

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULIEN KRAVTCHENKO

Sur l'existence des solutions du problème de Helmholtz dans le cas des obstacles possédant des points anguleux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 62 (1945), p. 233-268

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62_233_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1945, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'EXISTENCE

DES

SOLUTIONS DU PROBLÈME DE HELMHOLTZ

DANS

LE CAS DES OBSTACLES POSSÉDANT DES POINTS ANGULEUX

PAR M. JULIEN KRAVTCHENKO.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

1. Un Chapitre entier de ma Thèse⁽¹⁾ est consacré aux théorèmes d'existence dans la théorie des sillages; je me suis alors borné au cas des obstacles à tangente continue (et même à courbure continue). Dans le présent Mémoire⁽²⁾, je me propose d'étendre mes conclusions au cas d'un obstacle possédant un nombre fini de points anguleux.

L'étude du problème ainsi généralisé offre un double intérêt. Il ne paraît pas inutile, d'une part, d'étendre la portée des raisonnements, exposés dans ma Thèse, à une catégorie nouvelle de profils; celle-ci comprend comme cas très particulier, les contours polygonaux dont on s'est tant occupé depuis Helmholtz et Kirchhoff et pour lesquels on ne possédait de théorème d'existence que dans

⁽¹⁾ *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz : théorie des sillages et des proues* (*Journal des Mathématiques*, 9^e série, 20, 1941, pp. 35-303). On consultera spécialement le Chapitre III de ce travail (pp. 135-225). Dans la suite, les renvois à ce Mémoire seront désignés par les initiales J. K. suivies de la mention du paragraphe et de la page.

⁽²⁾ Les principaux résultats du présent travail ont été résumés dans la Note : *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz* (*C. R. Acad. Sc.*, 213, 1942, pp. 464-466).

le cas des obstacles symétriques ⁽³⁾ et concaves vers le courant. Ensuite, ces nouveaux théorèmes d'existence une fois acquis, nous pourrons, en adaptant convenablement les raisonnements dont M. P. Montel ⁽⁴⁾ s'était servi dans ses travaux consacrés au problème de la représentation conforme de Riemann, étudier le cas des arcs dépourvus de tangente. Cette dernière catégorie de profils n'est plus tributaire des équations intégrales du problème de Helmholtz, formées par M. H. Villat; mais on arrive au théorème d'existence par voie de passage à la limite, en approchant indéfiniment des contours considérés au moyen de contours réguliers, auxquels s'applique la théorie de M. Villat. Un Mémoire, actuellement en préparation, traitera de cet aspect de la théorie des sillages ⁽⁵⁾.

2. Malheureusement, les solutions du problème de Helmholtz, dont on établit ainsi l'existence (tant dans le cas des contours anguleux que dans celui des obstacles sans tangente), sont loin d'être satisfaisantes du point de vue physique; il suffit de rappeler à ce sujet les paradoxes que M. Brillouin a été le premier à mettre en évidence. Aussi, pour écarter tout danger de recouplement des lignes libres entre elles et avec l'obstacle, nous nous bornerons, comme dans ma Thèse, au cas des obstacles dont l'intersection avec toute parallèle à la direction du courant à l'infini se réduit à un point unique; le domaine du fluide en mouvement est alors nécessairement d'un seul tenant, et cela assure la validité de la solution vis-à-vis de la deuxième condition de M. Brillouin ⁽⁶⁾. Il n'en sera pas toujours de même de la première condition de validité; on sait, par exemple, que la vitesse du fluide devient infinie en chaque point anguleux du profil à pointe tournée vers le fluide vif ⁽⁷⁾; il faut alors modifier le schéma primitif de Helmholtz [par exemple comme l'a fait M. Villat, ⁽⁸⁾] pour construire, relativement aux configurations correspondantes des parois rigides, des mouvements avec sillages physiquement acceptables. Pour de tels profils, le problème classique de Helmholtz est dépourvu de solutions satisfaisant à la première condition de M. Brillouin. Mais si l'on fait abstraction de l'origine hydrodynamique de la question, on obtient un problème de représentation

⁽³⁾ On trouvera dans ma Thèse une bibliographie étendue des travaux consacrés aux obstacles polygonaux (J. K., 3, p. 37, pour le problème dit indéterminé; (pour les travaux de MM. J. Leray et A. Weinstein, voir plus loin).

