JULIEN KRAVTCHENKO

Sur l'existence des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz. Cas des arcs sans tangente

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 63 (1946), p. 161-184

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__161_0>

SUR

L'EXISTENCE DES SOLUTIONS

DU PROBLÈME

DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ

CAS DES ARCS SANS TANGENTE

PAR M. JULIEN KRAVTCHENKO.

I. — Introduction. Hypothèses de régularité. Énoncé du problème. Historique (¹).

1. Dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, considérons un arc de courbe $\widehat{BC}$, défini par son équation

$$x = x(y) \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} y_2 \leq y \leq y_1 < \infty, \\ y_1 - y_2 > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(¹) Cet article constitue le prolongement de ma *Thèse* [*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz : théorie des sillages et des proues* (*Journ. de Math.*, 9ᵉ série, 20, 1941, pp. 35-303)] et du Mémoire, intitulé : *Sur l'existence des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz*; cas des obstacles possédant des points anguleux [*Ann. Éc. Norm.*, LXII, (3), 1945, p. 233-268 (article dont un résumé a paru aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1942, p. 464-466)]. Dans la suite, les renvois à ces deux publications seront notées respectivement au moyen des initiales J. K. 1 et J. K. 2, suivies de la mention du paragraphe. Un résumé des conclusions du présent travail a été inséré aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1942, p. 870-872.

Voici quelques simplifications et rectifications du Mémoire J. K. 2, cité ci-dessus.

Envisageons l'espace fonctionnel $\mathcal{E}$ dont un élément x est constitué par l'ensemble (p. 255) d'une fonction $l(s)$, définie et höldérienne pour $0 \leq s \leq \pi$ et des $(n+2)$ paramètres a, b, s_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Sur le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ tel que $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \pi$, le système fonctionnel qui régit le problème posé se ramène à la forme $x = F(x)$, où $F(x)$ est une transformation opérant sur $\mathcal{E}$ et qui

Les coordonnées du point B (ou C) sont donc

$$x = x(y_2), \qquad y = y_2 \qquad [\text{ou } x = x(y_1),\ y = y_1];$$

à chaque valeur de l'intervalle $y_2 \leqq y \leqq y_1$, il ne correspond qu'une seule valeur de x; cela veut dire que l'intersection de toute droite d'équation $y = \text{const.}$ ($y_2 \leqq \text{const.} \leqq y_1$) avec $\widehat{BC}$ se réduit à un point unique ([2]). En outre, d'après (2), le diamètre apparent D_2, de $\widehat{BC}$ dans le sens Ox est borné tant inférieurement que supérieurement; nous appellerons $2D_1$ le diamètre apparent de $\widehat{BC}$ dans le sens Oy que nous supposerons borné supérieurement.

---

fait correspondre à $x \subset \mathcal{E}$ un élément $x' \subset \mathcal{E}$ (*cf.* §§ 9 et 17); on remplacera les $(n+1)$ premières équations (14) par

$$(1) \qquad l(s) = \int_0^s |F(s, s')| \left| \frac{\sin \frac{s' + s_j}{2}}{\sin \frac{s' - s_j}{2}} \right|^{2\alpha_j - 1} |e^{iH(e^{is'})}|\, ds' + \alpha,$$

$F(s, s')$ désignant une fonction régulière. Le second membre de (1) n'a de sens que si $2\alpha_j - 1 < 1$; d'après la définition de $2\alpha_j$, (p. 249), il suffit que $\Psi(l) \neq \pi$ pour $l_j \leqq l \leqq l_{j+1}$ si $\Psi(l)$ s'annule pour $l_{j-1} \leqq l \leqq l_j$. Cette hypothèse avait été omise.

Tout revient maintenant à définir le second membre de (1), quels que soient les s_j, avec une seule fonction $l(s)$. Si les s_j sont *distincts*, soit $\sigma_k (0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n < \pi)$, la suite des s_j rangés par ordre de grandeurs croissantes. On forme, ensuite, $\Psi[l(s)]$, s_0 [*cf.* K. (7')], $\Omega(Z)$ (7), les coefficients α_j et $H(Z)$ (p. 252) en appliquant à $l(s)$ et aux σ_k les définitions du haut de la page 252. Le second membre de (1) a alors un sens; il en sera de même des seconds membres des n dernières équations (14), dont la dernière, par exemple, s'écrit

$$(2) \qquad s_n = s_n + \frac{1}{\lambda}\left\{ l_n - l_{n-1} - [l(s)]_{s_{n-1}}^{s_n} \right\}.$$

Toutefois, (1) peut n'avoir pas de sens si p valeurs s_j ($p \geqq 2$) coïncident; le noyau de (1) se comporte alors comme $|s - s_j|^{\Sigma(1 - 2\alpha_j)}$ pour $s = s_j$, $\Sigma(1 - 2\alpha_j)$ pouvant être < -1.

Cette éventualité, à écarter si $\Psi(l)$ est décroissant (*cf.* § 19), m'avait échappé. Pour l'éliminer, utilisons le nombre γ (p. 251); (2) ne peut être satisfait pour $\Psi(l)$ satisfaisant au paragraphe 14 que si $|s_j - s_{j-1}| \geqq \gamma$, γ étant une constante. Posons alors

$$\beta_{j,m} = \left[\frac{2(s_j - s_m)}{\gamma} \right]^+ = \begin{cases} \dfrac{2|s_j - s_m|}{\gamma}, & \text{pour } |s_j - s_m| \leqq \dfrac{\gamma}{2} \\ 1 & \text{pour } |s_j - s_m| > \dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \qquad (j \neq m),$$

et remplaçons les exposants $(2\alpha_j - 1)$ de (1) par $(2\alpha_j - 1) \prod_m \beta_{j,m}$, $m \neq j$.

Ainsi modifiée, $F(x)$ est définie et complètement continue sur toute hypersphère $\|x\| \leqq \text{const}$, $\mathcal{E}$ (*cf.* §§ 17 et 24); l'équation $x = F(x)$ est équivalente à (14) dans le domaine où elle peut avoir une solution. Dès lors, les raisonnements des paragraphes 26 et 27 permettent de conclure.

Cette façon d'opérer évite l'emploi des fonctions $l(s)$ multiformes (p. 252) dont je n'ai pas explicité l'usage. Tout ce qui précède se transpose au cas symétrique (*cf.* § 24).

([2]) Toutefois, $\widehat{BC}$ pourrait contenir des portions rectilignes parallèles à Ox, étrangères aux extrémités B et C de l'arc $\widehat{BC}$. Nous ne nous arrêterons pas à cette extension du présent travail.

Nous supposerons, de plus, que la fonction $x(y)$ est continue pour $y_2 \leqq y \leqq y_1$ au sens de Lipschitz; cela veut dire qu'étant donné y et y', deux valeurs quelconques de l'intervalle considéré, on a

$$|x(y) - x(y')| \leqq \cot\varphi \, |y - y'|, \tag{3}$$

où φ est une constante telle que

$$0 < \varepsilon \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}, \tag{3'}$$

ε étant un nombre positif. Il suit de là, en particulier, que $\widehat{BC}$ est un arc rectifiable : nous appellerons L sa longueur.

2. L'arc $\widehat{BC}$, satisfaisant aux hypothèses précédentes, est placé à l'intérieur d'une bande indéfinie, à bords μ_1 et μ_2 rectilignes et parallèles à Ox, d'équations respectives :

$$\begin{cases} (\mu_1), & y = y_1 + d_1 \quad (-\infty \leqq x \leqq \infty), \\ (\mu_2), & y = y_2 - d_2 \quad (-\infty \leqq x \leqq \infty). \end{cases} \tag{4}$$

D'après cela, d_1 (ou d_2) est la distance du point C (ou B) à μ_1 (ou μ_2). Nous supposerons essentiellement que ces distances sont minorées par une longueur d fixe, non nulle :

$$\begin{cases} d_1 \geqq d, \\ d_2 \geqq d. \end{cases} \tag{5}$$

L'une des distances d_1 ou d_2 (ou les deux à la fois) peut devenir infinie.

3. L'ensemble des éléments $\widehat{BC}$ et de deux droites indéfinies μ_1 et μ_2 forme ce que M. A. Oudart (³) a appelé le squelette $\mathcal{C}$ du schéma de Helmholtz; nous allons nous poser relativement à ce squelette le problème de représentation conforme de Helmholtz, dont voici l'énoncé tel qu'il a été formulé à la suite des travaux de M. J. Leray :

Soit le plan de la variable complexe auxiliaire $f = \varphi + i\psi$. Déterminer dans le plan f le domaine F *en forme de bande indéfinie :*

$$-\psi_2 \leqq \psi \leqq \psi_1; \qquad \psi_1 > 0; \qquad \psi_2 > 0; \qquad -\infty \leqq \varphi \leqq \infty$$

entaillée le long de la portion positive de l'axe $O\varphi$ *et définir dans* F *la fonction univalente $z = z(f)$ de façon que :*

1° *au domaine* F, $z(f)$ *fasse correspondre un domaine* $\mathfrak{A}$ *simplement connexe du plan z, situé entre μ_1 et μ_2* ;

(³) *Voir* la Thèse de cet auteur (*Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhoff, Journ. de Math.*, t. XXII, 1943, p. 245-320 et t. XXIII, 1944, p. 1-36. La terminologie adoptée par M. Oudart offre l'avantage de rappeler l'origine hydrodynamique du problème énoncé dans le texte.

