

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Sur la synchronisation des systèmes à plusieurs degrés de liberté

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 64 (1947), p. 285-338

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__285_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1947, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LA SYNCHRONISATION DES SYSTÈMES

A

PLUSIEURS DEGRÉS DE LIBERTÉ

PAR M. JULES HAAG.

INTRODUCTION.

L'entretien d'un mouvement périodique se fait, en Horlogerie, de deux manières différentes : *échappement* et *synchronisation*. Dans le premier cas, le plus fréquent, le balancier reçoit une impulsion chaque fois qu'il parcourt un angle déterminé, dans un sens ou dans l'autre. Dans le second cas, les impulsions sont fournies par un couple qui est une fonction périodique déterminée du temps. On peut aussi combiner les deux procédés. Dans tous les cas, *les impulsions sont très faibles*, parce qu'il en est ainsi des résistances passives.

La question qui se pose est de savoir si, en choisissant au besoin et approximativement les conditions initiales, *le mouvement tend asymptotiquement vers un mouvement périodique*.

Ce problème est élémentaire et bien connu dans le cas de l'entretien par couple sinusoidal, avec résistance proportionnelle à la vitesse. Mais, en Chronométrie, ces conditions ne sont jamais réalisées. En particulier, dans le cas de l'échappement, le problème est totalement différent, la période du mouvement éventuellement entretenu étant inconnue.

Le même problème se pose tout naturellement pour un système ayant *plusieurs degrés de liberté*; il a d'ailleurs des applications pratiques.

Après avoir résolu la question pour un seul degré de liberté, d'abord par une méthode intuitive, puis par une méthode entièrement rigoureuse, je l'ai ensuite résolue pour un nombre quelconque de degrés de liberté. C'est l'exposé de cette solution, illustrée de quelques applications concrètes, qui fait l'objet du présent Mémoire.

Toute la théorie repose sur un *théorème très général sur les solutions périodiques de certains systèmes différentiels*, que j'ai dû établir au préalable, pour donner une base rigoureuse à ladite théorie. Deux démonstrations successives de ce théorème ayant paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, je me suis contenté d'en reproduire l'énoncé au début du premier chapitre, lequel est consacré à l'exposé de la théorie générale.

Dans les chapitres suivants, j'étudie diverses applications, dont certaines ont d'ailleurs été le but initial de ma théorie et m'ont guidé dans son édification.

Dans le Chapitre II, j'envisage le cas simple, mais important, de *l'entretien d'un seul balancier par échappement ou synchronisation harmonique ou sous-harmonique*. C'est le problème classique qui se pose en Chronométrie. Je ne l'ai pas développé ici dans toute son ampleur, parce qu'un exposé plus détaillé a été publié dans les *Annales françaises de Chronométrie*.

Dans le Chapitre III, j'étudie le problème des *balanciers à support mobile*. J'indique la marche à suivre pour *déterminer les régimes synchronisés et étudier leur stabilité*.

Le Chapitre IV est une application particulière du précédent, à savoir le problème de la *montre oscillante*. Ce problème, qui a une origine commerciale, a été étudié expérimentalement, il y a une vingtaine d'années, par MM. Jacqueroed et Mügeli, au Laboratoire suisse de Recherches horlogères de Neuchâtel. J'avais, à cette époque, entrepris son étude théorique; mais j'avais tout de suite été arrêté par la complication des calculs dans lesquels je m'étais engagé et qui ne pouvaient d'ailleurs me conduire à rien. La présente théorie en donne au contraire la solution immédiate, laquelle est bien d'accord, tout au moins qualitativement, avec les résultats expérimentaux des auteurs ci-dessus et aussi avec ceux qui ont été obtenus par M. Mesnage dans des expériences plus récentes.

Le Chapitre V est une application analogue à la précédente; c'est le problème des *pendules sympathiques*.

Dans le Chapitre VI, je considère le *couplage en chaîne* de plusieurs balanciers, signalé par M. Bouasse dans le cas de deux diapasons et récemment étudié expérimentalement par deux élèves de l'Institut de Chronométrie dans le cas de deux, trois ou quatre pendules.

Le Chapitre VII est une courte étude de *l'entretien d'un pendule par le secteur*. J'avais déjà traité ce problème, dans le travail cité plus haut, en considérant le pendule comme un système à un seul degré de liberté et faisant une hypothèse contestable sur le courant qui traverse la bobine. Je le considère ici comme un système à deux degrés de liberté : l'élongation du balancier et l'intensité du courant. J'aboutis à cette conclusion qu'il n'y a pas synchronisation, du moins avec de petites amplitudes. On peut, comme l'a fait M. Hirschi, limiter celles-ci par une butée élastique. Mais, le couple introduit par cette butée est trop grand pour qu'on puisse le considérer comme un petit couple perturbateur et, de ce point de vue, le problème reste à résoudre.

J'ai aussi appliqué ma théorie générale à l'étude de l'influence de la vibration parasite dans la suspension à lame d'un pendule. Mais, pour réduire l'étendue du présent Mémoire, je n'ai pas reproduit cette étude.

Il existe probablement beaucoup d'autres problèmes, mécaniques ou électriques, susceptibles d'être traités par la méthode générale que nous allons exposer. Je songe en particulier à la théorie du *pendule esclave* de l'horloge Shortt. Mais, je laisse à d'autres chercheurs le soin de l'entreprendre.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE.

1. *Rappel d'un théorème sur les équations différentielles* ⁽¹⁾. — Considérons n fonctions $f_i(x, t)$ des variables indépendantes x_1, x_2, \dots, x_n, t . Nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Les f_i admettent la période T par rapport à t .

2° Elles ont des dérivées premières et secondes par rapport aux x et à t ; ces dérivées ont un module borné.

3° Les f_i peuvent présenter des discontinuités, ayant lieu lorsque t traverse certaines valeurs fonctions déterminées des x . Ces dernières fonctions sont continues et ont, elles aussi, des dérivées premières et secondes de module borné.

Pour faciliter le langage, nous appellerons M le point de l'espace à n dimensions admettant les x pour coordonnées cartésiennes.

Cela posé, considérons le système différentiel

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \lambda f_i(x, t) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

où λ désigne un facteur constant, positif et arbitrairement petit. Nous appellerons solution issue de M_0 celle pour laquelle M est en M_0 pour $t = 0$.

A chaque f_i nous faisons correspondre la fonction

$$(2) \quad F_i(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f_i(x, t) dt,$$

l'intégrale étant calculée en supposant les x constants. Considérons le système associé

$$(3) \quad \frac{dx_i}{dt} = \lambda F_i(x).$$

(1) *Bull. Sc. math.*, t. LXX, 1946, p. 155 à 172.

Supposons qu'il ait une solution constante représentée par le point P. Les coordonnées de ce point vérifient donc le système

$$(4) \quad F_i(x) = 0.$$

Nous appellerons *équation de stabilité* l'équation caractéristique des solutions infiniment voisines. Nous avons alors le théorème suivant :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Pour que le système (1) ait une solution périodique stable voisine de P, lorsque λ est suffisamment petit, il faut et il suffit que les racines de l'équation de stabilité aient toutes leur partie réelle négative* ⁽¹⁾.

Précisons la signification de ce théorème.

Supposons qu'une racine au moins ait sa partie réelle positive. En choisissant R et λ assez petits, on peut trouver une infinité de points M_0 situés à une distance $PM_0 < R$ du point P et tels que la solution issue de M_0 amène M à une distance $PM > R$, pour t suffisamment grand.

Supposons maintenant que toutes les racines aient leur partie réelle négative. En choisissant R et λ assez petits, la solution issue de tout point M_0 tel que $PM_0 < R$ vérifie, quel que soit $t > 0$, la condition $PM < R$. En outre, elle tend asymptotiquement vers une solution périodique parfaitement déterminée du système (1). Pour celle-ci, la distance PM est infiniment petite, de l'ordre de λ , quel que soit t .

La limite supérieure λ_1 que ne doit pas dépasser λ pour que la validité de ce théorème soit assurée est, *grosso modo*, inversement proportionnelle à la limite supérieure des modules des dérivées premières et secondes dont il a été question plus haut.

J'ai aussi démontré que si l'on considère les solutions des systèmes (1) et (3) issues d'un même point M_0 , leur écart PP' est de l'ordre de $\lambda^2 t^2$; il est donc infiniment petit du second ordre par rapport à λ , si t reste fini.

Tout ceci continue à s'appliquer si les f_i dépendent de λ et sont holomorphes au voisinage de $\lambda = 0$, à condition toutefois que les bornes supérieures de 2° puissent être choisies indépendantes de λ . Dans ce cas, les quotients des r_i par λ sont des fonctions de λ ; mais, ce sont leurs valeurs pour $\lambda = 0$ qui doivent avoir leur partie réelle négative.

2. Énoncé du problème général. — Considérons un système dépendant des n paramètres q_1, q_2, \dots, q_n et sur lequel nous faisons les hypothèses suivantes :

⁽¹⁾ Les conditions que doivent vérifier les coefficients de l'équation ont été mises sous différentes formes par divers auteurs. On pourra, par exemple, consulter un travail de M. Montel (*Mathematica*, vol. V, p. 110-129) et un autre de M. Couffignal (*Revue scient.*, 1945, p. 195 à 210).

1° Sa force vive est

$$(5) \quad {}_2T = M \left(\sum_{i=1}^n q_i'^2 \right).$$

2° Il est soumis à des *forces principales* dérivant de la fonction U définie par la formule

$$(6) \quad {}_2U = -M \left(\sum_{i=1}^n \omega_i^2 q_i^2 \right),$$

les ω_i désignant des constantes positives.

3° Il est soumis à des *forces perturbatrices* dont le travail virtuel est

$$(7) \quad \delta \mathfrak{C} = \lambda M \left(\sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \right).$$

Le coefficient λ est un nombre constant, positif, arbitrairement petit, auquel nous ferons jouer le rôle d'*infinitement petit principal*. Quant à M, c'est un facteur constant et positif, qui pourra représenter, suivant les cas, une masse ou un moment d'inertie.

Les Q_i sont des fonctions déterminées des q_h, q'_k , de t et de λ . Elles sont holomorphes par rapport à λ au voisinage de $\lambda = 0$. Par rapport à t , elles admettent la *période* $\frac{2\pi}{\omega}$. Considérées comme fonctions des q, q' , elles sont finies et admettent des dérivées premières et secondes également finies. Elles peuvent présenter des discontinuités, se produisant lorsque t traverse certaines fonctions de (q) , continues et à dérivées premières et secondes également continues.

Cela posé, nous nous proposons de *rechercher les mouvements périodiques* du système et d'*étudier leur stabilité*.

3. *Principe de la méthode.* — Supposons que les ω_i soient de la forme

$$(8) \quad \omega_i = \omega \frac{m_i}{N} \sqrt{1 + \lambda \varepsilon_i},$$

N et les m_i désignant des nombres *entiers* et les ε_i des constantes. Écrivons les équations de Lagrange

$$(9) \quad q_i'' + \omega^2 \frac{m_i^2}{N^2} q_i = \lambda \left(Q_i - q_i \varepsilon_i m_i^2 \frac{\omega^2}{N^2} \right).$$

Puis, faisons le changement de variables

$$(10) \quad \frac{\omega t}{N} = \varphi, \quad q_i = y_i \cos \varphi_i, \quad \frac{dq_i}{d\varphi} = -m_i y_i \sin \varphi_i, \quad \varphi_i = m_i \varphi + x_i;$$

nous obtenons le système

$$(11) \quad y_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \lambda f_i \cos \varphi_i, \quad \frac{dy_i}{d\varphi} = \lambda f_i \sin \varphi_i,$$

en posant

$$(12) \quad f_i = \varepsilon_i m_i q_i - \frac{N^2}{m_i \omega^2} Q_i.$$

Les seconds membres de ces équations différentielles admettent la période 2π par rapport à φ . Si l'on écarte les valeurs nulles des y_i , ils possèdent les propriétés requises au n° 1 pour les fonctions f_i . Le théorème général énoncé ci-dessus est donc applicable au système (11).

Le système associé est

$$(13) \quad y_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \lambda X_i, \quad \frac{dy_i}{d\varphi} = \lambda Y_i,$$

avec

$$(14) \quad \begin{cases} X_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i \cos \varphi_i d\varphi = \frac{m_i \varepsilon_i y_i}{2} - \frac{N^2}{2\pi m_i \omega^2} \int_0^{2\pi} Q_i \cos \varphi_i d\varphi, \\ Y_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i \sin \varphi_i d\varphi = - \frac{N^2}{2\pi m_i \omega^2} \int_0^{2\pi} Q_i \sin \varphi_i d\varphi, \end{cases}$$

les intégrales étant calculées en supposant les x_k, y_k constants. Les X_i, Y_i sont des fonctions déterminées des x_k, y_k ; elles admettent la période 2π par rapport aux x_k .

Signalons l'identité suivante. Soit \mathfrak{E} le travail total des forces perturbatrices lorsque φ croît de zéro à 2π , les x_k, y_k étant constants et λ ayant la valeur zéro dans les Q_i . On a visiblement

$$(15) \quad \sum_{i=1}^n m_i^2 y_i Y_i = \mathfrak{E} \frac{N^2}{2\pi \lambda M \omega^2}.$$

Remarque. — Nous avons écarté ci-dessus les valeurs $y_i = 0$. Elles peuvent toutefois être conservées, si f_i est divisible par y_i .

4. Régimes synchronisés. — Nous appellerons *point de synchronisation* tout point P de l'espace à $2n$ dimensions dont les coordonnées (x, y) vérifient les équations de synchronisation

$$(16) \quad X_i = 0, \quad Y_i = 0.$$

L'équation de stabilité correspondante s'obtient en annulant le déterminant $D(r)$ du système linéaire

$$(17) \quad r y_i \xi_i = \lambda dX_i, \quad r y_i \eta_i = \lambda dY_i,$$

dX_i et dY_i désignant les différentielles totales des fonctions X_i et Y_i , où l'on remplace dx_i par ξ_i et dy_i par $y_i \eta_i$.

Nous dirons que le point P est *stable* si les racines de l'équation de stabilité ont leur partie réelle négative. Nous savons que, dans ce cas, si λ est inférieur à une certaine limite λ_1 , les équations (11) admettent une solution de période 2π par rapport à φ , vers laquelle tend asymptotiquement toute solution issue d'un point suffisamment voisin de P. En se reportant aux formules (10), on voit qu'à la solution périodique ci-dessus correspond un *mouvement périodique du système*, dont la période est $N \frac{2\pi}{\omega}$, c'est-à-dire N fois la période des forces perturbatrices.

Ce mouvement est *stable*; c'est-à-dire que si les conditions initiales sont telles que le point M_0 correspondant soit suffisamment voisin de P, le mouvement qui en résulte tend asymptotiquement vers le mouvement périodique.

La *rapidité de la synchronisation* est d'autant plus grande que les parties réelles des racines de l'équation de stabilité ont une valeur absolue plus grande. Cette rapidité est mesurée, *grosso modo*, par la rapidité avec laquelle les fonctions $e^{\frac{r\omega t}{N}}$ tendent vers zéro. On ne change par les conditions de stabilité si, comme nous le ferons souvent, on multiplie r par un facteur positif.

Si λ est très petit, le point M reste, pendant le mouvement périodique ci-dessus, très voisin de P; de sorte que *chaque q_i est sensiblement une fonction sinusoïdale du temps*, ayant pour pulsation $\frac{m_i\omega}{N}$, soit approximativement sa pulsation propre ω_i . Mais, *l'amplitude et la phase subissent de petites fluctuations*, de période NT . Ces fluctuations sont d'autant plus petites que λ est plus petit.

5. *Il n'existe pas d'autres mouvements périodiques que les précédents.* — Supposons en effet que les q_i admettent la période T. D'après (9), les fonctions Q_i admettent aussi cette période, quand on y remplace les q_i par la solution périodique en question. On a donc, quel que soit t ,

$$(18) \quad Q_i(q, q', t + T) = Q_i(q, q', t).$$

Si ces équations ne sont pas vérifiées quels que soient les q, q' et t , elles constituent un système de n équations différentielles du premier ordre, évidemment incompatible ⁽¹⁾ avec le système (9). Dès lors, les égalités (18) doivent être des identités; donc, $T = N \frac{2\pi}{\omega}$, N désignant un nombre entier.

6. Faisons maintenant le changement de variables (10), en laissant les m_i provisoirement indéterminés. Les q_i admettent la période 2π par rapport à φ . Donc, il en est de même des $y_i, \cos \varphi_i, \sin \varphi_i$. Si φ augmente de 2π , les y_i ne changent pas et chaque φ_i augmente de $2\pi k_i$, k_i étant entier. Prenons alors $m_i = k_i$.

(1) A moins qu'il ne soit possible de choisir les fonctions Q_i de manière à réaliser la compatibilité. Mais, un tel système de forces perturbatrices serait, s'il existait, tout à fait artificiel et sans aucun intérêt pratique.

La dernière formule (10) nous montre que x_i ne change pas. En définitive, les x_i, y_i admettent la période 2π par rapport à φ .

Soient a_i, b_i leurs valeurs pour $\varphi = 0$. De (11), on déduit

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_i \cos \varphi_i}{y_i} d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} f_i \sin \varphi_i d\varphi = 0.$$

Dans ces intégrales, on doit remplacer les x_i, y_i par la solution périodique ci-dessus. Si on les remplace par les a_i, b_i , on commet une erreur⁽¹⁾ de l'ordre des différences $x_i - a_i, y_i - b_i$ et l'on sait que ces différences valent $O(\lambda)$. On a donc

$$X_i(a, b) = \alpha_i, \quad Y_i(a, b) = \beta_i, \quad \alpha_i \text{ et } \beta_i = O(\lambda).$$

On en déduit, d'après le théorème des fonctions implicites, qu'il existe un point de synchronisation P voisin du point (a, b) . Or, nous savons que les équations (11) admettent au plus une solution périodique voisine de ce point P. Cette solution coïncide donc nécessairement avec la solution périodique dont nous avons admis l'existence.

7. Dans le cas où une racine au moins de l'équation de stabilité a sa partie réelle positive, on peut trouver une infinité de positions de M_0 infiniment voisines de P et telles que, par la suite, M s'éloigne beaucoup de P. Il est possible que, pour certaines positions de M_0 , M tende vers P; mais ceci nécessite des conditions initiales vérifiant certaines relations déterminées⁽²⁾, donc physiquement irréalisables. On peut donc dire que, dans ce cas, la synchronisation est pratiquement impossible.

Il peut arriver que les conditions auxquelles nous venons de faire allusion soient presque vérifiées. Dans ce cas, le point M commencera par s'approcher de P, pendant un temps qui pourra être très long; mais il finira toujours par s'en éloigner définitivement. Si l'on observe seulement la première partie du mouvement, on aura l'illusion d'avoir obtenu un régime synchronisé; cela prouve que, dans une étude expérimentale du phénomène, il faut avoir la patience de *poursuivre assez longtemps les observations*.

8. Les considérations du n° 6 nous conduisent à nous poser la question suivante : ω et les ω_i étant donnés, comment peut-on trouver les mouvements périodiques correspondants. Ceci revient à chercher comment on peut choisir N et les m_i , de telle manière que le système (11) ait une ou plusieurs solutions stables et qu'en outre la valeur de λ soit inférieure à la limite λ_1 (n° 4), laquelle dépend des fonctions f_i (n° 1).

