

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Quelques réflexions à propos de la parataxie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 63 (1946), p. 23-44

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1946_3_63__23_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1946, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES RÉFLEXIONS

A PROPOS DE

LA PARATAXIE

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. *Introduction.* — En 1930 ⁽¹⁾ j'avais indiqué le résultat suivant : *un cycle de l'espace anallagmatique à 3 dimensions peut être représenté par ses projections sur le plan xOy , faites à partir de chacun de ses foyers; j'avais aussi indiqué le groupe à 20 paramètres réels, des transformations changeant un cycle réel en un nouveau cycle réel, deux cycles paratactiques restant paratactiques.* J'avais pu, ainsi, réintégrer dans le domaine réel ⁽²⁾ la belle configuration, imaginaire toutefois, découverte par Tzitzéica et M. Barbilian ⁽³⁾ : *dix cycles d'un même plan, tels que chacun touche quatre autres cycles de cette même configuration; il suffit d'adjoindre à cette configuration celle qui en est la conjuguée pour obtenir dix cycles réels de l'espace, tels que chacun soit paratactique à quatre autres de la même configuration.* J'expose ensuite quelques réflexions sur l'espace anallagmatique à 3 dimensions, réel ou complexe, que M. Élie Cartan m'a communiquées à propos de mon fascicule sur les *Cycles paratactiques* ⁽⁴⁾.

2. *Représentation d'un cycle par ses foyers ou par deux cycles du plan xOy .* — On sait qu'un cercle, de l'espace anallagmatique réel ou complexe à 3 dimensions, de rayon fini, peut être représenté par ses *foyers*, centres des sphères de rayon nul issues de ce cercle; s'il s'agit d'une *droite*, les sphères de rayon

⁽¹⁾ C. R. Acad. Sc. Paris, 190, 1930, p. 564-567.

⁽²⁾ B. GAMBIER, Bull. Sc. math., 2^e série, t. LV, mars 1931.

⁽³⁾ D. BARBILIAN, Les cas d'exception de certaines propriétés quadratiques (Bull. de Math. et Phys. de l'Éc. Polyt. de Bucarest, 1^{re} année, 1929, p. 1-17; G. TZITZÉICA, Sur certaines propriétés quadratiques, même Recueil, 1929, p. 18-21.

⁽⁴⁾ B. GAMBIER, Mémorial des Sciences Mathématiques, fasc. CIV, Gauthier-Villars, 1944.

nul doivent être remplacées par les *plans isotropes* issus de la droite; la notion de *centre* donne alors lieu à des difficultés et ne permet plus de distinguer des droites parallèles; on évite cette ambiguïté en prenant comme *éléments focaux* d'un cercle (non rectiligne) les *sphères du rayon nul* elles-mêmes, au lieu de leur centre, et, comme éléments focaux d'une *droite non isotrope*, les *plans isotropes* déjà signalés. Avec cette définition, une transformation du groupe conforme fait correspondre à chaque élément focal du cercle ou de la droite primitifs un élément focal toujours défini sans ambiguïté. Pour respecter les habitudes, je parlerai presque toujours de foyers et non d'éléments focaux; mais, si des droites intervenaient au lieu de cercles, il n'y aurait aucune difficulté à modifier l'énoncé; je montrerai aussi, plus loin, que l'on peut, avec M. Cartan, assimiler une sphère-point à un point, qui en est le centre et un plan isotrope, à un certain point.

Orienter un cercle C , de façon à le transformer en cycle \vec{C} , revient à attribuer le rang 1 à l'un des foyers que nous appelons F' ou foyer *prime*, le rang 2 à l'autre, F'' ou foyer *seconde* ⁽¹⁾. Deux cycles opposés \vec{C} , $(-\vec{C})$ ont un même cercle comme support, le foyer prime de chacun étant foyer seconde de l'autre.

La Géométrie descriptive montre les avantages d'une double construction plane substituée à une unique construction spatiale; de même, nous substituons à chaque cycle de l'espace les traces de ses éléments focaux sur xOy : mais, puisque tout cercle ou cycle de xOy a lui aussi deux sphères focales, il y a quelques précisions à fournir.

En effet un cercle ou cycle *réel* de l'espace à 3 dimensions conduit à étudier des cercles ou cycles du plan xOy , en général *imaginaires*, sauf si le cercle de l'espace vient sur le plan xOy . Il n'y a aucune difficulté pour orienter un cycle *réel* de xOy par le *signe de son rayon*: le rayon est positif si le cycle est parcouru dans le sens direct (sens de la rotation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ amenant \vec{Ox} sur \vec{Oy}), négatif dans le cas contraire; si le cercle est imaginaire, on ne peut donner qu'une définition analytique; le rayon du cercle, quel que soit le système de coordonnées adopté, est fourni par un certain radical carré et la détermination adoptée pour ce radical individualise celui des deux cycles que l'on choisit: $\vec{\gamma}$, tandis que $(-\vec{\gamma})$ correspond à l'autre détermination; ρ étant le rayon de $\vec{\gamma}$, on adoptera comme foyer *prime* de $\vec{\gamma}$ celui qui a pour cote $i\rho$; pour définir complètement un cycle de xOy , il suffit donc d'en donner le foyer *prime*. Si nous envisageons deux cycles $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$, *réels*, du plan xOy , tangents, leurs rayons sont de même signe ou de signes contraires suivant que le contact est

(1) Dans le cours de ce travail, nous laisserons *prime* et *seconde* invariables; on peut imaginer que *prime* est l'abréviation de *d'espèce prime*.

interne ou externe : de toutes façons, la distance des centres est égale à la valeur absolue de la différence des rayons. Il est équivalent de dire que, $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ étant tangents en M, leurs foyers prime F'_1, F'_2 sont sur une même droite isotrope $MF'_1F'_2$ et réciproquement; c'est cette propriété analytique qui permet de définir le contact de deux cycles réels ou imaginaires du plan xOy ; le carré de la distance des centres est encore égal au carré de la différence des rayons. Les foyers seconde donnent de même la droite isotrope $MF''_1F''_2$; si \vec{MT} est la tangente orientée au point de contact M, le plan isotrope $MTF'_1F'_2$ est l'élément focal prime de \vec{MT} , le plan $MTF''_1F''_2$ l'élément focal seconde; on oriente donc une droite de xOy en orientant un cercle de xOy tangent à cette droite.

Si nous considérons un cycle quelconque \vec{C} de l'espace, puis ses sphères focales de centre F', F'' , nous prenons les cercles C', C'' d'intersection de ces sphères par xOy et nous les orientons de sorte que les cycles \vec{C}', \vec{C}'' aient tous deux pour foyers prime F', F'' respectivement : cette définition a, comme nous le verrons, beaucoup d'avantages par rapport à celle qui consisterait à orienter \vec{C}'' de façon que F'' soit foyer seconde (et non prime) de \vec{C}'' . Tout d'abord remarquons que tous les cycles de xOy seront uniformément définis par leur foyer prime, sans avoir à dire si un tel cycle est une image prime ou seconde.

Deux cycles paratactiques \vec{C}, \vec{C}_1 donnent deux images prime \vec{C}', \vec{C}'_1 tangentes entre elles au pied sur xOy de la droite isotrope $F'F'_1$; les deux sphères focales prime se raccordent le long de cette droite; on a des propriétés analogues pour les images secondes \vec{C}'', \vec{C}''_1 . Les réciproques sont vraies : pour que deux cycles soient paratactiques, il est nécessaire et suffisant que leurs images de même nom soient tangentes.

Considérons deux cycles opposés \vec{C} et $(-\vec{C})$; l'image prime de l'un est l'image seconde de l'autre; avec la convention non adoptée, il faudrait, pour obtenir les images de $(-\vec{C})$ à partir de celles de \vec{C} , d'abord changer le numéro d'ordre, puis changer l'orientation.

Soient deux cycles antitactiques \vec{C}, \vec{C}_1 d'images respectives $(\vec{C}', \vec{C}''), (\vec{C}'_1, \vec{C}''_1)$; puisque $(-\vec{C}_1)$ est paratactique à \vec{C} et que $(-\vec{C}_1)$ a pour images : prime \vec{C}'_1 , seconde \vec{C}''_1 , les cycles (\vec{C}', \vec{C}''_1) sont tangents et de même (\vec{C}'', \vec{C}'_1) : les images de noms contraires sont tangentes; réciproquement, cette double condition assure que les cycles de l'espace sont antitactiques. Avec la convention non adoptée, les images de noms contraires eussent été improprement tangentes.