⁽⁴⁾ *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques*, Paris, 1927, p. 98 et suiv.

⁽⁵⁾ On trouvera un résumé de la démonstration dans ma Note *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz : cas d'un contour sans tangente continue* (C. R. Acad. Sc., 213, 1942, pp. 870-872).

⁽⁶⁾ Pour ces questions de la validité physique, cf. J. K., Chap. II, pp. 107-135.

⁽⁷⁾ Pour ce point, absolument classique et élémentaire, d'ailleurs, cf. par exemple, M. H. VILLAT, *Leçons sur l'Hydrodynamique*, Paris, 1929, pp. 75-76.

⁽⁸⁾ *Ibid.*, pp. 83-87. Cf. aussi la Thèse de M. R. Thiry, consacrée à l'étude des solutions multiples des problèmes analogues à celui du sillage (*Annales de l'École Normale Sup.*, 3, 38^e série, 1922).

conforme qui garde un sens et qui présente un intérêt mathématique de nature à justifier, semble-t-il, l'étude que nous allons entreprendre (⁹).

3. Les méthodes de démonstration que nous allons utiliser sont dues à MM. J. Leray et J. Schauder (¹⁰). On en trouvera une rapide analyse au paragraphe 28 de J. K. (pp. 201-224). Pour raccorder plus complètement le présent exposé au Chapitre III du travail précité, j'ai supposé, dans tout ce qui suit, que chaque arc « régulier » de l'obstacle (c'est-à-dire, l'arc compris entre deux points singuliers consécutifs) possède une courbure bornée. Mais il serait facile [à la suite de M. A. Oudart (¹¹)] de se débarrasser de cette restriction; en fait, il suffisait de supposer que sur chaque arc régulier l'angle de la tangente avec une direction fixe est une fonction hölderienne de l'abscisse curviligne.

4. Avant de clore cette Introduction, faisons un rapide historique du sujet. M. A. Weinstein (¹²) est le premier à avoir établi des théorèmes d'existence pour des obstacles anguleux. Il s'est borné au cas des profils symétriques et concaves, formés d'un nombre fini de segments de droites (obstacles polygonaux); la méthode de cet auteur (méthode dite de continuité) est sans rapport avec la nôtre.

Depuis cette date, l'effort des analystes s'est surtout exercé sur le problème de Helmholtz posé pour des obstacles courbes à tangente continue; on trouvera dans ma Thèse une bibliographie étendue des travaux consacrés à ce très difficile problème. Signalons, toutefois, qu'en 1936, M. Leray (¹³) a annoncé des résultats d'unicité intéressant le cas des contours polygonaux symétriques. Pour autant qu'on puisse se faire une opinion d'après un texte aussi bref, ces conclusions doivent reposer sur des théorèmes d'existence pour les profils correspondants; à ma connaissance, ces recherches de M. Leray n'ont donné lieu à aucune publication. Selon toute probabilité, cet auteur ne s'est limité à l'examen du cas symétrique que pour aboutir à des conclusions d'unicité, but

(⁹) Signalons à l'appui de cette assertion, que si l'obstacle est concave vers le courant, le problème de Helmholtz correspondant possède au moins une solution physiquement acceptable, et cela quel que soit le nombre de points anguleux que possède cet obstacle. Cf. mon article des *Mémoires de l'Académie*, 63, 1936-1939, pp. 1-10 : *Sur un théorème de validité dans la théorie des sillages*.

(¹⁰) *Topologie et équations fonctionnelles*. (*Annales de l'École Normale Sup.*, 61, 1934, pp. 45-90).

(¹¹) Cf. la Thèse de cet auteur *Sur le schéma de Kirchhof-Helmholtz* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 22, 1943, pp. 245-321 et t. 23, 1944, pp. 1-37; on se reportera également à ma Note, *loc. cit.* (²)].

(¹²) Cf. les Notes *Sur les jets liquides à parois données* (*Rendiconti d. R. Acc. dei Lincei*, 4, 1926, p. 119) et *Sur le théorème d'existence pour les jets liquides* (*id.*, 5, 1927, p. 157). Les résultats les plus complets obtenus par les procédés de M. Weinstein sont ceux de MM. J. LERAY et A. WEINSTEIN, *Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz* (*C. R. Acad. Sc.*, 198, 1934, p. 430).