(1) Cela résulte du lemme II de la seconde démonstration de notre théorème fondamental (*loc. cit.*).

(2) Celles qui font disparaître les exponentielles devenant infinies avec t .

Les fonctions Q_i étant données, la valeur de λ est entièrement déterminée par la grandeur des forces perturbatrices. D'autre part, si l'on appelle e_i l'erreur $\frac{\omega_i^2}{\omega^2} - \frac{m_i^2}{N^2}$, on a $\varepsilon_i = \frac{N^2}{\lambda m_i^2} e_i$ et la formule (12) peut s'écrire

$$f_i = m_i(1 + \lambda \varepsilon_i) \left(-\frac{Q_i}{\omega_i^2} + q_i \frac{e_i \omega^2}{\lambda \omega_i^2} \right).$$

La limite λ_i dépend donc non seulement de la nature analytique des fonctions Q_i , en particulier de leurs dérivées premières et secondes (n° 1), mais aussi de la grandeur des nombres m_i . Si l'erreur e_i est assez petite, $\frac{N}{m_i}$ est sensiblement égal à $\frac{\omega}{\omega_i}$; donc $\lambda \varepsilon_i = \frac{N^2}{m_i^2} e_i$ est voisin de zéro et peut être négligé dans la première parenthèse de la formule ci-dessus. Dans ces conditions, les fonctions f_i , ainsi que leurs dérivées premières et secondes, sont approximativement proportionnelles aux m_i . Dès lors, si, dans le but de diminuer e_i , on augmente N et les m_i , sensiblement dans le même rapport, la limite λ_i variera *grosso modo* dans le rapport inverse et pourra devenir inférieure à la valeur effective de λ . Cela limite le nombre des régimes synchronisés.

Il n'est toutefois pas impossible que plusieurs systèmes de valeurs de N et des m_i puissent convenir. En particulier, il y a des chances pour que ceci arrive si tous les rapports $\frac{\omega_i}{\omega}$ sont très petits, car on peut alors approcher ces rapports par différentes fractions $\frac{m_i}{N}$ sans que les m_i deviennent très grands.

Observons encore que la condition $\lambda < \lambda_1$ est une condition *suffisante* pour la validité de notre théorie. Mais il est possible qu'elle ne soit pas nécessaire (1).

Signalons enfin que si les forces perturbatrices dépendent de λ , les bornes supérieures des modules des dérivées premières et secondes des Q_i doivent être *indépendantes* de λ . Dans ce cas, les conditions de stabilité doivent seulement être vérifiées pour $\lambda = 0$.

9. Supposons que les équations de synchronisation se partagent en deux groupes (G_1) et (G_2), tels que (G_1) ne contienne que les x_i, y_i d'indice $i > p$, tandis que (G_2) ne contient que les x_i, y_i d'indice $i \leq p$. La recherche des points de synchronisation se décompose en la résolution des deux groupes envisagés séparément. En particulier, les x_i, y_i d'indice $> p$ sont indépendants des équations du groupe (G_2).

Supposons d'autre part que les équations de (G_1) ne fassent intervenir que certaines des forces perturbatrices, soit (F). Nous ne changerons pas les x_i, y_i d'indice $> p$, si nous supprimons toutes les forces autres que (F) et si nous

(1) Exemple : Entretien par force sinusoidale, avec frottement visqueux.

annulons tous les y_i d'indice $\leq p$. D'après (15), nous savons que, dans ce cas, le travail \mathfrak{C} des forces (F) doit être nul, lorsque φ croit de zéro à 2π .

Supposons maintenant que les forces (F) soient uniquement des résistances passives. Leur travail ne peut être nul que si les y_i d'indice $> p$ sont nuls. Donc,

THÉOREME. — *Si les équations de synchronisation se décomposent en deux groupes indépendants, dont l'un ne fait intervenir que des résistances passives, les y_i figurant dans ce groupe sont nécessairement nuls.*

10. *Cas où les forces perturbatrices ne dépendent pas du temps.* — Dans tout ce qui précède, nous n'avons envisagé que le cas où les forces perturbatrices comprennent des forces fonctions périodiques du temps, c'est-à-dire le cas de la *synchronisation proprement dite*; le mouvement se synchronise sur les forces.

Il nous reste à *examiner le cas où aucune des forces perturbatrices ne dépend du temps.*

Dans ce cas, *la pulsation ω n'est pas donnée*; nous la considérons comme une inconnue et nous prenons $N = 1$. Pour déterminer ω , remarquons que les φ_i ne changent pas si l'on diminue φ de la constante arbitraire C , en même temps que l'on augmente x_i de $m_i C$. Comme les fonctions f_i ne contiennent φ que par l'intermédiaire des φ_i , elles ne changent pas non plus. Il s'ensuit que *les fonctions X_i et Y_i sont invariantes quand les x_i subissent les accroissements $m_i C$* . Il revient au même de dire qu'elles ne dépendent que des $2n - 1$ variables y_i et, par exemple, $z_i = \frac{x_i}{m_i} - \frac{x_1}{m_1}$. Dès lors, les équations (16) sont en général incompatibles. En éliminant entre elles les $2n - 1$ inconnues ci-dessus, on obtient l'équation déterminant ω . Ayant une racine de cette équation, on en déduit un point de synchronisation, en prenant la solution commune aux équations (16). Les $\frac{x_i}{m_i}$ correspondants ne sont déterminés qu'à une constante additive près, que l'on peut choisir arbitrairement, car cela revient à choisir l'origine des temps.

11. En ce qui concerne la *stabilité*, il convient de remarquer que, parmi les solutions du système associé infiniment voisines du point de synchronisation, se trouve la solution suivante $\xi_i = m_i C$, $\eta_i = 0$, où C désigne une constante arbitraire infiniment petite. On en conclut que *l'équation caractéristique admet nécessairement la racine $r = 0$* . Dans la théorie rappelée au n° 4, je n'ai pas traité ce cas particulier. Mais, ici, cette difficulté n'existe pas. Il suffit en effet de faire par exemple le changement de variables

$$0 = \frac{x_1}{m_1} + \varphi, \quad z_i = \frac{x_i}{m_i} - \frac{x_1}{m_1};$$

de sorte que

$$\varphi_1 = m_1 \theta, \quad \varphi_i = m_i (\theta + z_i).$$

En éliminant x_i , on obtient un système différentiel déterminant les $2n - 1$ variables z_i, y_i en fonction de θ . On a ensuite x_i par une quadrature, à une constante arbitraire près. La stabilité du mouvement dépend uniquement de celle du système ci-dessus, laquelle est déterminée par une équation caractéristique de degré $2n - 1$, qui n'est autre, à $O(\lambda^2)$ près, que l'équation caractéristique précédente *débarassée de la racine nulle*. C'est cette équation qui constitue l'équation de stabilité.

Le même calcul montre que la détermination des points de synchronisation et de ω , par la méthode indiquée au n° 10, n'est exacte qu'en première approximation.

12. On peut procéder à l'exclusion de la racine nulle en développant le déterminant $D(r)$. On doit constater qu'il n'a pas de terme constant et l'on supprime le facteur r .

Mais, on peut aussi former directement l'équation de stabilité, débarrassée dudit facteur, en procédant de la manière suivante.

Les équations (17) sont de la forme

$$r y_i \xi_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} \xi_j + b_{ij} \eta_j), \quad r y_i \eta_i = \sum_{j=1}^n (a'_{ij} \xi_j + b'_{ij} \eta_j).$$

Elles admettent la solution $r = 0, \xi_i = m_i C, \eta_i = 0$, quel que soit C . On a donc

$$\sum_j a_{ij} m_j = 0, \quad \sum_j a'_{ij} m_j = 0.$$

Posons alors $\xi_i = \xi'_i + m_i \xi$. Le système devient, en tenant compte des identités ci-dessus,

$$\sum_j a_{ij} \xi'_j + \sum_j b_{ij} \eta_j - r y_i \xi'_i = r y_i m_i \xi,$$

$$\sum_j a'_{ij} \xi'_j + \sum_j b'_{ij} \eta_j - r y_i \eta_i = 0.$$

Si r est racine de $D(r)$, ce système en ξ'_i, η_i admet une solution quel que soit ξ . Or, son déterminant est $D(r)$; comme il est nul, tous les déterminants caractéristiques doivent être nuls. L'un de ceux-ci s'obtient en remplaçant par exemple l'élément appartenant à la première colonne et à la ligne de rang i par $r y_i m_i \xi$, les autres éléments de la première colonne étant remplacés par zéro. Le déterminant ainsi obtenu contient le facteur r . En le supprimant, ainsi que le facteur arbitraire ξ , on obtient l'équation de stabilité. D'où la règle suivante :

L'équation de stabilité s'obtient en annulant le déterminant déduit de $D(r)$ en

remplaçant les éléments de la première colonne par les nombres

$$y_1 m_1, y_2 m_2, \dots, y_n m_n, 0, 0, \dots, 0,$$

écrits de haut en bas.

Bien entendu, on peut remplacer la première colonne par une colonne quelconque de rang $\leq n$.

CHAPITRE II.

ENTRETIEN D'UN BALANCIER.

13. *Entretien par un couple synchronisant dépendant seulement du temps.* — Appelons ⁽¹⁾ q l'élongation du balancier, évaluée en radians; M son moment d'inertie; ω_1 sa pulsation propre. Nous supposons que les couples perturbateurs comprennent :

- 1° un couple périodique $\lambda M \omega^2 f(t)$, de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$;
- 2° un couple de la forme $\lambda M \omega_1^2 F(q, q')$, donc indépendant du temps.

Ce couple comprend toujours le moment des *résistances passives*; il peut aussi comprendre un *couple correctif* provenant de ce que le balancier n'est pas exactement un oscillateur harmonique, le couple exercé par un *échappement*, des couples résistants provenant de l'entraînement de divers organes, etc.

Les fonctions X et Y comprennent chacune deux termes correspondant respectivement aux deux couples ci-dessus. Calculons d'abord les termes provenant du couple synchronisant.

Nous avons $Q = \omega^2 f(t)$; d'où, d'après (14),

$$X = -\frac{N^2}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{N\varphi}{\omega}\right) \cos(m_1 \varphi + x) d\varphi,$$

$$Y = -\frac{N^2}{2\pi m_1} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{N\varphi}{\omega}\right) \sin(m_1 \varphi + x) d\varphi.$$

La fonction $f\left(\frac{N\varphi}{\omega}\right)$ admet la période $\frac{2\pi}{N}$ par rapport à φ . Donc, son développement en série de Fourier ne contient que les sinus et cosinus de multiples de $N\varphi$. Il s'ensuit que les deux intégrales ci-dessus sont nulles si m_1 n'est pas un multiple de N . Donc, *la synchronisation n'est possible que si la fréquence propre du balancier est multiple de la fréquence du couple.*

(1) Dans ce chapitre, nous supprimons les indices de $q_i, x_i, y_i, \varepsilon_i$.

Dans ce cas, on doit prendre $N = 1$, pour que la fraction $\frac{m_1}{N}$ soit irréductible. Si l'on appelle $A \cos m_1 \varphi + B \sin m_1 \varphi$ l'harmonique de rang m_1 de la fonction $f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$, on a

$$X = \frac{A \cos x - B \sin x}{-2 m_1}, \quad Y = \frac{A \sin x + B \cos x}{-2 m_1}.$$

C'est aussi ce qu'on obtient en remplaçant la fonction $f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)$ par

$$A \cos m_1 \varphi + B \sin m_1 \varphi.$$

Donc, on ne change rien au phénomène de la synchronisation en remplaçant le couple synchronisant par son harmonique de rang m_1 . Nous sommes ainsi ramenés au cas où le couple synchronisant est sinusoidal et a une fréquence voisine de la fréquence propre du balancier.

14. Nous pouvons maintenant prendre $N = m_1 = 1$ et $f(t) = h \cos \omega t$. Les formules ci-dessus se réduisent alors à

$$X = -\frac{h \cos x}{2}, \quad Y = -\frac{h \sin x}{2}.$$

Pour le deuxième couple perturbateur, on a $Q = \omega_1^2 F(q, q')$. Les fonctions totales X et Y sont données par les formules

$$(19) \quad 2X = \varepsilon y - h \cos x - H(y), \quad 2Y = -h \sin x - J(y),$$

en posant

$$(20) \quad \begin{cases} H(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(y \cos \varphi, -\omega y \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi, \\ J(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(y \cos \varphi, -\omega y \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi. \end{cases}$$

Les points de synchronisation sont donnés par

$$(21) \quad h \cos x = \varepsilon y - H, \quad h \sin x = -J$$

ou

$$(22) \quad h^2 = (\varepsilon y - H)^2 + J^2$$

et

$$(23) \quad \text{tang } x = \frac{J}{H - \varepsilon y}.$$

L'équation (22) détermine l'amplitude du mouvement entretenu et la formule (23) donne son avance de phase sur le couple.

Les équations (17) s'écrivent, en posant $r = \frac{\rho \lambda}{2}$ et tenant compte de (21),

$$\rho y \xi = -\xi J + y \eta (\varepsilon - H), \quad \rho y \eta = \xi (H - \varepsilon y) - y \eta J.$$

D'où l'équation de stabilité

$$(24) \quad (\rho y + J)(\rho + J') + (H - \varepsilon y)(H' - \varepsilon) = 0.$$

Les conditions de stabilité sont :

$$(25) \quad J + yJ' > 0, \quad JJ' + (H - \varepsilon y)(H' - \varepsilon) > 0.$$

Elles expriment que les fonctions yJ et $J^2 + (H - \varepsilon y)^2$ sont croissantes au point de synchronisation.

15. Cas où il n'y a pas de couple synchronisant. — On a $h = 0$. Les équations de synchronisation se réduisent à

$$(26) \quad \varepsilon y = H, \quad J = 0.$$

La seconde détermine l'amplitude y du mouvement entretenu. La première nous donne ensuite $\varepsilon = \frac{H}{y}$.

L'accroissement de période ΔT provenant des couples perturbateurs est donnée, au second ordre près en λ , par la formule évidente

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta \omega}{\omega} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = \frac{\lambda \varepsilon}{2}.$$

On en déduit le retard diurne, en secondes,

$$(27) \quad R = 43200 \lambda \varepsilon = 43200 \frac{\lambda H}{y}.$$

Si l'on appelle C le couple perturbateur total, on a, d'après (20),

$$(28) \quad R = \frac{43200}{\pi M \omega_1^2 y} \int_0^{2\pi} C \cos \varphi_1 d\varphi_1.$$

On retrouve la formule d'Airy, classique en Chronométrie.

L'équation (24) admet visiblement la racine $\rho = 0$, qui est à écarter (n° 11), et la racine $\rho = -J'$. La condition de stabilité est donc $J' > 0$.

On peut l'interpréter d'une façon concrète. D'après les formules (15) et (19), le travail $\mathfrak{E}(y)$ des forces perturbatrices pendant une période est, à un facteur constant et positif près, égal à $-yJ$. Donc, $\mathfrak{E}'(y)$ a le signe contraire à $yJ' + J$, c'est-à-dire à J' , d'après (26). Pour que le régime soit stable, il faut donc et il suffit que le travail $\mathfrak{E}(y)$ décroisse quand y traverse, en croissant, l'amplitude y_1 des oscillations périodiques.

Ce résultat est d'ailleurs intuitif. Si y est légèrement supérieur à y_1 , le travail est négatif; l'amplitude diminue. Si y est légèrement inférieur à y_1 , le travail est positif; l'amplitude augmente. Dans les deux cas, y se rapproche de y_1 .

16. *Calcul des fonctions H et J pour un échappement.* — Dans tout ce mémoire, nous emploierons, en ce qui concerne les échappements, les notations suivantes.

La valeur absolue du couple exercé sur le balancier pendant chaque impulsion sera $\lambda M \omega_1^2 \Gamma$, en appelant toujours M le moment d'inertie du balancier et ω_1 sa pulsation propre. Quant à Γ , c'est évidemment un nombre positif, que nous supposerons constant ⁽¹⁾.

Dans la pratique, l'impulsion commence avant le point mort et se termine après; nous appellerons i_1 et i_2 les valeurs correspondantes de l'élongation, prises en valeur absolue. L'angle d'impulsion est $i = i_1 + i_2$; l'angle de dégagement est $D = i_2 - i_1$; il est toujours positif, sauf pour les échappements à coup perdu bien réglés.

Posons

$$i_1 = y \cos \alpha_1, \quad i_2 = y \cos \alpha_2, \quad 0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$F = -\Gamma \quad \text{pour } \alpha_1 < \varphi_1 < \pi - \alpha_2, \quad F = +\Gamma \quad \text{pour } \alpha_1 + \pi < \varphi_1 < 2\pi - \alpha_2,$$

et $F = 0$ pour les autres valeurs de φ_1 , comprises entre zéro et 2π . On en déduit, par un calcul élémentaire,

$$H = \frac{2\Gamma}{\pi} (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) = \frac{2\Gamma}{\pi} \left(\sqrt{1 - \frac{i_1^2}{y^2}} - \sqrt{1 - \frac{i_2^2}{y^2}} \right) = \frac{\Gamma}{\pi} \left(\frac{i_2^2 - i_1^2}{y^2} + \dots \right);$$

d'où la formule *approchée*, si y est grand vis-à-vis de i_2 ,

$$(29) \quad H = \frac{\Gamma i D}{\pi y^2}.$$

De même, $J = -\frac{2\Gamma}{\pi} (\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1)$, soit, *rigoureusement*,

$$(30) \quad J = -\frac{2\Gamma i}{\pi y} = -\frac{E}{\pi y},$$

en appelant $\lambda M \omega_1^2 E$ l'énergie fournie par période. Cette dernière formule résulte aussi de la formule (15).

17. *Même calcul pour un frottement visqueux.* — Nous désignerons toujours un tel couple de frottement par la notation $-\lambda M a \omega_1 q'$, de sorte que le *décroissement logarithmique* correspondant sera $\delta = \lambda \pi a$. On a $F = -\frac{a q'}{\omega_1}$; d'où, en confondant ω_1 avec ω ,

$$(31) \quad H = 0, \quad J = a y.$$

(1) C'est à peu près ce qu'on s'efforce de réaliser dans l'industrie horlogère. Mais, il y aurait intérêt à faire décroître le couple pendant l'impulsion, pour diminuer le défaut d'isochronisme apporté par l'échappement (Cf. *Annales françaises de Chronométrie*, 1932).

18. *Même calcul pour un frottement constant.* — Nous désignerons toujours un tel couple de frottement par la notation $\lambda M \omega_1^2 f$, f désignant un nombre constant et positif, représentant la moitié de l'angle d'équilibre évalué en radians.

On a

$$F = +f \quad \text{pour } 0 < \varphi_1 < \pi, \quad F = -f \quad \text{pour } \pi < \varphi_1 < 2\pi;$$

d'où

$$(32) \quad H = 0, \quad J = \frac{4f}{\pi}.$$

La seconde formule résulte aussi, en toute évidence, de la formule (15).

19. *Même calcul pour un couple correctif proportionnel à q^3 .* — Écrivons-le $\lambda M k \omega_1^2 q^3$, k désignant un coefficient constant. Par exemple, pour le pendule, $\lambda k = \frac{1}{6}$. On a $F = kq^3$; d'où

$$(33) \quad H = \frac{3k}{4} y^3, \quad J = 0.$$

20. *Même calcul pour une butée élastique.* — Supposons qu'un ressort très faible exerce sur le balancier le couple $\lambda M \omega_1^2 k'(a - q)$ pour $q > a > 0$, k' désignant un facteur constant et positif. Posons

$$a = y \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

On a

$$F = k'y(\cos \alpha - \cos \varphi_1) \quad \text{pour } -\alpha < \varphi_1 < \alpha.$$

D'où

$$(34) \quad H = \frac{k'y}{\pi} (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha), \quad J = 0.$$

Bien entendu, $H = 0$ si $y < a$.