Deux cycles conjugués \vec{C}, \vec{C}_1 sont à la fois paratactiques et antitactiques; donc, chaque image de l'un est tangente aux deux images de l'autre et réciproquement : ici encore, la convention non adoptée eût singulièrement compliqué l'énoncé.

La construction, dans l'espace, des cycles conjugués à un cycle donné \vec{C} réel se ramène donc à un problème de géométrie plane : *construire un cycle tangent à deux cycles donnés*; ces deux cycles sont imaginaires conjugués, de sorte que le cycle imaginaire conjugué du cycle tangent est automatiquement lui aussi tangent et fournit la seconde image du cycle de l'espace.

Pour que deux cycles soient *cosphériques*, il est nécessaire et suffisant qu'ils possèdent un cycle conjugué commun : les points communs aux deux cycles sont les foyers de ce cycle; autrement dit, *il est nécessaire et suffisant que le total des quatre cycles images admette deux cycles tangents communs*; le birapport des points de contact d'un de ces cycles tangents (évalué sur ce cycle) est égal à $\left(-\tan^2 \frac{V}{2}\right)$, où V est l'angle d'intersection. Si l'on appelle M_1, M_2 les deux points communs, et $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ les cycles de xOy dont M_1, M_2 sont les foyers prime, deux circonstances différentes se produisent suivant que M_1, M_2 sont imaginaires conjugués ou sont réels; dans le premier cas, $\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ sont imaginaires conjugués et sont les images, prime et seconde, du cycle conjugué commun réel; dans le second cas, $\vec{\gamma}_1$ est imaginaire conjugué de lui-même (car il a, dans xOy , une équation à coefficients réels), de sorte qu'il constitue à la fois l'image prime et l'image seconde du point M_1 ; il en est de même pour $\vec{\gamma}_2$ et M_2 .

Il est naturel d'étudier surtout les cycles *réels* de l'espace anallagmatique à 3 dimensions; un cycle \vec{C} réel donne deux images \vec{C}', \vec{C}'' dont les supports sont des cercles de xOy , *imaginaires conjugués l'un de l'autre*. Les foyers F', F'' de \vec{C} ont des cotes $a + ib, a - ib$ imaginaires conjuguées; d'après nos conventions, les rayons de \vec{C}', \vec{C}'' sont égaux au quotient par i de $a + ib$ pour \vec{C}' , de $a - ib$ pour \vec{C}'' ; donc le rayon de chaque image est le nombre opposé à l'imaginaire conjugué de l'autre. A un cycle arbitraire $\vec{\gamma}$ tracé dans le plan xOy correspond un seul cycle \vec{C} de l'espace, dont $\vec{\gamma}$ est l'image prime, et par suite un seul cycle de l'espace, à savoir $(-\vec{C})$ dont $\vec{\gamma}$ est l'image seconde; en effet si $\vec{\gamma}$ est une image prime, le foyer prime de $\vec{\gamma}$ est un point F' qui est le foyer prime de \vec{C} , tandis que le point F'' imaginaire conjugué de F' est le foyer seconde de \vec{C} : le cycle \vec{C} est ainsi parfaitement connu.

Un cycle \vec{C} tracé dans xOy a pour image prime lui-même et pour image seconde le cycle opposé $(-\vec{C})$.

Un point réel M peut être considéré comme un cycle de rayon nul et de plan indéterminé : les deux foyers sont confondus avec M et les images de M sont un seul et même cycle de xOy .

Une congruence paratactique réelle orientée $\vec{\Gamma}$ est engendrée par les cycles réels dont les foyers prime et seconde décrivent respectivement les droites fixes Δ' , Δ'' imaginaires conjuguées l'une de l'autre; Δ' coupe xOy en M' , Δ'' le coupe en M'' ; le plan isotrope unique issu de Δ' (ou Δ'') a pour trace sur xOy une droite δ' (ou δ'') issue de M' (ou M''), que nous orientons de sorte que le plan $\delta' \Delta'$ (ou $\delta'' \Delta''$) soit le plan isotrope prime de $\vec{\delta}'$ (ou $\vec{\delta}''$); les images, prime (ou seconde), de tous les cycles de la congruence sont toutes tangentes en M' (ou M'') à $\vec{\delta}'$ (ou $\vec{\delta}''$); on peut donc dire que l'élément de contact orienté, complexe, $(M', \vec{\delta}')$ est l'image prime en bloc de la congruence orientée $\vec{\Gamma}$, tandis que $(M'', \vec{\delta}'')$ en est l'image seconde. Les deux plans isotropes $(\delta' \Delta')$, $(\delta'' \Delta'')$ se coupent suivant le cycle rectiligne de la congruence; cette droite, souvent appelée axe de la congruence, est orientée de sorte que $\vec{\delta}'$, $\vec{\delta}''$ soient ses images prime et seconde. Si \vec{C} est un cycle de la congruence $\vec{\Gamma}$, le cycle \vec{C}_1 , de cette même congruence, conjugué de \vec{C} , est tel que l'image \vec{C}'_1 soit tangente à \vec{C}' en M' et touche \vec{C}'' : cela détermine \vec{C}'_1 d'une façon unique; pour la même raison l'image \vec{C}''_1 est tangente à \vec{C}'' en M'' et touche \vec{C}' .

La géométrie des ∞^6 congruences paratactiques réelles orientées de l'espace anallagmatique à 3 dimensions est ainsi ramenée à celle des éléments de contact orientés du plan xOy ; on doit toutefois signaler qu'il n'existe aucune correspondance biunivoque et bicontinue entre les éléments de contact du plan projectif complexe et les points de l'espace projectif complexe (raison topologique); nous verrons au paragraphe 4 qu'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre les deux variétés à 3 dimensions complexes suivantes: points de l'espace projectif complexe d'une part, droites isotropes de l'espace anallagmatique complexe d'autre part. Or une congruence paratactique réelle orientée est définie d'une façon biunivoque, bicontinue, par la droite isotrope qui porte les foyers prime des cycles. On se rend compte de l'inexistence d'une correspondance biunivoque, bicontinue, entre les éléments de contact du plan projectif complexe et les points de l'espace projectif complexe en considérant une droite isotrope $\vec{\delta}'$ tracée dans xOy : cette droite donne un point M' indéterminé sur elle.

Étudions les ∞^3 congruences paratactiques de l'une ou l'autre espèce orthogonales à une même sphère Σ de centre réel et rayon imaginaire pure: Δ' , Δ'' sont alors deux génératrices imaginaires conjuguées de Σ ; elles sont donc de même système; deux génératrices imaginaires conjuguées, prises dans le système opposé à celui de Δ' , Δ'' , fournissent une congruence paratactique d'espèce opposée; la droite image δ' , du plan xOy , peut être considérée comme trace sur xOy d'un plan isotrope tangent à Σ , donc au cône isotrope concentrique

à Σ ; nous allons donc envisager le cycle $\vec{\sigma}$ de xOy dont le foyer *prime* est le centre de Σ et nous choisissons une tangente (orientée bien entendu) de $\vec{\sigma}$: elle joue le rôle de $\vec{\delta}'$ ou $\vec{\delta}''$; supposons que ce soit $\vec{\delta}'$; le plan isotrope *prime* issu de $\vec{\delta}'$ contient le centre de Σ et une direction isotrope unique à laquelle nous menons la parallèle par l'un ou l'autre des deux points M' , \bar{M}' où $\vec{\delta}'$ coupe le cercle σ , (qu'il est inutile d'orienter), trace de Σ sur xOy ; on a ainsi, si l'on choisit M' , une droite Δ' située sur Σ , définissant, comme il a été expliqué, une congruence paratactique réelle orientée; si l'on adopte \bar{M}' , au lieu de M' , on remplace Δ' par sa symétrique relativement au centre de Σ et nous trouvons une congruence qui est la symétrique, par rapport au centre de Σ , de celle définie par Δ' : ces deux congruences sont d'espèce opposée. Si la tangente, déjà choisie, du cycle $\vec{\sigma}$ est considérée comme droite $\vec{\delta}''$, le plan isotrope *prime* issu de la tangente en jeu ne change pas, comme suite des conventions adoptées ici et nous trouvons les mêmes congruences paratactiques, où chaque cycle est simplement remplacé par son opposé.

