ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHI-TAI CHUANG

Sur les fonctions continues monotones

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 179-196

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__179_0>

SUR

LES FONCTIONS CONTINUES MONOTONES

Par M. CHI-TAI CHUANG.

INTRODUCTION.

Le théorème général de M. Borel sur les fonctions croissantes (1) a été mis sous une forme très précise par M. Nevanlinna comme il suit (2) :

Soit $u(r)$ une fonction positive et non décroissante pour $r > 0$. Soit $\varphi(t)$ une fonction positive et décroissante pour $t > 0$ telle que $\int_t^\infty \varphi(t)\,dt$ converge. Soit r_0 une valeur de r. Alors la longueur totale des intervalles pour lesquels

$$u\big(r + \varphi[u(r)]\big) \geqq u(r) + 1 \qquad (r > r_0), \tag{1}$$

ne dépasse pas la limite

$$\varphi(t_0) + \int_{t_0}^\infty \varphi(t)\,dt, \qquad \text{où} \quad t_0 = u(r_0).$$

Dans ses recherches sur les fonctions méromorphes d'ordre infini, M. Valiron a obtenu le résultat suivant (3) qui appartient à la théorie des fonctions-types créée par MM. Blumenthal (4) et Kraft (5).

---

(1) É. Borel, *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta Math.*, t. 20, 1897, p. 375-377).

(2) R. Nevanlinna, *Remarques sur les fonctions monotones* (*Bull. Sci. math.*, 2e série, 55, 1931, p. 142-143).

(3) G. Valiron, *Directions de Borel des fonctions méromorphes* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 89, 1938, p. 24-29).

(4) O. Blumenthal, *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini* (Collection Borel, 1910, Chap. II).

(5) A. Kraft, *Ueber ganze transcendante Functionen von unendlicher Ordnung* (*Inaug. Diss.*, Göttingen, 1903).

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre infini. Soit $\omega(x)$ une fonction décroissante telle que $\int^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx$ converge et que $\omega(x)\sqrt{x} > 1$. Soit τ un nombre positif. Alors il existe une fonction non décroissante $\rho(r)$ telle que la fonction $U(r) = r^{\rho(r)}$ possède les propriétés suivantes :

1° *A partir d'une valeur de r, on a*

$$U\big(r + \omega[U(r)]\big) < e^{\tau} U(r). \tag{2}$$

2° *$T(r, f)$ étant la fonction caractéristique de $f(z)$, on a*

$$\overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{T(r, f)}{U(r)} = 1.$$

Le présent Mémoire est une suite de ces travaux de M. Nevanlinna et de M. Valiron. Nous considérons les fonctions $f(x)$ continues monotones pour $x \geqq 0$. En employant les méthodes de M. Borel et de M. Blumenthal, présentées sous une forme nouvelle, nous établissons deux propriétés générales de ces fonctions. Notre contribution principale consiste dans la substitution des constantes 1 et τ, figurant dans les inégalités (1) et (2), par une fonction $\delta(x)$ à décroissance assez lente pour que l'intégrale $\int_0^{\infty} \delta(x)\, dx$ diverge.

PREMIÈRE PARTIE.

Première propriété générale des fonctions continues monotones.

I. — Théorèmes fondamentaux.

1. Théorème 1. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

a. $f(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geqq 0$; $f(x) \geqq 0$ pour $x \geqq 0$.

b. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $t \geqq 0$ et est telle que $\int_0^{\infty} \gamma(t)\, dt$ converge.

c. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et est telle que $\int_0^{\infty} \delta(x)\, dx$ diverge. Alors on a

$$f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) < \delta(x),$$

sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\int_0^{x} \delta(x)\, dx$ ne dépasse pas $\delta(0)\gamma(0) + \int_0^{\infty} \gamma(t)\, dt$.

2. Théorème 2. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

a. *$f(x)$ est continue et non croissante pour $x \geqq 0$; $0 < f(x) \leqq 1$ pour $x \geqq 0$.*

b. *$\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $0 < t \leqq 1$ et est telle que $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$ converge.*

c. *$\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et est telle que $\int_0^\infty \delta(x)\,dx$ diverge. Alors on a*

$$f\big(x+\gamma[f(x)]\big) - f(x) > -\delta(x),$$

sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\int_0^x \delta(x)\,dx$ ne dépasse pas $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$.

II. — Lemmes de base.

3. Lemme 1. — *Soit $X(x)$ une fonction définie pour $x \geqq 0$ satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *$X(x) > x$ pour $x \geqq 0$.*

2° *A chaque nombre positif A correspond un nombre positif l tel que pour $0 \leqq x \leqq A$ on ait $X(x) \geqq x + l$.*

Soit x_0 une valeur de x. Alors la suite

$$x_0, \qquad x_1 = X(x_0), \qquad x_2 = X(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_n = X(x_{n-1}), \qquad \ldots$$

est croissante et tend vers l'infini avec n.