21. *Synchronisation par les forces précédentes.* — En additionnant les valeurs ci-dessus calculées, on obtient

$$(35) \quad H = \frac{\Gamma i D}{\pi y^2} + \frac{3k}{4} y^3 + \frac{k'y}{\pi} (\sin \alpha \cos \alpha - \alpha), \quad J = -\frac{2\Gamma i}{\pi y} + ay + \frac{4f}{\pi}.$$

L'équation (22) est compliquée. Si l'on supprime la butée, l'échappement et le couple correctif, elle se réduit à

$$(36) \quad h^2 = \varepsilon^2 y^2 + \left(ay + \frac{4f}{\pi} \right)^2.$$

Elle est du second degré et a une seule racine positive, à condition que l'on ait $h > \frac{4f}{\pi}$. Cette condition montre que la synchronisation par couple sinusoïdal n'est possible que si le couple maximum dépasse une certaine limite proportionnelle au frottement constant, ce que ne prévoit pas la théorie élémentaire.

En supprimant le frottement constant, on doit évidemment retrouver les résultats donnés par cette dernière théorie. C'est ce qu'il est aisé de vérifier, en se reportant aux formules (22) et (23).

L'équation (24) a pour racines $\rho = -a \pm j\varepsilon$; d'où, en prenant le temps pour variable indépendante, $r = \frac{\lambda\omega}{2}(-a \pm j\varepsilon)$. L'équation caractéristique des oscillations a pour racines $-\frac{\lambda a\omega}{2} \pm j\omega$. On voit que, dans le régime transitoire précédant le régime synchronisé, les fluctuations d'amplitude et de phase s'amortissent avec la même rapidité que les oscillations libres; mais leur fréquence est beaucoup plus petite; elle est égale à celle des oscillations multipliée par $\frac{\lambda\varepsilon}{2} = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega}$, conformément à la théorie élémentaire des battements.

22. Examinons la stabilité.

La fonction $yJ = ay^2 + \frac{4f}{\pi}y - \frac{2\Gamma i}{\pi}$ est croissante; donc, la première condition (25) est vérifiée. La seconde est plus compliquée. Écrivons-la dans le cas $D = k = k' = 0$; on trouve

$$(37) \quad y^3(a^2 + \varepsilon^2) + \frac{4fa}{\pi}y^2 + 8\frac{f\Gamma i}{\pi^2}y - 4\Gamma^2 i^2 > 0.$$

Le premier membre admet une seule racine positive y_1 ; pour que la synchronisation sur l'amplitude y soit stable, il faut et il suffit que cette amplitude dépasse y_1 . S'il n'y a pas d'échappement, cette condition est toujours remplie.

Supprimons l'échappement et rétablissons le couple correctif (cas du pendule ayant de grandes oscillations). Nous obtenons

$$\frac{27k^2}{16}y^3 - 3\varepsilon k y^2 + y(a^2 + \varepsilon^2) + \frac{4af}{\pi} > 0.$$

D'après le théorème de Descartes, le premier membre a zéro ou deux racines positives. Dans le deuxième cas, il faut que y soit extérieur à ces racines. Si $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire si l'on est juste à la résonance, le mouvement est toujours stable.

23. *Entretien par l'échappement.* — L'amplitude du mouvement entretenu est donnée par l'équation du second degré

$$\pi ay^2 + 4fy - 2\Gamma i = 0,$$

qui a une seule racine positive. Le retard diurne est donné par (27) et (35). Il est nul si $D = 0$; nous dirons alors que l'échappement est *isochrone*.

La condition de stabilité $V > 0$ est vérifiée identiquement.

24. *Oscillations libres.* — Supprimons aussi l'échappement. Si $f > 0$, l'équation $J = 0$ n'a plus de racine positive; le mouvement ne peut pas tendre asymptotiquement à une amplitude finie.

tiquement vers un mouvement approximativement sinusoïdal. Effectivement, la théorie élémentaire des oscillations libres avec frottement visqueux et frottement constant nous apprend que *le mouvement s'arrête* définitivement au bout d'un nombre fini d'oscillations, la position finale du balancier étant une position quelconque intérieure à l'angle d'équilibre.

Par contre, *s'il n'y a pas de frottement constant*, l'équation $J = 0$ a la racine $y = 0$. Cette racine est acceptable (remarque du n° 3), car la fonction f_1 de la formule (13) est divisible par y . On pourrait calculer les valeurs asymptotiques de x , y et q et comparer avec ce que donne l'intégration directe, qui est évidemment plus simple. Mais, ce calcul n'a pas grand intérêt.

CHAPITRE III.

LES BALANCIERS A SUPPORT MOBILE.

25. *Définition du système.* — Nous avons n balanciers $(B_1), (B_2), \dots, (B_n)$, dont les axes sont fixés à un même support (B_0) , lequel possède un degré de liberté, représenté par la variable q_0 . Nous appelons q_i l'élongation de (B_i) par rapport à un trièdre de référence lié au support.

Chacun des mobiles (B_i) est soumis à une force ou à un couple de rappel, proportionnel à q_i et à des forces perturbatrices dépendant uniquement de q_i et q'_i .

La force vive du système est de la forme

$$(38) \quad 2T = M \left(\sum_{i=0}^n q_i'^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^n c_i q'_0 q'_i \right),$$

les c_i étant des facteurs constants, que nous supposerons finis, de sorte que *le couplage par inertie est très faible*.

Les forces principales sont toujours définies par la formule (6), sauf que i varie de zéro à n . Les ω_i d'indice > 0 sont les pulsations propres des balanciers (support calé); ω_0 est la pulsation propre du support (balanciers calés).

Les forces perturbatrices sont toujours définies par la formule (7); mais, chaque fonction Q_i dépend seulement de q_i et de q'_i . Comme au n° 13, nous poserons

$$Q_i = \omega_i^2 F_i(q_i, q'_i).$$

26. *Forces perturbatrices fictives.* — Les équations de Lagrange s'écrivent

$$q_i'' + \omega_i^2 q_i = \lambda (Q_i - c_i q_0'') \quad (i > 0);$$

$$Q_0'' + \omega_0^2 q_0 = \lambda \left(Q_0 - \sum_{i=1}^n c_i q_i'' \right).$$

On en tire

$$q_i^n + \omega_i^2 q_i = \lambda \bar{Q}_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n);$$

avec

$$\bar{Q}_0 = \frac{Q_0 + \sum_{i=1}^n c_i \omega_i^2 q_i - \lambda \left(c^2 \omega_0^2 q_0 + \sum_{i=1}^n c_i Q_i \right)}{1 - \lambda^2 c^2},$$

$$\bar{Q}_i = Q_i + c_i \frac{\omega_0^2 q_0 + \lambda \left[-Q_0 + \sum_{i=1}^n c_i (-\omega_i^2 q_i + \lambda Q_i) \right]}{1 - \lambda^2 c^2} \quad (i > 0),$$

$$c^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

On retombe sur le problème du n° 2, à condition de considérer les \bar{Q}_i comme les coefficients du travail virtuel de forces perturbatrices comprenant les forces perturbatrices véritables et des forces perturbatrices *fictives*. Ces \bar{Q}_i dépendent de λ ; mais, notre théorie continue à être valable, moyennant la réserve faite à la fin du n° 8.

Or, dans $f_0 \cos \varphi_0$ par exemple, figure le terme $q_i \cos \varphi_0 = y_i \cos \varphi_i \cos \varphi_0$, qui n'est pas divisible par y_0 . Ses dérivées par rapport à y_0 et x_0 n'ont pas de bornes fixes, si y_0 tend vers zéro en même temps que λ . De même, la présence du terme $q_0 \cos \varphi_i$ dans Q_i nous conduit à une conclusion analogue, si y_i tend vers zéro avec λ . On en conclut que *si un point de synchronisation est tel que, pour $\lambda = 0$, le support ou un balancier soit au repos, notre théorie cesse d'être justifiée*. Il sera donc inutile de poursuivre l'étude d'un tel cas.

Dans les autres cas, nous réduirons les \bar{Q}_i donnés par les formules ci-dessus à leur première approximation, soit

$$(39) \quad \bar{Q}_0 = Q_0 + \sum_{i=1}^n c_i \omega_i^2 q_i, \quad \bar{Q}_i = Q_i + c_i \omega_0^2 q_0.$$

Nous commettrons une erreur infiniment petite sur la position des points de synchronisation; mais, rien ne sera changé en ce qui concerne leur stabilité.

27. *Calcul des fonctions X_i, Y_i .* — Nous sommes dans le cas n° 40; donc, $N = 1$. Appliquons les formules (14). On a

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi_i \cos \varphi_k d\varphi = \pi \cos(x_k - x_i), \quad \int_0^{2\pi} \cos \varphi_i \sin \varphi_k d\varphi = \pi \sin(x_k - x_i),$$

si $m_i = m_k$; ces intégrales sont nulles si $m_i \neq m_k$.

Dès lors, supposons $m_i = m_0$ pour $i \leq p$ et $m_i \neq m_0$ pour $i > p$; le nombre p étant ≥ 0 et $\leq n$. On a

$$(40) \quad {}_2 X_i = m_i K_i, \quad {}_2 Y_i = -m_i J_i, \quad \text{pour } i > p;$$

$$(41) \quad \begin{cases} {}_2 X_i = m_0 [K_i - y_0 c_i \cos(x_i - x_0)], & {}_2 Y_i = m_0 [-J_i - y_0 c_i \sin(x_i - x_0)], \\ \text{pour } 0 < i \leq p; \end{cases}$$

$$(42) \quad \begin{cases} {}_2 X_0 = m_0 \left[K_0 - \sum_{i=1}^p c_i y_i \cos(x_i - x_0) \right], \\ {}_2 Y_0 = m_0 \left[-J_0 + \sum_{i=1}^p c_i y_i \sin(x_i - x_0) \right]; \end{cases}$$

en posant

$$(43) \quad K_i = \varepsilon_i y_i - H_i$$

et calculant les H_i, J_i par les formules (20).

28. *Points de synchronisation.* — Nous avons d'abord

$$J_i(y_i) = 0, \quad \varepsilon_i = \frac{H_i(y_i)}{y_i} \quad \text{pour } i > p.$$

Puis,

$$(44) \quad y_0 c_i \cos(x_i - x_0) = K_i, \quad y_0 c_i \sin(x_i - x_0) = -J_i, \quad 0 < i \leq p;$$

$$(45) \quad \sum_{i=1}^p c_i y_i \cos(x_i - x_0) = K_0, \quad \sum_{i=1}^p c_i y_i \sin(x_i - x_0) = J_0.$$

D'où l'on déduit

$$(46) \quad y_0^2 c_i^2 = K_i^2 + J_i^2, \quad 0 < i \leq p;$$

$$(47) \quad y_0 K_0 = \sum_{i=1}^p y_i K_i,$$

$$(48) \quad \sum_{i=0}^p y_i J_i = 0.$$

Nous obtenons ainsi $p + 2$ équations entre les $p + 1$ inconnues y_0, y_1, \dots, y_p . En éliminant celles-ci, nous aurons une *relation (E) entre $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$* . Cette relation étant satisfaite, la solution commune aux équations (46) à (48) nous donnera y_0, y_1, \dots, y_p . Nous aurons enfin les $x_i - x_0$ par (44).

29. La relation (E) détermine ω , donc la *période du mouvement entretenu*. Posons

$$(49) \quad \omega_i^2 = m_i^2 \Omega^2 (1 + \lambda \alpha_i),$$

Ω étant arbitrairement choisi, sous cette seule réserve que les α_i soient finis.

D'où il résulte que l'on peut imposer aux α_i une relation linéaire et homogène à coefficients constants arbitraires.

A l'inconnue ω substituons l'inconnue z définie par

$$(50) \quad \omega^2 = \Omega^2 (1 + \lambda z).$$

En comparant avec (8), on a

$$(51) \quad \varepsilon_i = \frac{\alpha_i - z}{1 + \lambda z},$$

ou, en première approximation,

$$(52) \quad \varepsilon_i = \alpha_i - z.$$

Portant dans la relation (E), on obtient l'équation déterminant z , donc ω . Ayant une racine, on en déduit tous les ε_i , en particulier ceux d'indice $> p$. Portant dans (52), on a les α_i d'indice $> p$, à $O(\lambda)$ près. Donc, pour que le système puisse avoir un mouvement périodique, il faut que les ω_i non voisins de ω_0 aient des valeurs déterminées, à $O(\lambda^2)$ près; tandis que les ω_i voisins de ω_0 sont seulement déterminés à $O(\lambda)$ près.

Cette condition étant supposée remplie, chaque y_i d'indice $> p$ est déterminé par $J_i(y_i) = 0$; mais, nous ne pouvons pas calculer x_i . Ceci nous prouve qu'en première approximation, chaque balancier (B_i) dont la fréquence propre est éloignée de celle du support, oscille comme en régime autonome, c'est-à-dire comme si le support était fixe.

Si l'on veut calculer l'effet du couplage sur ces balanciers, il faut garder l'expression exacte des \bar{Q}_i (n° 26) et à condition que le support et aucun des balanciers ne soit au repos en première approximation.

30. *Retard diurne de chaque balancier.* — Supposons que le balancier (B_i) soit l'organe réglant d'un appareil horaire (montre ou pendule) et cherchons quel sera le retard diurne que manifesterà cet appareil sous l'effet du couplage.

L'heure indiquée au bout de p oscillations doubles est $H = p \frac{2\pi}{\omega}$. Or, si t augmente de $\frac{2\pi}{\omega}$, φ_i augmente de $2\pi m_i$, puisque x_i reprend la même valeur. Donc, (B_i) accomplit m_i oscillations pendant le temps $t = \frac{2\pi}{\omega}$. Le retard pris pendant ce temps est

$$t - H = 2\pi \left(\frac{1}{\omega} - \frac{m_i}{\omega_i} \right) = 2\pi \frac{\omega_i - m_i \omega}{\omega \omega_i}.$$

Le retard diurne s'en déduit en multipliant par $\frac{86400}{t} = \frac{86400\omega}{2\pi}$, ce qui donne

$$86400 \frac{\omega_i - m_i \omega}{\omega_i} = 86400 \left[1 - (1 + \lambda \varepsilon_i)^{-\frac{1}{2}} \right] = 86400 \left(\frac{\lambda \varepsilon_i}{2} - \frac{3\lambda^2 \varepsilon_i^2}{8} + \dots \right).$$

Ceci représente le retard provenant de l'ensemble de toutes les perturbations. Pour avoir le *retard dû au couplage seul*, il faut retrancher la valeur correspondant à $c_i = 0$, qui représente le *retard autonome* de (B_i) . Si l'on appelle ε_i^0 la valeur de ε_i pour $c_i = 0$, on voit que le retard dû au couplage est

$$(53) \quad R = 43200\lambda (\varepsilon_i - \varepsilon_i^0) \left[1 - \frac{3}{4}\lambda (\varepsilon_i + \varepsilon_i^0) + \dots \right].$$

Si l'on s'en tient à la première approximation, on réduira le crochet à l'unité.

31. *Stabilité.* — Les formules (40) nous montrent d'abord que la *stabilité des balanciers d'indice $> p$ est la même qu'en marche autonome* (n° 14). Pour les autres, posons

$$2r = \rho\lambda m_0, \quad K_i = \varepsilon_i y_i - H_i, \quad \xi_i - \xi_0 = u_i.$$

En nous reportant aux formules (41) et (42), puis tenant compte des équations (44), nous avons le système

$$\begin{aligned} \rho y_0^2 \xi_0 &= \eta_0 y_0^2 K_0 - \sum_{i=1}^p y_i [\eta_i K_i + u_i J_i], \\ \rho y_i (\xi_0 + u_i) &= \eta_i y_i K_i - [\eta_0 K_i + u_i J_i], \\ \rho \eta_0 y_0^2 &= -\eta_0 y_0^2 J_0 - \sum_{i=1}^p y_i [\eta_i J_i - u_i K_i], \\ \rho \eta_i y_i &= -\eta_i y_i J_i - [-\eta_0 J_i + u_i K_i]. \end{aligned}$$

En éliminant ξ_0 , u_i , η_i et supprimant le facteur ρ de la première colonne du déterminant, on obtient directement l'équation de stabilité sous la forme que donne la règle du n° 12 :

$$(54) \quad \begin{vmatrix} y_0^2 & y_1 J_1 & y_2 J_2 & \dots & y_p J_p & -y_0^2 K_0 & K_1 & K_2 & \dots & K_p \\ y_1 & \rho y_1 + J_1 & 0 & \dots & 0 & K_1 & -K_1' & 0 & \dots & 0 \\ y_2 & 0 & \rho y_2 + J_2 & \dots & 0 & K_2 & 0 & -K_2' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_p & 0 & 0 & \dots & \rho y_p + J_p & K_p & 0 & 0 & \dots & -K_p' \\ 0 & -y_1 K_1 & -y_2 K_2 & \dots & -y_p K_p & y_0^2 (\rho + J_0) & J_1 & J_2 & \dots & J_p \\ 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 & -J_1 & \rho + J_1' & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K_2 & \dots & 0 & -J_2 & 0 & \rho + J_2' & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K_p & -J_p & 0 & 0 & \dots & \rho + J_p' \end{vmatrix} = 0.$$

32. *Cas où toutes les périodes propres sont voisines.* — Tous les m_i sont égaux et l'on peut les supposer égaux à un. On a $p = n$ et les équations (40) disparaissent.

Supposons que les forces perturbatrices se réduisent, pour chaque (B_i) , à un *frottement visqueux* et à un *échappement isochrone à force constante*; adoptons

les notations des nos 16 et 17. Nous obtenons immédiatement

$$(55) \quad H_i = 0, \quad J_i = a_i y_i - \frac{E_i}{\pi y_i}.$$

Les équations (46) à (48) deviennent

$$(56) \quad \varepsilon_i^2 y_i^2 + \left(\frac{E_i}{\pi y_i} - a_i y_i \right)^2 = c_i^2 y_0^2, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$(57) \quad \varepsilon_0 y_0^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i y_i^2, \quad \sum_{i=0}^n \frac{E_i}{\pi} = \sum_{i=0}^n a_i y_i^2.$$

L'élimination des y_i est encore compliquée.

33. Supposons qu'il n'y ait *qu'un échappement, affecté au support*. Nous avons

$$(58) \quad y_i^2 = y_0^2 \frac{c_i^2}{\delta_i}, \quad \delta_i = \varepsilon_i^2 + a_i^2.$$

Portons dans (57) :

$$(59) \quad \varepsilon_0 = \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i c_i^2}{\delta_i},$$

$$(60) \quad E_0 = \pi y_0^2 \left[a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{a_i c_i^2}{\delta_i} \right].$$

L'équation (59) est l'équation de compatibilité. Si l'on y remplace ε_i par $\alpha_i - z$, on obtient une équation de degré $2n + 1$ en z ; donc, *il y a $2n + 1$ points de synchronisation*, réels ou imaginaires.

Ayant une racine de cette équation, on a y_0 par (60), puis y_i par (58) et enfin les $x_i - x_0$ par (44).

