trois périodes indépendantes a été étendu dans différentes directions (¹). Les résultats les plus complets ainsi obtenus s'expriment dans les théorèmes suivants :

Toute fonction continue d'une variable réelle x qui vérifie les équations

$$\begin{aligned}\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} [f] &= 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} [f] &= 0,\end{aligned}$$

dans lesquelles tous les rapports $\frac{h_i}{k_j}$ sont irrationnels, est un polynôme de degré $n - 1$ au plus.

Toute fonction analytique d'une variable complexe z qui vérifie les équations

$$\begin{aligned}\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} [f] &= 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} [f] &= 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n} [f] &= 0,\end{aligned}$$

dans lesquelles tous les systèmes (h_i, k_j, l_s) de trois accroissements sont indépendants, est un polynôme de degré $n - 1$ au plus.

La notation $\Delta_h [f(x)]$ ou $\Delta_h [f]$ désigne l'accroissement $f(x + h) - f(x)$ et la notation $\Delta_h \Delta_{h'} [f]$ désigne l'expression

$$\Delta_h [\Delta_{h'}(f)] = \Delta_{h'} [\Delta_h(f)],$$

(¹) PAUL MONTEL, *Sur quelques extensions d'un théorème de Jacobi* (Prace Matematyczno-Fizyczne, t. XLIV, 1936, p. 315-329); *Sur un système d'équations fonctionnelles* (Annales de la Société Polonaise de mathématiques, t. XXI, 1948, p. 99-106).

et de même

$$\Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_m} [f] = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{m-1}} [\Delta_{h_m} (f)];$$

le résultat de l'opération ne dépend d'ailleurs pas de l'ordre dans lequel on place les accroissements.

Lorsque certains des rapports $\frac{h_i}{k_j}$ sont rationnels et certains des systèmes (h_i, k_j, l_s) sont dépendants, il serait intéressant de déterminer la nature des fonctions f qui satisfont aux équations précédentes.

Je me propose maintenant d'examiner le cas des fonctions de plusieurs variables en introduisant les différences de ces fonctions pour des accroissements simultanés donnés aux variables. Nous obtiendrons des résultats semblables aux précédents en ce sens que toutes les solutions sont des polynômes, mais différents en ce que les degrés de ces polynômes peuvent dépasser $n - 1$. Les polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$ vérifient toute équation aux différences finies du type précédent. Lorsque le degré dépasse $n - 1$, les polynômes doivent satisfaire à des conditions que nous étudierons.

2. Rappelons d'abord certains résultats concernant les corps de périodes constitués à partir de périodes fondamentales.

Soient, dans un plan, trois périodes h, k, l , représentées par trois vecteurs issus d'un point O pris comme origine; le corps de périodes est constitué par l'ensemble des vecteurs $mh + nk + pl$, issus de l'origine, m, n, p désignant des entiers positifs, négatifs ou nuls. Les extrémités de ces vecteurs autres que O , s'appellent les points-périodes. Les différents corps de périodes sont caractérisés par l'existence de périodes infinitésimales, c'est-à-dire de vecteurs périodes dont la longueur est inférieure à tout nombre positif ε arbitrairement petit.

Si, quel que soit ε , il existe deux périodes de grandeurs inférieures à ε et non situées sur la même droite, on peut couvrir le plan par un réseau de parallélogrammes égaux dont les côtés sont égaux à ces deux périodes. Tout point du plan est à une distance inférieure à 2ε d'un point-période; comme ε est arbitraire, tout point du plan est un point d'accumulation de points-périodes. L'ensemble de ces points-périodes est partout dense dans le plan. On dit que les périodes h, k, l sont *indépendantes*.

Si, à partir d'une valeur de ε , toutes les périodes de grandeur inférieure à ε sont portées par la même droite, on voit aussitôt que l'ensemble des points-périodes est partout dense sur un faisceau de droites équidistantes qui peut se réduire à une droite unique. On est dans le premier cas pour $h = 1, k = \sqrt{2}, l = i$ et dans le second, pour $h = 1, k = \sqrt{2}, l = \sqrt{3}$. On dit alors que les périodes sont *semi-dépendantes*.

