NICOLAS PASTIDÈS

Sur quelques équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 277-298

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__277_0>

SUR

QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR M. NICOLAS PASTIDÈS.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $f_n(z) = z$.

1. *Notations.* — Nous représentons par $f_2(z)$ la fonction $f[f(z)]$ et par $f_n(z)$ la fonction $f[f_{n-1}(z)]$ c'est-à-dire la $n^{\text{ième}}$ itérée de $f(z)$. Par $f_{-1}(z)$, $F_{-1}(z)$, ..., nous représentons respectivement les fonctions inverses de $f(z)$, $F(z)$, ... E désignant un domaine, nous représentons par $f(E)$ le transformé de E par la fonction $f(z)$.

2. *Fractions rationnelles vérifiant l'équation $f_n(z) = z$.* — Considérons la fraction rationnelle $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ quotient des deux polynomes premiers entre eux $P(z)$ et $Q(z)$ de degrés p et q. Soit k le plus grand des nombres p et q, k s'appelle le degré de la fraction. On vérifie aisément que le degré de $R_n(z)$, est exactement k^n. Il s'ensuit que, pour que l'on ait $R_n(z) \equiv z$, il est nécessaire que $R(z)$ soit une fraction de degré un, c'est-à-dire que la substitution $[z, R(z)]$ soit une substitution homographique. Or, les seules substitutions homographiques ayant la propriété $R_n(z) \equiv z$, sont les substitutions linéaires elliptiques d'ordre n. En posant $u = R(z)$ elles sont données par $\frac{u - z_1}{u - z_2} = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}$, z_1 et z_2 étant les points fixes de la substitution et k un entier premier avec n. Si z_2 est le point de l'infini, u est donné par $u - z_1 = e^{\frac{2ki\pi}{n}}(z - z_1)$.

3. *Fonctions, autres que celles données par les substitutions linéaires elliptiques, vérifiant l'équation $f_n(z) = z$.* — Si $\varphi(z)$ désigne une fonction qui vérifie l'équation $\varphi_n(z) \equiv z$, toute fonction de la forme $f(z) = F_{-1}\big[\varphi[F(z)]\big]$ la

vérifie aussi, pourvu que $F(z)$ soit univalente dans le domaine que nous considérons et que, dans ce domaine, $F_{-1}\big[\varphi[F(z)]\big]$ et ses itérées soient définies. En effet $f_n(z) = F_{-1}\big[\varphi_n[F(z)]\big] = F_{-1}[F(z)] = z$. Remarquons aussi que, si z_0 est un point double de la transformation $Z = \varphi(z)$, $F_{-1}(z_0)$ est un point double de la transformation $Z = f(z)$ de plus, le multiplicateur est le même.

4. Théorème I. — *Si une fonction $f(z)$ a les propriétés suivantes : 1° $f(z_0) = z_0$; 2° Il existe un domaine D renfermant z_0, dans lequel $f(z)$ est holomorphe et vérifie l'équation $f_n(z) = z$. On conclut alors, qu'il existe un domaine E simplement connexe qui renferme z_0, et qui est transformé biunivoquement en lui-même par la fonction $f(z)$.*

Établissons d'abord le lemme suivant.

Lemme I. — *Si n domaines bornés simplement connexes $D_1, D_2, \ldots, D_n$ ont un point intérieur z_0 commun, alors le plus grand domaine connexe E qui renferme z_0, et qui appartient à l'intersection des n domaines $D_1, D_2, \ldots, D_n$ est lui-même simplement connexe.*

En effet une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine borné connexe soit simplement connexe, est que toute courbe de Jordan simple et fermée, formée de points du domaine, ait tout son intérieur qui appartient aussi au domaine [1].

Démonstration du théorème. — Montrons d'abord que $|f'(z_0)| = 1$. En dérivant $f_n(z) = z$ on obtient $f'[f_{n-1}(z)] \times f'[f_{n-2}(z)] \times \ldots \times f'(z) = 1$, ce qui, pour $z = z_0$, donne $[f'(z_0)]^n = 1$. Il s'ensuit que $f(z)$ est univalente au voisinage de z_0. Soit D_0 un domaine simplement connexe renfermant z_0, et tel que ses transformés $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, D_n = D_0$ par les itérées de $f(z)$, soient tous à l'intérieur du domaine d'holomorphie et d'univalence de $f(z)$. Ces domaines sont simplement connexes, aucun d'eux ne se recouvre, et ils ont tous z_0 comme point intérieur. Il existe donc, d'après le lemme I, un plus grand domaine connexe E, commun à $D_0, D, \ldots, D_{n-1}$ qui renferme z_0, et qui est simplement connexe. Nous allons montrer maintenant que $f(z)$, transforme E biunivoquement en lui-même. En effet, comme E fait partie des domaines $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$, son transformé par $f(z)$, fait partie des domaines $f(D_0) = D_1, f(D_1) = D_2, \ldots, f(D_{n-1}) = D_n = D_0$. D'autre part $f(E)$ est simplement connexe et renferme z_0 comme point intérieur. Comme E est le plus grand domaine ayant ces propriétés, on a $f(E) \subset E$. Mais si $f(E)$ était une partie propre de E, c'est-à-dire si l'on n'avait pas $f(E) = E$, alors $f_2(E) \subset f(E)$

(1) *Voir* Julia, *Principes géométriques d'Analyse*, t. I, p. 10.

serait une partie propre de E, et en continuant on obtiendrait que $f_n(E)$ serait une partie propre de E, alors que l'on a $f_n(E) = E$.

La transformation de E en lui-même par $f(z)$ est biunivoque car $f(z)$ est univalente dans D_0 donc dans (E) [1].

5. Théorème II. — *La fonction $f(z)$ satisfaisant aux mêmes conditions que dans le théorème* I, *il existe une infinité de fonctions* $F(z)$, *holomorphes et univalentes au voisinage de z_0 et telles que l'on ait, dans ce voisinage,*

$$f(z) = F_{-1}\left[e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)\right] \quad \text{avec} \quad F(z_0) = 0, \qquad f'(z_0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \neq 1.$$

En effet considérons un des domaines E, dont l'existence a été prouvée au théorème I. Il existe une fonction $F(z)$, holomorphe et univalente dans E, qui fait la représentation conforme de E avec l'intérieur du cercle unité, en faisant correspondre z_0 à l'origine.

Posons $\varphi(z) = F\big[f[F_{-1}(z)]\big]$. La fonction $\varphi(z)$ a les propriétés suivantes :

1° Elle est holomorphe et univalente à l'intérieur du cercle unité;

2° Elle transforme biunivoquement l'intérieur du cercle unité avec lui-même. En effet $F_{-1}(z)$ fait la représentation conforme de l'intérieur du cercle unité avec E, $f(z)$ transforme E en lui-même, et $F(z)$ tranforme E avec l'intérieur du cercle unité.

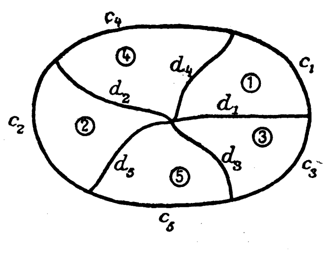
3° $\qquad \varphi_n(z) \equiv z \qquad$ car $\qquad \varphi_n(z) \equiv F\big[f_n[F_{-1}(z)]\big] \equiv F[F_{-1}(z)] \equiv z$;

4° $\qquad \varphi(0) = 0 \qquad$ et $\qquad \varphi'(0) = f'(z_0)$.