34. Supposons maintenant que *l'échappement unique soit affecté au balancier* (B_1). On a encore (58), sauf pour $i = 1$. Puis,

$$(61) \quad \varepsilon_1 y_1^2 = P y_0^2, \quad P = \varepsilon_0 - \sum_{i=2}^n \frac{\varepsilon_i c_i^2}{\delta_i};$$

$$(62) \quad \frac{E_1}{\pi} - a_1 y_1^2 = Q y_0^2, \quad Q = a_0 + \sum_{i=2}^n \frac{a_i c_i^2}{\delta_i},$$

$$\varepsilon_1^2 y_1^4 + Q^2 y_0^4 = c_1^2 y_0^2 y_1^2,$$

ou

$$(63) \quad \varepsilon_1 (P^2 + Q^2) = c_1^2 P.$$

Cette dernière équation est de degré $4n - 1$ en z . Donc, *il y a $4n - 1$ points de synchronisation*.

Ayant z , on a

$$(64) \quad y_1^2 = \frac{PE_1}{\pi(Pa_1 + Q\varepsilon_1)};$$

puis, y_0 par (61) et les y_i par (58).

35. *Cas où il y a un seul balancier.* — Nous avons $n = 1$. Les équations (46) à (48) se réduisent à ⁽¹⁾

$$(65) \quad c^2 y_0^2 = K_1^2 + J_1^2, \quad y_0 K_0 = y_1 K_1, \quad y_0 J_0 + y_1 J_1 = 0,$$

en reprenant une notation du n° 31.

Supposons que le support soit seulement soumis à un frottement visqueux; on a, d'après (55),

$$H_0 = 0, \quad J_0 = a_0 y_0, \quad K_0 = \varepsilon_0 y_0.$$

Les deuxième et troisième équations (65) deviennent

$$(66) \quad \varepsilon_0 y_0^2 = y_1 K_1, \quad a_0 y_0^2 = -y_1 J_1.$$

Portons dans la première équation (65) :

$$(67) \quad y_0^2 \delta_0 = y_1^2 c^2.$$

Portons dans (66) :

$$(68) \quad \varepsilon_0 c^2 y_1 = \delta_0 K_1, \quad a_0 c^2 y_1 = -\delta_0 J_1.$$

Il reste à éliminer y_1 entre les deux équations.

Supposons que le balancier soit soumis à un échappement, à un frottement visqueux et à un frottement constant et adoptons les notations des nos 16 à 18. Nous avons

$$J_1 = \frac{-E}{\pi y_1} + a_1 y_1 + \frac{4f}{\pi}, \quad K_1 = \varepsilon_1 y_1 - \frac{ED}{2\pi y_1^2}.$$

Portons dans (68) :

$$(69) \quad y_1^2 = \frac{ED \delta_0}{2\pi(\varepsilon_1 \delta_0 - \varepsilon_0 c^2)}, \quad y_1^2 (a_0 c^2 + a_1 \delta_0) + 4y_1 \frac{f \delta_0}{\pi} - \frac{E \delta_0}{\pi} = 0.$$

L'élimination de y_1 est élémentaire et donne une équation du huitième degré en z , trop compliquée pour qu'on puisse en tirer parti.

Si l'on suppose l'échappement isochrone, elle se réduit à

$$(70) \quad \varepsilon_1 (\varepsilon_0^2 + a_0^2) - \varepsilon_0 c^2 = 0,$$

qui est du troisième degré en z et qui dépend uniquement du coefficient de couplage et du frottement visqueux appliqué au support. Dans ce cas, y_1 est la racine positive de la deuxième équation (69).

(1) Nous supprimons l'indice de c_1 .

36. Étudions la *stabilité*. L'équation (54) se réduit à l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} y_0^2 & y_1 J_1 & -y_0^2 K'_0 & K_1 \\ y_1 & \rho y_1 + J_1 & K_1 & -K'_1 \\ 0 & -y_1 K_1 & y_0^2(\rho + J'_0) & J_1 \\ 0 & K_1 & -J_1 & \rho + J'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

On a avantage à développer par la règle de Laplace, suivant les deux premières lignes.

On peut aussi remarquer que le support et le balancier jouent, dans le cas actuel, des rôles symétriques. En gardant les variables ξ_0, ξ_1 du n° 31, on obtient l'équation caractéristique sous la forme *symétrique*

$$\begin{vmatrix} \rho y_0 + J_0 & -J_0 & -y_0 K'_0 & K_0 \\ -J_1 & \rho y_1 + J_1 & K_1 & -y_1 K'_1 \\ K_0 & -K_0 & y_0(\rho + J'_0) & -J_0 \\ -K_1 & K_1 & -J_1 & y_1(\rho + J'_1) \end{vmatrix} = 0.$$

On vérifie qu'elle n'a pas de terme constant et, après suppression du facteur ρ , on obtient, tous calculs faits, l'équation de stabilité du troisième degré

$$\rho^3 + A\rho^2 + B\rho + C = 0,$$

avec

$$(71) \quad \begin{cases} A = J'_0 + J'_1 + \frac{J_0}{y_0} + \frac{J_1}{y_1}, \\ B = J'_0 J'_1 + (J'_0 + J'_1) \left(\frac{J_0}{y_0} + \frac{J_1}{y_1} \right) + \frac{2 K_0 K_1 - J_0 J_1}{y_0 y_1} + \frac{K_0 K'_0}{y_0} + \frac{K_1 K'_1}{y_1}, \\ C = \frac{J'_1}{y_0} (J_0 J'_0 + K_0 K'_0) + \frac{J'_0}{y_1} (J_1 J'_1 + K_1 K'_1) \\ \quad + \frac{K_0 K_1 (J'_0 + J'_1) + J_0 K_1 K'_1 + J_1 K_0 K'_0}{y_0 y_1} + \left(\frac{J_0}{y_0} + \frac{J_1}{y_1} \right) \frac{K_0 K_1 - J_0 J_1}{y_0 y_1}. \end{cases}$$

Les conditions de stabilité sont

$$(72) \quad A > 0, \quad C > 0, \quad AB - C > 0.$$

37. Voyons ce qu'elles deviennent avec les hypothèses du n° 35. En tenant compte de (69), on a

$$J_1 = -y_1 k a_0, \quad J'_1 = a_0(k + 2q), \quad K_1 = y_1 k \varepsilon_0, \quad K'_1 = 3\varepsilon_1 - 2k \varepsilon_0,$$

en posant

$$(73) \quad k = \frac{c^2}{\delta_0}, \quad q = \frac{a_1}{a_0} + \frac{2f}{\pi a_0 y_1}.$$

Portant dans (71), on trouve

$$A = 2a_0(1+q), \quad B = a_0^2[1+2k-k^2+2q(2-k)] + \varepsilon_0^2(1+k)^2 + 3k\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0),$$

$$\frac{C}{2a_0} = (k+q)[a_0^2(1-k) + \varepsilon_0^2(1+k)] + 3k\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0).$$

Puis,

$$\frac{AB-C}{2a_0} = a_0^2(2q+1+k)(2q+1-kq) + \varepsilon_0^2(1+k)(1+kq) + 3kq\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0).$$

La première condition (72) est vérifiée identiquement, car $q > 0$. Il reste donc

$$(74) \quad (k+q)[a_0^2(1-k) + \varepsilon_0^2(1+k)] + 3k\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0) > 0,$$

$$(75) \quad a_0^2(2q+1+k)(2q+1-kq) + \varepsilon_0^2(1+k)(1+kq) + 3kq\varepsilon_0(\varepsilon_1 - k\varepsilon_0) > 0.$$

Dans le cas de l'échappement isochrone, on a, d'après (70), $\varepsilon_1 = k\varepsilon_0$. La condition (74) se réduit à

$$(76) \quad a_0^2(1-k) + \varepsilon_0^2(1+k) > 0,$$

car $k+q > 0$. Le dernier terme de (75) disparaît.

38. *Courbes de marche.* — Le balancier étant donné, supposons qu'on fasse varier la fréquence propre du support et proposons-nous de construire une courbe représentant la variation de la fréquence du balancier quand le support oscille.

Appelons $43200 \lambda x$ le retard diurne du support (balancier calé) sur le balancier (support calé) et $43200 \lambda X$ le retard diurne du balancier (support libre) sur le balancier (support calé). Nous définirons la courbe ci-dessus, que nous appellerons *courbe de marche*, en portant x en abscisse et X en ordonnée.

Dans la formule (49), prenons $\Omega = \omega_1$; donc $\alpha_1 = 0$. Appelons $43200 \lambda X_0$ le retard diurne dû à l'échappement du balancier. Comme le support n'a pas de défaut d'isochronisme, on a $x = -\alpha_0 - X_0$. Puis, d'après (53), $X = \varepsilon_1 - X_0$. Comme $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - \alpha_0$, on a

$$(77) \quad X = \varepsilon_1 - X_0, \quad x = X - \varepsilon_0.$$

D'autre part, si l'on appelle A l'amplitude autonome du balancier, on a ⁽¹⁾ (n° 23)

$$(78) \quad E = \pi a_1 A^2 + 4fA, \quad X_0 = \frac{ED}{2\pi A^3}.$$

Posons $\varepsilon_0 = a_0 u$; d'où $\delta_0 = a_0^2(1+u^2)$. Posons ensuite

$$(79) \quad \frac{y_1}{A} = v, \quad \frac{c^2}{a_0 a_1} = \alpha, \quad \frac{2f}{\pi a_1 A} = \beta.$$

(1) On obtient aussi ces formules en faisant $c = 0$ dans (69).

La deuxième équation (69), puis la première nous donnent

$$(80) \quad v = \frac{\sqrt{(\beta + 1)^2 + \frac{\alpha(1 + 2\beta)}{1 + u^2}} - \beta}{1 + \frac{\alpha}{1 + u^2}},$$

$$(81) \quad \varepsilon_1 = a_1 \alpha \frac{u}{1 + u^2} + \frac{X_0}{v^3}.$$

Portant dans (77), il vient

$$(82) \quad X = a_1 \alpha \frac{u}{1 + u^2} + X_0 \left(\frac{1}{v^3} - 1 \right), \quad x = X - a_0 u.$$

Posons enfin

$$(83) \quad X' = a_0 X, \quad x' = a_0 x, \quad s = a_0 X_0, \quad p = a_0^2,$$

et supposons $c = 1$, ce qui revient à changer λ . Les formules (82) deviennent (1)

$$(84) \quad X' = \frac{u}{1 + u^2} + s \left(\frac{1}{v^3} - 1 \right), \quad x' = X' - pu.$$

Pour se rendre compte des différentes formes que peut affecter la courbe de marche, on peut évidemment se borner à construire les courbes définies par les équations paramétriques (84), lesquelles sont très accessibles au calcul numérique (2).

Remarque. — Au lieu de porter en abscisse une quantité proportionnelle au retard *effectif* du support sur le balancier, on peut porter une quantité proportionnelle au retard *théorique* du support sur le balancier, ce retard théorique étant évalué en ne tenant pas compte du retard apporté par l'échappement sur la marche du balancier. Ceci revient à ajouter X_0 au second membre de la deuxième formule (77), donc s au second membre de la deuxième formule (84). La nouvelle courbe de marche se déduit donc de la précédente par la translation *s* suivant l'axe Ox .

39. Sur la courbe de marche, il faut séparer l'*arc d'instabilité*. Avec les notations du n° 37, on a

$$(85) \quad k = \frac{1}{p(1 + u^2)}, \quad q = \frac{\beta + v}{p\alpha v}.$$

(1) Ces formules ne sont pratiquement exactes que si $\lambda X = \frac{\lambda X'}{a_0}$ et $\lambda x = \frac{\lambda x'}{a_0}$ sont très petits.

(2) On peut même construire les courbes de marche dans le cas où les forces perturbatrices appliquées au balancier et au support sont quelconques. Il suffit de prendre y_1 pour paramètre. La deuxième équation (65) donne y_0 . Portant dans les deux autres, on en déduit ε_0 et ε_1 . Portant dans (77), on a x et X en fonction de y_1 . Mais, les calculs numériques peuvent évidemment être plus compliqués qu'avec les hypothèses faites au n° 35.

Les conditions (74) et (75) s'écrivent, en remarquant que $\varepsilon_1 - k\varepsilon_0 = \frac{s}{a_0 v^3}$,

$$(86) \quad su > \frac{pv^3}{3k} (k+q) [k-1 - u^2(k+1)],$$

$$(87) \quad su > \frac{pv^3}{3kq} [(k+2q+1)(kq-2q-1) - u^2(k+1)(kq+1)].$$

La première inégalité entraîne la seconde si l'on a

$$q(k+q)[k-1 - u^2(k+1)] > (k+2q+1)(kq-2q-1) - u^2(k+1)(kq+1).$$

En faisant tout passer dans le premier membre, puis divisant par $q+1$ et tenant compte de (85), on obtient

$$(88) \quad p(3q+1) + (1-q)(1+pu^2) > 0.$$

Quand cette dernière inégalité n'est pas vérifiée, c'est (87) qui entraîne (86).

40. *Cas de l'échappement isochrone.* — On a $s=0$. La courbe de marche est alors une *cubique unicursale* (Γ), admettant l'origine pour *centre de symétrie* et dont l'équation cartésienne est (¹)

$$(89) \quad X[(X-x)^2 + p^2] = p(X-x).$$

Elle ne dépend plus que du paramètre p . La condition (86) devient

$$(k+1)u^2 + 1 - k > 0;$$

on vérifie aisément qu'elle équivaut à $\frac{dx}{du} < 0$; on doit *exclure l'arc compris entre les points à tangente verticale*, lesquels n'existent d'ailleurs que si $p < 1$. La condition (87) devient

$$(90) \quad u^2(k+1)(kq+1) + (2q+1+k)(2q+1-kq) > 0.$$

Elle est beaucoup plus compliquée, car elle fait intervenir les paramètres α , β , c'est-à-dire les *frottements du balancier*.

41. *Ordre de grandeur des coefficients p , α , β , s .* — Le coefficient p dépend du frottement visqueux du support comparé au coefficient de couplage. Sa valeur numérique peut varier dans d'assez larges limites, suivant la manière dont l'expérience est réalisée. Il en est de même de α , qui fait intervenir le frottement visqueux du balancier.

Le coefficient β ne dépend que du balancier. Par exemple, dans le cas d'une montre, voici les valeurs qui résultent des mesures faites par M. Langue à

(¹) Nous supprimons les accents de X' , x' .

l'occasion de sa Thèse. Pour une montre de 39^{mm}, en position verticale, on trouve $\beta = \frac{1,2}{A}$. Pour une montre de 23^{mm}, 5, en position verticale également, on a $\beta = \frac{2,24}{A}$. Si l'on suppose par exemple $A = \pi$, on trouve $\beta = 0,38$ et $0,71$. En position horizontale, β est de cinq à dix fois plus petit. Pour un pendule à suspension à lame, β est sensiblement nul. On peut donc admettre que β ne dépasse jamais l'unité⁽¹⁾.

Enfin, le coefficient s peut s'écrire $s = \frac{R\sqrt{p}}{43200\lambda}$, en appelant R le retard diurne dû à l'échappement. Pour une montre, ce retard ne dépasse guère une dizaine de secondes. Si l'on se borne à considérer des valeurs de $p \leq 4$ par exemple, on a donc $s \leq \frac{1}{2160\lambda}$. Cette limite dépend évidemment de λ , c'est-à-dire du couplage. On peut par exemple n'envisager que des valeurs de s ne dépassant pas l'unité. Mais, bien entendu, cette limitation est quelque peu arbitraire.

42. *Formes diverses des courbes de marche.* — Les figures 1 à 15 de l'annexe reproduisent les courbes de marche pour $\alpha = 0, 1; 1$ et $2; \beta = 0$ et $1; p = 4, 1$ et $0,25$. Les valeurs de s sont indiquées sur chaque courbe. Pour les valeurs intermédiaires ou extérieures, il suffit d'interpoler ou extrapoler linéairement, parallèlement aux droites reproduites en trait fin. Pour $p = 1$ et $0,25$, chaque courbe a été arrêtée à l'arc instable; les régions instables sont couvertes de hachures. En général, c'est la condition (86) qui limite cette région. Cependant, pour $\alpha = 1, \beta = 1, p = 1$; pour $\alpha = 2, \beta = 0, p = 0,25$ et pour $\alpha = 2, \beta = 1, p = 0,25$, les deux conditions interviennent; c'est particulièrement visible dans le premier cas.

L'examen des différentes courbes montre que, pour $s = 0$, il y a *un seul régime périodique* si $p \geq 1$ et ce régime est *toujours stable*. Si $p < 1$, il y a *trois régimes périodiques*, dont *un ou deux stables*. Pour $s > 0$, on peut avoir deux régimes stables pour $p = 1$ et pour des valeurs de p légèrement supérieures. On voit aussi que, si $s > 0$, *pour des valeurs opposées de x , le retard est supérieur à l'avance*, à condition d'évaluer x comme il a été précisé au n° 33. Mais si l'on évalue x sans tenir compte du retard dû à l'échappement, comme on l'a expliqué dans la remarque du n° 38, on constate que *la conclusion peut être inversée* pour les valeurs de x éloignées de zéro.

Remarques. — I. Lorsqu'il existe *deux régimes stables*, celui qui finit par s'établir *dépend des conditions initiales*. Il s'établit d'autant plus lentement que

(1) On pourrait évidemment obtenir des valeurs plus grandes, en augmentant artificiellement le frottement constant; mais, cela ne présenterait sans doute pas un bien grand intérêt pratique.

le point correspondant de la courbe de marche est plus près du point limitant l'arc stable sur lequel il se trouve.

Dans le cas $p < 1$ et $s = 0$ par exemple, on peut avoir deux points très voisins d'un point à tangente verticale. L'un M est stable, l'autre M' est instable; il y a en outre un deuxième point stable M'', éloigné des deux points précédents. Suivant les conditions initiales, le régime limite correspond à M ou à M'', le premier étant atteint très lentement. Il peut arriver que le régime *se rapproche lentement du régime instable* correspondant à M', puis *s'en éloigne* pour tendre finalement vers l'un des deux régimes stables. Si l'on n'attend pas assez longtemps pour mesurer la période, on peut obtenir une période voisine de celle qui correspond à M'; on obtient ainsi une *fausse période stable*.

II. Les formules (84) supposent que l'amplitude A reste constante. Or, si l'on observe la marche du balancier pendant 24 heures par exemple et si l'échappement n'est pas à force constante, A diminue progressivement au cours de ces 24 heures. Dès lors, la valeur de X_0 , dans le deuxième terme de la formule (81), augmente. Si l'on calcule toujours le retard par rapport à la marche autonome normale (c'est-à-dire support calé et ressort de barillet remonté à fond), les retards du balancier et du support au bout de 24 heures sont supérieurs à ceux qui résultent des formules (84). Leur calcul peut être fait par une intégration, suivant la méthode exposée par M. Langue dans sa Thèse.

43. *Amplitudes du balancier et du support.* — Le rapport de l'amplitude du balancier (support mobile) à l'amplitude autonome A est le nombre ν . Le rapport de l'amplitude du support à l'amplitude A est, d'après (67), $\omega = \nu\sqrt{k}$. Les figures 16 à 18 reproduisent les courbes représentant les variations de ν et ω en fonction de x (1), pour $s = 0$. Pour toute autre valeur de s , il suffit de rappeler le point correspondant de la courbe de marche sur la courbe $s = 0$, parallèlement aux lignes indiquées au numéro précédent; on prend ensuite les valeurs de ν et ω correspondant au point ainsi obtenu.