3. *Transformation des cycles en cycles avec conservation de la parataxie.* — La transformation conforme réelle de l'espace anallagmatique change un cycle réel \vec{C} en un nouveau cycle \vec{C}_1 réel; nous avons ainsi le groupe général de transformations ponctuelles réelles transformant les cycles en cycles avec conservation de la parataxie. Mais il existe des transformations plus générales, qui ne sont ni ponctuelles, ni transformations de contact, changeant un cycle réel en cycle réel, conservant la parataxie : elles forment un groupe G à 20 paramètres réels et renferment le groupe conforme comme sous-groupe.

Les foyers F' , *prime*, des ∞^6 cycles réels de l'espace anallagmatique réel à 3 dimensions remplissent un espace anallagmatique complexe (F') à 3 dimensions, sur lequel nous pouvons opérer une transformation conforme T' (complexe) à 10 paramètres complexes; un cycle réel \vec{C} a deux foyers F' , F'' imaginaires conjugués; ayant transformé F' en F'_1 par l'opération T' , il suffit d'associer à F'_1 le point imaginaire conjugué F''_1 pour déduire de \vec{C} un nouveau cycle \vec{C}_1 réel aussi; cela revient à dire que l'espace (F''), conjugué de (F'), a été soumis à la transformation conforme T'' , complexe, conjuguée de T' . Puisque deux cycles paratactiques $\vec{C}, \vec{\Gamma}$ donnent deux foyers prime F', Φ' reliés par une droite isotrope, transformée en une nouvelle droite isotrope, les cycles transformés $\vec{C}_1, \vec{\Gamma}_1$ sont encore paratactiques, mais l'angle de parataxie change en général; on doit en effet considérer la sphère Σ contenant les deux droites isotropes $F'\Phi', F''\Phi''$ qui sont sur Σ du même système; le birapport des génératrices de Σ , de système opposé, issues de F', Φ', F'', Φ'' est égal à $\left(-\tan^2 \frac{V}{2}\right)$, où V est l'angle

de parataxie; ce birapport change au cours de la transformation; nous donnons des exemples mettant cette variation en évidence.

Un résultat important est qu'une *congruence paratactique se transforme en une nouvelle congruence paratactique*; l'espèce de la congruence peut être ou non changée.

Voyons ce que deviennent deux cercles conjugués C, C_1 . Le cercle C est support commun de deux cycles $\vec{C}, (-\vec{C})$ tous deux paratactiques aux cycles analogues $\vec{C}_1, (-\vec{C}_1)$. Soient F, Φ les deux foyers du cercle C ; par la transformation T' les points F, Φ deviennent F', Φ' ; par T'' , ils deviennent F'', Φ'' ; on peut supposer que \vec{C} a pour foyer prime F , de sorte que la transformation (T', T'') change \vec{C} en le cycle de foyers (F', Φ'') et $(-\vec{C})$ en le cycle de foyers (Φ', F'') ; le cercle C_1 conduit de même aux cycles $(F'_1, \Phi''_1), (\Phi'_1, F''_1)$ qui sont tous deux paratactiques à chacun des cycles $(F', \Phi''), (\Phi', F'')$ ⁽¹⁾.

Le caractère antitactique se perd: deux cycles $(F', F''), (\Phi', \Phi'')$ sont antitactiques si $F'\Phi''$ est une droite isotrope, ainsi que la droite conjuguée $F''\Phi'$; il n'y a aucune raison pour que, après transformation, les droites $F'_1\Phi''_1$ ou $F''_1\Phi'_1$ soient isotropes.

Une congruence paratactique, non dégénérée, est définie par les deux droites isotropes conjuguées non sécantes Δ', Δ'' , lieux des foyers prime ou seconde; choisissons sur Δ', Δ'' deux points conjugués F', F'' et joignons-les à un point O réel arbitraire; de O menons les droites $\overline{\Delta}', \overline{\Delta}''$ parallèles à Δ', Δ'' respectivement; ces droites sont encore isotropes et conjuguées; elles définissent une congruence paratactique dégénérée formée des cycles tangents entre eux en O , la tangente commune étant perpendiculaire en O à $\overline{\Delta}', \overline{\Delta}''$ et il suffit que T' soit la translation $\overrightarrow{F'O}$, T'' la translation $\overrightarrow{F''O}$ pour que la congruence non dégénérée se transforme en la congruence dégénérée. On peut, d'une infinité de façons, transformer une congruence paratactique donnée, dégénérée ou non, en une autre, elle-même dégénérée ou non, donnée a priori.

Nous allons étudier le cas où T' est la translation $i\vec{A}$, où \vec{A} est un vecteur réel; T'' est la translation $(-i\vec{A})$. Si \vec{C} est un cycle réel, dont le transformé est \vec{C}' , la figure $F'\Phi'F''\Phi''$ formée par les foyers primitifs et transformés est un parallélogramme, dont le centre ω est le centre commun de \vec{C} et \vec{C}' . Or M. Robert a remarqué ⁽²⁾ qu'un cycle \vec{C} de centre ω et rayon R peut être représenté par un

⁽¹⁾ Un point M réel est, remplacé par un cycle dont les foyers prime et seconde sont les transformés de M par T' et T'' ; deux cycles qui ont un point commun M sont remplacés par deux cycles paratactiques au cycle transformé de M ; deux cycles qui ont deux points communs réels sont donc remplacés par deux cycles paratactiques aux cycles transformés des deux points.

⁽²⁾ *Mémoires des Sciences math.*, fascicule CIV déjà cité, p. 40-43.

vecteur $\vec{\omega\Omega}$, de longueur R , porté à partir du centre ω de \vec{C} sur l'axe de \vec{C} , de sorte que l'observateur ayant les pieds en ω , la tête en Ω , voit le cycle tourner autour de lui dans le sens direct; il est évident que la donnée de ω et Ω permet de placer F' , F'' , donc d'avoir \vec{C} d'une façon unique; en ajoutant géométriquement au vecteur $\vec{\omega\Omega}$ le vecteur \vec{A} , et conservant l'origine ω , on obtient le vecteur représentatif de $\vec{\Gamma}$. Un point réel M est remplacé par un cycle de centre M , de plan perpendiculaire à l'axe portant \vec{A} , et de rayon égal à la longueur de \vec{A} . Plus généralement considérons un cycle tracé dans un plan perpendiculaire à \vec{A} ; on a choisi un axe $\vec{\alpha}$ orienté parallèle au support de \vec{A} et nous appelons a le nombre positif ou négatif, qui mesure le vecteur \vec{A} quand $\vec{\alpha}$ est choisi comme axe de référence; nous appelons ρ le rayon du cycle, rayon positif si le cycle tourne dans le sens direct autour de l'observateur traversé des pieds à la tête par un axe parallèle à $\vec{\alpha}$, et de même sens, issu du centre du cercle; le cycle transformé est concentrique au premier, dans le même plan et a pour rayon, en grandeur et signe, $(a + \rho)$.

Nous allons étudier un tore d'axe parallèle à \vec{A} et les parallèles, les méridiens, les cercles de Villarceau de ce tore. Nous orientons tous les parallèles dans le même sens; ils sont remplacés par des parallèles concentriques, de rayon égal à celui du parallèle correspondant, augmenté algébriquement de a . On obtient donc les parallèles d'un nouveau tore dont le cercle méridien provient du cercle méridien primitif par une translation perpendiculaire à l'axe du tore, égale à a , effectuée dans un sens convenable. *En tenant compte d'une homothétie et d'un déplacement, on voit donc que les familles de parallèles (1) de tous les tores (tore usuel sans point conique, ou tore à points coniques engendré par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan le coupant en deux points) sont égales vis-à-vis de notre groupe G.*

Or, si l'on déplace le cercle méridien de façon à faire venir son centre sur l'axe, on obtient une sphère et une famille de parallèles, chaque parallèle étant le support de deux cycles opposés: une inversion effectuée à partir du pôle commun à ces parallèles fournit une famille de cercles concentriques tracés dans un même plan, chaque cercle portant deux cycles opposés: c'est une nouvelle figure égale à la précédente.