D'après la condition 1°, la suite x_n est croissante. Supposons que la suite x_n soit bornée. Désignons par A_0 sa borne supérieure. Alors, si petit que soit le nombre positif ε, il existe un entier n tel que la valeur $x' = x_n$ vérifie les inégalités

$$0 \leqq x' < A_0, \qquad X(x') < A_0 < x' + \varepsilon,$$

résultat qui est incompatible avec la condition 2°. Donc la suite x_n est non bornée et tend vers l'infini avec n.

4. Lemme 2. — *Soit E un ensemble fermé de points de l'intervalle $x \geqq 0$. Soit $X(x)$ une fonction définie pour $x \geqq 0$ satisfaisant aux conditions 1° et 2° dans le lemme 1. Alors :*

A. *si E est non borné, il existe une suite infinie de points de E : $c_n (n \geqq 0)$ telle que :*

1° *$X(c_n) \leqq c_{n+1}$ pour $n \geqq 0$;*

2° *chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leqq x < X(c_n)$ $(n \geqq 0)$;*

B. *si* E *est borné, il existe une suite finie de points de* E : $c_n(0 \leqq n \leqq k)$ *telle que :*

1° $X(c_n) \leqq c_{n+1}$ *pour* $0 \leqq n \leqq k-1$;

2° *chaque point de* E *appartient à l'un des intervalles* $c_n \leqq x < X(c_n) (0 \leqq n \leqq k)$.

Examen du cas A. Soient E non borné et $X(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme 2. x étant un point de l'intervalle $x \geqq 0$, désignons par P_x l'ensemble des points communs à E et à l'intervalle $x' \geqq X(x)$, et par $\chi(x)$ la borne inférieure de P_x. Évidemment :

α. $\chi(x)$ est un point de E;

β. $\chi(x) \geqq X(x)$;

γ. il n'existe pas de point ξ qui, à la fois, appartient à E et vérifie les inégalités $X(x) \leqq \xi < \chi(x)$.

L'inégalité (β) montre que $\chi(x)$ satisfait aux conditions 1° et 2° dans le lemme 1. Désignons par c_0 la borne inférieure de E. c_0 est un point de E.

On peut donc appliquer le lemme 1 a $\chi(x)$ et c_0. Par conséquent, la suite

$$c_0, \quad c_1 = \chi(c_0), \quad c_2 = \chi(c_1), \quad \ldots, \quad c_n = \chi(c_{n-1}), \quad \ldots$$

est croissante et tend vers l'infini avec n. D'après (α), les points c_n appartiennent à E. D'après (β), on a $c_n = \chi(c_{n-1}) \geqq X(c_{n-1})$. Considérons un point ξ de E. Soit n l'entier tel que $c_n \leqq \xi < c_{n+1} = \chi(c_n)$. D'aprés ($\gamma$), on a $\xi < X(c_n)$. Donc ξ appartient à l'intervalle $c_n \leqq x < X(c_n)$.

Examen du cas B. Soient E borné et $X(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme 2. Désignons par M la borne supérieure de E, et par S la somme de E et de l'intervalle $x \geqq M+1$. S et $X(x)$ rentrent dans le cas précédent. Soit donc $c_n(n \geqq 0)$ la suite correspondant à S et $X(x)$. Alors $c_0 \leqq M$ et c_n croît indéfiniment. Soit k l'entier tel que $c_n \leqq M$ pour $0 \leqq n \leqq k$ et que $c_n > M$ pour $n \geqq k+1$. On voit immédiatement que la suite finie $c_n(0 \leqq n \leqq k)$ possède les propriétés exigées.

III. — Démonstration du théorème 1.

5. Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions a, b et c du théorème 1. Désignons par E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) \geqq \delta(x).$$

Distinguons trois cas suivant que E est non borné, ou borné, ou nul.

Premier cas. — E est non borné. Alors E et $X(x) = x + \gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas A du lemme 2. Donc il existe une suite infinie de points de E : $c_n(n \geqq 0)$ telle que :

1° $X(c_n) \leqq c_{n+1}$ pour $n \geqq 0$;

2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leqq x < X(c_n) (n \geqq 0)$.

Nous allons démontrer que

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\int_{c_n}^{X(c_n)}\delta(x)\,dx \leq \delta(0)\gamma(0)+\int_0^{\infty}\gamma(t)\,dt.$$

Posons $d_n = X(c_n)$. $\delta(x)$ et $\gamma(t)$ étant non croissantes, on a

$$(2)\qquad \int_{c_n}^{d_n}\delta(x)\,dx \leq \delta(c_n)(d_n - c_n) = \delta(c_n)\gamma[f(c_n)],$$

$$(3)\qquad \int_{f(c_{n-1})}^{f(d_{n-1})}\gamma(t)\,dt \geq \gamma[f(d_{n-1})][f(d_{n-1}) - f(c_{n-1})].$$