Sur chaque figure, les courbes (ν) sont celles qui montent de gauche à droite, tandis que les courbes (ω) descendent.

44. *Cas où les périodes propres du support et du balancier sont éloignées.* — Dans ce cas, m_0 et m_1 sont différents. En première approximation (n° 29), le support est immobile et le balancier oscille normalement; l'effet du couplage est nul. Nous savons (nos 11 et 26) qu'il est inutile de passer à la deuxième approximation.

(1) Pour $p = 4$ et 1, on a seulement considéré les valeurs positives de x ; pour $p = 0,25$, on s'est borné aux valeurs de x correspondant à l'un des arcs stables. Si l'on change x en $-x$, ν et ω ne changent pas.

CHAPITRE IV.

LA MONTRE OSCILLANTE.

45. *Énoncé du problème.* — Le problème de la montre oscillante a été étudié pour la première fois par MM. Jacquerod et Mügeli (*Journal suisse d'Horlogerie*, 1926), par une méthode purement expérimentale. Il a été repris plus récemment par M. Mesnage (*Journal de Physique*, 1944 et 1946), qui a comparé les résultats numériques déduits de ses expériences à ceux d'une théorie due à MM. Mercier et Loudette, mais dans laquelle n'interviennent qu'une partie des données concrètes du système. Nous allons le reprendre, *avec les données véritables*, au moyen de la théorie générale exposée au chapitre précédent.

Le problème, tel qu'il a été étudié expérimentalement par les auteurs précités, se pose de la manière suivante.

Une montre est posée sur un plateau, lequel est suspendu à un fil de torsion (Jacquerod et Mügeli) ou à un bifilaire (Mesnage). Il s'agit d'étudier les variations de la marche de la montre et de l'amplitude des oscillations du balancier et du plateau, quand on fait varier la fréquence propre du plateau.

On peut aussi réaliser l'expérience en *accrochant la montre à un clou*; on observe très bien ses oscillations. La question intéressante est de savoir quelle est la répercussion de ces oscillations sur la marche de la montre (1).

46. *Variables canoniques.* — Appelons θ_0 l'élongation du support et θ celle du balancier par rapport à la montre. Soient M le moment d'inertie du balancier par rapport à son axe et I le moment d'inertie de tout le système par rapport à l'axe de rotation du support. La force vive est

$${}^2 T = I\theta_0'^2 + M\theta'^2 + 2M\theta_0'\theta'.$$

Posons

$$(91) \quad \theta = q_1, \quad \theta_0 = \lambda q_0, \quad \frac{M}{I} = \lambda^2;$$

il vient

$$(92) \quad {}^2 T = M(q_0'^2 + q_1'^2 + 2\lambda q_0'q_1').$$

Cette expression est de la forme (38), avec $n = 1$, $c_1 = 1$.

Soient ω_1 et ω_0 les *pulsations propres* de la montre (balancier calé) et du balancier (montre calée), quand on néglige les forces perturbatrices, en parti-

(1) D'après les renseignements qui m'ont été communiqués, il y a une vingtaine d'années par M. Jacquerod, c'est cette question qui a provoqué les recherches des physiciens suisses. Elle avait été soulevée par certaines épreuves de réception ayant conduit à des résultats différents, suivant la manière dont avait été observée la marche au pendu.

culier les défauts d'isochronisme introduits par le spiral et par le couple de torsion. Les forces principales sont données par la formule (6).

47. *Forces perturbatrices.* — Nous avons d'abord les couples correctifs qu'il y aurait lieu d'ajouter au couple dû au spiral et au couple de torsion. Le premier est très petit, si le spiral est muni de courbes terminales vérifiant les conditions de Phillips; nous le négligerons. Le second est également très petit dans le cas de la suspension par fil simple ou double. Dans le cas de la montre accrochée à un clou, il est proportionnel à θ_0^2 ; comme θ_0 est pratiquement très petit, nous le négligerons aussi.

Les *résistances passives* ne sont connues qu'imparfaitement. Nous admettrons que *le support est seulement soumis à des résistances visqueuses* et nous appellerons δ_0 son *décroissement logarithmique*. Le couple correspondant vaut $-\frac{\delta_0}{\pi} I \omega_0 \theta'_0$. Son travail virtuel est

$$-\frac{\delta_0}{\pi} I \omega_0 \theta'_0 \delta \theta_0 = -M \frac{\delta_0}{\pi} \omega_0 q'_0 \delta q_0.$$

En comparant avec (7), on a

$$(93) \quad Q_0 = -\frac{\delta_0}{\pi \lambda} \omega_0 q'_0 = -\omega_0 a_0 q'_0,$$

en posant, conformément à la notation du n° 17,

$$(94) \quad a_0 = \frac{\delta_0}{\pi \lambda}.$$

Les résistances passives s'exerçant *sur le balancier* ont été étudiées expérimentalement par divers auteurs, entre autres M. Arcay et M. Langue, dans leurs Thèses. On peut admettre, avec une bonne approximation, qu'elles se réduisent à *un frottement visqueux* et à *un frottement constant*. Nous adopterons, à leur égard et aussi pour l'échappement, les notations des nos 16 à 18. Nous retompons ainsi sur les hypothèses et notations du n° 35.

Pour que notre théorie soit applicable, il faut que tous les Q_i restent finis, donc que tous les couples perturbateurs, comparés aux couples principaux, soient au plus de l'ordre de $\lambda = \sqrt{\frac{M}{I}}$.

48. *Courbe de marche.* — Avec les notations du n° 38, nous avons, en appelant δ_0 et δ_1 les *décroissements logarithmiques* du support et du balancier

$$(95) \quad \alpha = \frac{\pi^2 \lambda^2}{\delta_0 \delta_1}, \quad \beta = \frac{2 \lambda f}{\delta_1 A}, \quad p = \frac{\delta_0^2}{\pi^2 \lambda^2}.$$

Quant au facteur s , il vaut, d'après (83) et (78), $s = \frac{a_0 E D}{2 \pi A^3}$. Si l'on appelle Γ le

couple exercé par l'échappement sur le balancier, on a, d'autre part (n° 46),
 $\lambda M \omega_1^2 E = 2 \Gamma i$; d'où

$$(96) \quad s = \frac{\Gamma D i \delta_0}{\lambda^2 \pi^2 M \omega_1^2 A^3}.$$

Rappelons que i et D sont les *angles d'impulsion et de dégagement* du balancier et que A est l'amplitude normale du balancier, les trois angles étant évalués en radians.

Avec les notations de M. Mesnage, que nous surlignons, pour éviter toute confusion avec nos propres notations, on a

$$(97) \quad \lambda = \bar{k}, \quad a_0 = \frac{\bar{\eta}}{\bar{k}}, \quad X = a_0 \frac{1 - \bar{y}}{\bar{\lambda} \bar{y}}, \quad X - x = a_0 \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\bar{\lambda} \bar{y}}.$$

Si l'on néglige l'angle de dégagement, la courbe de marche est représentée par l'équation (89), qui devient, d'après les formules ci-dessus,

$$(98) \quad (\bar{y} - 1) [(\bar{y} - \bar{x})^2 + \bar{\eta}^2 \bar{y}^2] = \bar{k}^2 \bar{y}^2 (\bar{y} - \bar{x}).$$

Cette équation ne diffère de l'équation (1) de M. Mesnage que par le terme $\bar{\eta}^2 \bar{y}^2$ du crochet, que M. Mesnage remplace par $\bar{\eta}_1^2 \bar{y}$. Comme, dans la pratique, \bar{y} est très voisin de un , cette différence a peu d'importance.

L'équation ci-dessus est valable pour un *chronomètre de marine*, qui est muni d'un échappement à détente, donc sans angle de dégagement. Cela explique les résultats obtenus par M. Mesnage dans son deuxième travail. Mais, avec une montre ordinaire, il n'en est pas de même. Prenons par exemple l'une des *montres expérimentées* par M. Langue dans sa Thèse et dont il a déterminé toutes les caractéristiques. Pour cette montre, de 39^{mm} de diamètre, on a en unités C. G. S.

$$D = 13^{\circ},5 = 0^{\circ},236; \quad i = 23^{\circ},5 = 0^{\circ},41; \quad \delta_1 = 0,0104;$$

$$\Gamma = 67 \quad \text{pour} \quad A = \frac{3\pi}{2} = 4,71; \quad \omega_1 = 5\pi; \quad I = 0,175.$$

Quant au frottement constant, il dépend de la position de la montre et de la forme du pivot de balancier. Par exemple, en position horizontale et pour un pivot plat, on a $\lambda f = 0,003$; si le pivot est pointu, $\lambda f = 0,0006$. Adoptons la valeur moyenne $\lambda f = 0,002$.

Comme support, prenons celui qui a servi à M. Mesnage. On a approximativement ⁽¹⁾ $I = 14300$, $\delta_0 = 0,008$.

(1) La valeur du décrément est une valeur moyenne, car M. Mesnage a constaté que δ_0 variait entre 0,004 et 0,009, suivant l'amplitude des oscillations. Cette variation prouve que le couple amortisseur ne se réduit pas en réalité à un couple visqueux. L'hypothèse faite au n° 47 n'est donc pas justifiée et il y aurait lieu de reprendre nos calculs avec le couple véritable.

De ces données, on déduit

$$\lambda^2 = \frac{0,175}{14300} = 1,225 \cdot 10^{-5}; \quad \lambda = 3,5 \cdot 10^{-3}; \quad \alpha = \frac{1,225 \cdot 10^{-3} \pi^2}{0,008 \cdot 0,0104} = 1,45$$

ou approximativement 1,5; $\beta = \frac{0,004}{0,0104 \cdot 4,71} = 0,0826$ ou approximativement 0,1; $p = \frac{64}{(3,5\pi)^2} = 0,53$ ou approximativement 0,5;

$$s = \frac{67 \cdot 0,236 \cdot 0,41 \cdot 0,008 \cdot 10^{-5}}{1,225 \pi^2 \cdot 25 \pi^2 \cdot (4,71)^2 \cdot 0,175} = 0,095 \quad \text{ou } 0,1 \text{ environ.}$$

Adoptons $\alpha = 1,5$; $\beta = 0,1$; $p = 0,5$; $s = 0,1$. La figure 19 représente la courbe de marche en trait plein. L'arc instable AB a été tracé en pointillé. Les points limites A et B sont sensiblement les points à tangente verticale. On a tracé en trait mixte la courbe théorique correspondant à un échappement isochrone.

L'origine O correspond aux formules (77); c'est-à-dire que *le retard du support sur la montre est évalué en tenant compte du retard dû à l'échappement*. Avec l'origine O', ce dernier retard est négligé, comme le fait M. Mesnage. Si l'on trace l'arc symétrique de l'arc inférieur par rapport à O', on obtient une courbe légèrement au-dessus de l'arc supérieur, à gauche du point d'abscisse — 0,6 et au-dessous, à droite de ce point. Autrement dit, *l'avance l'emporte sur le retard quand on est loin de la résonance; on a la conclusion inverse au voisinage de la résonance*. Ceci est bien d'accord avec ce qu'a obtenu M. Mesnage (cf. fig. 2 de son premier mémoire).

Signalons aussi que le retard a été évalué sur 24 heures. Dans la première série d'expériences, effectuée sur une montre ordinaire et non sur un chronomètre de marine, l'échappement n'est pas à force constante; il y aurait donc lieu de tenir compte de la remarque II du n° 42. Les retards expérimentaux doivent être plus grands que les retards théoriques.

Il serait intéressant de reprendre systématiquement ces expériences, en déterminant toutes les caractéristiques de la montre et du support et tenant compte de la décroissance de la force de l'échappement, afin de voir si les résultats expérimentaux sont numériquement d'accord avec les résultats théoriques.

49. *Cas où les fréquences propres sont éloignées.* — Comme on l'a vu au n° 44, notre méthode ne s'applique pas à ce cas. Nous savons seulement qu'en première approximation, l'effet du couplage est nul; mais, nous ne savons pas évaluer la seconde approximation.

CHAPITRE V.

LES PENDULES SYMPATHIQUES.

50. *Données.* — Considérons n pendules (P_i) , dont les axes (O_i) sont fixés à un même support (S) , lequel peut prendre un *mouvement de translation* suivant une direction horizontale Ox perpendiculaire à tous les axes (O_i) . Nous appelons M la *masse totale* du support et des pendules; x l'abscisse de (S) rapportée à l'origine fixe O . Nous appelons M_i la masse de (P_i) , supposée *très petite* vis-à-vis de M ; G_i son centre de gravité; R_i son rayon de giration autour de (O_i) ; L_i la longueur de son pendule synchrone; θ_i son élongation, c'est-à-dire l'angle que fait la verticale descendante $O_i z_i$ avec la droite $O_i G_i$, le sens positif de rotation étant le sens de $O_i z_i$ vers l'axe Ox . Nous posons $\omega_i^2 = \frac{g}{L_i}$, ω_i désignant donc la *pulsation propre* de (P_i) .

Le support est soumis aux forces suivantes :

1° *Force de rappel.* — $M\omega_0^2 x$, ω_0 désignant la *pulsation propre du support* (pendules calés).

2° *Résistance visqueuse.* — $\lambda M\omega_0 a_0 x'$.

Le pendule (P_i) est soumis à son *poids* $M_i g$ et aux forces perturbatrices suivantes :

1° *Couple résistant.* — $\lambda M_i \omega_i R_i^2 a_i \theta_i'$.

2° *Échappement* isochrone à force constante, dont le couple a pour valeur absolue $\lambda M_i R_i^2 \omega_i^2 \Gamma_i$.

Rappelons que chaque a_i est le quotient du décrement logarithmique par $\lambda \pi$.

51. *Variables canoniques.* — Posons

$$(99) \quad \frac{R_i}{L_i} \sqrt{\frac{M_i}{M}} = \lambda c_i, \quad x = \lambda q_0, \quad c_i L_i \theta_i = q_i, \quad c_i > 0.$$

On a

$$2T = M \left(\sum_{i=0}^n q_i'^2 + 2\lambda \sum_{i=0}^n c_i q_0' q_i' \right),$$

$$2U = -M \left(\sum_{i=0}^n \omega_i^2 q_i^2 \right).$$

On retombe sur les formules (38) et (6). Toutes les conclusions obtenues au Chapitre III sont donc applicables au cas actuel.

52. *Cas de deux pendules identiques.* — L'étude du cas général est compliquée. Nous la ferons seulement en supposant qu'on a deux pendules identiques ⁽¹⁾ et que les trois pulsations propres sont voisines.

Nous pouvons prendre $c_1 = c_2 = c$ et poser les formules (43), avec $m_i = 1$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Nous sommes dans le cas du n° 32, avec $a_1 = a_2 = a$, $E_1 = E_2 = E$. De plus, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Posons

$$(100) \quad \frac{E}{\pi} = \Lambda, \quad y_1^2 = \Lambda u_1, \quad y_2^2 = \Lambda u_2, \quad u_1 + u_2 = v, \quad u_1 u_2 = w, \quad k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}.$$

La première équation (57) nous donne

$$(101) \quad y_0^2 = k \Lambda v.$$

Les deux équations (56) et la deuxième équation (57) s'écrivent alors

$$(102) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_1^2 + (1 - au_1)^2 = kc^2 v u_1, \\ \varepsilon^2 u_2^2 + (1 - au_2)^2 = kc^2 v u_2, \\ v(a + ka_0) = 2. \end{cases}$$

Par soustraction des deux premières, on obtient, en écartant le cas $u_1 = u_2$,

$$(103) \quad v(\varepsilon^2 + a^2 - kc^2) = 2a.$$

En éliminant v entre (103) et la troisième équation (102), il vient

$$(104) \quad \varepsilon \varepsilon_0 = c^2 + aa_0$$

ou, en prenant $\alpha_0 = 0$, de sorte que $\varepsilon = \alpha - z$ et $\varepsilon_0 = -z$,

$$(105) \quad z^2 - \alpha z - c^2 - aa_0 = 0.$$

Cette équation admet deux racines de signe contraire.

En additionnant les deux premières équations (102), on a, en tenant compte de (103),

$$(106) \quad w(\varepsilon^2 + a^2) = 1.$$

Ayant une racine de (105), on en déduit ε et k ; d'où v et w ; d'où u_1 et u_2 , donc y_1 et y_2 .

53. Reste à examiner le cas particulier $u_1 = u_2 = u = \frac{1}{a + ka_0}$. En portant dans la première équation (102), on obtient

$$\varepsilon(\varepsilon z_0^2 - 2c^2 \varepsilon_0 + a_0^2 \varepsilon) = 0.$$

(1) Le cas $n = 1$ est identique au problème de la montre oscillante.

On a d'abord la solution $\varepsilon = 0$; d'où $u = \frac{1}{a}$ et $y_0 = 0$, en supposant $\alpha_0 \neq a$. Les équations (44) se réduisent à des identités; les équations (45) donnent $x_1 - x_2 = \pi$. Le support est immobile; les deux pendules oscillent symétriquement avec leur fréquence propre.

Mais, nous savons (n° 26) que, dans ce cas, notre théorie n'est plus justifiée.

On a ensuite l'équation

$$(107) \quad \varepsilon \varepsilon_0^2 - 2c^2 \varepsilon_0 + a_0^2 \varepsilon = 0,$$

qui est du *troisième degré* en ε . Ayant une de ses racines, on en déduit ε , ε_0 et k ; d'où u et y_0 .

Dans le *cas particulier où la fréquence du support est exactement égale à celle des pendules*, on a

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_0, \quad k = 1, \quad u = \frac{1}{a + a_0}, \quad y_0^2 = 2\Lambda u, \\ y_0 = y_1 \sqrt{2} = y_2 \sqrt{2}, \quad \varepsilon^2 = 2c^2 - a_0^2. \end{aligned}$$

Les formules (44) donnent ensuite, pour $i = 1$ et 2 ,

$$\cos(x_i - x_0) = \frac{\varepsilon}{c\sqrt{2}}, \quad \sin(x_i - x_0) = \frac{a_0}{c\sqrt{2}}.$$

Les deux pendules oscillent parallèlement.

Dans le cas particulier où $a_0 = c\sqrt{2}$, on a $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0$, $x_1 - x_0 = x_2 - x_0 = \frac{\pi}{2}$. Les deux pendules sont en quadrature avec le support.

54. *Stabilité.* — Examinons d'abord le cas du n° 52. On a

$$H_i = 0, \quad K_i = \varepsilon_i y_i, \quad J_0 = a_0 y_0, \quad y_1 J_1 = \Lambda(au_1 - 1), \quad y_2 J_2 = \Lambda(au_2 - 1).$$

L'équation (54), où nous multiplions les deuxième et cinquième lignes et la cinquième colonne par y_1 , les troisième et sixième lignes et la sixième colonne par y_2 , devient

$$\begin{vmatrix} kv & au_1 - 1 & au_2 - 1 & -\varepsilon v & \varepsilon u_1 & \varepsilon u_2 \\ u_1 & (\rho + a)u_1 - 1 & 0 & \varepsilon u_1 & -\varepsilon u_1 & 0 \\ u_2 & 0 & (\rho + a)u_2 - 1 & \varepsilon u_2 & 0 & -\varepsilon u_2 \\ 0 & -\varepsilon u_1 & -\varepsilon u_2 & kv(\rho + a_0) & au_1 - 1 & au_2 - 1 \\ 0 & \varepsilon u_1 & 0 & 1 - au_1 & (\rho + a)u_1 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon u_2 & 1 - au_2 & 0 & (\rho + a)u_2 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut développer ce déterminant et l'ordonner par rapport à ρ . Mais, il est inutile de calculer tous les coefficients. En effet, le coefficient de ρ^5 est visiblement $k^2 v^2 \omega^2$. Le terme constant se calcule aisément en faisant $\rho = 0$; on trouve $-4\varepsilon^2(k+1)v(u_1 - u_2)^2$. Or, d'après (104), ε et ε_0 sont de même signe;

donc $k > 0$. On en conclut que l'équation de stabilité admet au moins une racine réelle et positive; donc, tout régime synchronisé est instable.