2° *la portion de la frontière* F' *de* F, *étrangère aux segments*

$$\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \infty; \qquad \varphi_2 \leqq \varphi \leqq \infty \qquad (\varphi_1 > 0, \qquad \varphi_2 > 0)$$

de l'axe $\psi = 0$ *ait pour image dans le plan* z *le squelette* $\mathcal{C}$ (4); *d'une manière plus précise, à la droite indéfinie* $\psi = \psi_1$ (*où* $\psi = -\psi_2$), $z(f)$ *doit faire correspondre la droite* μ_1 (*ou* μ_2); *à l'ensemble des deux segments* $\psi = 0$ $(0 \leqq \varphi \leqq \varphi_1)$ *et* $\psi = 0$ $(0 \leqq \varphi \leqq \varphi_2)$ *situés respectivement sur les bords supérieur et inférieur de la coupure,* $z(f)$ *fera correspondre* $\widehat{BC}$; *le squelette* $\mathcal{C}$ *n'étant défini qu'à une translation près, on peut prendre pour* $z = 0$ *le point* $z(0)$ (*);

3° *au segment* $\psi = 0$ $(\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \infty)$, *ou* $(\varphi_2 \leqq \varphi \leqq \infty)$, *situé sur le bord supérieur* (*ou inférieur*) *de la coupure,* $z(f)$ *fasse correspondre une ligne* λ_1 (*ou* λ_2), *inconnue a priori, située entre* μ_1 *et* μ_2 *et joignant le point* C (*ou* B) *au point* $x = +\infty$ *et cela de manière à conserver les longueurs : en d'autres termes, on doit avoir*

$$\left|\frac{dz}{df}\right| = 1, \qquad \text{pour} \quad \psi = 0 \begin{cases} \varphi_1 \leqq \varphi \leqq \infty, \\ \varphi_2 \leqq \varphi \leqq \infty. \end{cases} \tag{6}$$

4° *aux points à l'infini de* F *où* $\varphi > 0$, *on doit avoir*

$$z = f + \textit{série entière en } \frac{1}{f};$$

au point à l'infini de F *où* $\varphi < 0$, *on doit avoir*

$$z = kf + \textit{série entière en } \frac{1}{f}$$

où k *est une constante réelle, positive, a priori inconnue.*

4. A ma connaissance, du moins, ce problème n'a été abordé jusqu'ici que dans le cas où l'arc $\widehat{BC}$ est doué d'une tangente, et même d'une courbure continue au sens de Hölder (5), à moins que $\widehat{BC}$ ne possède qu'un nombre fini de points anguleux (6). Le mémoire J. K. 2 a été spécialement consacré aux configurations de cette espèce. Dans le présent travail, je me propose de traiter le problème ci-dessus en faisant sur la portion $\widehat{BC}$ de $\mathcal{C}$ les seules hypothèses

---

(4) Le segment $\psi = 0$, $\varphi_1 \leqq \varphi \leqq \infty$ est situé sur le bord supérieur de la coupure pratiquée le long de l'axe $\psi = 0$; le segment $\varphi_2 \leqq \varphi \leqq \infty$, $\psi = 0$ appartient au bord inférieur de celle-ci. Précisons que le domaine F étant, *a priori*, inconnu, les quatre constantes ψ_1, ψ_2, φ_1 et φ_2 qui le définissent sont des inconnues du problème.

(*) D'après cela, les ordonnées des points B et C dans le plan z sont, *a priori*, inconnues; seule leur différence $y_1 - y_2$ est une donnée.

(5) Dans cet ordre d'idées, signalons les résultats de M. J. Leray dont J. K. 1 et la *Thèse* de M. Oudart constituent les prolongements [cf. *loc. cit.* (3)].

(6) Pour le cas des arcs $\widehat{BC}$ en forme de polygones rectilignes convexes vers $x = +\infty$, *cf.* les travaux de MM. G. Hamel, H. Weyl, K. Friedrichs, A. Weinstein dont on trouvera la bibliographie dans J. K. 1, p. 41.

de régularité énumérées au paragraphe 1. Cette fois, il faut renoncer à partir des équations intégro-différentielles de M. Villat qui ne s'appliquent qu'aux arcs $\widehat{BC}$ pourvus d'une tangente continue. La méthode de démonstration que nous allons utiliser est inspirée par les travaux de MM. C. Caratheodory et P. Montel [7] consacrés au problème de représentation conforme de Riemann : on approchera indéfiniment de la configuration donnée $\mathcal{C}$ au moyen de squelettes $\mathcal{C}_n$ auxquels s'appliquent les théorèmes d'existence de J. K. 2 et l'on obtiendra le théorème d'existence cherché par voie de passage à la limite [8].

5. Malheureusement, la méthode de passage à la limite qu'on vient de décrire ne fournit aucune indication sur le nombre de solutions que le problème comporte et de nouvelles recherches seraient nécessaires pour compléter la théorie sur ce point capital.

De plus, les solutions dont on établit ainsi l'existence, sont assurément inacceptables du point de vue physique (*cf.* J. K. 2, § 2). Dès lors, pour des arcs $\widehat{BC}$, de l'espèce considérée au cours de ce travail, il y aurait lieu de modifier le schéma de Helmholtz-Kirchhoff en s'inspirant, sans doute, des suggestions de M. Villat.

On remarquera, peut-être, une restriction qui intervient dans la théorie qu'on va développer. Nous supposons, en effet, que les nombres dérivés de la fonction $x = x(y)$ sont bornés [*cf.* (3) et (3')]. Cette hypothèse permet d'éliminer une difficulté relative aux squelettes d'approximation $\mathcal{C}_n$; si les conditions (3) et (3') n'étaient pas remplies, les polygones P_n définis ci-dessous, pourraient, à partir d'un rang n assez grand, présenter du côté des x positifs des pointes différant d'aussi peu qu'on le veut d'un point de rebroussement. Or, les théorèmes d'existence de J. K. 2 ne s'appliquent pas à de telles configurations. On retrouve ainsi une difficulté qui s'est déjà rencontrée dans la théorie du problème de représentation conforme de Riemann.

II. — Construction de la suite des approximations $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{C}$. Propriétés des solutions du problème de Helmholtz posé relativement aux $\mathcal{C}_n$.

6. Reprenons le squelette $\mathcal{C}$ défini au cours des paragraphes 1 et 2. Inscrivons dans l'arc donné BC correspondant une ligne polygonale P_n à $(n+1)$ côtés de façon que : 1° les deux extrémités de P_n coïncident avec les points B et C;

---

(7) *Cf. Les leçons sur les familles normales des fonctions analytiques* de M. Montel, Paris, 1927, p. 98 et les suivantes.

(8) Observons que M. A. Weinstein a déjà utilisé un procédé semblable dans la théorie des jets, mais dans le cas très particulier des arcs $\widehat{BC}$ à courbure régulière et de signe constant, présentant, au surplus, une propriété de symétrie par rapport à Ox.

2° les ordonnées des sommets $p_j(n)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ de P_n [qui sont situés sur $\widehat{BC}$ et dont il s'agit de fixer l'ordre en décrivant P_n de B vers C] croissent avec leur indice j; 3° la longueur de chaque côté de P_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Nous appellerons $\mathcal{C}_n$ le squelette constitué par l'ensemble de la ligne polygonale ouverte P_n et des deux droites indéfinies μ_1 et μ_2. Il est clair que $\lim\limits_{n=\infty} P_n = \widehat{BC}$; par suite, on peut écrire :

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}.$$

De la définition même de P_n, il résulte que la longueur L_n de P_n vérifie l'inégalité

$$(7) \qquad L_n \leqq L \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty),$$

où L désigne, rappelons-le, la longueur de l'arc $\widehat{BC}$. Si donc M est un point quelconque de P_n, l, la longueur de la portion de P_n comprise entre B et M, on a

$$(7') \qquad 0 \leqq l \leqq L_n \leqq L \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty).$$

Nous appellerons l_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ les abscisses « curvilignes » des n sommets $p_j(n)$ de P_n, $y_j(n)$ les ordonnées des points en cause, $\Psi_n(l)$, l'angle, compris entre 0 et π, formé en M par P_n (orienté dans le sens des y croissants) avec Ox. D'après cela, $\Psi_n(l)$ se réduit à une constante sur chacun des intervalles

$$0 \leqq l \leqq l_1; \qquad l_{j-1} \leqq l \leqq l_j \qquad (j=2, 3, \ldots, n); \qquad l_n \leqq l \leqq L_n,$$

mais subit des discontinuités pour $l = l_j$. D'un autre côté, de (3) il résulte

$$\begin{aligned} &|x[y_1(n)] - x(y_2)| \leqq \operatorname{cotg}\varphi\, |y_1(n) - y_2|, \\ &|x[y_j(n)] - x[y_{j-1}(n)]| \leqq \operatorname{cotg}\varphi\, |y_j(n) - y_{j-1}(n)| \qquad (j=2, 3, \ldots, n), \\ &|x\,(y_1) - x[y_n\,(n)]| \leqq \operatorname{cotg}\varphi\, |y_1 - y_n(n)|. \end{aligned}$$

Or, pour $0 \leqq l \leqq l_1$, par exemple, on a

$$\Psi_n(l) = \operatorname{arc\,cotg}\left\{\frac{x[y_1(n)] - x(y_2)}{y_1(n) - y_2}\right\},$$

en sorte que

$$(8) \qquad 0 < \varphi \leqq \Psi_n(l) \leqq \pi - \varphi \leqq \pi \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty).$$