(¹³) *Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz* (*Commentarii mathematici Helvetici*, 8, pp. 145-160; cf. spécialement p. 153).

essentiel du Mémoire qu'il projetait d'écrire; il ajoute, d'ailleurs, que sa méthode est susceptible d'extension au cas des profils formés d'arcs de courbes. Dès lors, il est à présumer que les démonstrations des théorèmes d'existence trouvés par M. Leray doivent être semblables à celles qu'on aura à exposer au cours de ce travail; c'est donc à cet auteur que revient la priorité de la découverte, sinon de la publication. Du reste, je dois beaucoup à la lecture de l'œuvre de M. Leray comme à ses indications personnelles; il n'est que trop juste de le dire.

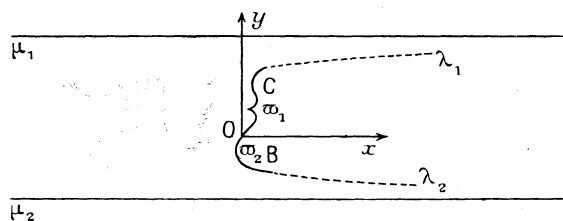
CHAPITRE II.

POSITION DU PROBLÈME. MISE EN ÉQUATION.

RAPPEL DES RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

5. Nous reprendrons la définition de la configuration des éléments rigides donnée au paragraphe 23 de ma Thèse, ainsi que la plupart des hypothèses et des conventions adoptées au cours de ce travail. Nous nous limiterons donc encore au cas d'arcs de courbes pourvues de tangente en chacun de leurs points; on sait que dans ce cas la configuration des éléments rigides (ou, encore, le squelette du schéma, pour se servir d'une expression heureuse, introduite par M. Oudart dans sa Thèse) est définie à une translation près, par la donnée dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, des cinq éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 dont nous allons rappeler la signification géométrique.

Fig. 1.



La courbe (l'obstacle) \widehat{BC} est définie dans le plan z par son équation intrinsèque

$$(1) \quad \Psi = \Psi(l), \quad \alpha \leq l \leq \beta,$$

qui relie l'abscisse curviligne l de \widehat{BC} à l'angle Ψ qui fait avec Ox la demi-tangente à \widehat{BC} (orientée dans le sens des l croissants) au point d'abscisse curviligne l . D'après ce qui précède, $l = \alpha$ ($l = \beta$) correspond au point $B(C)$ (cf. fig. 1).

Nous supposerons encore, comme nous l'avons fait dans notre Thèse, que ⁽¹⁴⁾

$$(2) \quad 0 \leq \Psi(l) \leq \pi,$$

$$(2') \quad \Psi(\alpha) \neq \pi, \quad \Psi(\beta) \neq 0.$$

De plus, la fonction $\Psi(l)$ ne pourra se réduire identiquement à 0 ou à π dans l'intervalle $\alpha \leq l \leq \beta$; toutefois, $\Psi(l)$ pourra être égal à 0 (ou à π) sur un intervalle intérieur à l'intervalle $\alpha \leq l \leq \beta$. Géométriquement, cela veut dire que l'intersection de \widehat{BC} avec toute droite $y = \text{const.}$ se réduit à un point unique à moins que \widehat{BC} ne contienne des segments rectilignes, parallèles à Ox dont les extrémités sont étrangères aux points B et C. D'après cela, l'ordonnée $y(l)$ de \widehat{BC} atteint ses valeurs maxima et minima en C et B; nous supposerons \widehat{BC} placé par rapport aux axes de manière que son point d'ordonnée minima soit B.

L'arc \widehat{BC} est supposé placé à l'intérieur d'une bande indéfinie à bords μ_1 et μ_2 rectilignes et parallèles à Ox ; la distance, finie ou infinie, du point C(B) à μ_1 (μ_2) sera notée d_1 (d_2); d'après cela, les paramètres d_1 et d_2 sont essentiellement positifs.