55. Examinons maintenant le cas du n° 53. En changeant ρ en $\frac{\rho}{u}$ et développant le déterminant ci-dessus (1), on constate que l'équation de stabilité se décompose en

$$\rho^2 + 2\rho au + (a^2 + \varepsilon^2)u^2 - 1 = 0 \quad \text{et} \quad c_0\rho^3 + c_1\rho^2 + c_2\rho + c_3 = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} c_0 &= k^2, & c_1 &= 2k(kau + 1 - au) = 2k^2 u(a + a_0), \\ c_2 &= k(2 - k)(1 - a^2 u^2) + (1 - au)^2 + \varepsilon^2 u^2(k + 1)^2, \\ c_3 &= 2(1 - k)(1 - au)^2 + 2\varepsilon^2 u^2(k + 1). \end{aligned}$$

Les conditions de stabilité se réduisent à

$$(a^2 + \varepsilon^2)u^2 > 1, \quad c_3 > 0, \quad c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0.$$

On vérifie immédiatement que la première entraîne la seconde et, moins facilement, qu'elle entraîne aussi la troisième. Il ne reste donc qu'une condition, qui s'écrit, en tenant compte de (107),

$$(108) \quad \varepsilon(c^2 \varepsilon_0 - \varepsilon a_0^2 - \varepsilon_0 a a_0) > 0.$$

56. *Courbe de marche.* — Comme au n° 38, appelons $43200\lambda x$ le retard diurne du support (balanciers calés) sur les pendules (support calé) et $43200\lambda X$ le retard diurne des pendules (support libre) sur les pendules (support calé). On a $\frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\lambda}{2} \alpha$; donc, $x = \alpha$; de même, $\frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = \frac{\lambda}{2} \varepsilon$; donc $X = \varepsilon$.

Portant dans (107) et tenant compte de $\varepsilon_0 = \varepsilon - \alpha = X - x$, on obtient l'équation de la courbe de marche

$$X(X - x)^2 - 2c^2(X - x) + a_0^2 X = 0.$$

Posons

$$(109) \quad X = \frac{2c^2}{a_0} X', \quad x = \frac{2c^2}{a_0} x', \quad \frac{a_0^2}{2c^2} = p;$$

après suppression des accents, nous retombons sur l'équation (89). La courbe de marche est la même qu'au n° 40.

La condition de stabilité (108) s'écrit maintenant, en posant $\frac{a}{a_0} = q$,

$$(110) \quad \frac{x}{X}(2pq - 1) > 2p(q + 1) - 1.$$

Connaissant p et q , il est facile de séparer l'arc stable sur chaque courbe de marche.

(1) On peut aussi écrire les équations (17) et éliminer $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \xi_1 - \xi_0, \xi_2 - \xi_0$.

CHAPITRE VI.

LE COUPLAGE EN CHAÎNE (1).

57. *Définition du couplage.* — Considérons n pendules (P_i), dont chacun reçoit une impulsion électromagnétique pendant que le pendule précédent (P_{i-1}) a une élongation θ_{i-1} positive (2). Bien entendu, pour $i = 1$, on doit remplacer (P_0) par (P_n); de sorte que les pendules forment une chaîne.

Nous supposons que le couple s'exerçant sur (P_i) est *constant pendant toute l'impulsion* (3). Nous l'appellerons $\lambda M_i \omega_i^2 \Gamma_i$, M_i désignant le moment d'inertie de (P_i) et ω_i sa pulsation propre; Γ_i peut être positif ou négatif.

Supposons que les résistances passives s'exerçant sur (P_i) se réduisent à un couple de frottement visqueux, que nous appellerons $-\lambda M_i a_i \omega_i \theta'_i$, de sorte que le décrement logarithmique est $\lambda \pi a_i$. On a

$$\theta''_i + \omega_i^2 \theta_i = \lambda (\omega_i^2 \Gamma_i - a_i \omega_i \theta'_i),$$

en convenant de remplacer Γ_i par zéro, lorsque $\theta_{i-1} < 0$. Les variables canoniques sont donc les élongations et l'on a

$$q_i = \theta_i, \quad Q_i = \omega_i^2 \Gamma_i - a_i \omega_i q'_i.$$

Nous supposons que *les fréquences des n pendules sont voisines* (4). Nous prenons donc $m_i = N = 1$.

58. *Fonctions X_i, Y_i .* — A l'intérieur d'une période convenablement choisie, Γ_i n'existe que pour $-\frac{\pi}{2} < \varphi_{i-1} < \frac{\pi}{2}$. Les formules (14) donnent immédiatement

$$(111) \quad \begin{cases} 2 X_i = \varepsilon_i y_i - \frac{2}{\pi} \Gamma_i \cos(x_i - x_{i-1}), \\ 2 Y_i = -a_i y_i - \frac{2}{\pi} \Gamma_i \sin(x_i - x_{i-1}). \end{cases}$$

59. *Régimes synchronisés.* — En annulant X_i, Y_i et posant $u_i = x_i - x_{i-1}$, on a

$$(112) \quad \cos u_i = \frac{\pi \varepsilon_i y_i}{2 \Gamma_i}, \quad \sin u_i = -\frac{\pi a_i y_i}{2 \Gamma_i}, \quad \operatorname{tg} u_i = -\frac{a_i}{\varepsilon_i}.$$

(1) Signalé par M. Bouasse (*Pendule, spirale, diapason*, t. II, p. 310) pour deux diapasons.

(2) On pourrait, plus généralement, remplacer cette condition par $\theta_{i-1} > \beta_{i-1}$, β_{i-1} étant un angle donné, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Les calculs seraient plus compliqués, mais abordables.

(3) On pourrait, plus généralement, supposer qu'il est une fonction déterminée θ_i et θ'_i .

(4) On pourrait aussi supposer qu'elles sont proportionnelles à des entiers m_i .

Les u_i ayant une somme nulle, on en déduit l'équation

$$(113) \quad S_1 - S_3 + S_5 - \dots = 0.$$

en appelant S_p la somme des produits p à p des $\frac{a_i}{-\varepsilon_i}$. Si l'on pose toujours (49) et (50), donc (52), on voit que cette équation est de degré $n - 1$ par rapport à z ; il y a donc $n - 1$ points de synchronisation. L'amplitude y_i vaut

$$(115) \quad y_i = \frac{2 |\Gamma_i|}{\pi \sqrt{\varepsilon_i^2 + a_i^2}};$$

la différence de phase vaut $u_i = \arctg \frac{a_i}{-\varepsilon_i}$, la détermination étant choisie pour que $\Gamma_i \sin u_i < 0$.

60. *Stabilité.* — On a le système

$$r \dot{\zeta}_i = \varepsilon_i \eta_i - a_i (\zeta_i - \zeta_{i-1}), \quad r \eta_i = -a_i \eta_i - \varepsilon_i (\zeta_i - \zeta_{i-1}).$$

Éliminons η_i ; nous obtenons

$$\dot{\zeta}_i (r^2 + 2ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2) = \zeta_{i-1} (ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2).$$

Multiplions membre à membre toutes les équations analogues; nous obtenons l'équation caractéristique

$$(115) \quad \prod_{i=1}^n (r^2 + 2ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2) = \prod_{i=1}^n (ra_i + a_i^2 + \varepsilon_i^2).$$

Elle admet visiblement la racine $r = 0$; après suppression de cette racine, il reste une équation de degré $2n - 1$, qui est l'équation de stabilité.

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers simples.

61. *Cas où les n pendules sont identiques.* — Les a_i sont égaux, ainsi que les ε_i ; donc aussi les u_i , à $k\pi$ près. On en déduit $nu_i = N\pi$, N désignant un entier quelconque. En prenant tous les α_i nuls, on a la formule

$$(116) \quad z = a \cot \frac{N\pi}{n},$$

où a désigne la valeur commune des a_i . Cette formule nous donne $n - 1$ valeurs de z , obtenues pour $N = 1, 2, \dots, n - 1$. On a ensuite

$$(117) \quad y_i = \frac{2 |\Gamma_i|}{\pi a} \sin \frac{N\pi}{n}.$$

L'équation (115) se décompose en n équations du second degré

$$\frac{r^2 + 2ra + a^2 + \varepsilon^2}{ra + a^2 + \varepsilon^2} = e^{\frac{2jk\pi}{n}}, \quad j = \sqrt{-1}; \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

L'équation ci-dessus s'écrit, en posant $\frac{k\pi}{n} = \alpha$, $\frac{N\pi}{n} = \beta$, donc $\varepsilon = -a \cot \beta$,

$$(118) \quad r^2 + ra(2 - e^{2j\alpha}) + \frac{a^2}{\sin^2 \beta} (1 - e^{2j\alpha}) = 0.$$

Pour $k = 0$, donc $\alpha = 0$, on a la racine étrangère $r = 0$ et la racine négative $r = -a$. Pour les autres valeurs de k , on a

$$2 \frac{r}{a} = e^{2j\alpha} - 2 \pm \sqrt{\Delta},$$

avec

$$\Delta = (e^{2j\alpha} - 2)^2 + \frac{4}{\sin^2 \beta} (e^{2j\alpha} - 1) = 1 + 8 \sin^4 \alpha - 8 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + 2j \sin 2\alpha \left(\frac{2}{\sin^2 \beta} - 1 - 2 \sin^2 \alpha \right).$$

Posons $\sqrt{\Delta} = x + jy$, $x^2 = X$; on a

$$f(X) \equiv X^2 - X \left(1 + 8 \sin^4 \alpha - \frac{8 \sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} \right) - \sin^2 2\alpha \left(\frac{2}{\sin^2 \beta} - 1 - 2 \sin^2 \alpha \right)^2 = 0,$$

dont il faut prendre la racine positive.

On a ensuite

$$\frac{2r}{a} = e^{2j\alpha} - 2 \pm (x + jy).$$

La partie réelle de $\frac{2r}{a}$ est $-1 - 2 \sin^2 \alpha \pm x$. Pour qu'elle soit < 0 , il faut et il suffit que l'on ait $X < (1 + 2 \sin^2 \alpha)^2$, donc $f[1 + 2 \sin^2 \alpha]^2 > 0$; soit, en posant $\sin^2 \alpha = u$,

$$(1 + 2u)^4 - (1 + 2u)^2 \left(1 + 8u^2 - \frac{8u}{\sin^2 \beta} \right) - 4a(1 - u) \left(\frac{2}{\sin^2 \beta} - 1 - 2u \right)^2 > 0$$

ou, en divisant par $\frac{8u}{\sin^4 \beta}$,

$$3 \sin^2 \beta (1 + 2 \sin^2 \alpha) - 2 \cos^2 \alpha > 0.$$

Cette inégalité doit être vérifiée pour les $n - 1$ valeurs de α . Il faut et il suffit qu'elle le soit pour celle qui rend le premier membre minimum, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{n}$. La condition de stabilité s'écrit finalement

$$(119) \quad 3 \sin^2 \frac{N\pi}{n} \left(1 + 2 \sin^2 \frac{\pi}{n} \right) - 2 \cos^2 \frac{\pi}{n} > 0.$$

Le premier membre est minimum pour $N = 1$. Donc, pour que tous les points de synchronisation soient stables, il faut et il suffit que l'on ait, en posant $\sin^2 \frac{\pi}{n} = v$,

$$6v^2 + 5v - 2 > 0, \quad \text{soit } v > 0,295 \text{ environ} \quad \text{ou } \sin \frac{\pi}{n} > 0,543.$$

La plus grande valeur de n vérifiant cette inégalité est 5. Donc, *s'il y a au plus cinq pendules identiques, tous les points de synchronisation sont stables.*

Si $n > 5$, les points correspondant à $N = 1$ et $N = n - 1$ sont instables. Pour $N = 2$, l'inégalité (119) s'écrit

$$12v^2 + 6v - 1 > 0, \quad \text{soit } v > 0,132; \quad \sin \frac{\pi}{n} > 0,363.$$

La plus grande valeur de n satisfaisant à cette condition est 8. Donc, *s'il y a six, sept ou huit pendules, tous les points sont stables, sauf les deux qui correspondent à la fréquence la plus éloignée de la fréquence moyenne.*

On pourrait continuer pour $N = 2, 3$, etc. Contentons-nous de chercher s'il existe toujours au moins un point stable.

Si n est pair, le premier membre de (119) est maximum pour $N = \frac{n}{2}$ et vaut alors $8v + 1$; il est > 0 . Si n est impair, le maximum est obtenu pour $N = \frac{n-1}{2}$. Il vaut $\frac{3}{2}(1+v)(3-2v^2) - 2v^2$, en posant $v = \cos \frac{\pi}{n}$. On vérifie facilement qu'il est positif pour $0 < v < 1$. Donc, *la synchronisation sur la fréquence la plus voisine de la fréquence moyenne est toujours stable.*

62. *Cas où il y a deux pendules.* — L'équation (113) se réduit à $S_1 = 0$; d'où l'on tire

$$z = \frac{\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1}{a_1 + a_2},$$

puis

$$(120) \quad \omega^2 = \frac{\omega_1^2 a_2 + \omega_2^2 a_1}{a_1 + a_2}.$$

Puis, d'après (112),

$$\text{tang}(x_1 - x_2) = \frac{a_1 + a_2}{\alpha_2 - \alpha_1}.$$

Le pendule qui a la plus petite fréquence est en avance de phase sur l'autre pendule. Cette avance croît avec l'amortissement et quand la différence des fréquences diminue. Les mouvements sont en quadrature quand les périodes propres sont égales.

De (114), on déduit

$$(121) \quad y_1 = \frac{2(a_1 + a_2) |\Gamma_1|}{\pi a_1 \sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (a_1 + a_2)^2}}.$$

Cette formule et la formule analogue donnent les *amplitudes des deux pendules en régime synchronisé*. Elles sont *proportionnelles aux couples et aux inverses des décréments correspondants*.

63. Étudions la *stabilité*. L'équation (115) s'écrit, en divisant par r ,

$$r^3 + 2r^2(a_1 + a_2) + r(\delta_1 + \delta_2 + 3a_1 a_2) + a_1 \delta_2 + a_2 \delta_1 = 0, \quad \delta_i = a_i^2 + \varepsilon_i^2.$$

Les conditions de stabilité se réduisent à

$$\delta_2(2a_1 + a_2) + \delta_1(2a_2 + a_1) + 6a_1a_2(a_1 + a_2) > 0,$$

laquelle est vérifiée. Donc, *le régime synchronisé est toujours stable.*

Remarque. — Dans le cas particulier où les deux pendules sont identiques, on a $\varepsilon_i = 0$, $\delta_i = a^2$; l'équation caractéristique admet la racine double $-a$ et la racine simple $-2a$. L'un des décrets de la synchronisation est égal à celui de l'amortissement de chaque pendule; l'autre est double. Ceci donne une indication sur la rapidité avec laquelle s'établit le régime synchronisé quand on part de conditions initiales quelconques. Cette rapidité est du même ordre que celle de l'amortissement des oscillations libres. Si les conditions initiales sont très éloignées de celles qui correspondent au régime synchronisé, *la durée du régime transitoire peut donc être très longue, d'autant plus longue que l'amortissement des oscillations libres est plus lent.*

64. Cas où il y a trois pendules. — L'équation (113) devient, en supposant $\Sigma \alpha_i = 0$,

$$(122) \quad z^2(a_1 + a_2 + a_3) + z(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3) + (a_1 \alpha_2 \alpha_3 + a_2 \alpha_3 \alpha_1 + a_3 \alpha_1 \alpha_2 - a_1 a_2 a_3) = 0.$$

En écrivant la condition de réalité des racines, remplaçant α_3 par $-(\alpha_1 + \alpha_2)$ et posant $a_1 + a_2 + a_3 = a$, on obtient

$$\alpha_1^2 [(a_1 - a_3)^2 + 4aa_2] + 2\alpha_1\alpha_2 [(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) + 2a(a - 2a_3)] \\ + \alpha_2^2 [(a_2 - a_3)^2 + 4aa_1] + 4aa_1a_2a_3 > 0.$$

Le trinôme constitué par les termes en α_1, α_2 a pour discriminant $-36aa_1a_2a_3 < 0$. Donc, ce trinôme est identiquement positif; l'inégalité est toujours vérifiée. Donc, *les deux points de synchronisation existent toujours.*

L'équation de stabilité (115) s'écrit, après suppression de la racine nulle,

$$r^3 + c_1 r^2 + c_2 r + c_3 = 0$$

avec

$$c_1 = 2s_1, \quad c_2 = \sigma_1 + 4s_2, \quad c_3 = 2\Sigma[\delta_1(a_2 + a_3)] + 7s_3,$$

$$c_4 = \sigma_2 + 3(\Sigma a_1 a_2 \delta_3), \quad c_5 = \Sigma a_1 \delta_2 \delta_3$$

et

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2, \quad s_3 = a_1 a_2 a_3,$$

$$\sigma_1 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \quad \sigma_2 = \delta_2 \delta_3 + \delta_3 \delta_1 + \delta_1 \delta_2;$$

les sommes Σ indiquant qu'on doit permuter circulairement les indices et additionner.

Tous ces coefficients sont positifs. *L'unique condition de stabilité s'écrit*

$$(123) \quad (c_3 - c_1 c_2)(c_2 c_3 - c_3 c_4) - (c_3 - c_1 c_4)^2 > 0.$$

Elle permet, avec des données numériques, de reconnaître si l'une ou l'autre des racines de l'équation (122) correspond à un régime stable. Mais, une discussion générale semble inabordable. Nous nous contenterons de la faire dans le cas où les trois pendules ont le même amortissement.

65. Les a_i ont la même valeur, que nous appellerons a . L'équation (122) devient

$$(124) \quad 3z^2 = a^2 + \beta, \quad \Sigma \alpha_i^2 = 2\beta.$$

L'hypothèse $\Sigma \alpha_i = 0$ entraîne $\Sigma \alpha_2 \alpha_3 = -\beta$, $\Sigma \alpha_2^2 \alpha_3^2 = \beta^2$. Les α_i^2 sont racines de l'équation $\gamma^2 = X(X - \beta)^2$, en posant $\gamma = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$. Ces racines ne sont toutes trois réelles que si $\gamma^2 < \frac{4}{27} \beta^3$.