Il résulte des propriétés 1° et 2°, que $\varphi(z)$ est une fonction homographique, de la propriété 3, que c'est une substitution linéaire elliptique périodique, et

---

(1) Nous pouvons aussi donner du théorème I, la démonstration suivante que nous esquissons. Supposons pour simplifier l'écriture que $f_5(z) \equiv z$ et que $f'(z_0) = e^{\frac{4\pi i}{5}}$. Soit d_1 un petit segment de droite d'origine z_0 et d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 se confondant avec d_1, les transformés de d_1 par les itérées



de $f(z)$. Ces arcs ont la disposition ci-contre du fait que $f'(z_0) = e^{\frac{4i\pi}{5}}$. Joignons par un arc c_1 l'extrémité de d_1 à l'extrémité de d_4 et soit c_2, c_3, c_4, c_5 les transformés de c_1 par les itérées de $f(z)$. On a ainsi cinq secteurs 1, 2, 3, 4, 5 qui se permutent circulairement par $f(z)$; l'ensemble de ces cinq secteurs est le domaine cherché.

de la propriété 4° que c'est une rotation d'ordre n. Donc $\varphi(z) = e^{\frac{2ki\pi}{n}}.z$ avec k entier premier avec n [on suppose que l'on n'a pas $f_p(z) = z$ avec $p < n$] et $e^{\frac{2ki\pi}{n}} = f'(z_0)$.

Nous avons donc

$$e^{\frac{2ki\pi}{n}} z = \mathrm{F}[f[\mathrm{F}_{-1}(z)]], \quad \text{d'où} \quad f(z) = \mathrm{F}_{-1}\left[e^{\frac{2ki\pi}{n}} \mathrm{F}(z)\right].$$

Remarquons que F(z) n'est pas unique. Car si $\mathrm{F}^1(z)$ est une fonction particulière, ayant les propriétés requises, il en est de même de $\mathrm{F}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q [\mathrm{F}^1(z)]^{nq+1}$ où $c_0 \neq 0$ et la série entière $\sum_{q=0}^{\infty} c_q u^{nq+1}$ ayant un rayon de convergence non nul. Nous verrons plus loin dans la discussion de l'équation $\mathrm{F}[f(z)] = e^{\frac{2ki\pi}{n}} f(z)$, que ce sont là les seules fonctions F(z) ayant les propriétés de l'énoncé.

Avant de faire cette discussion, nous établirons quelques propriétés des transformations périodiques permutables.

6. Théorème III. — *Soit $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0, et ayant les propriétés suivantes :*

1° $$f(z_0) = z_0, \qquad g(z_0) = z_0;$$

2° $$f_n(z) \equiv z, \qquad g_m(z) \equiv z,$$

n et m étant les plus petits entiers donnant ces relations.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$f[g(z)] = g[f(x)],$$

est qu'il existe une fonction F(z), *holomorphe et univalente au voisinage z_0, et telle que l'on ait*

$$f(z) = \mathrm{F}_{-1}[e^{i\theta_1}\mathrm{F}(z)], \qquad g(z) = \mathrm{F}_{-1}[e^{i\theta_2}\mathrm{F}(z)].$$

La condition est manifestement suffisante, démontrons qu'elle est nécessaire. Pour cela nous supposons $f(z)$ et $g(z)$ permutables, et nous prouvons l'existence d'un domaine E simplement connexe borné, renfermant z_0, et qui soit transformé biunivoquement en lui-même en même temps par $f(z)$ et par $g(z)$.

Soit E_0 un domaine simplement connexe qui renferme z_0, borné, et qui est transformé biunivoquement en lui-même par $f(z)$. Considéronsles transformés $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_{m-1}, \mathrm{E}_m = \mathrm{E}_0$, de E_0 par les itérées de $g(z)$. Soit E le plus grand domaine connexe renfermant z_0 et contenu dans $\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_{m-1}$. Comme E_0 peut être choisi dans un cercle de centre z_0 et de rayon aussi petit que l'on veut, on le choisit de façon que $E_1, E_2, \ldots, E_{m-1}$ existent et qu'aucun d'eux n'empiète sur lui-même. D'après la démonstration du théorème I, E est simplement connexe et il est transformé en lui-même biunivoquement par $g(z)$. Montrons que E est aussi transformé en lui-même par $f(z)$.

Considérons $f(E_j)$, le domaine transformé de E_j par $f(z)$ et prouvons que $f(E_j) = E_j$ pour tout j. Nous avons $f(E_0) = E_0$ d'après le choix même de E_0. Supposons que $f(E_j) = E_j$ pour un certain j et prouvons que $f(E_{j+1}) = E_{j+1}$. On a $E_{j+1} = g(E_j)$ donc $f(E_{j+1}) = f[g(E_i)]$ et d'après la relation $f[g(z)] = g[f(z)]$ on a $f(E_{j+1}) = g[f(E_j)]$ mais $f(E_j) = E_j$ donc $f[E_{j+1}] = g[E_j] = E_{j+1}$.

Cela étant, il s'ensuit de la démonstration du théorème I que $f(z)$ transforme biunivoquement en lui-même le domaine E.

En reprenant alors la démonstration du théorème II, on obtient qu'il existe une même fonction $F(z)$ (il en existe d'ailleurs un infinité) telle que l'on ait

$$f(z) = F_{-1}[e^{i\theta_1} F(z)], \qquad g(z) = F_{-1}[e^{i\theta_2} F(z)],$$

$F(z)$ étant holomorphe et univalente au voisinage de z_0 et s'y annulant, θ_1, θ_2 étant donnés par $e^{i\theta_1} = f'(z_0)$, $e^{i\theta_2} = g'(z_0)$.

Remarquons que dans les hypothèses de l'énoncé $Z = f[g(z)]$ est aussi une transformation périodique.

7. *Cas des transformations périodiques d'ordre* 2.

THÉORÈME IV. — *Soit $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes au voisinage de z_0 et telles que*

1° $$f(z_0) = z_0, \qquad g(z_0) = z_0;$$

2° $$f_2(z) \equiv z, \qquad g_2(z) \equiv z,$$

Alors : a. si $f[g(z)] = g[f(z)]$ on conclut que $f(z) \equiv g(z)$; b. si la transformation $Z = f[g(z)]$ est périodique on conclut encore que $f(z) \equiv g(z)$.

En effet la partie *a* est une conséquence immédiate du théorème III car dans le cas actuel où $f_2(z) \equiv g_2(z) \equiv z$ on a

$$f'(z_0) = g'(z_0) = -1 \qquad \text{donc} \qquad f(z) = g(z) = F_{-1}[-F(z)],$$

$F(z)$ étant la fonction définie dans le théorème III.

Démontrons la partie b. — D'après l'hypothèse et le théorème I, il existe des domaines simplement connexes ayant z_0 comme point intérieur, qui sont transformés biunivoquement en eux-mêmes par la transformation $Z = f[g(z)]$. Soit E_0 l'un de ces domaines. Posons $g(E_0) = E_1$ et soit E le plus grand domaine connexe, renfermant z_0, et commun à E_0 et E_1. On sait que E est simplement connexe et que $g(E) = E$. Prouvons que l'on a aussi $f(E) = E$.

Or $f[g(E_0)] = E_0$ ou $f(E_1) = E_0$. Donc $f(E_0) = f_2(E_1) = E_1$, ce qui prouve que $f(E) = E$. Donc $F(z)$ étant la fonction holomorphe et univalente dans E et qui fait la représentation conforme de E avec l'intérieur du cercle unité avec $F(z_0) = 0$, on a

$$f(z) = g(z) = F_{-1}[-F(z)],$$

DEUXIÈME PARTIE.

DISCUSSION DE L'ÉQUATION $F[f(z)] = e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)$ (1).