Nous allons montrer maintenant que la famille des méridiens d'un tore quelconque est égale à la famille déjà considérée des parallèles d'un tore quelconque, et cela, que le tore soit ou non à points coniques. Sur un tore, non sphérique, l'orientation d'un premier méridien sera choisie arbitrairement et entraîne,

(1) Sur chaque tore les parallèles sont orientés tous dans le même sens, le choix de ce sens étant d'ailleurs indifférent.

par continuité, l'orientation des autres méridiens; mais sur la sphère, on devra considérer chaque méridien comme support de deux cycles opposés. Il y a une raison de topologie évidente qui, soit pour les parallèles, soit pour les méridiens, entraîne cette conséquence.

Appelons a la distance à l'axe du centre du cercle méridien, b le rayon du cercle méridien, a et b étant positifs; supposons $b < a$ de façon à avoir le tore usuel sans points coniques et adoptons les axes habituels : Oz axe du tore; O centre du tore. Le cercle méridien situé dans xOz du côté des x positifs a pour foyers

$$F'(a, ib, 0), \quad F''(a, -ib, 0).$$

Supposons que la transformation T' soit l'homothétie de pôle O et rapport i ; T'' est aussi une homothétie de pôle O et rapport $(-i)$. Le cercle méridien envisagé a pour transformé le cycle de foyers

$$\Phi'(ia, -b, 0), \quad \Phi''(-ia, -b, 0).$$

Le transformé est situé dans le plan yOz , a pour centre le point $(0, -b, 0)$ de Oy , et pour rayon a ; ce cercle coupe Oz , puisque $a > b$; les méridiens du premier tore, dépourvu de point conique, sont remplacés par les méridiens du second tore qui a des points coniques.

Dans ce raisonnement, b peut devenir nul; le premier tore se réduit alors à un cercle et les méridiens aux points de ce cercle; le second tore se réduit à une sphère dont on étudie une famille de méridiens (du moins, ce résultat sera établi à la fin du paragraphe actuel).

D'autre part un tore sans point conique a deux axes de révolution anallagmatique, dont l'un est l'axe métrique; avec les notations qui précèdent ($a > b > 0$), l'axe anallagmatique est le cercle de centre O , tracé dans xOy avec le rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$; une inversion effectuée à partir d'un point de l'axe de révolution circulaire convertit le tore en un nouveau tore, le rôle des axes s'étant échangé, les méridiens de l'un devenant les parallèles de l'autre. La proposition énoncée en résulte : une famille de méridiens d'un tore quelconque (à points coniques ou non), une famille de parallèles d'un tore quelconque (à points coniques ou non), ne constituent qu'une seule famille vis-à-vis de notre groupe; cette famille peut être réduite encore aux points réels d'un cercle ou d'une droite réels, ou encore à un faisceau de cercles quelconques (sur une sphère on prend une famille de parallèles ou de méridiens, et l'on fait une inversion à partir d'un point arbitraire de la sphère); on peut aussi obtenir les génératrices ou les parallèles d'un cône quelconque de révolution : méridiens ou parallèles d'un tore à point conique, transformés par inversion à partir de l'un des points coniques. Cet ensemble de métamorphoses d'une famille de courbes toujours égale à elle-même est vraiment curieux; nous allons donner encore quelques formes saisissantes par leur simplicité; partant des points réels d'une droite

réelle ou d'un cercle réel, si nous utilisons comme transformation T' la translation $i\vec{A}$, et T'' la translation $(-i\vec{A})$, nous obtenons *une série d'anneaux tous égaux, de plans parallèles, ayant pour centres les points de la droite ou du cercle*; si nous partons d'une droite, nous avons *les sections circulaires d'un cylindre du second degré*; on peut aussi supposer que les anneaux égaux soient dans un même plan contenant la droite ou dans le plan du cercle. Il est facile de voir que nous pouvons obtenir aussi *une famille de génératrices d'un hyperboloïde de révolution à une nappe*; en effet, prenons un tore sans points coniques; nous appelons a la distance du centre des méridiens à l'axe, b leur rayon et nous supposons $0 < b < a$; nous supposons que T' soit la translation parallèle à l'axe du tore, d'amplitude $i\sqrt{a^2 - b^2}$, T'' la translation opposée; tous les méridiens sont conjugués à l'axe de rotation anallagmatique circulaire, lequel, considéré comme *cercle* et non *cycle*, donne deux *cycles* transformés, l'un Γ réduit à un point qui est le centre du tore, l'autre Γ' concentrique à l'axe circulaire et de rayon double; les transformés des méridiens sont donc des cycles passant en O et paratactiques au cercle Γ' ; une inversion de pôle O convertit ces cercles en droites engendrant un hyperboloïde de révolution.

Nous devons signaler que nous avons trouvé *plusieurs familles d'éléments dépendant rationnellement d'un paramètre, égales toutes entre elles, sauf une famille exceptionnelle qui n'est égale à aucune des autres*; par exemple, un faisceau de cercles représenté par deux cercles de base, $x^2 + y^2 + m = 0$, $x = 0$; le paramètre est m ; on peut prendre m quelconque, *mais non nul*. Inutile de revenir sur les métamorphoses de cette figure. Le faisceau défini par $x^2 + y^2 = 0$, $x = 0$ appartient à une congruence paratactique dégénérée, tandis que le faisceau $x^2 + y^2 + m = 0$, $x = 0$ ne rentre dans aucune congruence paratactique; par conséquent la figure exceptionnelle ne peut jamais se transformer en l'une des figures non exceptionnelles. Il y a là une circonstance qui mérite une explication; nous la fournirons par comparaison avec la proposition de géométrie métrique plane : *toutes les hyperboles du faisceau $x(y - \lambda) - 1 = 0$ sont égales*; pourtant, la valeur $\lambda = \infty$ fournit la droite Oy , qui n'est égale à aucune courbe du faisceau; l'explication de ce cas est immédiate, car on passe de l'hyperbole λ à l'hyperbole $xy - 1 = 0$ par une translation d'amplitude λ parallèle à Oy ; prenons sur l'hyperbole $xy - 1 = 0$ les segments curvilignes compris entre les parallèles successives à Ox , d'équations $y = 1, y = 2, \dots, y = n, y = n + 1, \dots$. Le segment de rang n ($n < y < n + 1$) est déplacé parallèlement à Oy de façon que son origine vienne sur Ox , l'amplitude du déplacement est mesurée par le nombre n ; quand n devient très grand, le segment transporté se confond *pratiquement* avec le segment $(0, 1)$ de l'axe Oy et c'est pour cela que l'on peut dire que, *asymptotiquement*, l'axe Oy rentre dans la famille; le paradoxe tient à ce que la géométrie projective, et non plus métrique, intervient elle aussi : avant le déplacement, le segment de

rang n est, pour la géométrie projective, pratiquement réduit à un point; après le déplacement, il a retrouvé sa notion de longueur. De même les cercles du faisceau $x^2 + y^2 + m + 2\lambda x = 0$ comprennent pour $m \neq 0$ deux cercles distincts, de rayon nul; pour $m = 0$ ces deux cercles de rayon nul se confondent. Un autre exemple encore plus simple est obtenu par le faisceau de cercles concentriques $x^2 + y^2 - \lambda = 0$, étudié du point de vue du groupe des homothéties réelles ou non de pôle O ; ces cercles sont tous égaux, mais $\lambda = 0$ donne un cercle de rayon nul non égal aux autres.