Si l'on pose $r + a = \rho$, l'équation (115) s'écrit

$$(\rho^2 + \varepsilon_1^2)(\rho^2 + \varepsilon_2^2)(\rho^2 + \varepsilon_3^2) = (\rho a + \varepsilon_1^2)(\rho a + \varepsilon_2^2)(\rho a + \varepsilon_3^2).$$

Elle admet visiblement la racine $\rho = 0$, à laquelle correspond $r = -a < 0$. Les autres racines sont données par l'équation du quatrième degré

$$r^4 + c_1 r^3 + c_2 r^2 + c_3 r + c_4 = 0,$$

avec

$$c_1 = 5a, \quad c_2 = 11a^2 + 3\beta, \quad c_3 = 3a(4a^2 + 3\beta), \\ 3c_4 = 16a^4 + 20a^2\beta + 4\beta^2 + 18\gamma z.$$

Les conditions de stabilité sont

$$c_4 > 0, \quad c_4 c_1^2 < c_3(c_1 c_2 - c_3),$$

soit

$$(125) \quad \gamma z > -\frac{2}{9}(a^2 + \beta)(4a^2 + \beta) = -F(a),$$

$$(126) \quad \gamma z < \frac{1148a^4 + 877a^2\beta + 62\beta^2}{450} = G(a).$$

Appelons z' la racine qui a le signe de γ et z'' l'autre racine. La première vérifie toujours (125); la deuxième vérifie toujours (126).

Pour que z'' convienne, il faut et il suffit que l'on ait

$$(127) \quad \gamma^2 < \frac{3F^2(a)}{a^2 + \beta} = \frac{4}{27}(a^2 + \beta)(4a^2 + \beta)^2.$$

Le second membre étant $> \frac{4}{27} \beta^3$, cette inégalité est toujours vérifiée. Donc, la racine z'' est toujours stable.

Pour que z' convienne, il faut et il suffit que l'on ait

$$(128) \quad \gamma^2 < \frac{3G^2(a)}{a^2 + \beta} = H(a).$$

On vérifie facilement que la fonction $H(a)$ est croissante. Son minimum $H(0) = \frac{62^2}{67500} (0,2385)^2 \beta^3 < \frac{4}{27} \beta^3$. Dès lors, si $\gamma < 0,2385 \beta \sqrt{\beta}$, les deux racines sont stables; si $\gamma > 0,2385 \beta \sqrt{\beta}$, elles ne sont toutes deux stables que si a dépasse la racine de l'équation $\gamma^2 = H(a)$.

66. Cas de deux pendules dont le rapport des fréquences est voisin d'un nombre entier. — Supposons $m_1 = 1, m_2 = m > 1$. Le couple Γ_1 existe pour

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < m\varphi + x_2 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

soit

$$-\frac{\pi}{2m} - \frac{x_2}{m} + \frac{2k\pi}{m} < \varphi < \frac{\pi}{2m} - \frac{x_2}{m} + \frac{2k\pi}{m}; \quad (k = 0, 1, \dots, m-1).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Gamma_1 \cos \varphi_1 d\varphi &= \sum_{k=1}^{m-1} \Gamma_1 \left[\sin \left(\frac{\pi}{2m} - \frac{x_2}{m} + x_1 + 2k \frac{\pi}{m} \right) - \sin \left(-\frac{\pi}{2m} - \frac{x_2}{m} + x_1 + 2k \frac{\pi}{m} \right) \right] \\ &= 2\Gamma_1 \sin \frac{\pi}{2m} \sum_{k=0}^{m-1} \cos \left(x_1 - \frac{x_2}{m} + 2k \frac{\pi}{m} \right) = 0. \end{aligned}$$

De même, $\int_0^{2\pi} \Gamma_1 \sin \varphi_1 d\varphi = 0$. Donc, $X_1 = \pi \varepsilon_1 \gamma_1, Y_1 = -\pi a_1 \gamma_1$. En annulant Y_1 , on obtient $\gamma_1 = 0$; donc, la synchronisation est impossible. Ceci s'explique par le fait que le pendule (P_1) reçoit, au cours d'une période, m impulsions dont l'effet total est nul.

CHAPITRE VII.

ENTRETIEN D'UN PENDULE PAR LE SECTEUR (1).

67. Variables canoniques. — Le pendule porte, à son extrémité, un noyau de fer doux, s'engageant dans une bobine alimentée par le secteur et dont le circuit comprend un condensateur. Appelons θ l'élongation du pendule, évaluée en radians; $L(\theta)$ l'inductance de la bobine, C la capacité du condensateur, ρ la résistance du circuit, $U \sin \omega t$ la tension, i l'intensité du courant, $q = \int i dt$; ω_1 la pulsation propre du pendule, πa_1 son décrement logarithmique, I son moment d'inertie. Nous avons les équations différentielles

$$q''L(\theta) + q'\theta'L'(\theta) + \rho q' + \frac{q}{C} = U \sin \omega t, \quad \theta'' + a_1 \omega_1 \theta' + \omega_1^2 \theta = \frac{L'(\theta)}{2I} q'^2.$$

(1) Voir à ce sujet une communication de M. Béthenod (C. R. Acad. Sc., t. 207, 1938, p. 847).

Supposons le circuit en résonance pour $\theta = \theta_1$, de sorte que

$$(129) \quad \omega^2 CL(\theta_1) = 1.$$

Si le pendule est maintenu dans la position d'élongation θ_1 , l'intensité du courant est $\frac{U}{\rho} \sin \omega t$ et l'on a $q = -\frac{U}{\rho \omega} \cos \omega t$. Nous poserons, dans le cas général, $q = \frac{U}{\rho \omega} q_2$, de sorte que q_2 sera un *nombre sans dimensions*. Nous poserons ensuite $\theta = q_1$; q_1 et q_2 seront les *variables canoniques*.

Nos équations deviennent

$$(130) \quad q_1'' + \omega_1^2 q_1 = Q_1, \quad q_2'' + \omega^2 q_2 = Q_2,$$

avec ⁽¹⁾

$$(131) \quad \begin{cases} Q_1 = KL'(q_1)q_2'^2 - a_1 \omega_1 q_1', & k = \frac{U^2}{2\rho^2 \omega^2 L}, \\ Q_2 = \frac{\rho \omega}{L(q_1)} \sin \omega t - \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} q_1' q_2' - \frac{\rho}{L(q_1)} q_2' + q_2 \omega^2 \frac{L(\theta) - L(\theta_1)}{L(\theta)}. \end{cases}$$

68. Observons maintenant que les impulsions reçues par le pendule ont une fréquence double de celle du courant. Dès lors, appelons N un *nombre entier* voisin de $\frac{2\omega}{\omega_1}$, donc pratiquement très grand. Posons

$$(132) \quad \omega_1 = \frac{2\omega}{N} \sqrt{1 + \varepsilon_1}.$$

La première équation (130) devient

$$q_1'' + \frac{4\omega^2}{N^2} q_1 = Q_1 - 4\varepsilon_1 \frac{\omega^2}{N^2} q_1.$$

Faisons maintenant le changement de variables

$$(133) \quad \begin{cases} \frac{2\omega t}{N} = \varphi & q_1 = y_1 \cos \varphi_1, & \frac{dq_1}{d\varphi} = -y_1 \sin \varphi_1, & \varphi_1 = \varphi + x_1, \\ q_2 = y_2 \cos \varphi_2, & \frac{dq_2}{d\varphi} = -\frac{N}{2} y_2 \sin \varphi_2, & \varphi_2 = \frac{N}{2} \varphi + x_2 = \omega t + x_2. \end{cases}$$

En répétant le calcul du n° 3, on obtient les équations (11), avec

$$(134) \quad f_1 = \varepsilon_1 q_1 - \frac{N^2}{4\omega^2} Q_1, \quad f_2 = -\frac{F}{2\omega^2} Q_2.$$

On vérifie facilement que les fonctions $f_i \cos \varphi_i$ et $f_i \sin \varphi_i$ admettent la période 2π par rapport à φ .

(1) Nous supprimons le facteur λ . Mais il demeure bien entendu que notre théorie n'est applicable que si les Q_i sont assez petits.

69. *Fonctions* X_i, Y_i . — On a, par les formules (14),

$$\begin{aligned} 2X_1 &= \varepsilon_1 y_1 - \frac{N^2}{4\pi} k y_2^2 \int_0^{2\pi} L'(q_1) \sin^2 \varphi_2 \cos \varphi_1 d\varphi_1, \\ 2Y_1 &= -a_1 y_1 - \frac{N^2}{4\pi} k y_2^2 \int_0^{2\pi} L'(q_1) \sin^2 \varphi_2 \sin \varphi_1 d\varphi_1, \\ 2\pi X_2 &= -\frac{N\rho}{2\omega} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(q_1)} \sin \frac{N\varphi}{2} \cos \varphi_2 d\varphi_1 - \frac{N y_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{L(q_1) - L(\theta_1)}{L(q_1)} \cos^2 \varphi_2 d\varphi_1 \\ &\quad - \frac{N\rho}{2\omega} y_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \varphi_2 \cos \varphi_2}{L(q_1)} d\varphi_1 + y_1 y_2 \int_0^{2\pi} \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 d\varphi_1, \\ 2\pi Y_2 &= -\frac{N\rho}{2\omega} \int_0^{2\pi} \frac{1}{L(q_1)} \sin \frac{N\varphi}{2} \sin \varphi_2 d\varphi_1 - \frac{N y_2}{2} \int_0^{2\pi} \frac{L(q_1) - L(\theta)}{L(q_1)} \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 d\varphi_1 \\ &\quad - \frac{N\rho}{2\omega} y_2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \varphi_2}{L(q_1)} d\varphi_1 + y_1 y_2 \int_0^{2\pi} \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} \sin \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 d\varphi_1. \end{aligned}$$

On peut écrire $2\varphi_2 = N\varphi_1 + \xi$, en posant

$$(135) \quad \xi = 2x_2 - N x_1.$$

Dès lors, posons

$$(136) \quad \left\{ \begin{aligned} A_n &= \int_0^{2\pi} L'(q_1) \cos n \varphi_1 d\varphi_1, & B_n &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos n \varphi_1}{L(q_1)} d\varphi_1, \\ C_n &= \int_0^{2\pi} \frac{L'(q_1)}{L(q_1)} \cos n \varphi_1 d\varphi_1. \end{aligned} \right.$$

On vérifie facilement que l'on a

$$(137) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X_1 &= \varepsilon_1 y_1 + \frac{N^2}{16\pi} k y_2^2 [(A_{N+1} + A_{N-1}) \cos \xi - 2A_1], \\ 2Y_1 &= -a_1 y_1 + \frac{N^2}{16\pi} k y_2^2 (A_{N+1} - A_{N-1}) \sin \xi, \\ 2\pi X_2 &= \frac{N\rho}{4\omega} [B_0 \sin x_2 + B_N \sin(x_2 - \xi)] + \frac{N}{4} y_2 [(B_N \cos \xi + B_0) L(\theta_1) - 2\pi] \\ &\quad - \frac{N\rho}{4\omega} y_2 B_N \sin \xi + \frac{y_1 y_2}{4} (C_{N-1} - C_{N+1}) \cos \xi, \\ 2\pi Y_2 &= \frac{N\rho}{4\omega} [-B_0 \cos x_2 + B_N \cos(x_2 - \xi)] + \frac{N}{4} y_2 L(\theta_1) B_N \sin \xi \\ &\quad + \frac{N\rho}{4\omega} y_2 (B_N \cos \xi - B_0) + \frac{y_1 y_2}{4} (C_{N-1} - C_{N+1}) \sin \xi. \end{aligned} \right.$$

70. Il n'est évidemment pas possible de calculer les intégrales A_n, B_n, C_n si l'on ne connaît pas la fonction $L(\theta)$. Signalons cependant quelques propriétés évidentes.

Au facteur $\frac{1}{\pi}$ près, A_n est le coefficient de $\cos n\varphi$, dans le développement de $L'(y_1 \cos \varphi_1)$ en série de Fourier. On en conclut que si $L(\theta)$ est un polynome

de degré $\leq n$, A_n est nul. Donc, si $L(\theta)$ est un polynôme de degré $< N$, Y_1 se réduit à $-\pi a_1 y_1$ et l'équation $Y_1 = 0$ donne $y_1 = 0$; donc, la synchronisation est impossible ⁽¹⁾. C'est ce qui arrive par exemple si l'on suppose, comme l'a fait M. Béthenod ⁽²⁾, que $L(\theta)$ est linéaire.

Si la fonction $L(\theta)$ est paire et si n est pair, A_n est nul; donc, si N est impair, la synchronisation est encore impossible. Cela tient à ce que les impulsions pendant l'oscillation de retour neutralisent celles de l'aller.

71. Cas où la fonction $L(\theta)$ est analytique. — On a visiblement

$$A_n = \int_0^{2\pi} L'(q_1) e^{jn\varphi_1} d\varphi_1.$$

Dès lors, posons $e^{j\varphi_1} = z$; nous obtenons

$$(138) \quad A_n = -j \int_{(C)} L' \left(y_1 \frac{z^2 + 1}{2z} \right) z^{n-1} dz,$$

l'intégrale étant prise le long du cercle (C) de centre O et de rayon un . Cette intégrale peut se calculer par la méthode des résidus. On peut faire un calcul analogue pour B_n et C_n .

Si le pendule est très éloigné de la bobine, $L(\theta)$ a une valeur constante, finie et non nulle; $L'(\theta)$ est nul; on en conclut qu'aucune des fonctions analytiques L' , $\frac{1}{L}$ et $\frac{L'}{L}$ ne peut devenir infinie avec θ , donc ne peut admettre $z = 0$ pour pôle. Les seuls pôles intérieurs à (C) correspondent aux pôles ou zéros en θ . Soit R le maximum des modules de ces pôles. Supposons que R ne soit pas très voisin de un et prenons R' entre R et un . Au lieu d'intégrer le long de (C), on peut intégrer le long du cercle (C') de rayon R'. Si l'on appelle M une limite supérieure du module de L' sur (C'), l'intégrale A_n a un module $< 2\pi MR'^n$. Comme $R' < 1$, cette intégrale tend rapidement vers zéro, quand n augmente indéfiniment. Comme le nombre N est pratiquement très grand (50 si le pendule bat la seconde, 100 s'il bat la demi-seconde), on peut affirmer que les intégrales A_{N+1} , A_{N-1} sont très petites vis-à-vis de A_1 . Dès lors, dans la première formule (137), on peut réduire le crochet à $-2A_1$. En annulant X_1 et Y_1 , puis éliminant y_2 , on obtient l'équation

$$(139) \quad \sin \xi = \frac{2a_1}{\varepsilon_1} \frac{A_1}{A_{N+1} - A_{N-1}}.$$

(1) On s'en rend compte d'une manière plus concrète en remarquant que le deuxième terme de Y_1 est, à un facteur constant près, l'énergie fournie au balancier à chaque période. Cette énergie est nulle, si l'on suppose la synchronisation réalisée. On ne peut toutefois pas en conclure que l'entretien du mouvement est impossible; il l'est seulement en régime synchronisé.

(2) Même conclusion si l'on suppose, avec M. Béthenod, que le courant est la superposition de deux courants sinusoidaux de pulsations ω et $\omega - \omega_1$, à moins d'admettre que le rapport $\frac{2\omega}{\omega_1}$ n'est pas entier, auquel cas la période du mouvement devient plus grande ou bien n'existe plus.

La valeur absolue du second membre est très grande (1) et dépasse l'unité; cette équation ne peut donc pas être vérifiée. Nous devons donc supposer que l'un au moins des pôles de $L'(\theta)$, considéré comme fonction de z , a un module très largement inférieur à un . Or, soit $a = \alpha + i\beta$ un pôle de $L'(\theta)$ par rapport à θ . Les pôles correspondants, par rapport à z , sont les racines de l'équation

$$y(z^2 + 1) - 2az = 0.$$

Ces racines sont inverses. Pour que l'une d'elles ait un module légèrement inférieur à un , il faut et il suffit que leur demi-somme $\frac{a}{y}$ ait une partie imaginaire très petite. Donc, $\frac{\beta}{y}$ doit être petit et, d'autre part, $\frac{\alpha}{y}$ est < 1 ; de sorte que θ passe nécessairement par la valeur α au cours de l'oscillation. A ce moment, la distance de θ au pôle a est β . Si y n'est pas très grand, β est très petit et $L'(\theta)$ devient extrêmement grand. Comme ceci ne semble pas être réalisé physiquement, on voit qu'il faut que y soit très grand par rapport à la partie imaginaire du pôle de $L'(\theta)$ le plus rapproché de l'axe réel.

On en conclut que *la synchronisation* (2) *n'est réalisable qu'avec une grande amplitude*. Et c'est bien ce qui semble ressortir des expériences de M. Hirschi (3), qui a dû limiter l'amplitude des oscillations par des butées élastiques (4).

On pourrait essayer de reprendre la théorie en tenant compte de ces butées. Si le couple qu'elles exercent sur le balancier était assez petit pour pouvoir être considéré comme un de nos couples perturbateurs habituels, on calculerait l'accroissement correspondant de Y_1 par la formule (34). Mais, dans ce cas, la butée serait insuffisante pour limiter les amplitudes. Dès lors, il ne semble pas qu'on puisse aborder le problème par notre méthode. Il faudrait étendre celle-ci au cas où le couple principal change au cours de chaque oscillation, ce qui paraît difficile. Nous ne pousserons donc pas plus loin l'étude de cette question, qui semble extrêmement compliquée.

(1) A moins que $\frac{a_1}{\varepsilon_1}$ soit extrêmement petit, ce qui nécessiterait un amortissement beaucoup plus faible qu'il ne l'est en réalité.

(2) Nous disons synchronisation et non entretien du mouvement.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 53. Ces expériences ont été reprises ultérieurement par un autre élève de l'Institut de Chronométrie, M. George; les conclusions ont été analogues.

(4) Si ces butées n'existent pas, c'est la tige du pendule qui vient buter contre la bobine.

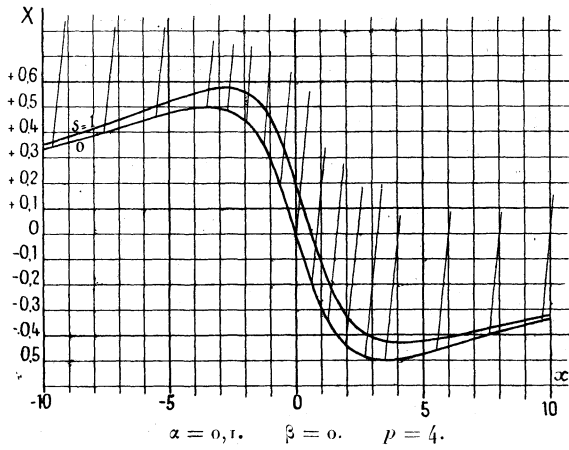


Fig. 1.

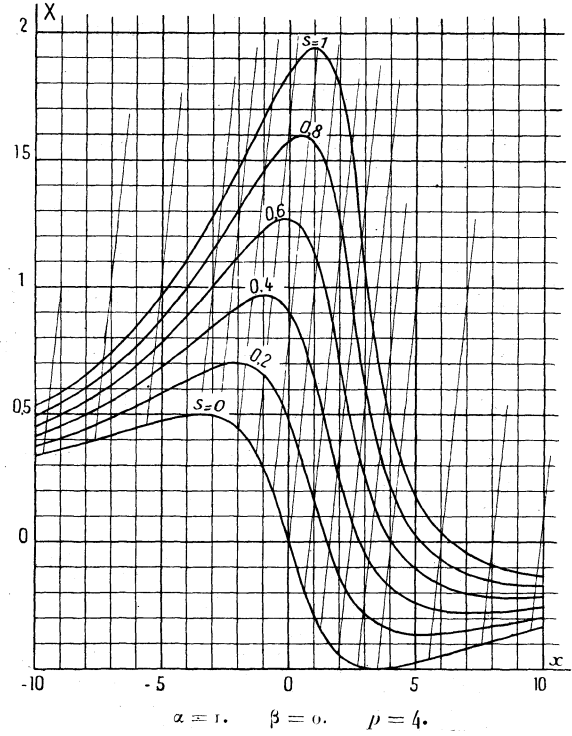


Fig. 2.