8. Considérons l'équation $F[f(z)] = e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)$ où $f(z)$ est une fonction donnée telle que $f(z_0) = z_0$, z_0 étant un point donné, $f(z)$ étant holomorphe au voisinage de ce point. Sans diminuer la généralité du problème, nous pouvons supposer $z_0 = 0$. k est un entier $0 < k \leq n$, et qui est premier avec n lorsqu'il lui est inférieur. Nous cherchons les fonctions $F(z)$ uniformes au voisinage de l'origine qui vérifient l'équation. Remarquons d'abord que si $F^1(z)$ est une solution de l'équation, il en est de même de $CF^1(z)$, C étant une constante arbitraire, et de $[F^1(z)]^{np+1}$, p étant un nombre entier positif ou négatif. Comme d'autre part si $F^1(z)$ et $F^2(z)$ sont deux solutions de l'équation il en est de même de leur somme, on en conclut que si $F^1(z)$ est une solution particulière, il en est de même des fonctions $\sum_{p=0}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}$, $\sum_{p=r}^{\infty} C_{p_2}[F^1(z)]^{np+1}$, $\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}$ pourvu que les séries considérées soient convergentes. On voit de là que si l'équation $F[f(z)] = e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)$ admet une solution méromorphe $F^1(z)$, elle admet aussi la solution $[F^1(z)]^{-n+1}$, qui est holomorphe au voisinage de l'origine.

9. Théorème V. — *Pour que l'équation $F[f(z)] = e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)$, admette des solutions holomorphes ou méromorphes au voisinage de l'origine, il est nécessaire et suffisant :*

1° *qu'il existe un entier positif p tel que $[f'(0)]^p = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$;*

2° *que la substitution $[z, f(z)]$ soit périodique ce qui entraîne que $f'(0) \neq 1$* (2).

---

(1) L'équation $F[f(z)] = sF(z)$ a été étudiée par Kœnigs pour $|s| < 1$ et par F. W. Bradley (*Proceedings of the Mathematical and Physical Society of Egypt*, 1947) dans le cas où $|s| > 1$.

(2) La substitution $[z, f(z)]$ étant périodique on a $f_n(z) \equiv z$, ce qui, avec la condition 1°, donne d'après le théorème II $f(z) = F_{-1}\left[e^{\frac{2k'i\pi}{np}} F(z)\right]$, alors $f'(0) = e^{\frac{2k'i\pi}{np}}$ donc $f'(0) \neq 1$ sans quoi on aurait $f(z) \equiv z$.

Les conditions sont nécessaires. — Supposons en effet que l'équation ait une solution holomorphe $F(z) = b_0 + b_p z^p + \ldots$ puisque l'équation ne peut avoir de solutions méromorphes sans en avoir des solutions holomorphes aussi.

Soit

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots, \qquad s = f'(0).$$

1° Si $b_0 \neq 0$ en substituant dans l'équation, $F(z)$ et $f(z)$ par leurs développements, on conclut que l'on doit avoir $e^{\frac{2ki\pi}{n}} = 1$. Alors $F(z) \equiv C$, C étant une constante arbitraire, est solution de l'équation.

En laissant de côté le cas où $F(z) \equiv C$ seraient les seules solutions, nous allons montrer que les conditions énoncées sont nécessaires pour avoir des solutions de la forme $F(z) = b_p z^p + \ldots$.

La substitution dans l'équation, nous donne alors $s^p = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ qui est la première condition énoncée.

2° Passons à la deuxième condition en supposant la première vérifiée.

a. Si $p = 1$, $F(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$ est univalente au voisinage de l'origine; elle admet donc une fonction inverse $F_{-1}(z)$, et comme $F(z)$ vérifie par hypothèse l'équation, on a

$$f(z) = F_{-1}\left[e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)\right],$$

ce qui donne

$$f'(0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad f_n(z) \equiv z.$$

b. Si l'équation n'a pas de solution univalente au voisinage de l'origine, soit $F(z) = z^p(1 + b_{p+1} z + \ldots)$, avec $p > 1$, une solution de l'équation (on peut toujours supposer $b_p = 1$).

Soit $\varphi(z) = z(1 + \beta z + \ldots)$ telle que $[\varphi(z)]^p = F(z)$; $\varphi(z)$ vérifie l'une des équations

$$\varphi[f(z)] = e^{\frac{(2k+n\mu)i\pi}{np}} \varphi(z), \quad \mu = 0, 1, 2, \ldots, (p-1),$$

à savoir celle pour laquelle $f'(0) = e^{\frac{2(k+n\mu)i\pi}{np}} = s$ donc $f(z) = \varphi_{-1}[s\varphi(z)]$, ce qui prouve que $f(z)$ vérifie bien la deuxième condition.

Les conditions sont suffisantes. — *a.* Si $f'(0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, $f(z)$ vérifie par hypothèse les conditions du théorème II de la première partie, et d'après ce même théorème l'équation $F[f(z)] = e^{\frac{2ki\pi}{n}} F(z)$ admet des solutions holomorphes et univalentes au voisinage de l'origine.

b. Si $[f'(0)]^p = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ d'après le théorème II de la première partie l'équation $\varphi[f(z)] = s\varphi(z)$, où $s = f'(0)$, a des solutions holomorphes et univalentes au voisinage de l'origine; $\varphi^1(z)$ étant l'une de celles-ci, $F(z)=[\varphi^1(z)]^p$ vérifie l'équation $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$.

10. *Étude des solutions de l'équation* $F[f(z)]=e^{\frac{2ki\pi}{n}}F(z)$ *avec* $f'(0)=e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ *et* $f_n(z)\equiv z$.

10.1. Jusqu'à présent nous avons prouvé l'existence de solutions holomorphes au voisinage de l'origine, ou méromorphes, ou ayant l'origine comme point singulier essentiel non limite de zéros ou des pôles.

Nous allons montrer maintenant comment on peut déterminer effectivement une solution particulière, ou plutôt la fonction inverse de cette solution, par son développement en série de Taylor. Cette solution étant obtenue nous allons donner en fonction de celle-ci les expressions générales de toutes les solutions de la nature mentionnée. Nous appellerons, pour simplifier, équation S l'équation dont il est question.

10.2. Théorème VI. — *Posons* $F(z)=z+\sum_{q=2}^{\infty}b_q z^q$, *nous avons alors les propriétés suivantes :*

1° $b_2, b_3, \ldots, b_n$ *sont déterminés et les mêmes pour toutes les fonctions* $F(z)$ *qui vérifient l'équation* S;

2° *si l'on se donne une suite de m nombres* $c_1, c_2, \ldots, c_m$, *il existe une infinité de fonctions* $F(z)$ *qui vérifient l'équation* S *et telles que* $b_{nj+1}=c_j$ *pour* $j=1, 2, \ldots, m$; *les* b_q, $q\leqq nm$, *sont alors déterminés;*

3° *si l'on se donne une suite infinie* $\{c_j\}$ *il existe une série entière* $F(z)=z+\sum_{q=2}^{\infty}b_q z^q$ *bien déterminée, dont le rayon de convergence peut être nul* [1], *telle que* $b_{nj+1}=c_j$ *pour* $j=1, 2, \ldots$ *et qui vérifie formellement l'équation* S.

Commençons par prouver le 2°. — Nous savons qu'il existe une fonction $F^1(z)=z+b'_2z^2+b'_3z^3+\ldots$, la série étant convergente dans un certain cercle de centre l'origine, vérifiant l'équation S. $F^1(z)$ étant supposée déterminée, la fonction $F(z)=\sum_{p=0}^{\infty}C_p[F^1(z)]^{np+1}$, où $\overline{\lim_{p\to\infty}}\sqrt[np+1]{|C_p|}<\infty$, est aussi

(1) Dans le cas où le rayon de convergence de la série $z+\sum_{q=2}^{\infty}b_q z^q$ est nul nous continuons à la désigner par $F(z)$, bien qu'elle ne représente pas de fonction. Avec une pareille série on peut toujours avoir des relations et des opérations formelles. Ainsi $F[f(z)]$ représentera la série entière que l'on obtient en substituant formellement dans la série $F(z)$, la série $f(z)$ à z. Si la série qui en résulte a les mêmes coefficients que ceux de $F(z)$ multipliés par s, nous dirons que $F[f(z)]=sF(z)$ est vérifiée formellement.

une solution. On peut alors prendre $C_0 = 1$ et choisir $C_1, C_2, \ldots, C_m$ de façon qu'en posant

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p [F^1(z)]^{np+1} = z + \sum_{q=2}^{\infty} b_q z^q$$

on ait

$$b_{nj+1} = c_j \qquad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

ce qui prouve le 2°.