Mais d'après 1° $c_{n-1} < c_n$, et c_{n-1} est un point de E; on a

$$(4)\qquad \delta(c_n) \leq \delta(c_{n-1}) \leq f(d_{n-1}) - f(c_{n-1}).$$

D'autre part, d'après 1° $d_{n-1} \leq c_n$, et $\gamma[f(x)]$ est non croissante; on a

$$(5)\qquad \gamma[f(d_{n-1})] \geq \gamma[f(c_n)].$$

Enfin, en tenant compte du fait que $\delta(x)$ et $\gamma(t)$ sont positives, on tire de (2), (3), (4), (5), les inégalités suivantes

$$\int_{c_0}^{d_0}\delta(x)\,dx \leq \delta(c_0)\gamma[f(c_0)], \qquad \int_{c_n}^{d_n}\delta(x)\,dx \leq \int_{f(c_{n-1})}^{f(d_{n-1})}\gamma(t)\,dt.$$

D'où on trouve que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{c_n}^{d_n}\delta(x)\,dx \leq \delta(c_0)\gamma[f(c_0)] + \int_{f(c_0)}^{\infty}\gamma(t)\,dt,$$

ce qui donne l'inégalité (1).

Deuxième cas. — E est borné. Alors E et $X(x) = x + \gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas B du lemme 2. Donc il existe une suite finie de points de E : $c_n(0 \leq n \leq k)$ telle que :

1° $X(c_n) \leq c_{n+1}$ pour $0 \leq n \leq k-1$;
2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leq x < X(c_n)(0 \leq n \leq k)$.

Comme dans le cas précédent, on démontre que

$$\sum_{n=0}^{k}\int_{c_n}^{X(c_n)}\delta(x)\,dx \leq \delta(0)\gamma(0) + \int_0^{\infty}\gamma(t)\,dt.$$

Troisième cas. — E est nul. Alors on a

$$f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) < \delta(x) \qquad \text{pour} \quad x \geq 0.$$

IV. — Démonstration du théorème 2.

6. Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions a, b et c du théorème 2. Désignons par E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles

$$f\big(x+\gamma[f(x)]\big)-f(x)\leqq-\delta(x).$$

Distinguons trois cas suivant que E est non borné, ou borné, ou nul.

Premier cas. — E est non borné. Alors E et $X(x)=x+\gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas A du lemme 2. Donc il existe une suite infinie de points de E: $c_n (n\geqq 0)$ telle que :

1° $X(c_n)\leqq c_{n+1}$ pour $n\geqq 0$;
2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n\leqq x < X(c_n)\,(n\geqq 0)$.

Nous allons démontrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{c_n}^{X(c_n)}\delta(x)\,dx\leqq\int_0^1\gamma(t)\,dt. \tag{6}$$

Posons $d_n=X(c_n)$. $\delta(x)$ et $\gamma(t)$ étant non croissantes, on a

$$\int_{c_n}^{d_n}\delta(x)\,dx\leqq\delta(c_n)(d_n-c_n)=\delta(c_n)\gamma[f(c_n)], \tag{7}$$

$$\int_{f(d_n)}^{f(c_n)}\gamma(t)\,dt\geqq\gamma[f(c_n)][f(c_n)-f(d_n)]. \tag{8}$$

Mais c_n est un point de E; on a

$$\delta(c_n)\leqq f(c_n)-f(d_n). \tag{9}$$

En tenant compte du fait que $\gamma(t)$ est positive, on tire de (7), (8), (9), l'inégalité suivante

$$\int_{c_n}^{d_n}\delta(x)\,dx\leqq\int_{f(d_n)}^{f(c_n)}\gamma(t)\,dt.$$

D'où, moyennant 1° et la non-croissance de $f(x)$, on trouve que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{c_n}^{d_n}\delta(x)\,dx\leqq\int_0^{f(c_0)}\gamma(t)\,dt,$$

ce qui donne l'inégalité (6).

Deuxième cas. — E est borné. Alors E et $X(x) = x + \gamma[f(x)]$ rentrent dans le cas B du lemme 2. Donc il existe une suite finie de points de E : $c_n (0 \leqq n \leqq k)$ telle que :

1° $X(c_n) \leqq c_{n+1}$ pour $0 \leqq n \leqq k-1$;
2° chaque point de E appartient à l'un des intervalles $c_n \leqq x < X(c_n) (0 \leqq n \leqq k)$.

Comme dans le cas précédent, on démontre que

$$\sum_{n=0}^{k} \int_{c_n}^{X(c_n)} \delta(x)\, dx < \int_0^1 \gamma(t)\, dt.$$

Troisième cas. — E est nul. Alors on a

$$f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) > -\delta(x) \qquad \text{pour} \quad x \geqq 0.$$

V. — Une conséquence du théorème 1.

7. Considérons une fonction $f(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $f(x)$ est continue pour $x \geqq 0$;
2° Sur chaque segment situé dans l'intervalle $x \geqq 0$, $f(x)$ est à variation bornée.