Reprenons les tores d'axe Oz , de centre O , les notations a, b employées à l'instant; T' est supposée être la translation $i\lambda$, parallèle à Oz , T'' la translation opposée. Cherchons ce que deviennent les cercles de Villarceau d'une même famille : on a supposé $a > b > 0$; posons $b = a \cos \omega$ ($0 < \omega < \frac{\pi}{2}$) et remarquons que l'un des cycles de Villarceau contenus dans le plan $z = x \cot \omega$ a pour foyers les points

$$F'(-ib, b, ia \sin \omega), \quad F''(ib, b, -ia \sin \omega).$$

Les foyers du cercle transformé sont

$$\Phi'[-ib, b, i(\lambda + a \sin \omega)], \quad \Phi''[ib, b, -i(\lambda + a \sin \omega)].$$

Donc, par rotation autour de Oz , le cycle transformé engendre un tore analogue au tore initial, où les éléments a_1, b_1, ω_1 se définissent par les équations

$$b_1 = b, \quad a \cos \omega = a_1 \cos \omega_1, \quad \lambda + a \sin \omega = a_1 \sin \omega_1.$$

On a ainsi

$$a_1 = \sqrt{a^2 + 2a\lambda \sin \omega + \lambda^2}, \quad \tan \omega_1 = \frac{\lambda + a \sin \omega}{a \cos \omega}.$$

Les angles ω, ω_1 sont les angles de parataxie de Oz (qui est lui-même son transformé à titre de cycle) avec les cycles de Villarceau du tore initial ou du tore transformé. *Nous avons ainsi vérifié que l'angle de parataxie change en général.*

Une valeur remarquable de λ est ($-a \sin \omega$); l'axe anallagmatique circulaire du tore a pour rayon $a \sin \omega$ et il s'est transformé en le point O ; Φ' est alors le point ($-ib, b, 0$); on a donc un cycle tracé dans xOz , de rayon b , tangent en O à Oz ; le tore transformé est alors ce tore exceptionnel qui marque la séparation entre les tores sans point conique et ceux à points coniques; les méridiens de ce tore spécial appartiennent à une congruence paratactique dégénérée; *toute famille de Villarceau, tracée sur un tore ou une cyclide de Dupin, est égale à cette famille spéciale, vis-à-vis du groupe G , ou encore, grâce à une inversion de pôle O , à la famille des génératrices d'un cylindre de révolution* ⁽¹⁾.

(1) Les métamorphoses que nous avons indiquées pour une famille de cercles méridiens ou de parallèles des tores quelconques doivent être complétées par les courbes de contact d'une cyclide de Dupin avec l'une des deux familles de sphères à un paramètre dont la cyclide est l'enveloppe.

Rappelons que les parallèles d'un tore (a, b) se sont transformés en les parallèles d'un tore $(a + \lambda, b)$ qui a un cercle méridien égal à celui du tore primitif; ici les cercles de Villarceau se sont transformés en les cercles de Villarceau d'un autre tore (qui a encore même rayon du cercle méridien); les méridiens du tore primitif sont conjugués au cercle Γ de centre O , tracé dans xOy , de rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$: ils se transforment en une série de cercles paratactiques aux deux cycles concentriques à Γ dans xOy , de rayons respectifs $\sqrt{a^2 - b^2} + \lambda$ et $\sqrt{a^2 - b^2} - \lambda$; leur support est une surface cyclide, qui n'est plus cyclide de Dupin.

Terminons en indiquant une autre transformation simple contenue dans G : T' serait la rotation d'amplitude $i\alpha$ d'axe Oz , T'' la rotation conjuguée; les méridiens du tore sans point conique ont leurs foyers sur le cercle Γ signalé à l'instant; les foyers des cercles transformés de ces méridiens sont encore sur ce cercle Γ , de sorte que les méridiens transformés ont pour support un nouveau tore; si α est calculé par la relation $\text{tang } \alpha = \frac{ib}{a} = i \cos \omega$ ou $\text{Th } \alpha = -\cos \omega$, les deux foyers d'un méridien transformé se confondent avec le point où Γ coupe le méridien initial: autrement dit chaque méridien se transforme en un point de Γ et nous avons ainsi démontré ce résultat signalé précédemment, à savoir que les méridiens d'un tore quelconque constituent une famille égale, vis-à-vis de notre groupe G , aux points réels d'un cercle ou d'une droite.

4. *Transformations générales conservant les cycles et la parataxie.* — Le groupe G à 20 paramètres que nous venons d'étudier doit être complété par la transformation qui consiste à renverser le sens de tous les cycles, c'est-à-dire par l'opération qui échange chaque point de l'espace anallagmatique complexe avec son conjugué; l'adjonction de cette transformation fournit un nouveau groupe G_1 à 20 paramètres réels: c'est l'analogue de ce qui se produit en passant du groupe des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions au groupe des transformations qui conservent les distances.

Réciproquement, démontrons que toute transformation continue remplaçant un cycle réel par un cycle réel, avec conservation de la parataxie, est contenue dans le groupe G_1 : la démonstration qui suit est due à M. E. Cartan. Il suffit de raisonner sur l'espace des foyers prime et la transformation effectuée sur cet espace; nous n'avons besoin que des hypothèses suivantes:

La transformation est continue, change deux points distincts en deux points distincts, deux points situés sur une droite isotrope en deux points analogues, deux points non situés sur une droite isotrope en deux points eux aussi non situés sur une droite isotrope. Nous devons arriver à la conclusion: cette transformation est une transformation conforme; nous nous appuyons sur le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Il existe une correspondance biunivoque entre les droites isotropes de l'espace anallagmatique complexe A et les points de l'espace projectif complexe P.*

En effet, dans l'espace A supposé d'abord rapporté à un trièdre trirectangle (OXYZ), nous pouvons substituer aux coordonnées (X, Y, Z) les coordonnées anallagmatiques x_1, x_2, y_1, y_2, z définies par les équations

$$(1) \quad \frac{z}{Z} = \frac{x_1}{X + iY} = \frac{y_1}{X - iY} = \frac{x_2}{-1} = \frac{y_2}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ces coordonnées anallagmatiques homogènes satisfont à la relation quadratique

$$(E) \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 + z^2 = 0.$$

D'autre part, une droite isotrope est définie par les équations

$$(2) \quad X + iY = aZ + b, \quad X - iY = -\frac{Z}{a} + c,$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires; afin de ne pas exclure les valeurs 0, ∞ de a , écrivons

$$(3) \quad a = -\frac{\xi_0}{\xi_1}, \quad b = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad c = \frac{\xi_3}{\xi_0},$$

et nous obtenons les deux équations linéaires

$$(4) \quad \begin{cases} \xi_0 Z + \xi_1 (X + iY) - \xi_2 = 0, \\ \xi_0 (X - iY) - \xi_1 Z - \xi_3 = 0, \end{cases}$$

qui établissent une correspondance biunivoque entre toute droite isotrope de A et tout point $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ de P. Nous remarquons les relations

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= (X + iY)(X - iY) + Z^2 \\ &= (aZ + b) \left(-\frac{Z}{a} \right) + Z^2 + c(X + iY) = c(X + iY) - b \frac{Z}{a}, \end{aligned}$$

ou encore, échangeant a et $\frac{-1}{a}$, b et c , i et $-i$,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = acZ + b(X - iY).$$

Cela nous permet donc d'écrire entre les coordonnées anallagmatiques les quatre équations linéaires

$$(5) \quad \begin{cases} \xi_0 z + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 & \star = 0, \\ \xi_0 y_1 - \xi_1 z & \star + \xi_3 x_2 = 0, \\ \xi_0 y_2 & \star - \xi_2 z - \xi_3 x_1 = 0, \\ \star & \xi_1 y_2 - \xi_2 y_1 + \xi_3 z = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont un cas particulier de formules plus générales ⁽¹⁾; elles se réduisent à trois d'après la façon même dont nous les avons obtenues, puisqu'elles sont la conséquence des deux premières et de la relation quadratique (E); elles sont, sous une forme plus précise et plus complète, les équations directrices de la célèbre transformation de contact de Lie entre les figures de l'espace anallagmatique et celles de l'espace projectif. La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites isotropes concourent est, en appelant (ξ) , (η) les points représentatifs

$$(6) \quad \xi_0 \eta_3 - \xi_3 \eta_0 = \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1$$

et alors les coordonnées du point commun sont

$$(7) \quad \begin{cases} z = \xi_0 \eta_3 - \xi_3 \eta_0, & x_1 = \xi_2 \eta_0 - \xi_0 \eta_2, & x_2 = \xi_0 \eta_1 - \xi_1 \eta_0, \\ y_1 = \xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1, & y_2 = \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2. \end{cases}$$

L'équation (6) définit un complexe linéaire K de l'espace projectif complexe P, engendré par les droites $[(\xi), (\eta)]$ réunissant les points représentatifs des droites isotropes concourantes; ce complexe K peut se définir au moyen des équations (4): à un point (X, Y, Z) donné correspond une droite lieu du point $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, et cette droite appartient au complexe linéaire K dont le rôle dans la transformation de Lie est classique.