Pour prouver les 1° et 3° posons

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$
$$[f(z)]^p = s^p z^p + A_{p,\,p+1} z^{p+1} + \ldots + A_{p,\,p+q} z^{p+q} + \ldots;$$

$A_{p,p+q}$ est un polynome à coefficients positifs par rapport à $s, a_2, a_3, \ldots, a_{p+q}$. En posant toujours $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ et en substituant dans $F[f(z)] = sF(z)$ on obtient pour la détermination des b_q les équations récurrentes suivantes :

$$(\mathrm{E}) \left\{ \begin{array}{ll} s = s, & \\ a_2 = (s - s^2) b_2, & \\ a_3 + A_{2,3} b_2 = (s - s^3) b^3, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ a_n + A_{2,n} b_2 + A_{3,n} b_3 + \ldots + A_{n-1,n} b_{n-1} = (s - s^n) b_n, & \\ a_{n+1} + A_{2,n+1} b_2 + A_{3,n+1} b_3 + \ldots + A_{n,n+1} b_n = (s - s^{n+1}) b_{n+1} & (\text{remarquons que } s - s^{n+1} = 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ a_{nk+1} + A_{2,nk+1} b_2 + \ldots + A_{nk,nk+1} b_{nk} = (s - s^{nk+1}) b_{nk+1} & (s - s^{nk+1} = 0), \\ a_{nk+2} + A_{2,nk+2} b_2 + \ldots + A_{nk+1,nk+2} b_{nk+1} = (s - s^{nk+2}) b_{nk+2}, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \end{array} \right.$$

les n premières équations donnent $b_2, b_3, \ldots, b_n$, ce qui prouve le 1°. D'autre part d'après le 2° si l'on prend $b_{nj+1} = c_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ où la suite $c_1, c_2, \ldots, c_m$ est arbitraire, il existe une solution (il en existe même une infinité) $F(z) = z + \sum_{q=2}^{\infty} b_q z^q$ avec $b_{nj+1} = c_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Les coefficients de cette solution vérifient nécessairement les équations récurrentes (E), et comme m peut être quelconque, on en conclut le n° 3 du théorème.

Remarque. — La suite $\{c_j\}$ peut être choisie de façon que la série $F(z)$, dont les coefficients sont donnés par les équations récurrentes (E), et qui vérifie formellement l'équation $F[f(z)] = sF(z)$, soit divergente quel que soit z. Il suffit en effet de choisir $\{c_j\}$ de façon que $\overline{\lim_{j \to \infty}} \sqrt[nj+1]{|c_j|} = \infty$. Remarquons aussi que les relations $F[f(z)] = sF(z)$ et $f(z) = F_{-1}[sF(z)]$, qui sont équivalentes quand $F(z)$ et $f(z)$ sont des séries entières convergentes, restent encore équivalentes quand l'une de ces séries, ou bien les deux ont des rayons de convergence nuls (¹). Dans ce dernier cas $F_{-1}(z)$ est la série entière qui vérifie formellement la relation $F[F_{-1}(z)] \equiv z$.

De ce qui précède, on conclut que si $F(z)$ est une série entière dont le rayon de convergence est nul, en formant formellement la série $F_{-1}[sF(z)]$ où s est une constante, cette nouvelle série peut avoir un rayon de convergence positif.

10.3. Considérons l'équation

$$f[\varphi(z)] = \varphi(sz), \tag{1}$$

où

$$s = f'(0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \quad \text{et} \quad f_n(z) \equiv z.$$

Si $\varphi^1(z)$ en est une solution holomorphe et univalente au voisinage de l'origine, la fonction inverse de $\varphi^1(z)$, soit $F^1(z) = \varphi^1_{-1}(z)$, est une solution de l'équation

$$F[f(z)] = sF(z), \tag{2}$$

et réciproquement.

Soit $F^1(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ une solution de (2) et $\varphi^1(z) = F^1_{-1}(z)$, nous posons

$$\varphi^1(z) = z + \beta_2 z^2 + \ldots.$$

Si $F^1(z)$ a un rayon de convergence nul et vérifie formellement l'équation (2), $\varphi^1(z)$ a aussi un rayon de convergence nul, et vérifie formellement l'équation (1).

Relativement à $\varphi^1(z)$ nous avons le théorème suivant qui est analogue au théorème VI.

Théorème VI *bis*. — 1° *$\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ sont déterminés et les mêmes pour toutes les fonctions $\varphi(z) = z + \sum_2^\infty \beta_q z^q$ qui vérifient l'équation* (1);

2° *si l'on se donne une suite de m nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, il existe une infinité de fonctions $\varphi(z)$ qui vérifient l'équation* (1), *et telles que $\beta_{nj+1} = \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ les β_j, $j \leq nm$, sont alors déterminés et les mêmes pour toutes ces fonctions;*

3° *si l'on se donne une suite infinie de nombres $\{\gamma_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, il existe une série entière $\varphi(z) = z + \sum_{q=2}^\infty \beta_q z^q$ bien déterminée, dont le rayon de convergence peut être nul, telle que $\beta_{nj+1} = \gamma_j$, $j = 1, 2, \ldots$, et qui vérifie formellement l'équation $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$.*

(¹) Nous avons prouvé cette équivalence dans un Mémoire récent, qui est sous presse.

Ce théorème est une conséquence du théorème VI et des formules qui donnent les β en fonction des b.

On a en effet

$$\beta_n = -b_n + P_n(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}),$$

où $P_n(\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1})$ est un polynome en $\beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, b_2, \ldots, b_{n-1}$. Cette expression de β_n nous permet de passer du théorème VI au théorème énoncé.

10.4. *Détermination effective d'une solution de $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$ holomorphe au voisinage de l'origine par son développement de Taylor.* — En posant toujours

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots,$$
$$\varphi(z) = \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots,$$

et en substituant dans l'équation $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$ nous obtenons, après identification des deux membres, les équations récurrentes suivantes

$$(E_1) \quad \begin{cases} (s^2 - s)\beta_2 = a_2\beta_1, \\ (s^3 - s)\beta_3 = 2a_2\beta_2 + a_3\beta_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (s^m - s)\beta_m = S_m(a_2, \ldots, a_m, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$\beta_1 = 1$, nous l'écrivons quand même, parce que cela nous servira pour la majoration du système.

S_m est un polynome à coefficients positifs linéaire par rapport aux a et non linéaire par rapport aux β.

Pour $m = nj + 1$, $j = 1, 2, \ldots$ les premiers membres des équations correspondantes du système (E_1) sont nuls; néanmoins le théorème VI *bis* nous permet de dire que si nous nous donnons arbitrairement une suite $\{\gamma_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ de nombres, et si nous associons aux équations (E_1) les équations $\beta_{nj+1} = \gamma_j$, le système ainsi obtenu est possible et il détermine tous les β univoquement. La série ainsi obtenue $\varphi(z) = z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$ vérifie formellement l'équation $f[\varphi(z)] = \varphi(sz)$. Nous allons montrer que nous pouvons choisir la suite γ_j de façon que la série $z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$, qui lui correspond, ait un rayon de convergence positif.