Désignons par $V(x_1, x_2; f)$ la variation totale de $f(x)$ sur le segment $x_1 \leqq x \leqq x_2 (0 \leqq x_1 < x_2)$ et posons

$$W(x; f) = V(0, x; f) \qquad \text{pour} \quad x > 0, \qquad W(0; f) = 0.$$

On peut démontrer que (¹) :

$W(x; f)$ *est continue et non décroissante pour* $x \geqq 0$; $W(x; f) \geqq 0$ *pour* $x \geqq 0$;
$V(x_1, x_2; f) = W(x_2; f) - W(x_1; f)$ *pour* $0 \leqq x_1 < x_2$.

Donc le théorème 1 fournit cette conséquence :

Théorème 3. — *Soient* $f(x)$, $\gamma(t)$ *et* $\delta(x)$ *trois fonctions satisfaisant aux conditions suivantes :*

$f(x)$ *satisfait aux conditions* 1° *et* 2°;
$\gamma(t)$ *et* $\delta(x)$ *satisfont aux conditions* (b) *et* (c) *dans le théorème* 1. *Alors on a*

$$V\big(x, x + \gamma[W(x; f)]; f\big) < \delta(x),$$

sauf au plus dans une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\int_0^x \delta(x)\, dx$ *ne dépasse pas* $\delta(0)\gamma(0) + \int_0^\infty \gamma(t)\, dt$.

(¹) *Voir* É. Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, t. I, 2ᵉ édit., Chap. I.

DEUXIÈME PARTIE.

Deuxième propriété générale des fonctions continues monotones.

I. — Définitions.

1. *Définition* 1. — Soient $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

α. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $t \geqq 0$ et est telle que $\int_0^\infty \gamma(t)\,dt$ converge.

β. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et est telle que $\int_0^\infty \delta(x)\,dx$ diverge.

Une fonction $f(x)$ est, par définition, une fonction-type par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$, si $f(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

1° $f(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geqq 0$ et tend vers l'infini avec x;
2° $f(x) \geqq 0$ pour $x \geqq 0$;
3° $f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) < \delta(x)$ pour $x \geqq 0$.

2. *Définition* 2. — Soient $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes :

α. $\gamma(t)$ est positive, continue et non croissante pour $0 < t \leqq 1$ et est telle que $\int_0^1 \gamma(t)\,dt$ converge.

β. $\delta(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et est telle que $\int_0^\infty \delta(x)\,dx$ diverge.

Une fonction $f(x)$ est par définition une fonction-type par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$, si $f(x)$ satisfait aux conditions suivantes :

1° $f(x)$ est continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.
2° $0 < f(x) \leqq 1$ pour $x \geqq 0$.
3° $f\big(x + \gamma[f(x)]\big) - f(x) > -\delta(x)$ pour $x \geqq 0$.

3. *Définition* 3. — Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x \geqq 0$. Une fonction $g(x)$ définie pour $x \geqq 0$ est par définition supérieurement adjointe à $f(x)$, si $f(x) \leqq g(x)$ à partir d'une valeur de x et si $f(x) = g(x)$ pour une suite de

valeurs de x tendant vers l'infini. Une fonction $g(x)$ définie pour $x \geqq 0$ est par définition inférieurement adjointe à $f(x)$, si $f(x) \geqq g(x)$ à partir d'une valeur de x et si $f(x) = g(x)$ pour une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

II. — Théorèmes fondamentaux.

4. THÉORÈME 1. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

$f(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geqq 0$ et tend vers l'infini avec x;
$\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifient les conditions (α) et (β) dans la définition 1.

Alors il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont fonctions-types par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;*
2° *$f_1(x)$ et $f_1(x)$ sont respectivement supérieurement et inférieurement adjointes à $f(x)$.*

5. THÉORÈME 2. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

$f(x)$ est positive, continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$;
$\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifient les conditions (α) et (β) dans la définition 2.

Alors il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont des fonctions-types par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;*
2° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement supérieurement et inférieurement adjointes à $f(x)$.*

III. — Lemmes de base.

6. LEMME 1. — *Soit $u_n (n \geqq 1)$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro. Alors il existe une suite croissante d'entiers positifs $n_k (k \geqq 1)$ telle que la suite $U_k = u_{n_k}$ soit décroissante.*

n étant un entier positif, soit $N = N(n)$ le plus petit entier positif tel que

$$N > n, \quad u_N < u_n.$$

Alors la suite d'entiers positifs

$$n_1 = 1, \qquad n_2 = N(n_1), \qquad n_3 = N(n_2), \qquad \ldots, \qquad n_k = N(n_{k-1}), \qquad \ldots$$

possède les propriétés exigées.