L'équation (1) détermine l'arc \widehat{BC} à une translation près; il s'ensuit que les cinq éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 définissent le squelette du schéma à une translation près. C'est le résultat que nous voulions rappeler. Pour abrégier les écritures nous désignerons désormais par $\mathcal{C}[\Psi(l), \alpha, \beta, d_1, d_2]$, ou simplement par \mathcal{C} , le squelette caractérisé par les éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 et d_2 .

6. Posons-nous alors, relativement au squelette \mathcal{C} , le problème du *sillage* de Helmholtz dont je rappelle rapidement l'énoncé ⁽¹⁵⁾ :

Déterminer dans le plan de la variable complexe auxiliaire

$$f = \varphi + i\psi,$$

⁽¹⁴⁾ On observera que ces hypothèses diffèrent de celles, plus restrictives que nous avons utilisées dans notre Note des *C. R. Acad. Sc.* [*cf. loc. cit.* (2), inégalités (1)]: par contre, nous serons obligés d'admettre l'existence de la dérivée $\Psi'(l)$. On se rendra compte, un peu plus loin, de l'utilité de chacune de ces hypothèses. Bornons-nous, pour l'instant, à rappeler que les inégalités (2) assurent le non-recouvrement des lignes libres λ_1 et λ_2 entre elles et avec l'obstacle; elles jouent donc un rôle essentiel dans la théorie actuelle. Au contraire, les inégalités (2') ne sont introduites que pour simplifier la démonstration (*cf.* J. K., pp. 167-168). On trouvera, enfin, de nouvelles restrictions à imposer à $\Psi(l)$ au paragraphe 17.

Les paragraphes 6, 7 et 8, extrêmement condensés, s'adressent aux lecteurs familiarisés avec la théorie; ils ont pour but de fixer les repères essentiels et d'éviter ainsi à un lecteur averti de continuel renvois à ma Thèse. Un lecteur profane encore est prié de se reporter aux paragraphes 7, 8, 9, 10 et 23 de J. K.; il y trouvera une justification détaillée des résultats évoqués au cours du présent paragraphe.

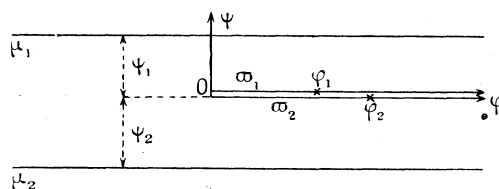
⁽¹⁵⁾ *Cf.* J. K., §§ 7, 8, 9, 10 (pp. 47-65), 12 (pp. 69-77), 23 (pp. 169-176).

un domaine F (cf. fig. 2) en forme de bande indéfinie ⁽¹⁶⁾: $-\psi_2 \leq \psi \leq \psi_1$, $-\infty \leq \varphi \leq +\infty$, entaillée le long de la portion positive de l'axe $O\varphi$ et définir dans F la fonction analytique univalente $z = z(f)$ de façon que :

1° Au domaine F , $z(f)$ fasse correspondre un domaine \mathcal{C} du plan z , compris entre μ_1 et μ_2 ;

2° La portion de la frontière F' de F , étrangère aux segments $\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty$, $\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty$ ($\varphi_1 > 0$, $\varphi_2 > 0$) de l'axe $O\varphi$ ait pour image dans le plan z le sque-

Fig. 2.



lette \mathcal{C} ; ce squelette n'étant défini qu'à une translation près, on prendra pour $z = 0$ le point $z(O)$; on désignera par ω_1 (ou ω_2) la portion \widehat{OC} (ou \widehat{BO}) de \widehat{BC} ; les éléments homologues des frontières sont mis en évidence sur les figures 1 et 2;

3° Au segment $\psi = 0$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty$ (ou $\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty$) de F' , $z(f)$ fasse correspondre une ligne λ_1 (ou λ_2), inconnue a priori, située entre μ_1 et μ_2 et joignant le point $C(B)$ au point $x = +\infty$, et cela de manière à conserver les longueurs; en d'autres termes, on doit avoir :

$$(3) \quad \left| \frac{dz}{df} \right| = 1 \quad \text{pour } \psi = 0 \quad \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \infty, \\ \varphi_2 \leq \varphi \leq \infty. \end{cases}$$

4° Aux points à l'infini de F ou $\varphi > 0$ on doit avoir

$$z = f + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

et

$$z = kf + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

aux points à l'infini de F ou $\varphi < 0$; k est une constante réelle a priori inconnue.