Soit l le minimum des nombres $|s - s^2|$, $|s - s^3|$, $\ldots$, $|s - s^n|$ et 1. Posons $A_n = |a_n|$ et considérons la série entière $\Phi(z) = lz - \sum_{q=2}^{\infty} A_q z^q$ qui a un rayon de convergence positif. Posons $\Phi_{-1}(z) = \sum_{q=1}^{\infty} d_q z^q$ et écrivons les équations récurrentes qui donnent les d en fonction des A et de l, que l'on obtient par l'identité $\Phi[\Phi_{-1}(z)] \equiv z$.

On obtient

$$l d_1 = 1, \qquad \text{d'où} \qquad d_1 = \frac{1}{l} \geqq 1 = \beta_1,$$
$$l d_2 = A_2 d_1^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$l d_m = S_m(A_2, \ldots, A_m, d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les polynomes S_m sont les mêmes que ceux qui figurent dans les équations (E_1). D'après le choix de l il s'ensuit que si dans les équations (E_1) on prend $|\beta_{nj+1}| \leqq d_{nj+1}$ pour $j = 1, 2, \ldots$, la suite $\{\beta_q\}$ est complètement déterminée et l'on a que $|\beta_q| \leqq d_q$ quel que soit q, donc la série correspondante $z + \sum_{q=2}^{\infty} \beta_q z^q$, a un rayon de convergence positif (¹).

11. *Expression générale des solutions uniformes au voisinage de l'origine en fonction de l'une d'entre elles.* — Soit l'équation

$$F[f(z)] = s F(z),$$

où

$$s = f'(0) = e^{\frac{2ki\pi}{n}} \neq 1, \qquad f_n(z) \equiv z$$

et

$$F^1(z) = z + b_2 z^2 + \ldots,$$

une solution particulière de l'équation. Comme $F^1(z)$ est holomorphe et univalente au voisinage de l'origine son inverse $F^1_{-1}(z)$ existe.

Appliquons à l'équation la transformation $F(z) = \Phi[F^1(z)]$; elle devient

$$\Phi[F^{-1}[f(z)]] = s\Phi[F^1(z)] \qquad \text{ou} \qquad \Phi[sF^1(z)] = s\Phi[F^1(z)]$$

et en posant aussi

$$F^1(z) = Z,$$

cette équation devient

$$\Phi[sZ] = s\Phi(Z).$$

En utilisant le développement de $\Phi(Z)$, en série de Taylor si l'on cherche les fonctions holomorphes, ou en série de Laurent si l'on cherche les fonctions méromorphes à l'origine ou ayant ce point comme singularité essentielle, sans

(¹) La méthode de majoration que nous avons suivie, est celle qui a été employée par F. W. Bradley dans le cas où $|s| > 1$.

que ce soit point limite de zéros ou de pôles, nous obtenons en tenant compte de ce que $s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$:

pour $\Phi(Z)$ holomorphe $\Phi(Z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p Z^{np+1}$;

pour $\Phi(Z)$ méromorphe $\Phi(Z) = \sum_{p=-r}^{\infty} C_p Z^{np+1}$, r entier positif;

pour $\Phi(Z)$ ayant à l'origine un point singulier essentiel

$$\Phi(Z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p Z^{np+1},$$

en revenant à $F(z)$, on obtient les solutions holomorphes au voisinage de $z = 0$, qui sont données par

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_k [F^1(z)]^{np+1},$$

les solutions méromorphes qui sont données par

$$F(z) = \sum_{p=-r}^{\infty} C_p [F^1(z)]^{np+1},$$

et les solutions ayant l'origine comme point singulier essentiel, non limite de zéros ou de pôles, qui sont données par

$$F(z) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p [F^1(z)]^{np+1}.$$

A condition bien entendu que les séries écrites soient convergentes.

12. *Remarques diverses.* — Soient $f(z)$ et $g(z)$ deux fonctions holomorphes dans un cercle de centre l'origine et ayant les propriétés suivantes :

$$f(0) = g(0) = 0, \qquad f'(0) = g'(0) = s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}, \qquad f_n(z) \equiv g_n(z) \equiv z.$$

1. Cherchons les solutions en $F(z)$ de l'équation

$$F[f(z)] = F(z), \tag{1}$$

soit $F^1(z)$ une solution holomorphe et univalente au voisinage de l'origine de l'équation $\Phi[f(z)] = s\Phi(z)$.

Nous savons que toutes les solutions développables en série de Taylor ou de Laurent au voisinage de l'origine sont données par

$$\sum_{p=0}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}, \quad \sum_{p=-r}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}, \quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}.$$

Or, si dans l'équation (1) nous appliquons le changement de fonction inconnue $F(z) = \frac{\Phi(z)}{F^1(z)}$, $\Phi(z)$ étant la nouvelle fonction inconnue, cette équation devient

$$\Phi[f(z)] = s\Phi(z)$$

et aux solutions de la nature indiquée de $\Phi(z)$, correspondent des solutions de même nature pour $F(z)$. Donc les solutions holomorphes ou méromorphes ou ayant l'origine comme point singulier essentiel, sans qu'il soit point limite de zéros ou de pôles, sont données par

$$\frac{\sum_{p=0}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}}{F^1(z)}, \quad \frac{\sum_{p=-r}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}}{F^1(z)} \quad (r \text{ entier positif}), \quad \frac{\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p[F^1(z)]^{np+1}}{F^1(z)}.$$

II. Cherchons les solutions en $F(z)$ de l'équation

$$F[f(z)] = g[F(z)]. \tag{2}$$

Soit $G^1(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$ une fonction holomorphe et univalente au voisinage de l'origine, fonction dont nous avons prouvé l'existence, qui vérifie l'équation

$$G(sz) = g[G(z)] \qquad \text{pour} \quad |z| < r,$$

si nous posons

$$F(z) = G^1[\Phi(z)],$$

l'équation (2) devient

$$\Phi[f(z)] = s\Phi(z). \tag{3}$$

Nous cherchons les solutions $\Phi(z)$ telles que $|\Phi(z)| < r$ pour $|z| < r'$. Or nous avons prouvé l'existence de solutions holomorphes de l'équation (3) qui s'annulent à l'origine.

$\Phi^1(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ étant l'une d'entre elles, toutes les autres sont données par $\Phi(z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_p[\Phi^1(z)]^{np+1}$.

Donc toutes les solutions de (2) holomorphes au voisinage de $z = 0$ sont données par

$$F(z) = G^1[\Phi(z)] \qquad \text{ou} \qquad F(z) = G^1\left[\sum_{p=0}^{\infty} C_p[\Phi^1(z)]^{np+1}\right].$$

III. *Fonctions holomorphes au voisinage de l'origine s'y annulant et permutables avec $f(z)$.* — Si dans l'équation (2) nous prenons $g(z) = f(z)$ elle devient $F[f(z)] = f[F(z)]$ et ses solutions sont les fonctions qui au voisinage de l'origine se permutent avec $f(z)$. Donc d'après la remarque II toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine s'y annulant, et se permutant avec $f(z)$, sont données par

$$F(z) = F_{-1}^{1}\left[\sum_{p=0}^{\infty} C_{p}{}^{r}\, F^{1}(z)]^{np+1}\right],$$

où $F^1(z)$ est une solution holomorphe et univalente au voisinage de $z = 0$, de l'équation

$$F[f(z)] = sF(z).$$

IV. Si nous n'imposons pas de conditions particulières aux solutions de $F[f(z)] = sF(z)$ que nous cherchons, nous pouvons alors choisir arbitrairement $F(z)$ dans le secteur (1) dont il a été question dans la Note de la page 279. $F[f(z)] = sF(z)$ prolonge $F(z)$ dans le secteur (2) et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une fonction $F(z)$ définie dans tout le domaine E et qui vérifie l'équation.