7. Lemme 2. — *Soit $f(x)$ une fonction positive, continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et tendant vers zéro avec $\frac{1}{x}$. Alors il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés suivantes :*

1° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont positives, continues et non croissantes pour $x \geqq 0$ et tendent vers zéro avec $\frac{1}{x}$.*

2° *$f_1(x)$ admet une dérivée droite $f'_1(x) > -1$ pour $x \geqq 0$. $f_2(x)$ admet une dérivée droite $f'_2(x) > -1$ pour $x \geqq 0$;*

3° *$f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont respectivement supérieurement et inférieurement adjointes à $f(x)$;*

4° *$f_1(x) \leqq f(0)$ pour $x \geqq 0$. $f_2(x) \leqq f(0)$ pour $x \geqq 0$.*

Pour l'établir, nous distinguons deux cas :

Premier cas. — On a $f(0) < \frac{1}{2}$.

Second cas. — On a $f(0) \geqq \frac{1}{2}$.

Examen du premier cas.

Soit $y = f(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions du lemme 2 et telle que $f(0) < \frac{1}{2}$. Considérons sa courbe représentative C et la suite de droites parallèles

$$D_n, \qquad y = -\frac{1}{2}(x-n) \qquad (n \geqq 1).$$

La courbe C coupe la droite D_n en des points p dont les abscisses sont toutes comprises entre $n-1$ et n. Des points p, soit $p_n(a_n, b_n)$ celui dont l'abscisse est minimum et soit $q_n(c_n, d_n)$ celui dont l'abscisse est maximum. Alors évidemment la courbe C est au-dessous de la droite D_n pour $0 \leqq x < a_n$ et au-dessus de la droite D_n pour $x > c_n$.

Construction de la fonction $f_1(x)$. — Considérons la suite de points $p_n(a_n, b_n)\,(n \geqq 1)$. La suite b_n est positive, non croissante et tend vers zéro. Donc d'après le lemme 1, il existe une suite croissante d'entiers positifs $n_k (k \geqq 1)$ telle que la suite b_{n_k} soit décroissante.

Considérons la suite de droites D_{n_k} et la suite de points p_{n_k}. A chaque point p_{n_k}, associons le point p'_k de la droite $D_{n_{k+1}}$ dont l'ordonnée est égale à celle de p_{n_k}. Sur l'axe des y, marquons le point p'_0 dont l'ordonnée est égale à celle du point p_{n_1}.

Considérons la suite de points

$$(S_1) \qquad p'_0, \quad p_{n_1}, \quad p'_1, \quad p_{n_2}, \quad p'_2, \quad \ldots, \quad p_{n_k}, \quad p'_k, \quad \ldots.$$

Soit L_1 la ligne polygonale dont les sommets sont la suite de points (S_1). Soit $y = f_1(x)$ la fonction définie pour $x \geqq 0$ et représentée par la ligne L_1.

Construction de la fonction $f_2(x)$ — Considérons la suite de points

$$q_n(c_n, d_n) \qquad (n \geqq 1).$$

La suite d_n est positive, non croissante et tend vers zéro. Donc d'après le lemme 1, il existe une suite croissante d'entiers positifs m_k $(k \geqq 1)$ telle que la suite d_{m_k} soit décroissante.

Considérons la suite de droites D_{m_k} et la suite de points q_{m_k}. A chaque point q_{m_k}, associons le point q'_k de la droite D_{m_k} dont l'ordonnée est égale à celle du point $q_{m_{k+1}}$. Sur l'axe des y, marquons le point q'_0 dont l'ordonnée est égale à celle du point q_{m_1}.

Considérons la suite de points

$$(S_2) \qquad q'_0, \quad q_{m_1}, \quad q'_1, \quad q_{m_2}, \quad q'_2, \quad \ldots, \quad q_{m_k}, \quad q'_k, \quad \ldots.$$

Soit L_2 la ligne polygonale dont les sommets sont la suite de points (S_2). Soit $y = f_2(x)$ la fonction définie pour $x \geqq 0$ et représentée par la ligne L_2.

On voit aisément que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent des propriétés énoncées dans le lemme 2.

Examen du second cas.

Soit $f(x)$ une fonction satisfaisant aux conditions du lemme 2 et telle que $f(0) \geqq \frac{1}{2}$. N étant le premier entier positif tel que $f(N) < \frac{1}{2}$, considérons la fonction $g(x)$ définie pour $x \geqq 0$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} g(x) &= f(N) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq x < N, \\ g(x) &= f(x) \qquad \text{pour} \quad x \geqq N. \end{aligned}$$

La fonction $g(x)$ satisfait aussi aux conditions du lemme 2, mais on a $g(0) < \frac{1}{2}$. Le cas présent est alors ramené au cas précédent. Soient donc $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les fonctions correspondant à la fonction $g(x)$. Alors les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissent des propriétés exigées.