7. D'après cela, toute configuration $\mathcal{C}_n$ $(n=1, 2, \ldots, \infty)$ vérifie l'ensemble des hypothèses (H) (*cf.* le paragraphe 14 de J. K. 2). Par suite, le problème de Helmhotz, posé relativement à $\mathcal{C}_n$ possède au moins une solution $z = z_n(f)$. Soient alors $\mathfrak{A}_n$, le domaine du plan z correspondant à $\mathcal{C}_n$ (*cf.* l'alinéa 1 de l'énoncé du problème de Helmholtz au paragraphe 3), F_n, l'image de $\mathfrak{A}_n$ par $f = f_n(z)$, fonction inverse de $z_n(f)$, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$, $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$ les paramètres défi-

nissant F_n (variables, en général, avec n); le domaine de définition F_n de $z_n(f)$ n'est pas commun à toutes les fonctions de cette suite. Pour obvier à cet inconvénient, il est commode de poser, avec M. Villat (*cf.* J. K. I, § 9)

$$f = f_n(t) = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{t-a_n}{t_{0,n}-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{t-b_n}{b_n-t_{0,n}} + i\psi_{1,n}, \tag{9}$$

où les logarithmes se réduisent à leur détermination arithmétique pour t réel et $t > b_n$, où les paramètres a_n, b_n, liés aux paramètres $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ définissant F_n au moyen des relations

$$\varphi_{1,n} = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{1-a_n}{t_{0,n}-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{b_n-1}{b_n-t_{0,n}},$$
$$\varphi_{2,n} = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{(-1-a_n)}{t_{0,n}-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{b_n+1}{b_n-t_{0,n}}$$

et où le paramètre $t_{0,n}$ est donné par

$$t_{0,n} = \frac{a_n\psi_{1,n} + b_n\psi_{2,n}}{\psi_{1,n}+\psi_{2,n}}.$$

On montre alors aisément que les solutions a_n, b_n, $t_{0,n}$ de ce système sont réelles et vérifient l'ensemble des inégalités

$$a_n < -1; \qquad b_n > 1; \qquad -1 < t_{0,n} < 1.$$

Dans ces conditions, la transformation (9) fait correspondre à F_n le demi-plan supérieur $\mathfrak{T}_n$ du plan de la variable $t = t_1 + it_2$ et cela de façon que : 1° aux segments réels $-\infty \leq t_1 \leq a_n$ et $b_n \leq t_2 \leq \infty$ correspondent les bords μ_2 et μ_1 de F_n respectivement; 2° aux segments réels $a_n \leq t_1 \leq -1$ et $1 \leq t_1 \leq b_n$ correspondent les segments $\psi = 0$ ($\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty$) (bord inférieur de la coupure) et $\psi = 0$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty$) (bord supérieur de la coupure); 3° aux segments réels $-1 \leq t \leq t_{0,n}$ et $t_{0,n} \leq t \leq 1$ correspondent les segments réels $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$ (bord inférieur de la coupure) et $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ (bord supérieur de la coupure) respectivement.

La solution du problème de Helmholtz posé relativement au squelette $\mathcal{C}_n$ se présente désormais sous la forme $z = z_n[f_n(t)] = z_n(t)$, les $z_n(t)$ étant toutes définies dans le demi-plan $t_2 \geq 0$. Somme toute, le domaine $\mathfrak{T}_n$ dépend des trois paramètres a_n, b_n et $t_{0,n}$, ce dernier étant à son tour, défini par la donnée de a_n, b_n et du quotient $\frac{\psi_{1,n}}{\psi_{2,n}}$. Par contre, la correspondance $f = f_n(t)$ fait intervenir quatre paramètres $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ a_n, b_n dont l'ensemble est équivalent à celui des paramètres $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ $\varphi_{1,n}$ et $\varphi_{2,n}$ (*).

(*) D'après cela, la position du point $z_n(0)$ varie avec l'indice n, en sorte que les ordonnées des extrémités B et C de P_n dépendent de n et l'on devrait écrire $y_{2,n}$ et $y_{1,n}$, en lieu et place de y_2 et y_1, pour expliciter cette dépendance. Nous ne le ferons pas pour simplifier les écritures.

8. Étudions plus en détail les propriétés communes à la suite $z_n(t)$. En premier lieu, les inégalités (5) entraînent l'existence d'une constante $K(d)$, ne dépendant que de d, telle que (*cf.* J. K. 1, § 24 ou J. K. 2, § 12) :

$$|a_n + 1| \geqq K(d),$$
$$|b_n - 1| \geqq K(d).$$

Si $d_1 = \infty$, on a

$$b_n = \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

de même, $d_2 = \infty$ entraîne

$$a_n = -\infty \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty);$$

si d_1 (ou d_2) est borné supérieurement, il en sera de même de b_n (ou de $|a_n|$; pour ces limitations, se reporter à J. K. 1, § 27); les majorantes de $|a_n|$ et b_n dépendent alors de celles de d_1, d_2 et de L qui majore les L_n (**). On montre que si $d_2 = \infty$, par exemple, la transformation (9) prend la forme

$$f = f_n(t) = A_n(t - t_{0,n}) - \frac{\psi_{1,n}}{\pi} \log \frac{(t - b_n)}{(b_n - t_{0,n})} + i\psi_{1,n},$$

où A_n désigne une nouvelle constante; si, de plus, on suppose $d_2 = \infty$, on a, plus simplement,

$$f = f_n(t) = A_{1,n}(t - t_{0,n})^2.$$

On trouvera une étude de ces cas limites au paragraphe 14 de J. K. 1; il serait facile d'y adapter les raisonnements qui suivent. Mais pour simplifier l'exposition, nous admettrons désormais que les distances d_1 et d_2 vérifient les inégalités

$$(10) \qquad 0 < d \leqq d_j \leqq D \qquad (j = 1, 2),$$

où D désigne une longueur fixe; moyennant quoi les résultats qu'on vient de rappeler s'écrivent :

$$(10') \qquad \begin{cases} -K_1(d, D, L) \leqq a_n \leqq -1 - K(d), \\ \quad 1 + K(d) \leqq b_n \leqq K_1(d, D, L), \end{cases}$$

inégalités où $K_1(d, D, L)$ désigne une constante convenable donnée.

9. Chaque domaine $\mathfrak{A}_n$, correspondant au squelette $\mathcal{C}_n$, est nécessairement d'un seul tenant; ce fait, d'ailleurs déjà utilisé pour la construction des minorantes des paramètres $|a_n + 1|$ et $|b_n - 1|$ est la conséquence des inégalités (8). Rappelons que cette proposition résulte de ce que l'intersection de chacune de lignes $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$ avec une parallèle quelconque à Ox se réduit à un point unique. D'ailleurs, la condition $\left|\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right| = 1$ [*cf.* (6)], valable le long des

(**) Noter que L peut être majoré au moyen des nombres D_1, D_2 et φ (*cf.* § 2).

lignes $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$ (c'est-à-dire le long de leurs images dans $\mathcal{T}_n$) entraîne, comme on le sait, l'analyticité de $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$, sauf pour $t=\pm 1$, en général. Pour le voir, souvenons-nous qu'en posant

$$t=t_1+i\,t_2,$$
$$\Omega_n(t)=\Theta_n(t_1,\,t_2)+i\mathrm{T}_n(t_1,\,t_2)=-\,i\log\frac{d\,z_n(t)}{d\,f_n(t)},$$

la condition isopérimétrique (6) prend la forme

$$\mathrm{T}_n(t_1,\,0)=0,\qquad \text{pour}\quad a_n\leqq t_1\leqq -1;\ 1\leqq t_1\leqq b_n.$$

Il s'ensuit que la fonction $\mathrm{T}_n(t_1,\,t_2)$ est prolongeable analytiquement à travers les portions considérées de la frontière $\mathcal{T}'_n$ de $\mathcal{T}_n$, donc analytique, et même holomorphe, sur les portions en cause; il en sera, par suite, de même de $\dfrac{dz_n(t)}{df_n(t)}$, donc, d'après (9), de $\dfrac{dz_n(t)}{dt}$ et, finalement, de $z_n(t)$. A la vérité, la démonstration n'est valable que pour l'intérieur des segments réels $a_n<t_1<-1$, $1<t_1<b_n$, $t_2=0$, extrémités exclues. On sait qu'en général, $z_n(t)$ présente une singularité pour $t=\pm 1$; nous renverrons pour le détail de cette discussion au paragraphe 13 de J. K. 1 et nous ne nous occuperons, dans un instant, que des points $t=a_n$ et $t=b_n$.