Enfin, s'il n'y a pas de périodes infinitésimales, les points-périodes sont répartis aux sommets d'un réseau de parallélogrammes. On dit que les périodes sont *dépendantes*.

On peut retrouver autrement ces résultats. Il existe des nombres réels non tous nuls μ, μ', μ'' vérifiant l'égalité

$$\mu h + \mu' k + \mu'' l = 0.$$

Ces nombres sont déterminés à un facteur près sauf dans le cas où les périodes forment trois vecteurs superposés. Ils peuvent être liés par des relations linéaires à coefficients entiers, m, n, p ,

$$m\mu + n\mu' + p\mu'' = 0.$$

S'il y a entre μ, μ', μ'' deux telles relations distinctes, ces nombres sont proportionnels à des entiers et les périodes sont dépendantes.

S'il y a une seule relation, on en déduit

$$\mu(ph - ml) + \mu'(pk - nl) = 0.$$

Les périodes $ph - ml, pk - nl$, sont sur la même droite (D); le rapport $\frac{\mu'}{\mu}$ est irrationnel, sinon les périodes h, k, l seraient dépendantes et μ, μ', μ'' liés par deux relations linéaires à coefficients entiers. Les points-périodes sont partout denses sur la droite (D), et par suite, sur toute parallèle à (D) menée par un point-période non situé sur (D). Je dis que ces parallèles forment un faisceau de droites équidistantes. Posons

$$ph - ml = p\omega_1, \quad pk - nl = p\omega_2; \quad l = p\omega_3;$$

d'où

$$h = \omega_1 + m\omega_3, \quad k = \omega_2 + n\omega_3, \quad l = p\omega_3.$$

Donc le corps de périodes déduit de h, k, l appartient au corps déduit de $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ces dernières sont semi-dépendantes; il en est donc de même de h, k, l .

Enfin, s'il n'y a entre μ, μ', μ'' aucune relation linéaire à coefficients entiers, les périodes sont indépendantes.

Examinons encore le cas de cinq périodes h, k, l, u, v , représentées par des vecteurs issus de l'origine dans l'espace à quatre dimensions. S'il n'y a pas de période infinitésimale, les cinq périodes sont dépendantes, et les points-périodes forment un réseau de parallélépipèdoïdes dans l'espace à quatre dimensions.

Supposons qu'il existe des périodes infiniment petites; s'il y en a quatre non situées dans une variété linéaire ou hyperplan, l'ensemble des points-périodes est partout dense dans l'espace : les périodes sont indépendantes.

Si, à partir d'une certaine valeur de ε , les périodes sont situées dans un même hyperplan, variété à trois dimensions, les points-périodes sont partout denses sur un système d'hyperplans parallèles et équidistants. Nous dirons que les périodes sont semi-dépendantes d'ordre trois.

Si, à partir d'une certaine valeur de ε , les périodes sont situées dans deux mêmes hyperplans à trois dimensions, c'est-à-dire dans une variété linéaire à deux dimensions, les points-périodes sont partout denses sur un système de variétés linéaires à deux dimensions, de plans parallèles, menés par les sommets d'un réseau de parallélogrammes. Les périodes sont dites semi-dépendantes d'ordre deux.

Si, au-dessous d'une certaine valeur de ε , les périodes infinitésimales sont alignées sur une même variété linéaire à une dimension, sur une même droite, les points-périodes sont partout denses sur un ensemble de droites parallèles menées par les sommets d'un réseau de parallélépipèdes à trois dimensions. Les périodes sont dites semi-dépendantes d'ordre un.

Retrouvons ces résultats par le calcul. On peut toujours trouver cinq nombres réels $\mu, \mu', \mu'', \mu''', \mu''''$ vérifiant l'égalité géométrique

$$\mu h + \mu' k + \mu'' l + \mu''' u + \mu'''' v = 0.$$

S'il existe entre les μ une relation linéaire à coefficients entiers

$$m\mu + n\mu' + p\mu'' + q\mu''' + r\mu'''' = 0,$$

on en déduit

$$\mu(rh - mv) + \mu'(rk - nv) + \mu''(rl - pv) + \mu'''(ru - qv) = 0,$$

et, par un raisonnement semblable à celui du plan, on en conclut que les cinq périodes sont semi-dépendantes d'ordre 3.