Cet énoncé met en évidence les difficultés spécifiques du problème de Helmholtz. Le domaine d'existence F de $z(f)$ n'est pas donné a priori; il est caractérisé par quatre constantes positives φ_1 , φ_2 , ψ_1 et ψ_2 a priori inconnues.

⁽¹⁶⁾ On a $\psi_1 > 0$; $\psi_2 > 0$.

D'autre part, seule la portion \mathcal{C} de la frontière \mathcal{A}' de \mathcal{A} est une donnée du problème; la détermination de la portion restante $\lambda_1 + \lambda_2$ de \mathcal{A}' doit résulter justement de la condition isopérimétrique (3).

7. Le lecteur trouvera dans ma Thèse [*cf. loc cit.* (¹⁵)] le détail des artifices qui ont servi à M. Villat pour ramener à une équation intégral-différentielle le problème de Helmholtz que nous venons d'énoncer. Nous nous bornerons à rappeler les points essentiels de cette réduction, en insistant sur le fait qu'elle ne s'applique qu'aux contours pourvus de tangente en chacun de leurs points. Bien entendu, nous supposerons d'abord que toutes les formules écrites [et notamment (7) et (8)] ont un sens et nous vérifierons ce point essentiel *a fortiori*, après avoir introduit des hypothèses complémentaires de régularité relativement à \widehat{BC} .

M. Villat pose d'abord

$$(4) \quad f = -\frac{\psi_2}{\pi} \log \frac{t-a}{t_0-a} - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{t-b}{b-t_0} + i\psi_1,$$

où a et b désignent deux nombres réels tels que $a < -1$, $b > 1$ et où

$$(4') \quad t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \quad \text{avec} \quad -1 < t_0 < 1,$$

et où les logarithmes se réduisent à leur détermination arithmétique pour t réel et supérieur à b .

M. Villat prend ensuite

$$(5) \quad t = \frac{a+b}{4} + \frac{1}{2} \frac{p' \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p'(\gamma)}{p \left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z \right) - p(\gamma)},$$

où la fonction elliptique $p(u, \omega_1, \omega_3)$ de Weierstrass est construite à partir des périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$ telles que

$$(5') \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(b-t)(t-a)}}, \quad \frac{\omega_3}{i} = \int_1^b \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(b-t)(t-a)}}, \\ \gamma = 2 \int_b^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(t-b)(t-a)}}, \end{array} \right.$$

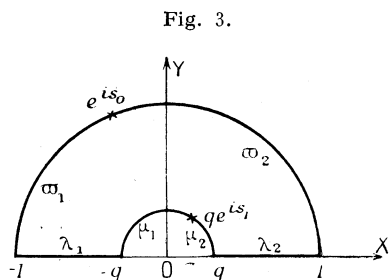
les intégrales (5') étant prises le long de l'axe réel du plan t .

La relation (4) permet de substituer au groupe des quatre inconnues $\psi_1, \psi_2, \varphi_1$ et φ_2 le groupe entièrement équivalent des inconnues ψ_1, ψ_2, a et b . D'un autre côté, le produit des transformations (4) et (5) fait correspondre au

domaine F (cf, fig. 2) la demi-couronne circulaire supérieure d du plan auxiliaire $Z = X + iY$ [cf. (5)].

$$(6) \quad \begin{cases} q \leq |Z| \leq 1 \\ Y \geq 0 \end{cases} \quad \text{avec } q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}.$$

Les éléments homologues sont mis en évidence sur la figure 3.



Les points $Z = e^{is_0}$ et $Z = qe^{is_1}$ sont respectivement les images des points $f = 0$ et $f = -\infty$ du plan f ; une discussion un peu longue (pour laquelle nous renvoyons à J. K., pp. 54-56) montre que les deux groupes de paramètres a , b , ψ_1 et ψ_2 d'une part, q , s_0 , s_1 et ψ_1 , d'autre part, sont entièrement équivalents.