De la définition même de $\Omega_n(t)$, il résulte aussi

$$\Theta_n(t_1,\,0)=0,\qquad \text{pour}\quad b_n\leqq t_1\leqq\infty,\ -\infty\leqq t_1\leqq a_n.$$

Cela montre que $z_n(t)$ est analytique et holomorphe en chaque point intérieur des segments en cause, le long desquels $z_n(t)$ fait correspondre des portions rectilignes des frontières $\mathcal{A}'_n$ et $\mathcal{T}'_n$. Pour préciser l'allure de $z_n(t)$ pour $t=b_n$ (des conclusions analogues valent pour $t=a_n$), partons de l'expression explicite (12) ci-après de $\Omega_n(t)$. Appelons γ_n le cercle de centre $t=b_n$ et de rayon $\frac{1}{2}\mathrm{K}(d)$; d'après les inégalités (10'), aucun γ_n ne contient le point $t=1$. Il résulte alors de (12) que la fonction $\dfrac{\Omega_n(t)}{\sqrt{t-b_n}}$ est holomorphe dans γ_n et y est bornée supérieurement en module au moyen d'une constante ne dépendant que de $\mathrm{K}(d)$ et de $\mathrm{K}_1(d,\,\mathrm{D},\,\mathrm{L})$; on peut donc écrire :

$$\frac{d\,z_n(t)}{d\,f_n(t)}=e^{i\Omega_n(t)}=1+\sqrt{t-b_n}\,\mathrm{H}_n(t-b_n)+(t-b_n)h_n(t-b_n),$$

égalité où les fonctions $\mathrm{H}_n(t-b_n)$ et $h_n(t-b_n)$ sont holomorphes dans γ_n et dont les modules sont bornés dans ce cercle à l'aide de $\mathrm{K}(d)$ et de $\mathrm{K}_1(d,\,\mathrm{D},\,\mathrm{L})$. D'un autre côté, (9) entraîne

$$\frac{df_n(t)}{dt}=-\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\,\frac{1}{t-b_n}+\mathcal{H}(t-b_n);$$

comme $\psi_{1,n}$ et $\psi_{2,n}$ sont majorés par D [9], la quantité $|\mathcal{H}|$, définie par (9), sera majorée dans γ_n au moyen de D et de $K(d)$. Des deux dernières formules, on tire

$$\frac{dz_n(t)}{dt} = -\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\frac{1}{t-b_n} + \frac{1}{\sqrt{t-b_n}}\mathcal{G}_n(t-b_n) + G_n(t-b_n),$$

où $\mathcal{G}_n$ et G_n désignent des fonctions de $(t-b_n)$, holomorphes dans γ_n et dont les modules sont bornés dans ce cercle au moyen de constantes, dépendant de d, D, $K(d)$ et $K_1(d, D, L)$; si donc $|t-b_n| \leqq \frac{K(d)}{2}$, on a, en intégrant l'égalité précédente,

$$z_n(t) + \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log(t-b_n) = M_n(t-b_n) + \sqrt{t-b_n}\,\mathfrak{M}_n(t-b_n) + N_n,$$

où les fonctions M_n et $\mathfrak{M}_n$ sont holomorphes dans γ_n et assujetties à y vérifier des inégalités telles que

$$|M_n(t-b_n)| \leqq P(d, D, L),$$
$$|\mathfrak{M}_n(t-b_n)| \leqq P(d, D, L),$$

$P(d, D, L)$ étant une constante positive, dépendant de d, D, L et où N_n désigne la constante d'intégration définie, par exemple, au moyen de la relation

$$z_n\left[b_n - \frac{1}{2}K(d)\right] = -\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\left[-\frac{K(d)}{2}\right] + M_n\left[-\frac{1}{2}K(d)\right] + \sqrt{-\frac{K(d)}{2}}\,\mathfrak{M}_n\left[-\frac{1}{2}K(d)\right] + N_n.$$

Les inégalités precédentes permettent de majorer les modules des second et troisième termes de l'équation de définition de N_n, et cela au moyen de la fonctionnelle $\left[\sqrt{K(d)}+1\right]P(d, D, L)$ de d, D et L. Il en est de même du terme $|\psi_{1,n}\log[K(d)]|$ car $\psi_{1,n} \leqq D$, alors que $K(d)$ est une constante finie, et non nulle à la fois. Dès lors, pour majorer $|N_n|$ il suffira d'effectuer la majoration de $\left|z_n\left[b_n - \frac{1}{2}K(d)\right]\right|$. Or, nous avons évidemment

$$\left|z_n\left[b_n - \frac{1}{2}K(d)\right]\right| \leqq \left|\int_{t_{0,n}}^{1} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t)\right| + \left|\int_{1}^{b_n - \frac{1}{2}K(d)} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t)\right|,$$

[9] Ce fait, du reste absolument classique, résulte de ce que $\psi_{1,n}$ représente la différence des ordonnées de μ_1 et de l'asymptote horizontale de $\lambda_{1,n}$; or, d'après la propriété rappelée au début de ce paragraphe, cette dernière ordonnée est supérieure à celle du point C [*cf.* la formule (1,33) de J. K. 1 qu'il faut, d'ailleurs, rectifier comme il suit : y_1 y désigne la différence des ordonnées de l'asymptote de $\lambda_{1,n}$ et du point C].

Notons, par ailleurs, que les raisonnements du paragraphe 27 de J. K. 1 permettent de construire une minorante non nulle de $\psi_{1,n}$ et de $\psi_{2,n}$ dépendant de d et de $(y_1 - y_2)$ [*cf.* les inégalités (2)]. On peut donc écrire :

$$0 < E(d, y_1 - y_2) \leqq \psi_{j,n} \leqq D, \qquad (j = 1, 2)$$

où E désigne une constante convenable.

les chemins d'intégration des intégrales du second membre étant, pour fixer les idées, des segments rectilignes de l'axe réel, $t_2=0$ du plan $t=t_1+it_2$. Or, la première intégrale du second membre est majorée par la longueur de l'arc $\widehat{OC}$, donc, *a fortiori*, par la longueur totale de l'arc $\widehat{BC}$ dans lequel est inscrite la ligne polygonale P_n (*cf.* § 6). Nous avons ensuite, le long du segment réel $t_2=0$, $1 \leqq t_1 \leqq b_n - \frac{K(d)}{2}$

$$\left|\int_1^{b_n-\frac{1}{2}K(d)} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t)\right| = \left|\int_1^{b_n-\frac{1}{2}K(d)} e^{i\Theta_n(t_1)}\,df_n(t_1)\right| \leqq f_n\left[b_n-\frac{1}{2}K(d)\right]-f_n(1),$$

puisque le long de l'intervalle d'intégration $\frac{df_n(t)}{dt}=\frac{df_n(t_1)}{dt_1}$ est une fonction réelle et positive. Or, de (9) on tire

$$f_n\left[b_n-\frac{1}{2}K(d)\right]-f_n(1) = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{b_n-a_n-\frac{1}{2}K(d)}{1-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{\frac{1}{2}K(d)}{b_n-1}.$$

Comme $\psi_{i,n} \leqq D$ $(i=1,2)$, le premier membre est majoré à l'aide de D, $K(d)$, $K_1(d, D, L)$, en définitive, à l'aide de d, D, L [*cf.* (10')]. La constante d'intégration $|N_n|$ pourra donc être majorée en fonction des mêmes paramètres, et nous pouvons écrire, en posant $g_n(t)=z_n(t)+\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log(t-b_n)$ et pour résumer l'ensemble des résultats qui précèdent :

$$|g_n(t)| \leqq \text{borne dépendant de } d,\ D,\ L; \qquad |t-b_n| \leqq \frac{K(d)}{2},$$

l'inégalité précédente étant valable *quel que soit n*. Rappelons que d'après sa définition même, $g_n(t)$ se présente sous la forme

$$g_n(t) = M_n(t-b_n) + \sqrt{t-b_n}\,\mathfrak{M}_n(t-b_n) + N_n,$$

M_n et $\mathfrak{M}_n$ désignant des fonctions holomorphes dans le cercle γ_n.

9 *bis*. Rappelons enfin que le point $t=\infty$ de T_n est un point ordinaire de la fonction $\Omega_n(t)$; sa partie réelle Θ_n y est nulle, alors que sa partie imaginaire T_n y est négative (*cf.* J. K. 1, § 17). Cela montre que pour $t=\infty$, on a

$$\left[\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right]_{t=\infty} = e^{-[T_n(t)]_{t=\infty}} = k_n > 1. \tag{11}$$

D'après cela, la condition de l'alinéa 4 de l'énoncé du problème de Helmholtz est satisfaite pour chaque configuration $\mathcal{C}_n$; nous allons retrouver directement ces propriétés des constantes k_n et des $\Omega_n(t)$. Remarquons à cet effet que l'on a, si t est étranger à l'image de $\widehat{BC}$ [*cf.* J. K. 1, § 14 *bis*],

$$\begin{aligned}(12)\quad \Omega_n(t) &= \Theta_n(t_1,t_2)+iT_n(t_1,t_2)\\ &= -\frac{i}{\pi}\sqrt{(t^2-1)(t-a_n)(t-b_n)}\int_{-1}^{+1}\frac{\Phi_n(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(t'-a_n)(b_n-t')}\,(t-t')},\end{aligned}$$

où, rappelons-le, le radical en t est pris avec sa détermination arithmétique pour t réel et très grand, où le chemin d'intégration se réduit au segment réel, $-1 \leqq t' \leqq 1$, où le radical en t' est réel et positif et où la fonction $\Phi_n(t')$ est définie comme il suit. On a vu que $z = z_n(t)$ fait correspondre la ligne polygonale P_n et le segment réel $-1 \leqq t' \leqq 1$; soit $l_n(t')$ la fonction qui réalise cette correspondance, $l_n(t')$ étant, d'après cela, la longueur de la portion de P_n dont le segment d'extrémités -1 et t' est l'image. Reprenons alors la fonction $\Psi_n(l)$, définie au paragraphe 6; nous poserons

$$\Phi_n(t') = \Psi_n[l_n(t')], \qquad \text{pour} \quad t_{0,n} \leqq t' \leqq 1;$$
$$\Phi_n(t') = \Psi_n[l_n(t')] - \pi, \qquad \text{pour} \quad -1 \leqq t' \leqq t_{0,n}.$$

Rappelons encore que la fonction $\Phi_n(t')$ ainsi définie vérifie l'équation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} = 0. \tag{13}$$