De même, s'il y a entre les μ deux ou trois relations linéaires distinctes à coefficients entiers, les périodes sont semi-dépendantes d'ordres deux ou un. S'il y a quatre relations, elles sont dépendantes. S'il y en a aucune, elles sont indépendantes.

Pour donner des exemples de ces différents cas, prenons pour les quatre premières périodes les vecteurs-unités portés par les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz, Ot . Si la dernière période a pour composantes $1, 1, 1, \sqrt{2}$, les périodes sont indépendantes; si ces composantes sont $0, 1, 1, \sqrt{2}$, elles sont semi-dépendantes d'ordre trois; pour la période $0, 0, 1, \sqrt{2}$, elles sont semi-dépendantes d'ordre deux; pour la période $0, 0, 0, \sqrt{2}$, semi-dépendantes d'ordre un; pour la période $1, 1, 1, 1$, elles sont dépendantes.

3. Soit $f(x, y)$, une fonction continue de deux variables réelles x, y et h, k, l , trois vecteurs définis dans un système de coordonnées rectangulaires x, y par,

$$h = \eta + i\eta', \quad k = \zeta + i\zeta', \quad l = \lambda + i\lambda'.$$

Posons

$$\Delta_h[f] = f(x + \eta, y + \eta') - f(x, y),$$

$$\Delta_k[f] = f(x + \zeta, y + \zeta') - f(x, y),$$

$$\Delta_l[f] = f(x + \lambda, y + \lambda') - f(x, y).$$

Cherchons d'abord quelles sont les fonctions $f(x, y)$ vérifiant le système

$$\Delta_h[f] = 0, \quad \Delta_k[f] = 0, \quad \Delta_l[f] = 0.$$

On déduit de ces équations

$$\Delta_{mh+nk+pl}[f] = f(x + m\eta + n\lambda + p\lambda', y + m\eta' + n\lambda' + p\lambda') - f(x, y) = 0,$$

m, n, p , étant des entiers. Si les périodes sont indépendantes, on peut choisir m, n, p , de façon que le vecteur $m\eta + n\lambda + p\lambda'$, d'origine O soit aussi voisin qu'on le veut du vecteur $x_0 - x + i(y_0 - y)$; donc, puisque $f(x, y)$ est continue, on a

$$f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

et $f(x, y)$ est une constante.

Si les périodes sont semi-dépendantes, le même raisonnement prouve que $f(x, y)$ est constante sur un faisceau de droites parallèles dont on peut toujours écrire l'équation sous la forme

$$ax + by = q,$$

q désignant un entier; $f(x, y)$ est alors de la forme $\varphi(ax + by)$, $\varphi(t)$ désignant une fonction continue de période un .

Enfin, si les périodes sont dépendantes, $f(x, y)$ est une fonction doublement périodique.

Nous nous bornerons dans la suite au cas de périodes indépendantes.

Avec cette hypothèse, considérons encore le système

$$\Delta_h[f] = C', \quad \Delta_k[f] = C'', \quad \Delta_l[f] = C''',$$

C', C'', C''' désignant des constantes. Calculons les constantes A et B par les équations

$$A\eta + B\eta' = C',$$

$$Ax + Bx' = C''$$

et posons

$$g(x, y) = f(x, y) - Ax - By,$$

$$C''' - A\lambda - B\lambda' = \gamma.$$

On a

$$\Delta_{mh+nk+pl}[g] = p\gamma,$$

et, si la période $m\eta + n\lambda + p\lambda'$ est infiniment petite, on voit que $p\gamma$ doit être nul, donc $\gamma = 0$. Alors g est une constante C et

$$f(x, y) = Ax + By + C.$$

Les constantes données doivent vérifier la condition

$$\begin{vmatrix} C' & \eta & \eta' \\ C'' & x & x' \\ C''' & \lambda & \lambda' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C' & \eta & \bar{\eta}' \\ C'' & x & \bar{x}' \\ C''' & \lambda & \bar{\lambda}' \end{vmatrix} = 0,$$

\bar{u} désignant le conjugué de u . Si deux des constantes, C' , C'' , par exemple, sont nulles, la troisième C''' est nulle et la fonction $f(x, y)$ se réduit à une constante.