Cela posé, toute transformation \mathfrak{C} de l'espace anallagmatique A satisfaisant aux conditions énoncées plus haut se traduit, dans l'espace projectif P par une transformation ponctuelle Π , continue, transformant un point en point, deux points distincts en deux points distincts, trois points alignés en trois points alignés, trois points non alignés en trois points non alignés (on commence par le cas de trois points alignés sur une droite du complexe linéaire K). Le théorème fondamental de la géométrie projective montre alors que Π est une transformation homographique conservant le complexe linéaire K, d'où résulte en utilisant les formules (7) une substitution linéaire sur z, x_1, x_2, y_1, y_2 laissant invariante la relation quadratique $z^2 + x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.

C. Q. F. D.

5. *Configuration des 10 cycles de Barbilian-Tzitzéica.* — Ces deux géomètres ont obtenu (*loc. cit.*) la proposition suivante: soient $\vec{\Omega}$ un cycle du plan xOy et 4 cycles $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ tangents à $\vec{\Omega}$; les 3 cycles $\vec{A}_i, \vec{A}_j, \vec{A}_k$ admettent, outre $\vec{\Omega}$, un nouveau cycle tangent commun \vec{B}_l (i, j, k, l sont les 4 nombres 1, 2, 3, 4 dans un ordre arbitraire); en général, il n'existe pas de cycle tangent

(1) E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs (Actualités, 701, 1938, n° 92, p. 3-5).*

à $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3, \vec{B}_4$; en restant dans ce cas général, il y a de même un cycle \vec{C}_i , distinct de \vec{A}_i , tangent à $\vec{B}_i, \vec{B}_j, \vec{B}_k$; le théorème est le suivant :

Les 4 cycles $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3, \vec{C}_4$ sont tangents à un même cycle $\vec{\Phi}$.

Le cas exceptionnel réservé qui se présente exige, comme condition nécessaire et suffisante, que les 4 points de contact des \vec{A}_i avec $\vec{\Omega}$ forment une division équi-anharmonique. Dans ce cas, les 10 cycles, $\vec{\Omega}, \vec{A}_i (i=1, 2, 3, 4), \vec{B}_j (j=1, 2, 3, 4), \vec{\Phi}$ forment une configuration symétrique de 10 cycles dont chacun touche 4 autres.

Nous allons donner, pour le cas général, une démonstration que M. Robert a imaginée : soient, dans l'espace anallagmatique complexe, un point Ω' et 4 points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 choisis au hasard sur la sphère de rayon nul Ω' ; les sphères de rayon nul A'_2, A'_3, A'_4 se coupent en deux points, dont l'un est Ω' , et l'autre est un point que nous appelons B'_1 ; on définit de même les points B'_2, B'_3, B'_4 ; dans le cas général, les 4 points B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 ne sont pas sur une même sphère de rayon nul; restons dans ce cas général; les 3 sphères de rayon nul B'_2, B'_3, B'_4 se coupent en A'_1 et en un nouveau point C'_1 tel que A'_1 et C'_1 sont les foyers du cercle circonscrit à B'_2, B'_3, B'_4 ; A'_1, C'_1 sont donc inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère S circonscrite aux 4 points B'_i , sphère dont le rayon est supposé non nul; on définit de même C'_2, C'_3, C'_4 ; mais alors la sphère de rayon nul Ω' , qui contient A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 a pour inverse par rapport à la sphère S une autre sphère de rayon nul, qui contient C'_1, C'_2, C'_3, C'_4 ; soit Φ' le centre de cette sphère.

Il suffit maintenant que nous prenions les traces sur xOy des sphères de rayon nul que nous avons indiquées pour obtenir la proposition étudiée; pour que les 14 cycles obtenus soient tous réels, il est nécessaire et suffisant que $\vec{\Omega}$ et les 4 cycles $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ soient réels.

J'ai refait moi-même (*loc. cit.*), par une autre voie que les géomètres roumains, le calcul prouvant que le seul cas où B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 sont sur une sphère de rayon nul est celui où les quatre génératrices $\Omega'A'_i$ de la sphère de rayon nul Ω' forment, sur ce cône isotrope, une division équi-anharmonique. Dans ce cas la configuration des cycles du plan xOy est nécessairement imaginaire et nous pourrions nous demander quel intérêt elle offre, si nous ne songions pas à la réunir à la configuration conjuguée.

Sans qu'il soit utile d'insister, nous voyons alors que nous pouvons énoncer la proposition, du cas général ou du cas exceptionnel, en remplaçant les mots *cycles tangents* par *cycles paratactiques* et cette fois, nous avons une configuration réelle, à 14 cycles dans le cas général, à 10 cycles dans le cas exceptionnel.

De combien de paramètres dépendent ces configurations? Combien ont-elles

d'invariants vis-à-vis du groupe conforme ou vis-à-vis du groupe G_1 , étudié au paragraphe qui précède ?

Dans le cas général, Ω' dépend de 3 paramètres et chaque point A'_i de 2; au total 11 paramètres, *complexes*, il ne faut pas l'oublier; les 14 cycles réels qui offrent les circonstances de parataxie signalées donnent *deux* invariants vis-à-vis du groupe G_1 , *douze* vis-à-vis du groupe conforme; ces nombres, deux ou douze, obtenus par soustraction de 20 ou 10 au nombre 22 sont exacts parce qu'il n'existe, dans l'espace des foyers prime, aucune série continue de transformations conformes transformant en lui-même l'ensemble des 14 foyers prime. Pour ce qui concerne la configuration exceptionnelle de 10 cycles paratactiques, il n'y a plus que 10 paramètres complexes, puisque cette fois le birapport des 4 droites isotropes $\Omega'A'_i$ est déterminé sur le cône isotrope Ω' ; vis-à-vis de G_1 , il n'y a aucun invariant, pour la même raison que plus haut; vis-à-vis du groupe conforme, il en existe dix et deux quelconques de ces configurations sont, vis-à-vis de G_1 , mais non du groupe conforme, égales entre elles (1).

6. *Foyers d'une droite*. — M. E. Cartan m'a suggéré, à propos de mon fascicule déjà cité du Mémorial relatif à la parataxie, quelques résultats que je vais exposer d'après lui.

A la page 85 de ce fascicule, je n'ai pas rappelé que l'espace engendré par les foyers des cycles réels est un espace anallagmatique complexe et non un espace projectif complexe; il n'y a donc qu'un point à l'infini et l'on ne peut parler de conique ombilicale, de sorte que cinq lignes de la page 85 ont besoin d'une retouche; je les recopie :

« Dans une inversion un foyer se transforme en un foyer du nouveau cercle; toutefois, si le cercle devient une droite, les foyers sont les points cycliques communs à tous les plans perpendiculaires à la droite, et, cette fois, deux foyers de cette espèce correspondent non à une seule droite, mais à ∞^2 droites parallèles ».

M. E. Cartan m'écrit : « Dans le cas d'une droite, il existe deux foyers parfaitement déterminés qui sont des sphères-points. Mais alors qu'en géométrie anallagmatique réelle, les points sont les points à distance finie de la géométrie élémentaire complétés par un point impropre, le point à l'infini, le résultat est moins simple en géométrie anallagmatique complexe. Aux points complexes ordinaires à distance finie, et au point à l'infini, il faut ajouter les sphères-points

(1) Dans le Mémoire déjà cité que j'ai rédigé sur cette configuration, j'avais écrit, par distraction, qu'elle n'avait aucun invariant vis-à-vis du groupe conforme. M. B. Segre avait, sans songer lui non plus à la parataxie, généralisé la configuration de Barbilian-Tzitzeica, en indiquant 30 cycles dont chacun est paratactique à 8 autres (*Memorie della R. Accademia dei Lincei*, Classe di scienze fisiche, matematiche et naturali, serie sesta, vol. II, 1927, p. 204-229).

constituées par ce que l'on appelle dans le langage courant les plans isotropes, car, puisqu'il n'existe pas de plan de l'infini, on ne peut parler de l'ombilicale. Cela posé, les foyers d'une droite sont les plans isotropes contenant cette droite. Si un cycle et une droite sont paratactiques, le foyer prime du cycle est situé dans le plan isotrope qui constitue le foyer prime de la droite orientée. Le théorème d'après lequel toute transformation anallagmatique change les foyers d'un cercle en les foyers du cercle transformé est vrai sans aucune exception.