Cela étant, $|a_n|$ et b_n vérifient (10'); si donc $|t|$ est supérieur à $K_1(d, D, L)$, [*cf.* (10')], on peut écrire le développement

$$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a_n)(t-b_n)}}{t-t'} = t - \frac{a_n+b_n-2t'}{2} + \frac{1}{t}\left(\text{série entière en } \frac{1}{t}\right),$$

absolument convergent. Portons alors la valeur du premier membre dans (12) et intégrons terme à terme; compte tenu de (13), on trouve dans le voisinage de $t = \infty$ [10]

$$\begin{aligned}\Omega_n(t) &= \frac{i}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{(a_n+b_n-2t')}{2}\,\frac{\Phi_n(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} + \frac{1}{t}\left(\text{série entière en } \frac{1}{t}\right)\\ &= -\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{t'\Phi(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} + \ldots.\end{aligned}$$

Comme nous l'avons prévu, la formule précédente montre bien que $t = \infty$ est un point ordinaire de $\Omega_n(t)$ qui se réduit, pour $t = \infty$ à une imaginaire pure;

---

(10) Des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 9, et que nous omettons pour abréger l'exposé, permettraient de préciser le raisonnement du texte; on verrait ainsi que dans le voisinage de $t = \infty$, on peut écrire :

$$z_n(t) = -k_n \frac{\psi_{1,n} + \psi_{2,n}}{\pi} \log t + z_{n,\infty}\left(\frac{1}{t}\right),$$

ou $z_{n,\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$ désigne une fonction de $\frac{1}{t}$ holomorphe et assujettie à vérifier l'inégalité

$$\left| z_{n,\infty}\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leqq M_1(d, D, L), \qquad \text{pour} \quad |t| \geqq 2K_1(d, D, L), \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

où $M_1(d, D, L)$ est une constante convenable, fonctionnelle de ses arguments. Remarquons aussi que le raisonnement du texte ne suppose rien au sujet de l'allure limite de $\Phi_n(t')$; on utilise uniquement le fait que les intégrales ou $\Phi_n(t')$ figure sous le signe $\int$ sont uniformément bornées en module quel que soit n.

d'un autre côté, les inégalités (10′) permettent d'en déduire, eu égard au fait que $[\Phi_n(t')] < \pi$,

$$|[\Omega_n(t)]_{t=\infty}| = |[T_n(t)]_{t=\infty}| \leqq \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)[1+K(d)-t'][t'+1+K(d)]}}.$$

Aussi, $|T_n(t)|_{t=\infty}$ est borné; par suite l'ensemble des constantes positives k_n[*cf.* (11)] est tel que

$$(14) \qquad K_3(d) \leqq k_n \leqq K_2(d) \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty),$$

où K_2 et K_3 sont des constantes positives convenables. On peut, d'ailleurs, prendre $K_2(d) = 1$ [*cf.* (11)]. D'un autre côté, on voit aisément que $|T_n(\infty)| \leqq \frac{\pi}{2K(d)}$.

Remarque. — Notons, en passant, que (13) conduit à une autre égalité qui nous sera utile. Remplaçons dans (13) $\Phi_n(t')$ par sa valeur en fonction de $\Psi_n[l_n(t')]$; il vient

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Psi_n[l_n(t')]\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} = \pi \int_{-1}^{t_{0,n}} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}.$$

On en déduit, eu égard à (8),

$$\varphi \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} \leqq \pi \int_{-1}^{t_{0,n}} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}$$
$$\leqq (\pi-\varphi) \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}.$$

Ces inégalités établissent l'existence d'une constante $\varepsilon(d, \varphi)$, dépendant de ses deux arguments, positive, non nulle tant que $d \neq 0$, $\varphi \neq 0$, telle que [*cf.* (10′)]

$$(14') \qquad -1 + \varepsilon(d, \varphi) \leqq t_{0,n} \leqq 1 - \varepsilon(d, \varphi).$$

10. Passons maintenant à l'étude de la correspondance $z = z_n(t)$ sur le segment réel $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, $t_2 = 0$. En raison de l'importance de ce point, nous reproduirons en partie les raisonnements, déjà exposés dans ma Thèse, qui conduisent au résultat que nous avons en vue [11]. Considérons d'abord un domaine borné, simplement connexe Γ, situé dans le plan $z = x + iy$ et soit Γ′ le contour qui le limite et que, pour plus de simplicité, nous supposerons être une courbe simple de Jordan. Supposons ensuite que la fonction $z = z(t)$ réalise l'application conforme de Γ sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{T}$ de la variable complexe t. Soient : t_1, t_2, t_3, t_4, les affixes réels de quatre points de l'axe réel

[11] Signalons que plusieurs raisonnements du texte dérivent de ceux qu'a utilisés M. J. Leray.

du plan t, tels que $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$; α_1, α_2, α_3, α_4 les images respectives de t_1, t_2, t_3, t_4; d'après cela, les points α_1, α_2, α_3, α_4 sont situés sur Γ' et sont rencontrés dans cet ordre lorsqu'on parcourt Γ' dans le sens positif. Nous désignerons par $\Lambda(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1})$ la plus courte longueur des chemins tracés dans le plan z intérieurement à Γ et joignant un point de $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ à un point de $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$. On a alors ([12]) :

$$\frac{\Lambda^2}{\sigma} \leq \frac{4\pi}{\left|\log\frac{1}{r}\right|}, \tag{15}$$

où σ désigne l'aire intérieure de Γ, où r est le rapport anharmonique des points t_3, t_2, t_4, t_1 pris dans cet ordre

$$r = \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2}\,\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} > 0; \tag{15'}$$

on suppose, de plus, que

$$r \leq \frac{1}{2}. \tag{15''}$$

11. On observera que le lemme ci-dessus ne s'applique qu'aux domaines Γ bornés, dont l'aire est finie; voici comment on peut procéder pour l'appliquer aux domaines $\mathfrak{A}_n$, lesquels sont simplement connexes mais non bornés. Construisons la sphère de Riemann Σ_n dont le diamètre sera égal à la longueur L_n de la ligne polygonale P_n et tangente au plan Oxy en un point quelconque M' de P_n; nous effectuerons la projection stéréographique de $\mathfrak{A}_n$ sur Σ_n en prenant pour pôle de projection le point de Σ_n diamétralement opposé à M'. On vérifie aisément que l'aire σ_n de l'image de $\mathfrak{A}_n$ est telle que

$$\sigma_n \leq \frac{\pi L_n^2}{2} \leq \frac{\pi L^2}{2}. \tag{16}$$

Soit M un point quelconque de la portion BM' de P_n; nous appellerons y et y' les ordonnées respectives des points M et M', t et t', les affixes (réels) des images de M et M' dans le domaine $\mathfrak{T}$. Désignons alors par α_2, α_3, α_4 respectivement les images des points B, M et M' sur Σ_n; nous prendrons pour α_1 l'image du point $x = -\infty$ de $\mathfrak{A}_n$. Cela revient à prendre, eu égard aux conventions du précédent paragraphe,

$$t_1 = -\infty, \qquad t_2 = -1, \qquad t_3 = t, \qquad t_4 = t'$$

en sorte que [*cf.* (15')]

$$r = \frac{t' - t}{t' + 1};$$

([12]) *Cf.* J. K. 1, § 20.

l'arc $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ ne sera autre que l'image sur Σ_n de la portion BM de P_n alors que $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$ comprendra l'ensemble des images (sur Σ_n) de la portion M'C de P_n, de $\lambda_{1,n}$ et de μ_1. On vérifie immédiatement que la condition (15″) est satisfaite si $t > \frac{1}{2}$ $\left[\text{donc, } a\ fortiori, \text{ si } t' > \frac{1}{2}, \text{ puisque } t' > t\right.$; nous avons vu que $y_n(t)$ est une fonction croissante de son argument lorsque t varie de -1 à 1 et nous avons supposé d'autre part que $\left. y' = y_n(t') > y_n(t) = y \text{ (13)}\right]$ et si $t' - t \leqq \frac{1}{2}$; on a alors, en effet,

$$0 \leqq r \leqq (t' - t) \leqq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Une discussion élémentaire, que le lecteur trouvera développée tout au long au paragraphe 24 de J. K. 1, montre que l'on a

$$\Lambda\left(\widehat{\alpha_2\alpha_3},\ \widehat{\alpha_4\alpha_1}\right) \geqq \frac{y_n(t') - y_n(t)}{2} > 0. \tag{18}$$

Compte tenu de (16), (17) et (18), l'inégalité fondamentale (15) s'écrit :

$$|y_n(t') - y_n(t)| \leqq \frac{2\sqrt{2}\,\pi L}{|\log(t' - t)|^{\frac{1}{2}}} \qquad \left(t' - t \leqq \frac{1}{2}\right), \tag{19}$$

pourvu que $t \geqq \frac{1}{2}$. Pour se débarrasser de la restriction $t \geqq \frac{1}{2}$ on pourra procéder comme il suit. Posons

$$t_1 = t, \qquad t_2 = t', \qquad t_3 = 1, \qquad t_4 = \infty,$$

les paramètres t et t' ayant la même signification que ci-dessus. On trouve alors

$$r = \frac{t' - t}{1 - t}.$$

Il est clair que l'inégalité (15″) sera encore satisfaite si $t \leqq \frac{1}{2}$ et $t' - t \leqq \frac{1}{4}$; alors

$$0 \leqq r \leqq 2(t' - t) \leqq \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ devient l'image sur Σ_n de la portion M'C de P_n, alors que $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$ comprend l'ensemble des images (sur la même sphère) de la portion BM de P_n, de $\lambda_{2,n}$ et de μ_2. Le raisonnement s'achève alors comme ci-dessus et aboutit encore à l'inégalité (19), valable, cette fois pour $t \leqq \frac{1}{2}$; par suite, l'inégalité en

(13) Le symbole $y_n(t)$ désigne ici la partie imaginaire de la fonction $z_n(t) = x_n(t) + iy_n(t)$ pour t réel et tel que : $-1 \leqq t \leqq 1$; nous abandonnons donc, provisoirement et pour abréger les écritures, la notation $t = t_1 + it_2$.

cause est valable quel que soit t, pourvu que t' et t appartiennent à l'intervalle $-1 \leqq t' \leqq 1$ et que $t' - t \leqq \frac{1}{4}$.