On peut traiter le même système par une autre méthode qui nous sera utile. Soit $f_1(x, y) = \Delta_u[f]$, u désignant un vecteur arbitraire; on a évidemment

$$\Delta_h[f_1] = 0, \quad \Delta_k[f_1] = 0, \quad \Delta_l[f_1] = 0,$$

donc f_1 est une constante et $\Delta_u^2[f]$ est nul quel que soit u . On sait que $f(x, y)$ est alors un polynôme du premier degré.

Plus généralement, si une fonction $f(x, y)$ vérifie, quels que soient les vecteurs u, v, w, \dots , l'équation

$$\Delta_u \Delta_v \Delta_w \dots [f] = 0,$$

cette fonction est un polynôme. En effet, en laissant y fixe et supposant u, v, w, \dots réels, on en conclut que $f(x, y)$ est un polynôme en x , quel que soit y ⁽¹⁾. C'est aussi un polynôme en y , quel que soit x ; c'est donc un polynôme en x, y .

4. Considérons maintenant le système d'équations aux différences finies relatives à la fonction $f(x, y)$ continue des variables réelles x, y ,

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} [f] = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} [f] = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n} [f] = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles les périodes h_i, k_j, l_s ($i, j, s = 1, 2, \dots, n$) sont indépendantes. Je dis que toute solution de ce système est un polynôme.

La proposition a été établie pour $n=1$. Supposons-la vraie jusqu'à la valeur $n-1$ et montrons qu'elle est vraie pour la valeur n . Soit

$$\varphi(x, y) = \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-1}}.$$

On a

$$\Delta_{h_n}[\varphi] = \Delta_{k_n}[\varphi] = \Delta_{l_n}[\varphi] = 0,$$

et, comme les périodes h_n, k_n, l_n sont indépendantes, φ est une constante.

On a donc

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{l_{n-1}} &= \text{const.}, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{h_n} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{k_n} &= 0. \end{aligned}$$

Comme les périodes h_n, k_n, l_{n-1} sont indépendantes, la constante est nulle, et l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{l_{n-1}} &= \text{const.}, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{h_n} &= 0, \\ \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_{n-1}} \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_{n-1}} \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_{n-2}} \Delta_{k_n} &= 0. \end{aligned}$$

(1) Cf. *Sur un système d'équations fonctionnelles, etc.* [p. 337, note (1)].

Par hypothèse, f_n est un polynôme entier; par conséquent une différence de f_n , d'ordre assez élevé, est nulle quels que soient les accroissements; il en est donc de même de f dont f_n est une différence d'ordre n ; par conséquent, f est un polynôme.

Soient α_n le degré d'une solution du système (1) et α_{n-1} , le degré d'une solution du système (2). On a

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + n$$

de même,

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} + (n-1),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2,$$

$$\alpha_1 = 0.$$

Donc, en ajoutant, $\alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

On a ainsi une limitation du degré des solutions de (1). Il est d'autre part évident que tout polynôme de degré inférieur à n vérifie toute équation obtenue en égalant à zéro une différence d'ordre n .

La démonstration précédente, qui repose sur un raisonnement par récurrence, fait intervenir, pour passer de $n-1$ à n , l'hypothèse que les périodes h_n, k_i, l_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) sont indépendantes. On voit donc que l'hypothèse que tous les groupes de périodes h_i, k_j, l_s sont indépendants est intégralement utilisée, quand on passe de 1 à n .

On voit d'ailleurs directement que si l'un des groupes h_i, k_j, l_s n'était pas indépendant, le système (1) admettrait des solutions autres que des polynômes. Les accroissements étant permutable, on peut supposer que les périodes non indépendantes soient h_n, k_n, l_n . Il existe alors des fonctions périodiques $f(x, y)$ admettant ces périodes et, puisque

$$\Delta_{h_n} = \Delta_{k_n} = \Delta_{l_n} = 0,$$

ces fonctions vérifient le système (1).

Tout polynôme de degré inférieur à n vérifie ce système. Les polynômes de degré égal ou supérieur à n qui en sont des solutions doivent vérifier des conditions que nous allons expliciter.