V. L'équation $F[f(z)] = m[F(z)]^p$ ne peut avoir d'autres solutions que des constantes. En effet elle donne

$$F[f_n(z)] = m^{1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}}[F(z)]^{p^n},$$

mais

$$f_n(z) \equiv z \qquad \text{donc} \quad F(z) = m^{1+p+p^2+\ldots+p^{n-1}}[F(z)]^{p^n},$$

ce qui donne $F(z) =$ constante.

13. *Quelques remarques sur la substitution formelle d'une série entière dans une autre série entière.* — Soit $F(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots$ une série entière, nous avons montré que si son rayon de convergence est nul, il peut arriver que le rayon de convergence de la série $F_{-1}[sF(z)]$ où $s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$ soit positif. Une question qui se pose c'est de savoir si le rayon de convergence de $F_{-1}[sF(z)]$ peut être nul. Cette question se traite en même temps que la suivante :

Si $f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots$ est une série entière dont le rayon de convergence est nul, peut-il arriver que l'on ait formellement $f_n(z) \equiv z$?

Reprenons les équations (E_1) de la page 287, en précisant la forme des polynomes S_m.

Nous avons

$$\varphi(z) = z + \beta_2 z^2 + \ldots$$

et nous posons

$$[\varphi(z)]^p = z^p + B_{p,p+1} z^{p+1} + \ldots + B_{p,p+q} z^{p+q} + \ldots$$

Les équations (E_1) s'écrivent alors

$$(E_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (s^2 - s)\beta_2 = a_2, \\ (s^3 - s)\beta_3 = B_{2,3}a_2 + a_3, \\ (s^4 - s)\beta_4 = B_{2,4}a_2 + B_{3,4}a_3 + a_4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ (s^m - s)\beta_m = B_{2,m}a_2 + B_{3,m}a_3 + \dots + B_{m-1,m}a_{m-1} + a_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

De la forme de ces équations on déduit, que si l'on se donne tous les a_k pour lesquels $k \neq pn + 1$, $p = 1, 2, \dots$, et les β_{pn+1}, $p = 1, 2, \dots$, le système (E_2) nous donne les a_{pn+1}, $p = 1, 2, \dots$, et les β_k pour $k \neq pn + 1$, $p = 1, 2, \dots$.

On détermine ainsi deux séries entières dont les rayons de convergence peuvent être nuls soit

$$f(z) = sz + a_2 z^2 + \dots \quad \text{et} \quad \varphi(z) = z + \beta_2 z^2 + \dots,$$

telles que l'on ait formellement

$$f[\varphi(z)] = \varphi(sz),$$

relation équivalente à $F[f(z)] = sF(z)$ où $F(z) = \varphi_{-1}(z)$, d'où l'on peut écrire

$$f(z) = F_{-1}[sF(z)].$$

Il s'ensuit que l'on a formellement

$$f_n(z) = F_{-1}[s^n F(z)]$$

et comme $s = e^{\frac{2ki\pi}{n}}$, on en conclut

$$f_n(z) \equiv z.$$

Donc dans $f(z)$ on peut choisir arbitrairement tous les a_k pour lesquels $k \neq np + 1$, $p = 1, 2, \dots$, et déterminer les a_{np+1}, $p = 1, 2, \dots$, de façon que l'on ait formellement $f_n(z) \equiv z$. On peut alors faire le choix des a_k, $k \neq np + 1$ de façon que $f(z) = sz + a_2 z^2 + \dots$, soit une série entière à rayon de convergence nul. Dans ces conditions $F(z)$ a aussi un rayon de convergence nul.

TROISIÈME PARTIE.

FONCTIONS PERMUTABLES.

14. *Généralisation du théorème* III, *Première partie*, n° 6.

14.1. Théorème VII. — *Soit* $f^1(z)$, $f^2(z)$, $\dots$, $f^k(z)$ [1] *un nombre fini de fonctions ayant les propriétés suivantes :*

1° $f^j(0) = 0$, *pour tout* $j = 1, 2, \dots, k$;

---

(1) Les indices supérieurs servent à différencier les fonctions les unes des autres.

2° *A chacune des fonctions* $f^j(z)$, *correspond un entier* $n_j > 0$ *tel que* $f^j_{n_j}(z) \equiv z$; n_j *est le plus petit entier ayant cette propriété;*

3° *On a* $f^i[f^j(z)] \equiv f^j[f^i(z)]$ *quels que soient* $i, j = 1, 2, \ldots, k$.

On en conclut qu'il existe une fonction $F(z)$ (*il en existe même une infinité*) *telle que l'on ait* $f^j(z) = F_{-1}[s_j F(z)]$ avec $s_j = \left[\frac{df^j(z)}{dz}\right]_{z=0}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Il suffit de montrer qu'il existe un domaine E simplement connexe, ayant l'origine comme point intérieur et qui est transformé biunivoquement en lui-même par chacune des fonctions $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^k(z)$. Nous avons vu dans le n° 6, Première Partie, que le théorème est vrai dans le cas de deux fonctions. Supposons qu'il soit vrai pour le cas de $k-1$, fonctions et démontrons qu'il est vrai pour k.

En représentant alors par E^0 un domaine simplement connexe renfermant l'origine, invariant par chacune des fonctions $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^{k-1}(z)$ et par E le plus grand domaine connexe, renfermant l'origine et commun à E_0 et aux transformés de E_0 par les itérées de $f^k(z)$, on démontre comme dans le n° 6 que E satisfait aux conditions voulues.

14.2. Corollaires. — I. *Si les fonctions* $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^k(z)$ *satisfont aux conditions du théorème* VII, *ces fonctions sont les itérées d'une même fonction* $f(z) = F_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{\nu}} F(z)\right]$ où ν *est un multiple de* $n_1, n_2, \ldots, n_k$;

II. *Si* $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^k(z)$ *sont des fonctions distinctes, satisfaisant aux conditions du théorème* VII, *avec* $n_1 = n_2 = \ldots = n_k$, *leur nombre est égal au plus à* n_1.

14.3. Théorème VIII. — *Soit* $f^1(z), f^2(z), \ldots, f^j(z), \ldots$ *une suite infinie de fonctions distinctes ayant les propriétés suivantes :*

1° $f^j(0) = 0$, *quel que soit* j;

2° *Il existe une suite* $\{n_j\}$ *d'entiers positifs tels que* $f^j_{n_j}(z) \equiv z$ *pour tout* j; n_j *est supposé être le plus petit entier pour lequel cette relation est vérifiée*;

3° $f^i[f^j(z)] \equiv f^j[f^i(z)]$, *quels que soient* i *et* j.

Alors, il existe une série entière et une seule de la forme $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ *telle que l'on ait formellement, quel que soit* j, $f^j(z) = F_{-1}[s_j F(z)]$, *avec* $s_j = \left[\frac{df^j(z)}{dz}\right]_{z=0}$. *La série* $F(z)$ *peut avoir un rayon de convergence positif ou nul.*

D'après le corollaire II qui précède, les fonctions de la suite $\{f^j(z)\}$ auxquelles correspondent des n_j ayant une même valeur sont en nombre fini, par conséquent on a $\overline{\lim_{j \to \infty}} n_j = \infty$, et l'on peut aussi supposer les fonctions de la suite rangées de façon que l'on ait $n_{j+1} \geq n_j$ pour tout j.

Représentons alors par :

$F^1(z)$ une série entière commençant par z et telle que $f^1(z) = F^1_{-1}[s_1 F^1(z)]$

$F^2(z)$ » » $f^j(z) = F^2_{-1}[s_j F^2(z)]$ pour $j \leqq 2$,

. . . . ,

$F^k(z)$ » » $f^j(z) = F^k_{-1}[s_j F^k(z)]$ pour $j \leqq k$,

et ainsi de suite. Ces séries existent d'après le théorème VII.