Cela posé, observons que d'après les conventions d'écriture adoptées au paragraphe 1, la partie réelle $x_n(t)$ de $z_n(t)$ pour t réel et compris entre -1 et 1 s'écrit :

$$x_n(t) = x_n[y_n(t)].$$

Il vient donc, d'après (3) et (19),

$$|x_n(t) - x_n(t')| = |x_n[y_n(t)] - x_n[y_n(t')]| \leqq \cot\varphi\, |y_n(t) - y_n(t')| \leqq \frac{2\sqrt{2}\,\pi \mathrm{L} \cot\varphi}{|\log(t'-t)|^{\frac{1}{2}}}.$$

On tire de là et de (19)

$$(20)\quad \begin{aligned} |z_n(t) - z_n(t')| &\leqq |x_n(t) - x_n(t')| + |y_n(t) - y_n(t')| \\ &\leqq \frac{2\sqrt{2}\,\pi \mathrm{L}(1+\cot\varphi)}{|\log(t'-t)|^{\frac{1}{2}}} \qquad \begin{cases} t' - t \leqq \frac{1}{4} & (n = 1, 2, \ldots, \infty), \\ -1 \leqq t \leqq t' \leqq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

L'inégalité (20) permet d'énoncer le résultat suivant :

Toute solution $z_n(t)$ du problème de Helmholtz, posé relativement à la configuration $\mathcal{C}_n$, définie au paragraphe 6, possède sur le segment réel $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, $t_2 = 0$ le même module de continuité (20) indépendant de n.

En d'autres termes :

Les fonctions complexes $z_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ sont également continues sur le segment réel $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, $t_2 = 0$.

Les résultats rappelés au cours de ce chapitre vont maintenant nous servir à justifier la convergence du procédé d'approximation dont le principe a été esquissé au paragraphe 4.

III. — Passage à la limite. Théorème d'existence.

12. Faisons maintenant croître n indéfiniment; notre but est d'imiter les raisonnements de MM. Montel et Caratheodory et de faire voir que de la suite infinie $z_n(t)$ on peut extraire une suite infinie partielle, convergeant uniformément [14] dans le demi-plan supérieur $t_2 \geqq 0$, vers une fonction limite $z(t)$ qui résout le problème de Helmholtz posé relativement au squelette donné $\mathcal{C}$ (*cf.* §§ 1, 2, 3).

---

[14] On observera que $z_n(t)$ présente des singularités dans son domaine de définition; on précisera dans la suite ce qu'il faut entendre par convergence en chacun des points en cause.

13. En premier lieu, observons que le domaine $\mathfrak{A}_n (n=1, 2, \ldots, \infty)$ est étranger à la portion du plan z, limitée par P_n, les droites d'équations $y=y_1$ et $y=y_2$ (*cf.* § 1) et contenant le point $x=+\infty$; cela résulte immédiatement de la propriété rappelée au début du paragraphe 9 : l'intersection de $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$ avec toute droite d'équation $y=\text{const.}$ se réduit à un point unique. D'un autre côté, la ligne polygonale P_n peut être enfermée dans le rectangle borné, $-L \leqq x \leqq L$, $y_2 \leqq y \leqq y_1$. Par conséquent, il existe un domaine du plan z étranger à toute la suite des domaines $\mathfrak{A}_n (n=1, 2, \ldots, \infty)$ [15]. Cela veut dire que la suite $z_n(t)$ admet dans son domaine commun de définition $t_2 \geqq 0$ une infinité de valeurs exceptionnelles.

14. Le théorème fondamental de M. P. Montel [16] montre alors, eu égard aux résultats du précédent paragraphe, que l'ensemble des fonctions $z_n(t)$, univalentes et holomorphes dans $\mathfrak{T}$, forme dans le domaine une famille normale.

Remarque. — Observons que la conclusion précédente peut être justifiée aussi comme il suit, d'une manière plus élémentaire mais aussi plus longue. Il suffit de montrer que les $z_n(t)$ sont uniformément bornées en module dans tout domaine Δ de $\mathfrak{T}$ dont la frontière Δ' ne contient pas les points a_n, b_n ∞. Supposons d'abord que Δ' soit étrangère au segment $t_2=0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$. La formule (12) montre que l'ensemble des fonctions $\Omega_n(t)$ est borné uniformément en module sur l'ensemble $\Delta+\Delta'$. En effet, d'après (10′), il existe une longueur fixe, δ dépendant de d, D, L et du contour Δ' lui-même qui majore la distance entre un point quelconque de l'ensemble $\Delta+\Delta'$ et un point du segment réel $a_n \leqq t_1 \leqq b_n$, $t_2=0$; de même, il existe une longueur constante δ_1 non nulle, dépendant de Δ seul, qui minore la distance entre un point quelconque de $\Delta+\Delta'$ et un point du segment réel $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, $t_2=0$. Comme le point $t=0$ appartient au segment $t_2=0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, le module $|t|$ de l'affixe d'un point de $\Delta+\Delta'$ vérifie l'inégalité

$$|t| \leqq \delta.$$

Compte tenu de ces remarques, (12) donne [*cf.* (10′)]

$$|\Omega_n(t)| \leqq \frac{\delta^2}{K(d)\,\delta_1} \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{\sqrt{1-t'^2}} = \frac{\pi\,\delta^2}{\delta_1 K(d)} = M,$$

---

[15] Ce fait est évident dans le cas où μ_1 et μ_2 sont à distance finie; car aucun $\mathfrak{A}_n$ n'atteint alors la portion infinie du plan z extérieure aux bords μ_1 et μ_2 de $\mathfrak{C}$. C'est, du reste, cette hypothèse que nous avons adoptée pour simplifier notre exposé [*cf.* les inégalités (10)]. Mais la démonstration du texte offre l'avantage de pouvoir s'appliquer au cas limite où les droites μ_1 et μ_2 sont rejetées à l'infini. Il ne faut pas oublier, d'autre part, que l'on a $z_n(t_{0,n})=0$, quel que soit n, l'origine des coordonnées dans le plan z varie donc, en général avec n mais cela de façon à rester intérieure a une bande ne contenant pas les points B et C.

[16] *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques*, 1927, p. 61-64.

inégalité qui majore $|\Omega_n(t)|$ en chaque point t du domaine $\Delta + \Delta'$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 9, il en résulte

$$\left|\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right| = |e^{i\Omega_n(t)}| \leqq e^{\mathrm{M}}.$$

Il serait d'ailleurs aisé d'étendre cette conclusion au cas où l'un des nombres $|a_n|$ ou b_n (ou les deux à la fois) ne serait pas supérieurement borné; de même, Δ' pourrait contenir $t = \infty$ (*cf.* § 9*bis*), point ordinaire des $\Omega_n(t)$.

D'un autre côté, en combinant (9) et (10′) et en remarquant que $\psi_{j,n} \leqq \mathrm{D}$, $j = 1, 2$, il vient, sur $\Delta + \Delta'$,

$$\left|\frac{df_n(t)}{dt}\right| = \frac{\psi_{1,n} + \psi_{2,n}}{\pi}\left|\frac{t - t_{0,n}}{(t - a_n)(t - b_n)}\right| \leqq \frac{2\mathrm{D}\delta}{\pi\delta_1^2}.$$

Des deux dernières égalités il résulte que sur l'ensemble $\Delta + \Delta'$ on a

$$\left|\frac{dz_n(t)}{dt}\right| \leqq \frac{2\mathrm{D}\delta}{\pi\delta_1^2}e^{\mathrm{M}}.$$

Un raisonnement, devenu classique, de M. P. Montel permet d'en déduire que la suite infinie des fonctions $z'_n(t)$, holomorphes dans $\Delta + \Delta'$ est normale dans ce domaine fermé puisqu'elle y est uniformément bornée. Il serait aisé d'en conclure que la famille $z_n(t)$ possède la même propriété; en reprenant les raisonnements du paragraphe 9 on montrerait que les $|z_n(t)|$ sont bornées, quel que soit n, en un point du domaine Δ; on étend facilement la conclusion a un domaine Δ dont Δ' contiendrait une portion de $t_2 = 0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$ (17).