Nous pourrions nous borner aux polynômes homogènes. Soit en effet $f(x, y)$, un polynôme quelconque de degré m , on peut l'écrire, en groupant les termes homogènes,

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + \varphi_0,$$

les φ désignant des polynômes homogènes,

$$f(\rho^x, \rho^y) = \rho^m \varphi_m + \rho^{m-1} \varphi_{m-1} + \dots + \rho \varphi_1 + \varphi_0,$$

est une solution, quel que soit ρ . On en déduit aussitôt que $\varphi_m, \varphi_{m-1}, \dots$ sont des solutions, et réciproquement.

Les n premières déterminent a_1, a_2, \dots, a_n , puisque les α_j sont différents. Les autres donnent b_0, b_1, \dots, b_p .

Par hypothèse, le polynôme f vérifie l'équation (2); il en est de même de P , donc aussi de $f - P = Q$,

$$Q \equiv y^n (C_m^p b_0 x^h + C_m^{p-1} b_1 x^{p-1} y + \dots + b_p y^p).$$

Toutes les dérivées de Q vérifient l'équation (2); en particulier, les dérivées d'ordre p

$$\frac{\partial^p Q}{\partial x^p} = C b_0 y^n, \quad \frac{\partial^p Q}{\partial x^{p-1} \partial y} = C b_1 y^n, \quad \dots, \quad \frac{\partial^p Q}{\partial y^p} = C b_p y^n,$$

avec $C = m(m-1) \dots (m-p+1)$. On en déduit

$$b_0 = b_1 = \dots = b_p = 0.$$

Donc : la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme de degré m vérifie l'équation fonctionnelle (2) est qu'il puisse se mettre sous la forme (3).

On modifierait aisément cet énoncé pour l'adapter au cas où certains des α_i seraient égaux.

La condition précédente ne fait intervenir que les pentes des vecteurs accroissements; on en conclut que l'on peut prendre arbitrairement les grandeurs de ces vecteurs et supposer en particulier que ce sont des vecteurs unitaires.

6. Rappelons la définition des polynômes apolaires. Soit le polynôme $F(x)$ de degré n

$$F(x) \equiv A_0 x^n + C_n^1 A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$$

et le polynôme de degré n'

$$\Phi(x) \equiv B_0 x^{n'} + C_n^1 B_1 x^{n'-1} + \dots + B_n$$

admettant les zéros distincts $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on dit que les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont apolaires lorsque $F(x)$ peut se mettre sous la forme

$$P(x) \equiv a_1 (x - \alpha_1)^n + a_2 (x - \alpha_2)^n + \dots + a_n (x - \alpha_n)^n.$$

Comme on peut toujours écrire

$$F(x) \equiv P(x) + b_0$$

et calculer b_0 comme dans le paragraphe précédent, on voit, en multipliant les deux membres des $n+1$ équations d'identification (4) par $B_n, C_n^1 B_{n-1}, \dots, B_0$ et ajoutant, que l'on obtient

$$b_0 = A_0 B_n - C_n^1 A_1 B_{n-1} + C_n^2 A_2 B_{n-2} - \dots + (-1)^n A_n B_0 = 0.$$

Cette condition est symétrique par rapport aux coefficients A_i et B_j . On voit donc que l'on peut écrire $\Phi(x)$ sous la forme

$$Q(x) \equiv b_1(x - \beta_1)^n + b_2(x - \beta_2)^n + \dots + b_n(x - \beta_n)^n,$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ désignant les zéros de $F(x)$ et b_1, b_2, \dots, b_n , des constantes.

On démontre que, si les polynômes $F(x)$ et $\Phi(x)$ sont apolaires, tout domaine circulaire contenant les zéros de l'un des polynômes contient un zéro de l'autre (1). Dans le cas de $n = 2$, les quatre nombres $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ forment un rapport harmonique.