On obtient ainsi une suite infinie $\{F^k(z)\}$ de séries, qui n'est pas univoquement déterminée, mais qui est telle que, pour tout k, les n_k premiers coefficients de $F^k(z)$ sont bien déterminés, et ces coefficients restent les mêmes pour les séries $F^j(z)$ avec $j \geqq k$. Ceci est une conséquence du théorème VI.

Il s'ensuit que, si nous posons $F^k(z) = z + b_{k,2} z^2 + \ldots + b_{k,m} z^m + \ldots$, $\lim\limits_{k \to \infty} b_{k,m}$ existe pour tout m. Posons $b_m = \lim\limits_{k \to \infty} b_{k,m}$. Nous obtenons ainsi une suite bien déterminée $b_2, b_3, \ldots, b_m, \ldots$, de coefficients, et nous appelons limite formelle de $F^k(z)$ pour $k \to \infty$ la série $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots + b_m z^m + \ldots$.

Cela étant nous allons prouver que l'on a quel que soit k, $f^k(z) = F_{-1}[s_k F(z)]$. Pour cela considérons un k donné et prouvons qu'il existe une suite $c_1, c_2, \ldots, c_p, \ldots$ de nombres telle que l'on ait formellement

$$F(z) = F^k(z) + \sum_{p=1}^{\infty} c_p [F^k(z)]^{p n_k + 1}.$$

Or pour tout $j \geqq k$ on a, d'après le n° 11,

$$F^j(z) = F^k(z) + \sum_{p=1}^{\infty} c_{k,p} [F^k(z)]^{p n_k + 1}.$$

Considérons alors le tableau à double entrée

$$\begin{array}{lllll} c_{k+1,1}, & c_{k+1,2}, & \ldots, & c_{k+1,p}, & \ldots, \\ c_{k+2,1}, & c_{k+2,2}, & \ldots, & c_{k+2,p}, & \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

Dans ce tableau, les éléments de chaque colonne sont, à partir d'un certain rang qui dépend de la colonne considérée, égaux entre eux; cela provient du fait que quel que soit j, $F^j(z)$ et $F^{j+1}(z)$, ont les n_j premiers coefficients de leur développement en série entière, égaux entre eux. Donc chaque colonne du tableau forme une suite convergente. Posons $c_p = \lim\limits_{j \to \infty} c_{j,p}$.

On détermine ainsi une suite $\{c_p\}$, et de la façon dont cette suite est définie il s'ensuit que la limite formelle de $F^j(z)$, soit $F(z)$, est identique formellement à $F^k(z) + \sum\limits_{p=1}^{\infty} c_p [F^k(z)]^{p n_k + 1}$, ce qui est la relation que nous voulions prouver.

14.4. *Remarques.* — 1° Il est facile de construire des suites $\{f^j(z)\}$ pour lesquelles la série $F(z)$ correspondante a un rayon de convergence positif. Il suffit de partir de $F(z)$ et de poser $f^j(z) = F_{-1}[s_j F(z)]$ avec $s_j = e^{\frac{2i\pi}{n_j}}$, $n_j < n_{j+1}$.

2° Nous allons maintenant construire une suite $\{f^j(z)\}$, ayant les propriétés indiquées, et pour laquelle la série $F(z)$ correspondante a un rayon de convergence nul.

Nous partons d'une série $F^0(z) = z + b_{0,2}z^2 + \ldots + b_{0,m}z^m + \ldots$ à rayon de convergence positif et nous posons

$$f^0(z) = F^0_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{n}} F^0(z)\right],$$

n étant un entier donné supérieur à 1. Nous considérons ensuite une suite infinie de nombres $c_1, c_2, \ldots,$ telle que $\lim\limits_{q \to \infty} \sqrt[2^{q-1}n+1]{|c_q|} = \infty$ et nous posons

$$F^1(z) = F^0(z) + c'_1[F^0(z)]^{n+1} \qquad \text{et} \qquad f^1(z) = F^1_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2n}} F^1(z)\right],$$

$$F^2(z) = F^1(z) + c'_2[F'(z)]^{2n+1} \qquad \text{et} \qquad f^2(z) = F^2_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^2 n}} F^2(z)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F^j(z) = F^{j-1}(z) + c'_j[F^{j-1}(z)]^{2^{j-1}n+1} \qquad \text{et} \qquad f^j(z) = F^j_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^j n}} F^j(z)\right],$$

et ainsi de suite, $c'_1, c'_2, \ldots, c'_j, \ldots$ étant des constantes à déterminer ultérieurement.

Montrons d'abord que quels que soient $k \leqq j$ on a

$$f^k(z) = F^j_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^k n}} F^j(z)\right]. \tag{1}$$

Or ceci est vrai pour $j = 1$. Prouvons que si c'est vrai pour $j \leqq p - 1$, c'est aussi vrai pour $j = p$, p étant un entier donné arbitraire. Si $k = p - 1$ la relation (1) est vérifiée pour $j = p$ d'après le n° 11 puisque $F^p(z) = F^{p-1}(z) + c'_p[F^{p-1}(z)]^{2\,2^{p-1}n+1}$. Soit donc $k < p - 1$; $F^{p-1}(z)$ est par hypothèse solution de l'équation en ψ; $\psi[f^k(z)] = e^{\frac{2i\pi}{2^k n}}\psi(z)$. Il en est de même de

$$[F^{p-1}(z)]^{2^k n . 2^{p-k-1}+1} = [F^{p-1}(z)]^{2^{p-1}n+1},$$

donc aussi de

$$F^p(z) = F^{p-1}(z) + [F^{p-1}(z)]^{2^{p-1}n+1}.$$

On a donc bien

$$F^p[f^k(z)] = e^{\frac{2i\pi}{2^k n}} F^p(z) \qquad \text{ou} \qquad f^k(z) = F^p_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi}{2^k n}} F^p(z)\right].$$

Montrons maintenant que la série entière $F(z)$, correspondant à la suite $\{f^j(z)\}$ que nous venons de construire, a un rayon de convergence nul [1]. $F(z)$ est la limite formelle de $F^j(z)$ quand $j \to \infty$.

Or on a vu que les $2^q n$ premiers coefficients de la série $F(z)$ sont les mêmes que ceux des séries $F^j(z)$ pour $j \geqq q$. On peut donc déterminer $c'_q (q = 1, 2, \ldots)$ de façon que le coefficient de $x^{2^{q-1}n+1}$ dans $F(z)$ soit égal à $c_q (q = 1, 2, \ldots)$. Comme $\overline{\lim\limits_{q \to \infty}} \sqrt[2^{q-1}n+1]{|c_q|} = \infty$, il s'ensuit que $F(z)$ a un rayon de convergence nul.

15. *Généralisation des remarques* II *et* III *du* n° 12.

15.1. *Généralisation de l'équation de Kœnigs.* — Considérons les fonctions $f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots$ et $g(z) = s'z + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphes dans un certain cercle de centre l'origine. Supposons d'abord que $s = s' \neq 0$ avec $|s| \neq 1$. On sait que pour chacune de ces fonctions il existe une fonction de Kœnigs [2]. Soient $K^f(z)$ et $K^g(z)$ ces fonctions; elles sont telles qu'au voisinage de l'origine on ait

$$f(z) = K^f_{-1}[sK^f(z)], \qquad g(z) = K^g_{-1}[sK^g(z)].$$

On sait aussi qu'au voisinage de l'origine, l'équation

$$F[f(z)] = sF(z) \tag{1}$$

admet comme seules solutions holomorphes, les fonctions $cK^f(z)$, c étant une constante arbitraire. De même l'équation $F[g(z)] = sF(z)$ admet au voisinage de l'origine les solutions holomorphes $cK^g(z)$.