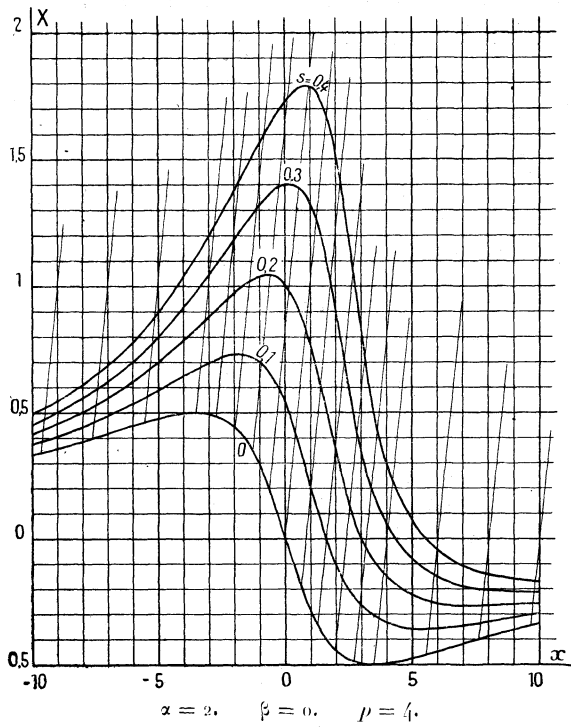


Fig. 3.

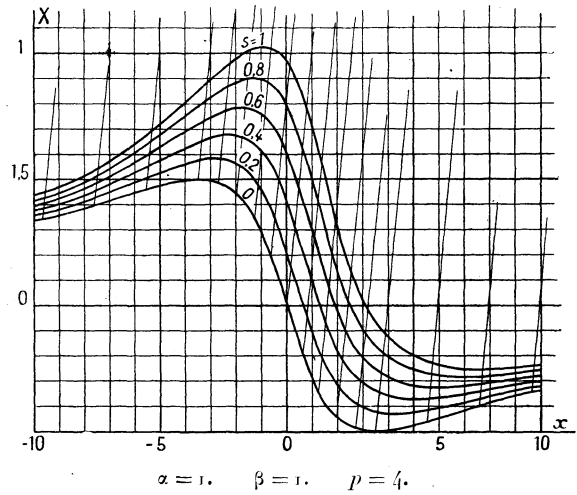


Fig. 4.

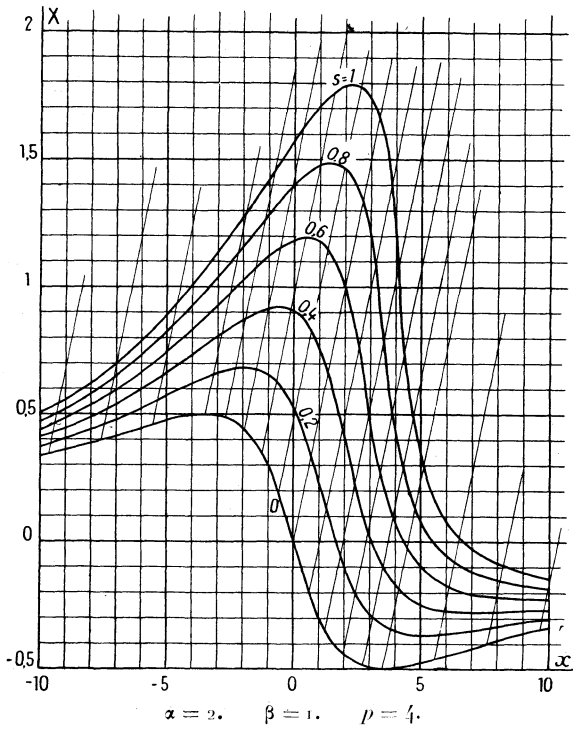


Fig. 5.

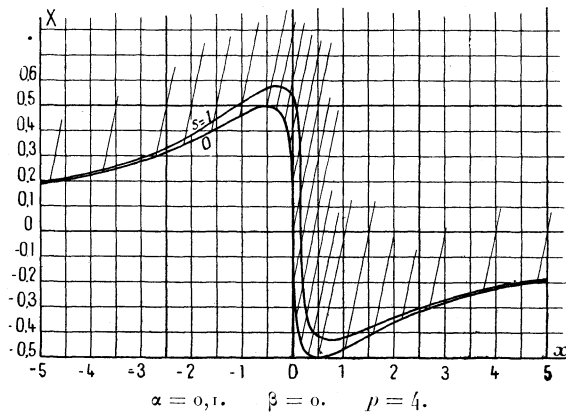


Fig. 6.

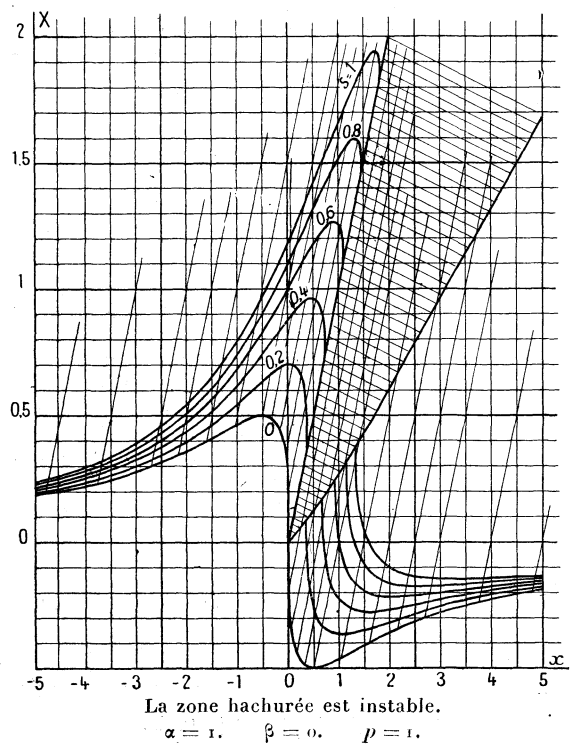


Fig. 7.

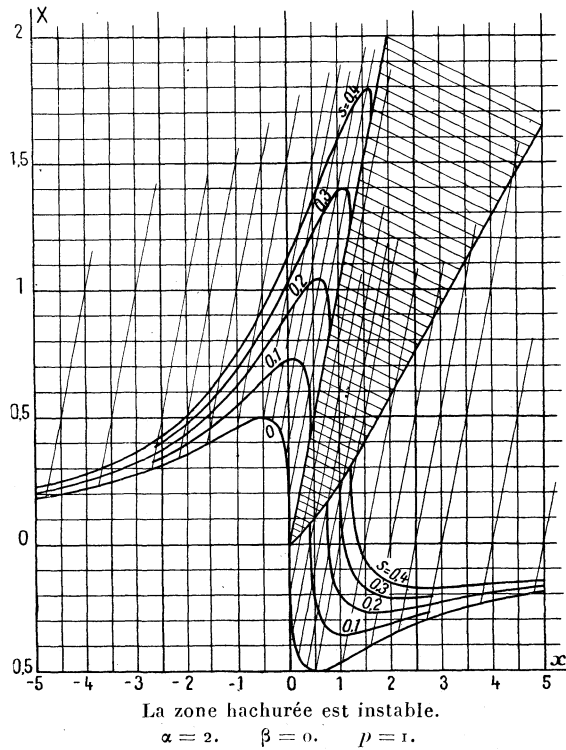
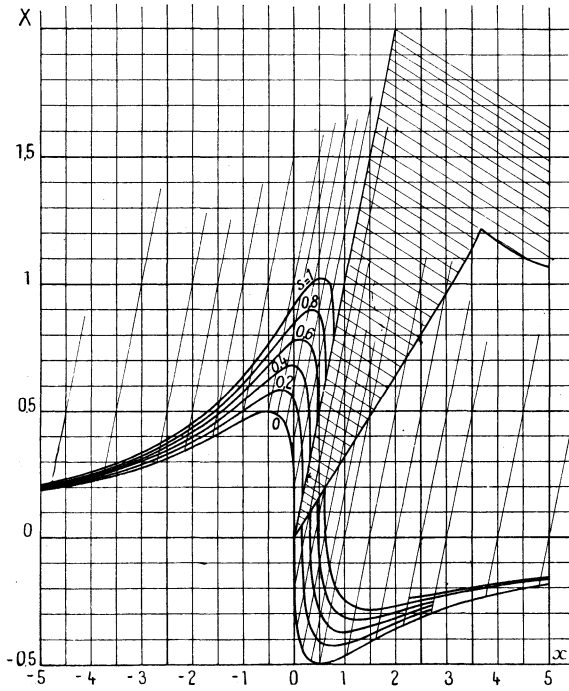
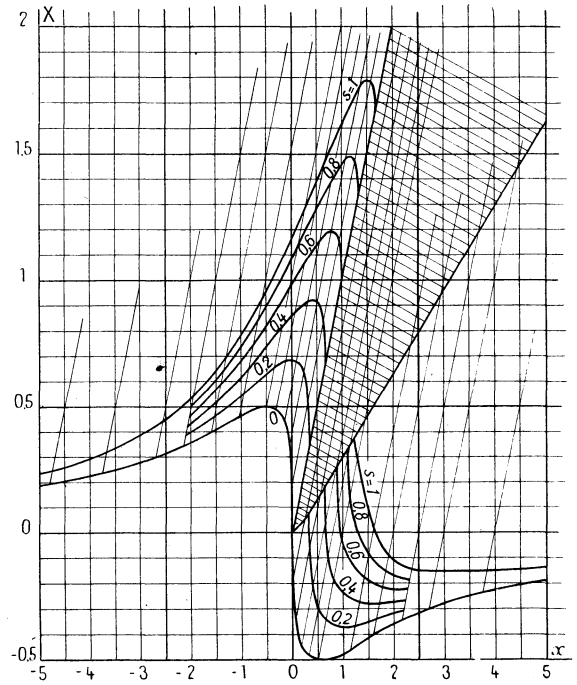


Fig. 8.



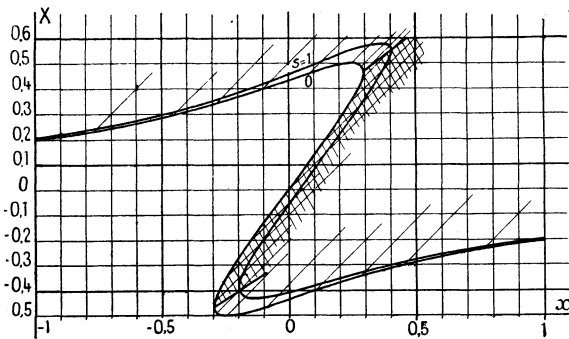
La région hachurée est instable.
 $\alpha = 1. \quad \beta = 1. \quad p = 1.$

Fig. 9.



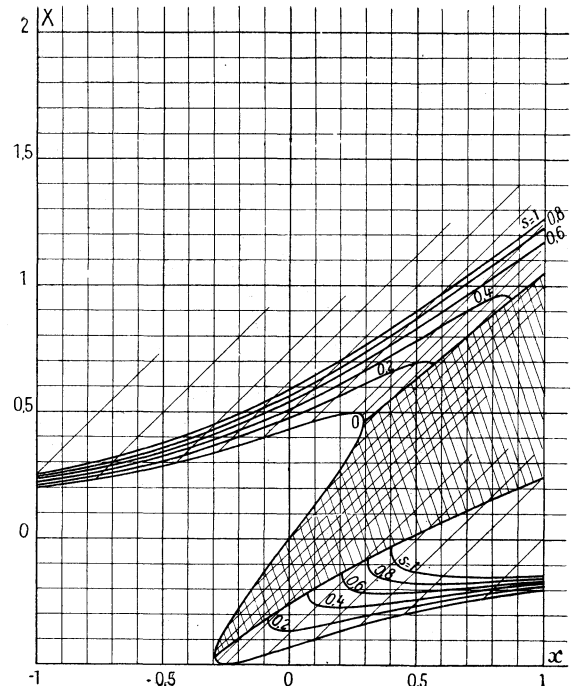
La région hachurée est instable.
 $\alpha = 2 \quad \beta = 1. \quad p = 1.$

Fig. 10.



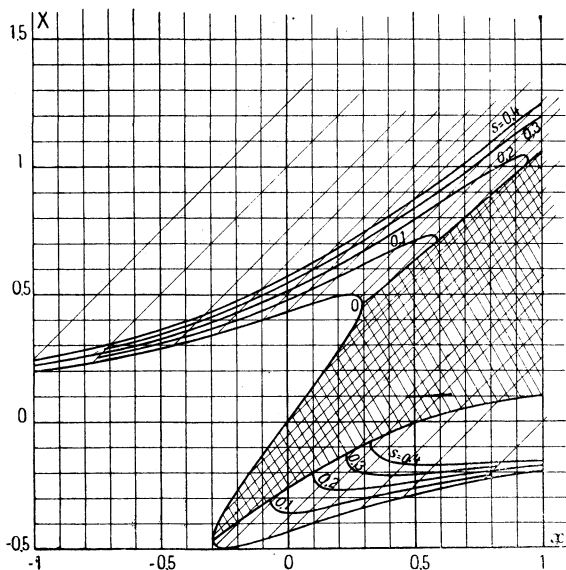
La zone hachurée est instable.
 $\alpha = 0,1. \quad \beta = 0. \quad p = \frac{1}{4}.$

Fig. 11.



La zone hachurée est instable.
 $\alpha = 1. \quad \beta = 0. \quad p = \frac{1}{4}.$

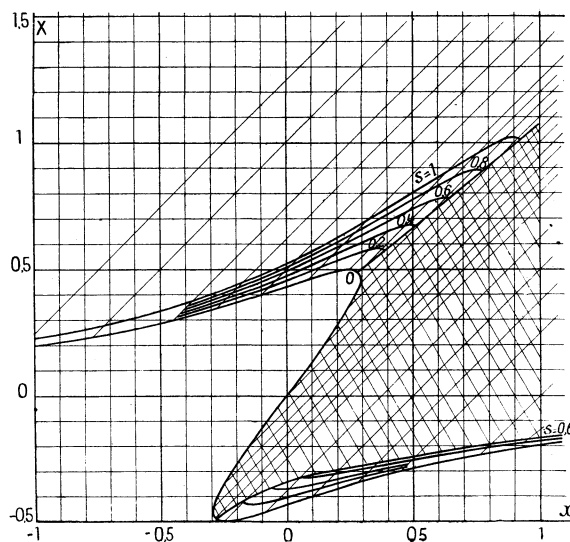
Fig. 12.



La région hachurée est instable.

$$\alpha = 2. \quad \beta = 0. \quad p = \frac{1}{4}.$$

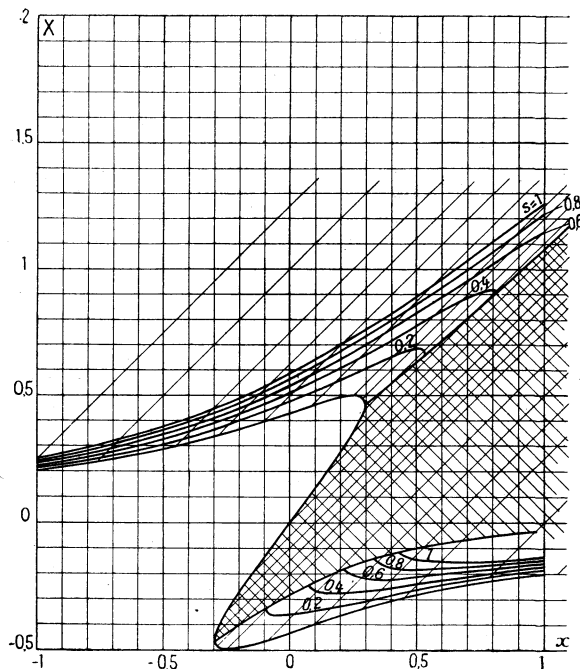
Fig. 13.



La région hachurée est instable.

$$\alpha = 1. \quad \beta = 1. \quad p_2 = \frac{1}{4}.$$

Fig. 14.



La région hachurée est instable.

$$\alpha = 2. \quad \beta = 1. \quad p = \frac{1}{4}.$$

Fig. 15.

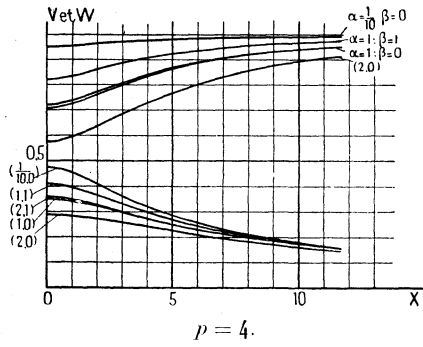


Fig. 16.

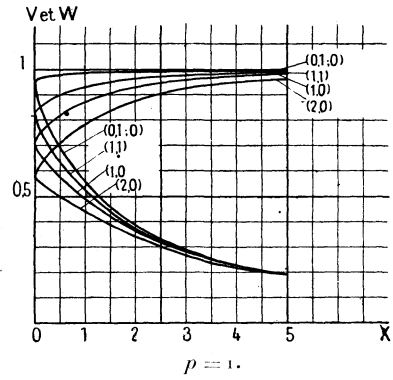
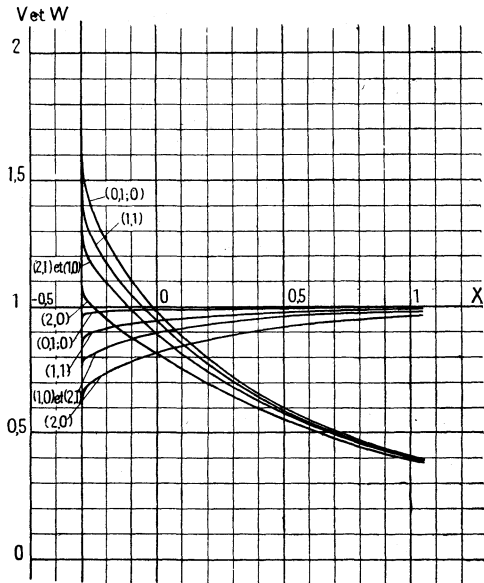


Fig. 17.



Les courbes (2,1) se confondent sensiblement avec les courbes (1,0).

$$p = \frac{1}{4}$$

Fig. 18.

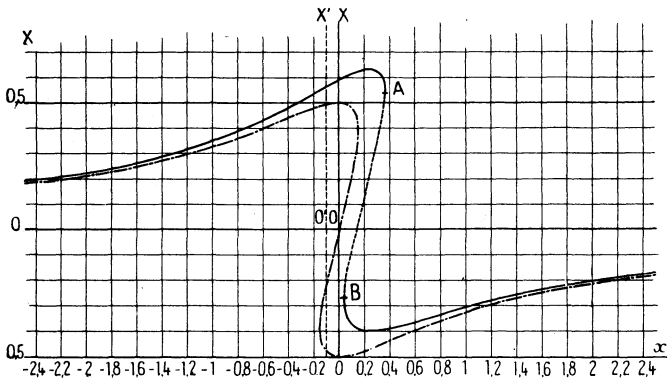


Fig. 19.