Considérons maintenant un polynôme de degré m

$$F(x) \equiv A_0 x^m + C_m^1 A_1 x^{m-1} + \dots + A_n.$$

Si m est inférieur à n , on peut toujours le mettre sous la forme

$$(5) \quad F(x) \equiv a_1(x - \alpha_1)^m + a_2(x - \alpha_2)^m + \dots + a_n(x - \alpha_n)^m,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ désignant les zéros de $\Phi(x)$. Si m est supérieur ou égal à n , proposons-nous de trouver les conditions sous lesquelles il peut se mettre sous la forme (5). Les équations d'identification des polynômes $F(x)$ et $P(x)$ sont encore les équations (4), en posant toujours $m = n + p$, $p \geq 0$, dans lesquelles les coefficients b_0, b_1, \dots, b_p sont remplacés par zéro. En multipliant successivement par $B_n, C_n^1 B_{n-1}, \dots, B_0$, les deux membres des $n + 1$ premières équations, puis ceux des $n + 1$ équations à partir de la seconde, etc., jusqu'aux $n + 1$ à partir de la $n^{\text{ième}}$, on remplace les $p + 1$ dernières équations par les équations

$$(6) \quad \begin{cases} A_0 B_n - C_n^1 A_1 & B_{n-1} + C_n^2 A_2 & B_{n-2} + \dots + (-1)^n A_n & B_0 = 0, \\ A_1 B_n - C_n^1 A_2 & B_{n-1} + C_n^2 A_3 & B_{n-2} + \dots + (-1)^n A_{n+1} & B_0 = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_p B_n - C_n^1 A_{p+1} & B_{n-1} + C_n^2 A_{p+2} & B_{n-2} + \dots + (-1)^n A_m & B_0 = 0. \end{cases}$$

B_0 n'étant pas nul, les $p + 1$ équations (6) peuvent remplacer les $p + 1$ dernières équations (4). Elles donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations (4), aux inconnues a_1, a_2, \dots, a_n , soient compatibles, c'est-à-dire pour que $F(x)$ puisse se mettre sous la forme (5).

Si nous reprenons le polynôme homogène $f(x, y)$, de degré m et si nous posons

$$F(x) \equiv f(x, 1),$$

nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Pour que le polynôme $F(x)$ puisse se mettre sous la forme (5), il faut et il suffit

(1) Cf. J. H. GRACE, *The zeros of a polynomial* (*Proceedings of the Cambridge, Phi. Soc.*, t. 11, 1900-1902, p. 352-357); G. SZEGÖ, *Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen* (*Math. Zeitschrift*, Bd. 13, 1922, p. 28-55). PAUL MONTEL, *Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes* (Paris, Gauthier-Villars, 1933, p. 16-22).

Si $p > \frac{1}{2}(n-3)$, tous les déterminants d'ordre $m+1$ doivent être nuls. Leur nombre est égal à

$$3(p+1) - m = 2p - (n-3) = \delta.$$

Comme $p < n-2$, $p+2 < n$, $2(p+1) < n+p = m$, chaque déterminant est constitué de la manière suivante :

$$\Delta_i = \begin{array}{cccccccc} \left. \begin{array}{l} H_1 \quad K_1 \quad L_1 \quad \dots \quad T_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad H_1 \quad K_1 \quad \dots \quad S_1 \quad T_1 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad H_1 \quad \dots \quad R_1 \quad S_1 \quad T_1 \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad H_1 \quad K_1 \quad \dots \quad T_1 \end{array} \right\} p+1 \\ \left. \begin{array}{l} H_2 \quad K_2 \quad L_2 \quad \dots \quad T_2 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad H_2 \quad K_2 \quad \dots \quad S_2 \quad T_2 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad H_2 \quad \dots \quad R_2 \quad S_2 \quad T_2 \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad H_2 \quad K_2 \quad \dots \quad T_2 \end{array} \right\} p+1 \\ \left. \begin{array}{l} H_3 \quad K_3 \quad L_3 \quad \dots \quad T_3 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ 0 \quad H_3 \quad K_3 \quad \dots \quad S_3 \quad T_3 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \\ \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad H_3 \quad \dots \quad \dots \quad S_3 \quad T_3 \quad \dots \quad 0 \end{array} \right\} p+2-\delta. \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{p-\delta+1+i} \end{array}$$