Nous nous proposons de chercher les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de l'équation

$$\psi[f(z)] = g[\psi(z)]. \tag{2}$$

D'après la relation $g(z) = K^g_{-1}[sK(z)]$ l'équation (2) s'écrit

$$\psi[f(z)] = K^g_{-1}[sK^g[\psi(z)]] \quad \text{ou} \quad K^g[\psi[f(z)]] = sK^g[\psi(z)].$$

Donc pour que $\psi(z)$ vérifie l'équation (2) il faut et il suffit que $K^g[\psi(z)]$ soit solution de $F[f(z)] = sF(z)$. Donc à toute solution $F(z)$ de $F[f(z)] = sF(z)$ holomorphe au voisinage de l'origine, correspond une solution de même nature $\psi(z) = K^g_{-1}[F(z)]$ de l'équation (2). Les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de l'équation (2) sont donc toutes données par

$$\psi(z) = K^g_{-1}[cK^f(z)],$$

c étant une constante arbitraire.

---

(1) Pour un choix convenable des c'_j.

(2) Solution de l'équation de Kœnigs correspondante : $F[f(z)] = sF(z)$ et $F[g(z)] = sF(z)$.

15.2. *Fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, et permutables avec $f(z)$.* — Si dans ce qui précède nous prenons $g(z) \equiv f(z)$, l'équation (2) devient

$$\psi[f(z)] = f[\psi(z)].$$

Elle nous donne alors toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et permutables avec $f(z)$.

Ces fonctions sont donc données par $\psi(z) = \mathrm{K}_{-1}^{f}[c\mathrm{K}^{f}(z)]$. Remarquons que l'on a $\psi(0) = 0$.

15.3. Revenons à l'équation (2) en supposant $s' \neq s$ avec $|s| \neq 1$, $|s'| \neq 1$, $ss' \neq 0$. Cherchons les conditions pour avoir une solution $\psi(z)$, holomorphe au voisinage de $z = 0$. En remplaçant dans $\psi[f(z)] = g[\psi(z)]$, $g(z)$ par $\mathrm{K}_{-1}^{g}[s'\mathrm{K}^{g}(z)]$ elle devient

$$\psi[f(z)] = \mathrm{K}_{-1}^{g}[s'\mathrm{K}^{g}[\psi(z)]] \quad \text{ou} \quad \mathrm{K}^{g}[\psi[f(z)]] = s'\mathrm{K}^{g}[\psi(z)].$$

Pour que cette équation ait des solutions holomorphes, il faut et il suffit que l'on ait $s' = s^{q}$ (q entier positif). Alors l'équation admet les solutions $c[\mathrm{K}^{f}(z)]^{q}$ c étant une constante arbitraire, et de là on déduit toutes les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de $\psi[f(z)] = g[\psi(z)]$. Ces solutions sont données par $\psi(z) = \mathrm{K}_{-1}^{g}[c[\mathrm{K}^{f}(z)]^{q}]$.

15.4. Cherchons les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de l'équation $\psi[f(z)] = g[\psi(z)]$ dans le cas où $f(z)$ et $g(z)$ sont de la forme

$$f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots, \qquad g(z) = c_p z^p + c_{p+1} z^{p+1} + \ldots \quad \text{avec} \quad p \geqq 2.$$

On sait qu'à chacune de ces fonctions correspond une équation, dite équation de Boettcher, soit

$$\mathrm{F}[f(z)] = [\mathrm{F}(z)]^{p} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}[g(z)] = [\mathrm{F}(z)]^{p},$$

et une fonction de Boettcher, soit

$$\mathrm{B}^{f}(z) = a_p^{\frac{1}{p-1}} \lim_{n \to \infty} \left[\frac{f_n(z)}{a^{1+p+\ldots+p^{n-1}}} \right]^{p^{-n}} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}^{g}(z) = c_p^{\frac{1}{p-1}} \lim_{n \to \infty} \left[\frac{g_n(z)}{a^{1+p+\ldots+p^{n-1}}} \right]^{p^{-n}},$$

qui sont holomorphes et univalentes au voisinage de l'origine, s'y annulent, et vérifient respectivement les équations de Boettcher correspondantes.

On a donc

$$g(z) = \mathrm{B}_{-1}^{g}[\mathrm{B}^{g}(z)^{p}]$$

et en substituant dans l'équation $\psi[f(z)] = g[\psi(z)]$ elle devient

$$\mathrm{B}^{g}[\psi[f(z)]] = [\mathrm{B}^{g}\psi(z)]^{p}$$

où en posant

$$\mathrm{B}^{g}[\psi(z)] = \mathrm{F}(z)$$

on obtient

$$F[f(z)] = [F(z)]^p$$

qui est l'équation de Boettcher relative à $f(z)$.

Comme les solutions holomorphes au voisinage de l'origine de celle-ci sont données par $F(z) = e^{\frac{2i\pi m}{p-1}}[B^f(z)]^\lambda$, où $\lambda > 0$ et m sont des entiers arbitraires, on en déduit les solutions holomorphes $\psi(z) = B^g_{-1}[F(z)]$ de l'équation

$$\psi[f(z)] = g[\psi(z)].$$

En prenant de nouveau $f(z) \equiv g(z)$ on obtient toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine, et se permutant avec $f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots\ p \geqq 2$ sous la forme $\psi(z) = B^f_{-1}\left[e^{\frac{2i\pi m}{p-1}}[B(z)]^\lambda\right]$, m entier, λ entier positif.

16. Étant donné une fonction $f(z) = sz + a_2 z^2 + \ldots$ holomorphe au voisinage de l'origine, nous avons obtenu toutes les fonctions holomorphes au voisinage de l'origine et se permutant avec $f(z)$, dans les cas suivants : 1° quand $s \neq 0$ et $|s| \neq 1$; 2° quand $s = 0$; 3° quand $s = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{\pi}$ rationnel et $f_n(z) \equiv z$. Les cas qui restent sont les suivants : 1° $s = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{\pi}$ rationnel et où il n'existe aucun entier n tel que l'on ait $f_n(z) \equiv z$. Pour ce cas nous n'avons pu obtenir aucun résultat; 2° $s = e^{i\theta}$ avec $\frac{\theta}{\pi}$ irrationnel; c'est le cas que nous allons examiner. Il existe une série entière et une seule de la forme $F(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ dont le rayon de convergence peut être nul ou positif, et qui vérifie formellement l'équation $F[f(z)] = sF(z)$ ou $f(z) = F_{-1}[sF(z)]$. On voit cela en substituant formellement dans l'équation $F[f(z)] = sF(z)$, $f(z)$ et $F(z)$ par leurs développements, et en écrivant les équations récurrentes qui déterminent les coefficients b_i.

D'autre part, si nous posons $g(z) = s'z + c_2 z^2 + \ldots$ où s' est donné et les c_i des coefficients à déterminer, ces coefficients sont univoquement déterminés par l'équation $f[g(z)] = g[f(z)]$, comme on le voit par substitution. Il s'ensuit que, si s' est donné, il existe une série et une seule de la forme $g(z) = s'z + c_2 z^2 + \ldots$ permutable formellement avec $f(z)$. Mais nous connaissons déjà une série de même forme que $g(z)$ et ayant les mêmes propriétés, c'est la série $F_{-1}[s'F(z)]$. On a donc $g(z) = F_{-1}[s'F(z)]$. Si $F(z)$ a un rayon de convergence positif, il en est de même de $g(z)$. Mais si $F(z)$ a un rayon de convergence nul, alors que $f(z)$ a un rayon de convergence positif, nous n'avons obtenu aucun résultat concernant le rayon de convergence de $g(z)$.