8. Cela fait, introduisons une fonction $l(s)$ définie pour $0 \leq s \leq \pi$, croissant de $l(0) = \alpha$ à $l(\pi) = \beta$ lorsque s croit de 0 à π et associons à cette fonction la fonction analytique de M. Villat

$$(7) \quad \Omega(Z) = \Omega(X, Y) = \Theta(X, Y) + iT(X, Y) = \Psi[l(s)] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\Psi[l(s)]\log Z \\ + \frac{i\omega_1}{\pi^2} \int_0^\pi \{ \Psi[l(s')] - \Psi[l(s)] \} \\ \times \left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s'\right) + \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s'\right) \right] ds' \\ - i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)},$$

définie dans toute la couronne (6); les fonctions elliptiques ζ et σ sont encore construites à partir des périodes ω_1 et ω_3 , données, à leur tour, par (5') en fonction des seuls paramètres a et b . Il s'ensuit que le second membre de (7) est une fonctionnelle de $\Psi(l)$, $l(s)$ de a et de b et de ces éléments seulement, puisque le paramètre s_0 est donné alors par [J. K., p. 70, formule (1.24)]

$$(7') \quad \pi s_0 = \int_0^\pi \Psi[l(s)] ds.$$

D'après les résultats classiques de M. Villat [cf. J. K., 12, p. 70, formules (1.23) et (1.27)], la fonction $\Theta(X, Y)$, harmonique dans le domaine d défini par (6), se réduit à $\Psi[l(s)]$ pour $Z = e^{is}$, $s_0 \leq s \leq \pi$, à $\Psi[l(s) - \pi]$ si $0 \leq s \leq s_0$ et à zéro pour $Z = qe^{is}$; enfin on a $T(X, 0) = 0$ pour $q \leq |X| \leq 1$. On montre alors (cf. J. K., 9, p. 57) que la transformation

$$(8) \quad z(Z) = \int_{e^{is_0}}^Z e^{i\Omega(Z)} \frac{df(Z)}{dZ} dZ$$

[où $f(Z)$ est définie au moyen de (4) et de (5)] fait correspondre au domaine d [cf. (6)] une configuration \mathcal{C}_1 analogue au domaine \mathcal{C} que nous avons attaché au squelette donné \mathcal{C} ; \mathcal{C}_1 sera donc limité par deux droites μ'_1 et μ'_2 , parallèles à Ox (images des arcs $Z = qe^{is}$, $s_1 \leq s \leq \pi$ et $0 \leq s \leq s_1$, respectivement); le restant de la frontière \mathcal{C}'_1 de \mathcal{C}_1 sera formé de l'image de $Z = e^{is}$, $0 \leq s \leq \pi$ qui sera un arc de courbe $\widehat{B_1C_1}$, intérieur à la bande limitée par μ'_1 et μ'_2 et des images des segments $-1 \leq X \leq -q$, $q \leq X \leq 1$, $Y = 0$ du plan Z le long desquelles la condition isopérimétrique (3) sera vérifiée d'elle-même⁽¹⁷⁾; d'après (7) et (8) l'angle de la tangente à $\widehat{B_1C_1}$ avec Ox prendra le long de $\widehat{B_1C_1}$ la même succession des valeurs que le long de l'arc donné \widehat{BC} . Enfin, les éléments $l(s)$, a , b restant toujours arbitraires, on peut choisir ψ_1 et ψ_2 de manière que les arcs \widehat{BC} et $\widehat{B_1C_1}$ aient des longueurs égales. Dès lors la configuration \mathcal{C}_1 formée de $\widehat{B_1C_1}$ et de deux droites μ'_1 et μ'_2 coïncidera avec le squelette \mathcal{C} , donné *a priori* au moyen des éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 , si les trois éléments $l(s)$, a , b , demeurés seuls inconnus, vérifient le système des trois relations [cf. J. K. 12, p. 76 et 23, pp. 174-176; les relations (9) ci-dessous découlent aussi de (8)]

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dl}{ds} = j e^{-T(e^{is})} \frac{df(e^{is})}{ds} \quad (j = \pm 1 \text{ pour } s \gtrless s_0), \\ d_1 = \int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1, \\ d_2 = \int_q^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2, \end{array} \right.$$

dont les seconds membres sont des fonctionnelles compliquées de $\Psi(l)$, α , β et de $l(s)$, a , b ⁽¹⁸⁾ [cf. les formules (4), (5) et (7) ci-dessus]. Rappelons que (9₁) traduit l'identité des arcs $\widehat{B_1C_1}$ et \widehat{BC} , alors que (9₂) et (9₃) expriment la condition de coïncidence de μ'_1 avec μ_1 et de μ'_2 et μ_2 respectivement : le

(17) Ceci en vertu de (8) et de la condition $T(X, 0) = 0$ pour $q \leq |X| \leq 1$.