La dernière est obtenue en plaçant H_3 , successivement dans les colonnes $p-\delta+2$, $p-\delta+3$, ..., $p+1$. Dans ce déterminant, multiplions par $-x$, $+x^2$, $-x^3$, ..., $(-x)^m$, les éléments des colonnes de rangs 2, 3, 4, ..., $m+1$, et ajoutons les produits aux éléments de la première colonne. Le nouveau déterminant, égal au premier Δ_i , aura comme éléments de la première colonne

$$\begin{array}{l} \Phi_1(x), \quad x\Phi_1(x), \quad \dots, \quad x^p\Phi_1(x), \quad \Phi_2(x), \quad x\Phi_2(x), \quad \dots, \quad x^p\Phi_2(x), \\ \Phi_3(x), \quad x\Phi_3(x), \quad \dots, \quad x^{p-\delta+i-1}\Phi_3(x), \quad x^{p-\delta+i}\Phi_3(x). \end{array}$$

Développons ce déterminant par rapport aux éléments de la première colonne et ajoutons-le à zéro, nous aurons l'identité

$$\varpi_1^{(i)}\Phi_1 + \varpi_2^{(i)}\Phi_2 + \varpi_3^{(i)}\Phi_3(x) \equiv 0 \quad (i=1, 2, \dots, \delta),$$

$\varpi_1^{(i)}$ et $\varpi_2^{(i)}$ désignant des polynômes de degré p et $\varpi_3^{(i)}$ un polynôme de degré $p-\delta+i$. On obtient ainsi δ identités distinctes puisque les degrés des polynômes $\varpi_3^{(i)}$ sont tous différents. En multipliant les deux membres de ces δ identités par des paramètres arbitraires, on a l'identité unique

$$(8) \quad \varpi_1\Phi_1 + \varpi_2\Phi_2 + \varpi_3\Phi_3 \equiv 0,$$

ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 désignant des polynômes de degré p contenant δ paramètres indépendants entrant d'une manière linéaire et homogène.

Réciproquement, si les polynômes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$ sont liés par une telle identité (8), les déterminants Δ_i sont nuls et les équations définissant les A_i sont compatibles. Il suffit pour le voir d'écrire l'identité (8) en donnant aux polynômes ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 des coefficients indéterminés. En explicitant l'identité, on obtient $m + 1$ équations à $3(p + 1)$ inconnues homogènes. Le nombre des paramètres arbitraires est

$$3(p + 1) - m - 1 = \delta - 1.$$

Pour qu'il y ait un paramètre arbitraire de plus, il faut et il suffit que les déterminants d'ordre $m + 1$ tirés du tableau des inconnues soient nuls : ce sont les déterminants Δ_i .

En résumé :

Pour que le polynôme homogène $f(x, y)$, de degré m , vérifie le système (1) d'équations aux différences mêlées, il faut que son degré ne dépasse pas $2(n - 1)$.

Si $m \leq n - 1$, le polynôme $f(x, y)$ est arbitraire.

Si $n - 1 < m \leq \frac{3}{2}(n - 1)$, le polynôme $f(x, y)$ dépend en général de $3(n - 1) - 2m$ paramètres arbitraires linéaires et homogènes.

Si $\frac{3}{2}(n - 1) < m \leq 2(n - 1)$, le polynôme n'existe que si les polynômes Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 qui admettent comme zéros les pentes sur l'axe des y des vecteurs accroissements vérifient l'identité

$$\varpi_1 \Phi_1 + \varpi_2 \Phi_2 + \varpi_3 \Phi_3 \equiv 0,$$

ϖ_1 , ϖ_2 , ϖ_3 , désignant des polynômes de degré p qui dépendent de $2m - 3(n - 1)$ paramètres linéaires et homogènes. En général, ce polynôme est unique.

9. Supposons maintenant que la fonction $f(x, y)$ soit une fonction analytique des deux variables complexes

$$x = x_1 + ix_2, \quad y = x_3 + ix_4.$$

Nous introduirons les accroissements h, k, l, u, v représentés par des vecteurs de l'espace à quatre dimensions; par exemple, le vecteur h se déduira des accroissements

$$\eta = \eta_1 + i\eta_2, \quad \eta' = \eta_3 + i\eta_4.$$

donnés aux variables x, y ou des accroissements réels $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ donnés aux variables réelles, x_1, x_2, x_3, x_4 .