15. Cela posé, reprenons les paramètres a_n, b_n, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ qui correspondent à la fonction $z_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$. D'après (10′), on peut extraire de la

(17) Pour préciser ce point, on partira de la relation

$$z_n(t) = \int_{t_0}^{t} e^{i\Omega_n(t)}\frac{df_n(t)}{dt}\,dt = \int_{t}^{1+\frac{1}{2}\mathrm{K}(d)} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t) + \int_{1+\frac{1}{2}\mathrm{K}(d)}^{t} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t),$$

le chemin d'intégration $\mathcal{L}$ de la deuxième intégrale du second membre étant choisi de manière à laisser à distance finie le segment $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, $t_2 = 0$ et les points $t = a_n$ et $t = b_n$. Par exemple, prenons pour $\mathcal{L}$ un arc du cercle $|t| = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{K}(d)$; les relations du texte permettent de former le long de $\mathcal{L}$ une majorante de $|\Omega_n(t)|$ et $\left|\frac{df_n(t)}{dt}\right|$ ne dépendant que de d, D et L [*cf.* (10′)]. L'ensemble de ces faits montre qu'il existe une borne supérieure de

$$\left|\int_{1+\frac{1}{2}\mathrm{K}(d)}^{t} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t)\right|,$$

fonctionnelle compliquée de d, D, L. Comme par ailleurs, on a formé au paragraphe 9 une majorante suite infinie a_n au moins une suite partielle infinie convergeant vers une limite a [18]

$$\lim_{n=\infty} a_n = a, \qquad -\mathrm{K}_1(d, \mathrm{D}, \mathrm{L}) \leqq a \leqq -\mathrm{K}(d) - 1.$$

Soit la suite b_n correspondant à la suite infinie $z_n(t)$ que nous venons de former. En répétant le raisonnement qui précède, on pourra former une suite b_n telle que

$$\lim_{n=\infty} b_n = b, \qquad 1 + \mathrm{K}(d) \leqq b \leqq \mathrm{K}_1(d, \mathrm{D}, \mathrm{L}).$$

Le raisonnement s'étend sans peine aux paramètres restants k_n, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$; d'après les inégalités (14) et celles rappelées au renvoi (9), on peut définir, au moins une suite d'indices n de manière que

$$\lim_{n=\infty} k_n = k; \qquad \lim_{n=\infty} \psi_{1,n} = \psi_1; \qquad \lim_{n=\infty} \psi_{2,n} = \psi_2,$$

avec les conditions [*cf.* le renvoi (9) et (14)]

$$\mathrm{K}_3(d) \leqq k \leqq \mathrm{K}_2(d_1); \qquad \mathrm{E}(d, y_1 - y_2) \leqq \psi_j \leqq \mathrm{D} \quad (j = 1, 2).$$

Il résulte de là [*cf.* le paragraphe 7 et, au paragraphe 9 *bis*, l'inégalité (14')], qu'on peut trouver dans la suite infinie $z_n(t)$ qu'on vient de définir une suite partielle telle que

$$\lim_{n=\infty} t_{0,n} = t_0, \qquad -1 + \varepsilon(d, \varphi) \leqq t_0 \leqq 1 - \varepsilon(d, \varphi),$$

donc, par voie de conséquence,

$$\lim_{n=\infty} \varphi_{1,n} = \varphi_1; \qquad \lim \varphi_{2,n} = \varphi_2,$$

avec les conditions

$$0 < \varphi_1 \leqq \text{const.}; \qquad 0 < \varphi_2 \leqq \text{const.}$$

les constantes du second membre dépendant de d, D et φ.

---

dépendant des mêmes quantités de $\int_{t_0}^{1+\frac{1}{2}\mathrm{K}(d)} e^{i\Omega_n(t)}\, df_n(t)$, nous pouvons conclure que sur $\mathfrak{L}$

$$|z_n(t)| \leqq, \quad \text{borne dépendant de } d, \mathrm{D}, \mathrm{L}, \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Cela justifie l'assertion du texte; car les $|z_n(t)|$, étant bornées sur la frontière du demi-cercle supérieur $|t| = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{K}(d)$, le seront à l'intérieur. D'une manière plus générale, on peut affirmer que l'image $z = z_n(t)$ de tout point t est à une distance finie de $\widehat{\mathrm{BC}}$, la borne supérieure de cette distance étant une fonctionnelle convenable des longueurs d, D, L, de $|t|$, mais indépendante de n.

(18) Pour simplifier les écritures, nous désignerons encore par a_n la suite extraite de la suite primitive a_n, sans changer la notation de l'indice. A l'avenir, nous adopterons la même convention et nous affecterons toujours du même indice n les suites partielles infinies que nous aurons à former.

Il en résulte que la suite des domaines F_n définis au paragraphe 7 au moyen des quatre paramètres $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$, $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$ converge vers un domaine limite F, caractérisé par les constantes ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2. De même, les domaines $\mathcal{T}_n$ correspondants, tendent, lorsque n augmente indéfiniment vers un domaine limite $\mathcal{T}$, bien défini par a et b. Enfin, $f_n(t)$ tend vers la fonction limite $f(t)$

$$f(t) = -\frac{\psi_2}{\pi}\log\frac{t-a}{t_0-a} - \frac{\psi_1}{\pi}\log\frac{t-b}{b-t_0} + i\psi_1. \tag{21}$$

16. La suite des entiers n ayant été définie comme il a été dit au précédent paragraphe, envisageons la famille correspondante de fonctions univalentes $z_n(t)$. C'est une suite infinie partielle, extraite de la suite envisagée au paragraphe 14; la suite $z_n(t)$ est donc normale dans le domaine Δ (*cf.* § 14), et l'on peut donc en extraire une suite infinie partielle, que nous désignerons encore par $z_n(t)$, qui converge uniformément dans $\Delta + \Delta'$ vers une fonction limite $z(t)$, univalente et holomorphe dans le domaine $\Delta + \Delta'$. Le résultat subsiste, d'après le théorème de Stieltjes, pour l'*intérieur* de tout domaine Δ où les fonctions $z_n(t)$ sont bornées, en particulier pour un Δ dont Δ' contiendrait le segment réel $t_2 = 0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$. Comme les fonctions $z_n(t)$ sont également continues sur ce segment réel, on peut, d'après le théorème d'Arzela, choisir cette suite de manière qu'elle converge uniformément sur tout le segment réel en cause, vers la fonction limite $z(t)$, celle-ci étant, d'ailleurs, assujettie à vérifier l'inégalité

$$|z(t) - z(t')| \leqq \frac{2\sqrt{2}\,\pi(1+\cot g\varphi)L}{|\log(t-t')|^{\frac{1}{2}}},$$

où t et t' sont deux nombres réels de l'intervalle $(-1, 1)$ tels que $|t - t'| \leqq \frac{1}{4}$ [*cf.* le paragraphe 11 et notamment, l'inégalité (20)]. Je dis que la fonction $z(t)$ ainsi définie résout le problème de Helmholtz posé relativement au squelette $\mathcal{C}$. La suite du mémoire sera consacrée à la vérification de ce fait, vérification que nous effectuerons en nous inspirant des raisonnements de M. Montel.

17. De la façon même dont on a formé la suite $z_n(t)$ il résulte que l'élément limite $z(t)$ de cette suite est analytique le long de chacun des segments réels : $t_2 = 0$, $-\infty < t_1 < a$, $b < t_1 < \infty$. En effet, la partie imaginaire de chacune des fonctions $\frac{dz_n(t)}{dt}$ est nulle sur les segments $t_2 = 0$, $-\infty \leqq t_1 \leqq a_n$, $b_n \leqq t_1 \leqq \infty$; il en résulte que l'élément limite $\frac{dz}{dt}$ possédera la même propriété sur les segments réels, limites des segments précédents et cela suffit pour justifier notre assertion. On voit aussi que la partie imaginaire de $z(t)$ demeure constante pour $t_2 = 0$ $(-\infty < t < a,\ b < t < \infty)$. Ce dernier point, d'ailleurs à

peu près évident *a priori*, résulte aussi de ce que la fonction $z_n(t)$ fait correspondre à $t_2 = 0$, $b_n < t_1 < \infty$ la droite μ_1 du plan z, en sorte que

$$\text{imag.}\,[z_n(t_1 + it_2) - z_n(1)] = d_1 \quad \text{pour } t_2 = 0 \qquad (b_n < t_1 < \infty).$$

En faisant $n = \infty$ dans la relation ci-dessus, on retrouve le résultat à établir ([19]).

18. D'après ce qu'on a vu, $\left|\dfrac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right| = 1$ sur les images de $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$; il en résulte que la fonction limite $\dfrac{dz(t)}{df(t)}$ vérifiera la même condition isopérimétrique sur chacun des segments

$$t_2 = 0, \qquad 1 < t_1 < b, \qquad a < t_1 < -1;$$

$\dfrac{dz(t)}{df(t)}$ sera donc analytique sur chacun de ces segments et il en sera de même de $z(t)$ puisque $\dfrac{df}{dt}$ est analytique.

Les conclusions des deux derniers paragraphes prouvent que le domaine de définition Δ de la suite des fonctions holomorphes $z_n(t)$ [*cf.* § 14] peut atteindre, et même traverser, les portions des images de μ_1, μ_2, $\lambda_{1,n}$, $\lambda_{2,n}$, ne contenant aucun point singulier tels que $t = \infty$, $t = a_n$, $t = b_n$, $t = \pm 1$. D'après (10′), de telles portions de l'axe $t_2 = 0$ existent; il suffira de prendre, par exemple,

$$1 + \frac{K(d)}{3} \leqq |t_1| \leqq 1 + \frac{2}{3}K(d) \qquad \text{et} \qquad K_1(d, D, L) \leqq |t_1| \leqq pK_1(d, D, L),$$

où p est un nombre positif arbitrairement grand. D'ailleurs, d'après le théorème de Stieltjes, la suite $z_n(t)$, après la suppression d'un certain nombre de termes du début, convergera uniformément dans tout domaine Δ étranger aux points $t = a$, $t = b$, $t = \infty$.