« La notion classique de droite isotrope doit être précisée et complétée en géométrie anallagmatique. Aux droites isotropes classiques, dont chacune est fermée par la sphère-point constituée par le plan isotrope qui la contient, il convient d'ajouter les familles à un paramètre complexe de plans isotropes parallèles entre eux, chaque famille étant fermée par le point à l'infini; ces droites isotropes contiennent un point réel, le point à l'infini, et donnent naissance à des congruences paratactiques dégénérées, qui sont les congruences de droites parallèles à une direction fixe, à savoir la direction réelle commune aux plans isotropes qui constituent cette droite isotrope et à leurs conjugués. Quand on fait une inversion, une telle congruence paratactique devient la congruence paratactique dégénérée, déjà signalée au paragraphe 3, formée des cercles ayant en un point donné la même tangente.

« Les foyers des ∞^6 cycles réels remplissent l'espace anallagmatique complexe, formé des points complexes à distance finie de l'espace euclidien, complétés par le point à l'infini et les plans isotropes-points. C'est un espace homéomorphe à la quadrique complexe de l'espace à 4 dimensions. Cet espace n'est pas homéomorphe à l'espace projectif complexe. Cependant ce dernier espace intervient ⁽¹⁾ si l'on considère la variété des droites isotropes de l'espace anallagmatique complexe, ou la variété des congruences paratactiques propres ou dégénérées de l'espace anallagmatique réel. »

M. E. Cartan définit les points (y compris les sphères-points et les plans-points isotropes) par un procédé purement analytique. Considérons par exemple la sphère

$$(1) \quad a_0(x^2 + y^2 + z^2) - 2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + a_4 = 0,$$

dont nous pouvons dire qu'elle a pour coordonnées homogènes $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$; l'équation, écrite sous forme équivalente,

$$(2) \quad (a_0x - a_1)^2 + (a_0y - a_2)^2 + (a_0z - a_3)^2 + a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0,$$

montre que, si l'on suppose $a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, on a une sphère de rayon nul; or, on peut caractériser d'une façon parfaite une sphère de rayon nul par son centre et dire que ce centre est défini par les coordonnées homogènes

(1) C'est ce qui a été expliqué au paragraphe 4 de ce travail.

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ liées par la relation $a_0 a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, qui représente, dans l'espace projectif complexe à quatre dimensions, une quadrique; $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$ sont les coordonnées cartésiennes du centre, (a_0, a_1, a_2, a_3) ses coordonnées homogènes, la variable d'homogénéité étant placée en tête; la coordonnée surabondante a_4 est précieuse pour généraliser, par exemple pour définir les sphères de rayon non nul, par leurs coordonnées pentasphériques. Nous regardons tout système réel ou complexe $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ satisfaisant à la relation

$$(E) \quad a_0 a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0,$$

comme définissant un point; le passage de l'équation (1) à l'équation (2) n'est légitime que si a_0 est non nul; mais si nous supposons a_0 , d'abord non nul, variant et tendant vers zéro, nous obtenons à la limite l'équation linéaire, que nous rendrons homogène

$$(3) \quad -2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + a_4 = 0,$$

qui représente un plan isotrope, en vertu de $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, et ce plan contient le point $(0, a_1, a_2, a_3, a_4)$: ce point, qui appartient encore à la quadrique définie par (E), caractérise parfaitement le plan.

Si l'on effectue une inversion sur une sphère de rayon nul, on obtient encore une sphère de rayon nul, si le pôle n'est pas situé sur la sphère en jeu; si le pôle est sur cette sphère et distinct du centre, on obtient comme transformée un plan isotrope; si le pôle est au centre, on obtient le point à l'infini.

L'inversion de pôle O et puissance 1 remplace le point $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ par le point $(a_4, a_1, a_2, a_3, a_0)$, en supposant, bien entendu, $a_0 a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ nul; le plan isotrope $(0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ est, dans les mêmes conditions, remplacé par la sphère-point $(a_4, a_1, a_2, a_3, 0)$ qui passe par l'origine. En comparant avec le paragraphe 1, nous voyons qu'il est beaucoup plus avantageux, pour définir un cercle effectif, de prendre ses éléments focaux (sphères-points focales) au lieu des foyers; s'il s'agit d'une droite, nous avons aussi les deux plans-points isotropes, et nous constatons que les éléments focaux se correspondent toujours après un nombre quelconque d'inversions.

Nous pouvons maintenant définir avec précision, sans omission, les diverses droites isotropes. La sphère d'équation

$$(\lambda a_0 + \mu A_0)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\lambda a_1 + \mu A_1)x - 2(\lambda a_2 + \mu A_2)y - 2(\lambda a_3 + \mu A_3)z + \lambda a_4 + \mu A_4 = 0;$$

n'est constamment de rayon nul que si l'on a, en supposant $a_0 A_0 \neq 0$

$$(4) \quad \left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_0} - \frac{a_2}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_0} - \frac{a_3}{a_0}\right)^2 = 0,$$

$$(5) \quad a_0 a_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad A_0 A_4 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2,$$

et nous obtenons alors une droite isotrope ordinaire I. Si nous reprenons, pour un instant, le langage de la géométrie positive, les deux cônes isotropes, l'un de sommet $(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0})$, l'autre de sommet $(\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \frac{A_3}{A_0})$, ont leurs sommets sur une même droite isotrope; leur intersection se compose donc de cette droite prise deux fois et du cercle de l'infini; c'est cette disposition qu'offrent les foyers de même espèce de deux cycles paratactiques ou tangents. Les relations (4), (5) étant vérifiées, pour $\frac{\lambda}{\mu} \neq -\frac{A_0}{a_0}$, nous trouvons ∞^1 sphères-points dont le centre est à distance finie, et, en plus, pour $\lambda = -A_0$, $\mu = a_0$, nous obtenons le plan-point isotrope

$$(6) \quad -2(a_0 A_1 - A_0 a_1)x - 2(a_0 A_2 - A_0 a_2)y - 2(a_0 A_3 - A_0 a_3)z + a_0 A_4 - A_0 a_4 = 0,$$

qui ferme la droite isotrope étudiée.

Par conséquent, la droite isotrope classique peut être définie par une sphère-point à distance finie $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, où a_0 est non nul, et par le plan isotrope $(0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ qui contient la droite : les notations ne sont plus celles qui précèdent immédiatement, car nous avons, pour obtenir les nouvelles notations, dû faire une substitution homographique sur le paramètre $(\lambda:\mu)$ qui définit les coordonnées $(\lambda a_i + \mu A_i)$ des diverses sphères-points qui engendrent la droite isotrope en jeu; nous retrouvons un cône isotrope, un plan tangent à ce cône et la génératrice de contact.

Si maintenant nous supposons $a_0 = A_0 = 0$, nous devons avoir

$$(7) \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0, \quad A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 0, \quad a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0.$$

Ces relations entraînent que (A_1, A_2, A_3) soient proportionnels à (a_1, a_2, a_3) et alors nous trouvons finalement la droite isotrope lieu du point de coordonnées $(0, a_1, a_2, a_3, \lambda)$ où λ est variable; le plan isotrope

$$-2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + \lambda = 0$$

se déplace parallèlement à lui-même; en réunissant les points attachés à chacun des plans parallèles isotropes obtenus, nous avons une infinité de points, dépendant linéairement du paramètre complexe unique λ ; nous devons les considérer comme engendrant une droite isotrope J fermée par le point à l'infini.