Nous conserverons les définitions et notations du paragraphe 3 et remplaçons le système des équations (1) du paragraphe 4 par le système

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta_{h_1} \Delta_{h_2} \dots \Delta_{h_n} [f] = 0, \\ \Delta_{k_1} \Delta_{k_2} \dots \Delta_{k_n} [f] = 0, \\ \Delta_{l_1} \Delta_{l_2} \dots \Delta_{l_n} [f] = 0, \\ \Delta_{u_1} \Delta_{u_2} \dots \Delta_{u_n} [f] = 0, \\ \Delta_{v_1} \Delta_{v_2} \dots \Delta_{v_n} [f] = 0 \end{cases}$$

pour lequel les périodes h_i, k_j, l_r, u_s, v_t sont indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre 3.

On démontre d'abord qu'une fonction f vérifiant les équations

$$\Delta_h = 0, \quad \Delta_k = 0, \quad \Delta_l = 0, \quad \Delta_u = 0, \quad \Delta_v = 0,$$

est une constante. En effet, si les périodes sont indépendantes, les points-périodes sont partout denses dans l'espace à quatre dimensions et $f(x, y)$ est constante en ces points, donc partout. Si les périodes sont semi-dépendantes d'ordre 3, les points-périodes sont partout denses sur une variété linéaire à trois dimensions. La fonction est aussi constante, car une fonction analytique non constante ne peut prendre la même valeur que sur des variétés à deux dimensions.

On en déduit aussitôt la solution du système

$$\Delta_h = C_1, \quad \Delta_k = C_2, \quad \Delta_l = C_3, \quad \Delta_u = C_4, \quad \Delta_v = C_5.$$

En effet, les dérivées f'_x et f'_y , vérifiant le système écrit plus haut, sont des constantes, donc

$$f(x, y) = Ax + By + C,$$

A, B, C, désignant des constantes. A et B sont nuls, et f est encore une constante, lorsque trois des C_i sont nulles. Supposons en effet

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A\eta + B\eta' &= 0, \\ Ax + Bx' &= 0, \\ A\lambda + B\lambda' &= 0. \end{aligned}$$

Alors, $A = B = 0$, sinon on aurait

$$\frac{\eta}{\eta'} = \frac{x}{x'} = \frac{\lambda}{\lambda'}$$

et les périodes seraient semi-dépendantes d'ordre inférieur à 3.

En reprenant le raisonnement du paragraphe 4, on démontrerait la proposition suivante :

Toute solution du système (9) est un polynôme aux variables complexes x, y .

Il suffit de répéter la suite des opérations du paragraphe 4; on peut même simplifier le calcul en remplaçant chacun des accroissements arbitraires Δ_u par une dérivée de $f(x, y)$ par rapport à l'une des variables lorsque les seconds membres des égalités intermédiaires contiennent moins de trois constantes nulles. La condition que tous les systèmes h_i, k_j, l_r, u_s, v_t soient formés de périodes indépendantes ou semi-dépendantes d'ordre 3 est ici aussi indispensable.

10. La plupart des démonstrations employées dans le cas de deux variables réelles peuvent être reprises, *mutatis mutandis*, dans celui de deux variables complexes. On peut ainsi établir que le degré des polynômes solutions ne dépasse pas $2(n-1)$ et que la forme de ces polynômes est la même que dans le domaine réel.

Tout polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ est une solution. Lorsque ce degré m dépasse $n-1$ et demeure inférieur ou égal à $\frac{5}{4}(n-1)$, la solution homogène est donnée par un polynôme dépendant de $5(n-1) - 4m$ paramètres arbitraires; lorsque ce degré dépasse $\frac{5}{4}(n-1)$, les polynômes $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_5$ qui ont pour zéros, les quotients $\frac{\eta}{\eta'}$ supposés finis doivent vérifier des conditions. Celles-ci peuvent être exprimées de la manière suivante : il existe des polynômes $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_5$, homogènes, de degré $m-n$ et dépendant de $4m - 5(n-1)$ paramètres arbitraires qui vérifient l'identité

$$\varpi_1 \Phi_1 + \varpi_2 \Phi_2 + \varpi_3 \Phi_3 + \varpi_4 \Phi_4 + \varpi_5 \Phi_5 \equiv 0.$$

Les résultats qui précèdent résolvent entièrement le problème de déterminer les solutions des systèmes d'équations aux différences mêlées (1) ou (9). Il serait intéressant de trouver la solution générale de ces équations lorsque certains des systèmes des accroissements qui y figurent ne sont pas indépendants.