19. Comme $\lim\limits_{n=\infty} b_n = b$, on peut choisir un entier p assez grand pour que pour $n \geqq p$, le cercle γ de centre $t = b$ et de rayon $\frac{1}{4}K(d)$ soit intérieur à tous les cercles γ_n correspondants (*cf.*, pour les notations, le paragraphe 9). D'après ce que nous avons vu, les fonctions $M_n(t - b_n)$ et $\mathfrak{M}_n(t - b_n)$ seront holomorphes dans γ et leurs modules y seront uniformément bornés. Ces fonctions convergent donc uniformément dans γ vers des fonctions limites holomorphes $M(t - b)$ et $\mathfrak{M}(t - b)$. De même, la suite N_n étant uniformément bornée, converge vers la valeur limite N.

([19]) Il n'en résulte pas que imag. $z_n(t_1)$ $(b_n < t_1 < \infty)$ soit indépendant de n; car la position de l'origine des coordonnées O, située dans le plan z sur la ligne ρ_n, variable avec n, est l'image du point $t_{0,n}$ (variable avec n) au moyen de la correspondance $z_n(t)$, variable aussi avec n. [*cf.* le renvoi ([15])] que lorsque n varie, O peut se déplacer par rapport au squelette $\mathcal{C}$.

Il en résulte que la suite $g_n(t)$ converge uniformément dans γ vers une fonction limite $g(t)$ et comme $\lim_{n=\infty}\psi_{1,n}=\psi_1$ et [*cf.* § 9]

$$z_n(t)=-\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log(t-b_n)+g_n(t),$$

on peut écrire, en passant à la limite [20],

$$g(t)=\mathrm{M}(t-b)+\sqrt{t-b}\,\mathfrak{M}(t-b)+\mathrm{N},$$
$$z(t)+\frac{\psi_1}{\pi}\log(t-b)=g(t), \qquad (t-b)\leqq\frac{1}{4}\mathrm{K}(d).$$

Compte tenu de (21), cela montre que dans la moitié supérieure de γ

$$z[t(f)]=f+\text{série entière en }\frac{1}{f};$$

un résultat analogue sera valable dans un cercle de centre a et de rayon $\frac{1}{4}\mathrm{K}(d)$.

Tout pareillement, on établirait, en utilisant les résultats rappelés au paragraphe 9 *bis* qu'à l'infini dans $\mathfrak{T}$

$$z[t(f)]=kf+\text{série entière en }\frac{1}{f},$$

où le coefficient k a été défini au paragraphe 15.

20. Il résulte des deux derniers paragraphes que la partie réelle $\mathcal{R}z(t)$ de $z(t)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque t_1 varie de $+\infty$ à b ou de $-\infty$ à a pour $t_2=0$. La quantité imag. $z(t_1)$ reste alors constante. De plus, lorsque le point d'affixe t décrit l'un des segments réels $t_2=0$, $a\leqq t_1\leqq -1$, $1\leqq t_1\leqq b$, le point d'affixe $z=z(t_1)$ du plan z décrit une courbe analytique, λ_2 ou λ_1, joignant l'un des points B et C au point à l'infini du côté des x positifs; le long de λ_1 et de λ_2 la condition isopérimétrique (6) sera satisfaite. Enfin, le comportement de $z(t)$ aux points $t=a$, $t=b$, $t=\infty$ du domaine $\mathfrak{T}$, ou, ce qui revient au même, le comportement de la fonction $z=z(f)$ en les points à l'infini du domaine F, est conforme aux conditions de l'alinéa 4 du paragraphe 3.

21. Dans chaque domaine Δ la fonction $z(t)$ est, on l'a vu, la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes univalentes; il s'ensuit que $z(t)$ est univalente dans chaque Δ (*cf.* M. Montel, *loc. cit.*, p. 100-101).

[20] Il serait aisé de montrer en toute rigueur que la suite $g_n(t)$, définie à partir de la suite $z_n(t)$, cette dernière suite ayant été fixée une fois pour toutes au paragraphe 16, converge uniformément dans γ. Mais pour obvier aux développements que nécessiterait une telle démonstration, il suffirait le cas échéant, d'extraire de la suite $z_n(t)$ une suite infinie partielle $z_p(t)$, telle que la suite correspondante $g_p(t)$ converge dans γ. On procéderait ensuite de même pour les voisinages de $t=a$ et $t=\infty$.

Nous pouvons donc affirmer que la fonction $z(t)$ fait correspondre conformément à l'intérieur de $\mathfrak{T}$ un domaine $\mathfrak{A}$ d'un seul tenant, situé tout entier entre les droites données μ_1 et μ_2 et admettant pour frontière les courbes λ_1 et λ_2 analytiques, exemptes de singularités, sauf en B et C $\Big($dépourvues, notamment, des points doubles ou des points de rebroussement en vertu de la condition $\left|\frac{dz}{df}\right| \neq 0$, valable le long de chacune d'elles$\Big)$ le long desquelles $\left|\frac{dz}{df}\right| = 1$. D'après cela, la fonction $z(t)$ fournira une solution du problème de Helmholtz, posé relativement au squelette $\mathcal{C}$ si nous montrons qu'au segment $t_2 = 0$; $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, $z(t)$ fait correspondre dans le plan z l'arc de courbe $\widehat{BC}$ et cela de façon que cette correspondance ait lieu point par point et soit continue; la démonstration revient, au fond, à celle de M. Montel qu'on vient d'utiliser.

22. Montrons donc d'abord qu'à tout point d'affixe t_1 du segment réel $t_2 = 0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, correspond par $z(t)$ un point de $\widehat{BC}$. La suite $z_n(t)$ ayant été choisie comme il a été dit au paragraphe 16, soit M_n, l'image du point d'affixe t_1 par $z_n(t_1)$. Comme la suite $z_n(t)$ converge uniformément vers $z(t)$ sur l'intervalle réel considéré, la suite des points M_n, d'affixes respectifs $z_n(t_1)$ converge vers un point M *unique*, d'affixe $z(t_1)$; à partir d'un n assez grand, nous avons, quel que soit t_1, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$ et aussi petit que soit le nombre $\varepsilon > 0$

$$MM_n = |z_n(t_1) - z(t_1)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je dis que M est un point de $\widehat{BC}$. Désignons en effet, par (A, B) la distance des deux ensembles de points A et B; il s'agit de prouver que $(M, \widehat{BC}) = 0$. Sinon on aurait $(M, \widehat{BC}) = \delta > 0$. Mais chaque M_n est situé sur la ligne polygonale P_n de même indice; et la suite des P_n converge vers $\widehat{BC}$. Donc à partir d'un rang n assez élevé, on aurait

$$(M_n, \widehat{BC}) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On déduit des dernières inégalités $(M, \widehat{BC}) \leqq \varepsilon$ quel que soit ε; cela contredit l'hypothèse $(M, \widehat{BC}) = \delta > 0$.

Ainsi, l'image de $t_2 = 0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$ par $z(t)$ fait partie de BC. Réciproquement, les fonctions $y_n(t_1)$, parties imaginaires des $z_n(t_1) = x_n(t_1) + iy_n(t_1)$ sont strictement croissantes pour $-1 \leqq t_1 \leqq 1$; donc leur fonction limite $y(t_1)$ sera non décroissante et prendra toutes les valeurs comprises dans l'intervalle $y(-1) \leqq y(t_1) \leqq y(1)$. Il s'ensuit qu'à tout point de l'arc $\widehat{BC}$ correspond au moins un point du segment réel.

Je dis qu'à un point de $\widehat{BC}$, il ne correspond qu'un point et un seul du segment; sinon, en effet, $z_n(t_1)$ convergerait uniformément vers une constante sur un intervalle fini du segment $t_2 = 0$, $-1 \leqq t_1 \leqq 1$, donc convergerait vers une constante dans tout son domaine d'existence, ce qui est absurde. Nous savons par ailleurs, qu'à un point du segment ne correspond qu'un point de $\widehat{BC}$; cela résulte de la continuité de $z(t)$ le long de $\widehat{BC}$. Ces remarques achèvent de justifier la proposition que nous avions en vue, concernant la correspondance entre l'arc $\widehat{BC}$ et son image dans $\mathfrak{T}$; du même coup, il est prouvé que le problème de Helmholtz, posé relativement au squelette $\mathcal{C}$ possède au moins une solution.

Remarque. — Des considérations analogues s'appliquent également au problème de Riemann ordinaire; elles permettent de construire, *a priori*, un module de continuité (valable jusque sur la frontière du domaine) de la fonction qui réalise l'application conforme du domaine donné sur un demi-plan et de simplifier ainsi, tout en les précisant, les raisonnements de MM. Montel et Carathéodory.

23. Les développements qui précèdent s'adaptent sans difficulté au cas particulier où la configuration $\mathcal{C}$ présenterait la symétrie par rapport à la droite équidistante des bords μ_1 et μ_2; on peut alors approcher $\mathcal{C}$ au moyen des configurations $\mathcal{C}_n$ offrant la même symétrie. Or, à chacun des squelettes $\mathcal{C}_n$ symétrique, on peut associer au moins une solution symétrique $z_n(t)$ du problème de Helmholtz correspondant.

Dès lors, un passage à la limite permet de justifier l'existence d'au moins une solution symétrique du problème de Helmholtz, posé pour la configuration symétrique $\mathcal{C}$ donnée.