IV. — Démonstration du théorème 1.

8. Lemme 3. — *Soit $\gamma(t)$ une fonction positive, continue et non croissante pour $t \geqq 0$, telle que $\int_0^\infty \gamma(t)\,dt$ converge. Alors il existe une fonction $h(\xi)$ définie dans un intervalle fini $0 \leqq \xi < A$ vérifiant les conditions suivantes :*

1° *$h(\xi)$ est convexe et croissante pour $0 \leqq \xi < A$;*

2° $h(0)=0$ *et* $\lim\limits_{\xi \to A} h(\xi)=\infty$;

3° $0<\xi+\gamma[h(\xi)]<A$ *pour* $0 \leqq \xi < A$;

4° $h'(\xi)$ *étant la dérivée droite de* $h(\xi)$, *on a*

$$\gamma[h(\xi)]\,h'\big(\xi+\gamma[h(\xi)]\big) \leqq 1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \xi < A.$$

Ce lemme, sous une forme différente, a été donné par M. Valiron (*loc. cit.*). Pour l'établir, considérons le nombre positif

$$A=\gamma(0)+\sum_{m=0}^{\infty}\gamma(m),$$

et la suite croissante de nombres $a_n (n \geqq 0)$ définie de la manière suivante

$$a_0=0, \qquad a_1=\gamma(0),$$

$$a_n=\gamma(0)+\sum_{m=0}^{n-2}\gamma(m), \qquad n \geqq 2.$$

Évidemment a_n tend vers A.

Soit $\eta=h(\xi)$ la fonction définie dans l'intervalle $0 \leqq \xi < A$ et représentée par la ligne polygonale dont les sommets sont la suite de points

$$p_n, \qquad \xi_n=a_n, \qquad \eta_n=n \qquad (n \geqq 0).$$

Le côté $p_n p_{n+1}$ de cette ligne polygonale a pour pente $\dfrac{1}{(a_{n+1}-a_n)}$ qui ne décroît pas lorsque n croît, car on a

$$\frac{1}{a_1-a_0}=\frac{1}{\gamma(0)}, \qquad \frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{\gamma(n-1)} \qquad (n \geqq 1).$$

Il est clair que la fonction $h(\xi)$ vérifie les conditions 1° et 2°.

ξ étant une valeur de l'intervalle $0 \leqq \xi < A$, soit n l'entier tel que $a_n \leqq \xi < a_{n+1}$. Alors on a

$$\xi+\gamma[h(\xi)]<a_{n+1}+\gamma[h(a_n)]=a_{n+1}+\gamma(n)=a_{n+2}.$$

Par suite

$$h'\big(\xi+\gamma[h(\xi)]\big) \leqq \frac{1}{a_{n+2}-a_{n+1}}=\frac{1}{\gamma(n)}=\frac{1}{\gamma[h(a_n)]} \leqq \frac{1}{\gamma[h(\xi)]}.$$

Donc la fonction $h(\xi)$ vérifie les conditions 3° et 4°.

9. Considérons trois fonctions $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifiant les conditions du théorème 1. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés 1° et 2° énoncées dans le même théorème. Dans la démonstration suivante, nous supposerons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition $f(0) \geqq 0$. Cette condition ne restreint la généralité qu'en apparence.

Cela posé, considérons la fonction $\eta = h(\xi)(0 \leqq \xi < A)$, fournie par le lemme 3, correspondant à la fonction $\gamma(t)$. Soit $\xi = \lambda(\eta)(\eta \geqq 0)$ sa fonction inverse. m étant le plus grand des nombres $\delta(0)$ et 1, considérons la fonction

$$y = k(x) = \frac{1}{m}\int_0^x \delta(x)\,dx \qquad (x \geqq 0).$$

Soit $x = \mu(y)(y \geqq 0)$ sa fonction inverse.

Considérons la fonction

$$\varphi(y) = A - \lambda\{f[\mu(y)]\}$$

qui est positive, continue et non croissante pour $y \geqq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$. Soient $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$ les fonctions, fournies par le lemme 2, correspondant à la fonction $\varphi(y)$.

Alors les fonctions

$$f_1(x) = h\{A - \varphi_2[k(x)]\}, \qquad f_2(x) = h\{A - \varphi_1[k(x)]\}$$

jouissent des propriétés exigées.

Pour l'établir, nous nous bornons à démontrer que la fonction $f_1(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $f_1(x)$ est une fonction-type par rapport aux fonctions $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;
2° $f_1(x)$ est supérieurement adjointe à la fonction $f(x)$.

Démonstration de la propriété 1°.

La fonction $f_1(x)$ s'écrit

$$f_1(x) = h\{\Psi_2(x)\},$$

en posant

$$\Psi_2(x) = A - \varphi_2[k(x)],$$

$f_1(x)$ est définie pour $x \geqq 0$.

Car on a

$$0 < \varphi_2(y) \leqq \varphi(0) \leqq A$$

et donc

$$0 \leqq \Psi_2(x) < A.$$

$f_1(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geqq 0$ et tend vers l'infini avec x.

Nous omettons la démonstration.

$f_1(x) \geqq 0$ pour $x \geqq 0$.

C'est évident.