Si nous comparons ce résultat aux explications que fournirait un géomètre ne voulant employer que l'espace projectif, nous pouvons porter notre attention sur la conique ombilicale et un point A de cette conique; toutes les droites passant par A sont des droites isotropes I au sens ordinaire; mais la tangente en A à l'ombilicale est une droite isotrope complémentaire, et c'est celle-là que nous venons de signaler comme droite J. Avec les formules (5) du para-

graphe 4, ces droites s'obtiennent en supposant $\xi_0 = \xi_1 = 0$, et l'on a les droites, dépendant du paramètre complexe $\xi_2 : \xi_3$, définies par les équations

$$x_2 = 0, \quad \xi_2 z + \xi_3 x_1 = 0, \quad \xi_2 y_1 - \xi_3 z = 0.$$

En nous reportant à ce qui a été expliqué sur les congruences paratactiques dégénérées, nous voyons qu'une inversion, dont le pôle est sur une droite isotrope ordinaire I, transforme cette droite en une droite isotrope exceptionnelle J qui vient d'être signalée; si nous nous bornons aux congruences dégénérées *réelles*, la droite isotrope I devra être l'une de celles qui ont un point réel, et c'est ce point que nous prendrons comme pôle d'inversion.

Ces précisions sur la notion de foyer ayant été données, le procédé employé pour représenter un cyle de l'espace par deux cycles du plan xOy , puis chaque cycle du plan xOy par son foyer met en évidence le résultat suivant :

La géométrie des sphères orientées de Lie de l'espace à n dimensions se ramène à la géométrie anallagmatique de l'espace à $(n + 1)$ dimensions; le groupe de la première géométrie est formé des transformations portant sur les sphères orientées et conservant le contact de deux sphères orientées; si $n = 2$, il s'agit des cycles du plan.

7. *Ordre anallagmatique d'une courbe ou d'une surface* ⁽¹⁾. — L'ordre anallagmatique d'une surface algébrique peut être défini comme le nombre de points d'intersection de la surface avec une droite isotrope arbitraire : le mot point doit être pris dans le sens anallagmatique qui a été précisé au paragraphe précédent. Il est facile de s'assurer qu'une droite isotrope coupe une sphère en un point et un seul. L'ordre peut encore être défini analytiquement comme le degré minimum de l'équation en coordonnées pentasphériques susceptible de représenter la surface. Quant à l'ordre anallagmatique d'une courbe algébrique, c'est le nombre des points d'intersection de cette courbe avec une sphère arbitraire; la droite isotrope est d'ordre 1, le cercle est d'ordre 2. Il existe des formules analogues à celles de Bezout, mais distinctes. Le nombre des points communs à une courbe d'ordre p et à une surface d'ordre n est égal à pn ; la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre p et p' est égal à $2pp'$, au lieu de pp' ; exemple : deux sphères. L'intersection de deux cyclides est donc d'ordre 8 et par suite trois cyclides ont 16 points communs ⁽²⁾.

Ces résultats mettent en évidence une différence *qualitative* entre l'espace anallagmatique complexe et l'espace projectif complexe. La droite et le plan, qui, en géométrie projective, permettent de définir l'ordre d'une courbe et

(1) Ce paragraphe reproduit une lettre de M. É. Cartan.

(2) ÉLIE CARTAN, *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes* (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, 1, 1932, p. 1-20).

d'une surface, sont, en géométrie anallagmatique, remplacés par la droite isotrope et la sphère; ce sont, dans l'un et l'autre cas, les *bases d'homologie* de l'espace dont il est question en *analysis situs*. La non-homéomorphie des deux espaces est mise en évidence par la non-identité des formules de Bezout, bien que les nombres de Betti soient les mêmes pour les deux espaces.

8. *Orientation* ⁽¹⁾. — Voici une autre remarque, de nature très élémentaire, qui ne semble pas avoir été signalée. En géométrie anallagmatique réelle, on peut orienter les sphères réelles (à centre réel, de rayon réel) : on donne un signe au rayon ou encore, ce qui revient au même, on choisit une des deux régions de l'espace séparées par la surface de la sphère. Considérons deux sphères extérieures l'une à l'autre, orientées toutes les deux vers l'intérieur (au sens vulgaire du mot); ces deux sphères ont un invariant unique, ici > 1 , à savoir $\frac{d^2 - R^2 - R'^2}{2RR'}$; si l'on change leur orientation à toutes deux, R et R' deviennent négatifs, mais l'invariant n'a pas changé; cependant il est impossible de passer, au moyen d'une transformation anallagmatique, de la figure constituée par les deux sphères orientées vers l'intérieur à la figure formée par ces deux mêmes sphères orientées vers l'intérieur : en effet les deux régions intérieures n'ont aucun point commun, les deux régions extérieures en ont une infinité.

Plus généralement on peut se poser la question de savoir s'il existe p sphères réelles orientées indépendantes admettant deux à deux des invariants donnés : pour $p = 3$, il y a trois invariants distincts, pour $p \geq 4$, il existe $4p - 10$ invariants distincts; les conditions de possibilité peuvent se ramener à la recherche du nombre de carrés positifs et de carrés négatifs auxquels on peut réduire une certaine forme quadratique à p variables; si les conditions de possibilité sont réalisées, il arrive, ou bien que les solutions se déduisent toutes, par une transformation anallagmatique arbitraire, d'une solution particulière, ou bien, au contraire, qu'il y ait deux familles distinctes de solutions non anallagmatiquement égales entre elles, les solutions de la seconde famille se déduisant des solutions de la première famille par renversement de toutes les orientations. Le premier cas se produit quand le système linéaire des p sphères ne contient aucune sphère de rayon nul et le second quand il en contient.

Dans le même ordre d'idées, on peut se poser la question de savoir si l'on peut transformer une sphère orientée en une autre, orientée aussi, par une inversion de module positif ou négatif : il y a, suivant les cas, deux possibilités, une ou zéro; il y en a une seule si les sphères sont sécantes, deux ou zéro si elles sont non sécantes.

Dans le domaine complexe, les singularités relatives aux invariants d'une

(1) Ce paragraphe reproduit aussi une lettre de M. É. Cartan.

figure ne se produisent pas. Dans le domaine réel, elles seraient également évitées si, comme le fait le géomètre Blaschke, on adjoignait aux transformations anallagmatiques proprement dites une autre consistant à remplacer chaque sphère réelle orientée par la même, orientée en sens inverse : le nouveau groupe de transformations ainsi obtenu contiendrait donc quatre familles distinctes au lieu de deux.

9. *Une question de topologie* ⁽¹⁾. — On peut se demander s'il est possible de regarder l'espace à 3 dimensions complexes des cycles réels comme le produit topologique de deux autres espaces à 3 dimensions réelles, un cycle réel pouvant (en cas de possibilité) être représenté comme l'ensemble ordonné de deux points appartenant le premier à un espace \mathcal{E}_1 , le second à un espace \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 étant tous deux à 3 dimensions réelles.

La réponse est négative : en voici une raison topologique. Considérons les couples de points obtenus en associant successivement tous les points de \mathcal{E}_1 à un point de \mathcal{E}_2 : il leur correspondra dans l'espace anallagmatique complexe une variété fermée à 3 dimensions réelles, qui ne pourra jamais être réduite à un point par déformation continue, car une telle déformation ferait toujours intervenir tous les points de \mathcal{E}_1 . Or, dans l'espace anallagmatique complexe, qui est au fond une quadrique à 6 dimensions réelles de l'espace projectif complexe à 4 dimensions complexes, toute variété fermée à un nombre impair de dimensions est réductible à un point par déformation continue : il y aurait donc contradiction.

Une autre raison d'ordre analytique est que le polynôme de Poincaré $t^6 + t^4 + t^2 + 1$ de l'espace anallagmatique complexe ne peut être décomposé en le produit de deux polynômes de degré 3 à coefficients positifs ou nuls, ces coefficients étant les nombres de Betti des espaces \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 .

On peut encore ajouter que le groupe à 6 paramètres des transformations anallagmatiques réelles qui laissent invariante une inversion négative se décompose en deux sous-groupes invariants isomorphes au groupe des rotations réelles de l'espace ordinaire ; il n'existe rien de semblable pour le groupe à 10 paramètres complexes des transformations anallagmatiques complexes.

(1) Ce paragraphe est encore emprunté à une lettre de M. É. Cartan.