$f_1(x)$ vérifie l'inégalité

$$f_1\big(x + \gamma[f_1(x)]\big) - f_1(x) < \delta(x) \qquad \textit{pour} \quad x \geqq 0.$$

En effet, $f_1(x)$ admet une dérivée droite

$$f'_1(x) = h'\{\Psi_2(x)\}\Psi'_2(x),$$

où

$$\Psi'_2(x) < 1, \qquad \Psi'_2(x) < \delta(x),$$
$$\gamma[f_1(x)]h'\{\Psi_2(x) + \gamma[f_1(x)]\} \leqq 1.$$

Démontrons le fait suivant. Quelle que soit la valeur $a \geqq 0$, on a

$$(1) \qquad f'_1(x) < \frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]} \qquad \text{pour} \quad a \leqq x < a + \gamma[f_1(a)].$$

En effet, considérons deux valeurs x et a assujetties à la condition

$$a \geqq 0, \qquad a \leqq x < b = a + \gamma[f_1(a)].$$

Alors, d'une part, on a

$$\Psi_2(x) \leqq \Psi_2(b) < \Psi_2(a) + \gamma[f_1(a)],$$
$$h'\{\Psi_2(x)\} \leqq h'\{\Psi_2(a) + \gamma[f_1(a)]\} \leqq \frac{1}{\gamma[f_1(a)]};$$

d'autre part, on a

$$\Psi'_2(x) < \delta(x) \leqq \delta(a).$$

Donc

$$f'_1(x) < \frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]}.$$

L'inégalité (1) et la continuité de la fonction $f_1(x)$ entraînent l'inégalité

$$f_1\big(a + \gamma[f_1(a)]\big) - f_1(a) < \delta(a).$$

Démonstration de la propriété 2°.

La fonction $\varphi_2(y)$ étant inférieurement adjointe à la fonction

$$\varphi(y) = A - \lambda\{f[\mu(y)]\},$$

on a

$$(2) \qquad \varphi(y) \geqq \varphi_2(y),$$

à partir d'une valeur Y de y, et l'on a

$$(3) \qquad \varphi(y) = \varphi_2(y)$$

pour une suite de valeurs y_n de y tendant vers l'infini.

De l'inégalité (2), il s'ensuit que

$$h\{A - \varphi_2(y)\} \geqq f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y \geqq Y.$$

Posons $X = \mu(Y)$, alors on a

$$h\{A - \varphi_2[k(x)]\} \geqq f(x) \qquad \text{pour} \quad x \geqq X.$$

Donc $f(x) \leqq f_1(x)$ à partir d'une valeur de x.

De l'égalité (3), il s'ensuit que

$$h\{\Lambda - \varphi_2(y)\} = f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y = y_n.$$

Posons $x_n = \mu(y_n)$, alors on a

$$h\{\Lambda - \varphi_2[k(x)]\} = f(x) \qquad \text{pour} \quad x = x_n.$$

Donc $f(x) = f_1(x)$ pour une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

V. — Démonstration du théorème 2.

10. Considérons trois fonctions $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifiant les conditions du théorème 2. Nous nous proposons de démontrer qu'il existe deux fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ jouissant des propriétés 1° et 2° énoncées dans le même théorème. Dans la démonstration suivante, nous supposerons que la fonction $f(x)$ vérifie la condition $f(0) \leqq 1$. Cette condition ne restreint la généralité qu'en apparence.

Cela posé, considérons la fonction

$$\xi = \lambda(\eta) = \int_{\eta}^{1} \gamma(t)\,dt \qquad (0 < \eta \leqq 1).$$

Soit

$$\eta = h(\xi) \quad (0 \leqq \xi < \Lambda), \qquad \Lambda = \int_0^1 \gamma(t)\,dt$$

sa fonction inverse. Considérons la fonction

$$y = k(x) = \int_0^x \delta(x)\,dx \qquad (x \geqq 0).$$

Soit $x = \mu(y)$ $(y \geqq 0)$ sa fonction inverse.

Considérons la fonction

$$\varphi(y) = \Lambda - \lambda\{f[\mu(y)]\}$$

qui est positive, continue et non croissante pour $y \geqq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{y}$. Soient $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$ les fonctions, fournies par le lemme 2, correspondant à la fonction $\varphi(y)$.

Alors les fonctions

$$f_1(x) = h\{\Lambda - \varphi_1[k(x)]\}, \qquad f_2(x) = h\{\Lambda - \varphi_2[k(x)]\}$$

jouissent des propriétés exigées.

Pour l'établir, nous nous bornons à démontrer que la fonction $f_1(x)$ jouit des propriétés suivantes :

1° $f_1(x)$ est une fonction-type par rapport aux fonctions $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;

2° $f_1(x)$ est supérieurement adjointe à la fonction $f(x)$.

Démonstration de la propriété 1°.

La fonction $f_1(x)$ s'écrit
$$f_1(x) = h\{\Psi_1(x)\}$$
en posant
$$\Psi_1(x) = A - \varphi_1[k(x)].$$

$f_1(x)$ est définie pour $x \geqq 0$.

Car on a
$$0 < \varphi_1(y) \leqq \varphi(0) \leqq A$$
et donc
$$0 \leqq \Psi_1(x) < A.$$

$f_1(x)$ est continue et non croissante pour $x \geqq 0$ et tend vers zéro avec $\frac{1}{x}$.

Nous omettons la démonstration.

$0 < f_1(x) \leqq 1$ pour $x \geqq 0$.

C'est évident.

$f_1(x)$ vérifie l'inégalité
$$f_1\big(x + \gamma[f_1(x)]\big) - f_1(x) > -\delta(x) \qquad pour \quad x \geqq 0.$$

En effet, $f_1(x)$ admet une dérivée droite
$$f'_1(x) = h'\{\Psi_1(x)\}\Psi'_1(x),$$
où
$$h'\{\Psi_1(x)\} = \frac{1}{-\gamma[f_1(x)]},$$
$$\Psi'_1(x) < \delta(x).$$

Démontrons le fait suivant. Quelle que soit la valeur $a \geqq 0$, on a

$$(4) \qquad f'_1(x) > -\frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]} \qquad \text{pour} \quad x \geqq a.$$

En effet, considérons deux valeurs x et a assujetties à la condition
$$a \geqq 0, \qquad x \geqq a.$$
Alors, d'une part, on a
$$h'\{\Psi_1(x)\} = \frac{1}{-\gamma[f_1(x)]} \geqq \frac{1}{-\gamma[f_1(a)]};$$
d'autre part, on a
$$\Psi'_1(x) < \delta(x) \leqq \delta(a).$$
Donc
$$f'_1(x) > -\frac{\delta(a)}{\gamma[f_1(a)]}.$$

L'inégalité (4) et la continuité de la fonction $f_1(x)$ entrainent l'inégalité
$$f_1\big(a + \gamma[f_1(a)]\big) - f_1(a) > -\delta(a).$$

Démonstration de la propriété 2°.

La fonction $\varphi_1(y)$ étant supérieurement adjointe à la fonction

$$\varphi(y) = A - \lambda\{f[\mu(y)]\},$$

on a

$$(5) \qquad \varphi(y) \leqq \varphi_1(y)$$

à partir d'une valeur Y de y, et l'on a

$$(6) \qquad \varphi(y) = \varphi_1(y)$$

pour une suite de valeurs y_n de y tendant vers l'infini.

De l'inégalité (5), il s'ensuit que

$$h\{A - \varphi_1(y)\} \geqq f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y \geqq Y.$$

Posons $X = \mu(Y)$, alors on a

$$h\{A - \varphi_1[k(x)]\} \geqq f(x) \qquad \text{pour} \quad x \geqq X.$$

Donc $f(x) \leqq f_1(x)$ à partir d'une valeur de x.

De l'égalité (6), il s'ensuit que

$$h\{A - \varphi_1(y)\} = f[\mu(y)] \qquad \text{pour} \quad y = y_n.$$

Posons $x_n = \mu(y_n)$, alors on a

$$h\{A - \varphi_1[k(x)]\} = f(x) \qquad \text{pour} \quad x = x_n.$$

Donc $f(x) = f_1(x)$ pour une suite de valeurs de x tendant vers l'infini.

Une conséquence du théorème 1.

11. Considérons une fonction $f(x)$ continue pour $x \geqq 0$ et telle que $\overline{\lim}_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Soit $\bar{f}(x)$ la fonction définie pour $x \geqq 0$ de la manière suivante

$$\bar{f}(x) = \text{maximum de } f(x') \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq x' \leqq x.$$

On peut démontrer que [1] :

$\bar{f}(x)$ est continue et non décroissante pour $x \geqq 0$ et tend vers l'infini avec x;

Toute fonction $F(x)$ qui est non décroissante pour $x \geqq 0$ et supérieurement adjointe à $\bar{f}(x)$, est supérieurement adjointe à la fonction $f(x)$.

---

[1] *Voir* Blumenthal, *loc. cit.*

Donc le théorème 1 fournit cette conséquence :

THÉORÈME 3. — *Soient $f(x)$, $\gamma(t)$ et $\delta(x)$ trois fonctions vérifiant les conditions suivantes :*

$f(x)$ est continue pour $x \geqq 0$ et telle que $\overline{\lim\limits_{x \to \infty}} f(x) = \infty$;

$\gamma(t)$ et $\delta(x)$ vérifient les conditions α et β dans la définition 1.

Alors il existe une fonction $F(x)$ jouissant des propriétés suivantes :

1° *$F(x)$ est une fonction-type par rapport à $\gamma(t)$ et $\delta(x)$;*
2° *$F(x)$ est supérieurement adjointe à $f(x)$.*

Remarque. — Dans les deux parties qui précèdent, nous avons établi deux propriétés générales des fonctions $f(x)$ continues monotones pour $x \geqq 0$. Ces deux propriétés générales peuvent certainement s'étendre à la classe plus large des fonctions $f(x)$ monotones pour $x \geqq 0$. Nous reviendrons à cette question.