(18) Rappelons, en effet, que ψ_1 et ψ_2 ont été déterminés en fonction de $\Psi(l)$, α , β , $l(s)$, a et b .

système (9), dû à M. Villat, constitue donc bien le système d'équations fonctionnelles du problème du sillage posé relativement à \mathcal{C} dont $l(s)$, a et b sont les trois inconnues.

9. Il est commode de réduire l'ensemble des relations (9) à une équation fonctionnelle unique. Écrivons d'abord (9) sous la forme équivalente

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} l(s) = \int_0^s e^{-\tau(e^{i\tau})} df + \alpha, \\ b = b + \frac{1}{\lambda} \left[d_1 - \int_{-1}^{-\eta} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) - \psi_1 \right], \\ a = a + \frac{1}{\lambda} \left[d_2 - \int_{\eta}^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) - \psi_2 \right], \end{array} \right.$$

où λ est une constante ayant la dimension d'une longueur et dont le rôle est de rendre homogènes les seconds membres des deux dernières relations du système (10) ⁽¹⁹⁾. Introduisons alors l'ensemble abstrait $E[l(s), a, b]$ dont un élément x sera constitué par l'ensemble de la fonction $l(s)$ et de deux paramètres a et b ; moyennant cette convention de langage, l'ensemble des seconds membres de (10) peut être envisagé comme une transformation fonctionnelle $F(x)$ opérant sur $E[l(s), a, b]$ et qui fournit encore un élément du même ensemble. Il en résulte que l'ensemble des équations (10) de M. Villat est équivalent à l'équation fonctionnelle unique

$$(10') \quad x = F(x),$$

en sorte que l'étude des conditions d'existence des solutions du problème du sillage, posé relativement à notre configuration \mathcal{C} , revient, en dernière analyse, à l'étude des conditions d'existence des solutions de (10'). Or, cette dernière équation appartient au type même envisagé par MM. J. Schauder et J. Leray ⁽²⁰⁾. Dès lors, pour appliquer les critères d'existence, dus à ces auteurs, il est nécessaire d'imposer aux données des conditions supplémentaires de régularité, afin que l'inconnue appartienne à un espace fonctionnel suffisamment régulier ⁽²¹⁾. Dans ma Thèse, j'ai étudié le cas où la fonction caractéristique $\Psi(l)$ de l'obstacle \widehat{BC} était continue pour $\alpha \leq l \leq \beta$ [cf. (2)] et possédait même

⁽¹⁹⁾ On se rappellera que les paramètres a et b sont dépourvus de dimensions [cf. (4)].

⁽²⁰⁾ *Topologie et équations fonctionnelles* (Annales de l'École Normale. Sup., 51, 1935, pp. 45 et 59).

⁽²¹⁾ Nous préciserons ce point en temps utile. Pour l'instant, notons que l'équation (7) ne peut avoir de sens que si la donnée $\Psi(l)$ et l'inconnue $l(s)$ qui y figurent sont assez régulières pour assurer un sens à l'intégrale du second membre, dont le noyau est de la forme

$$\int_0^\pi \frac{\Psi[l(s)] - \Psi[l(s')]}{(s - s')} \mathfrak{S}(s, s') ds',$$

et où $\mathfrak{S}(s, s')$ est une fonction de ses arguments régulière pour $0 \leq s \leq \pi$, $0 \leq s' \leq \pi$.

une dérivée suffisamment régulière. Nous allons reprendre la question en supposant l'arc \widehat{BC} doué d'un nombre fini de points anguleux.

10. Soient donc l_1, l_2, \dots, l_n les abscisses curvilignes des points anguleux P_1, P_2, \dots, P_n de \widehat{BC} . Nous admettrons que la fonction $\Psi(l)$ correspondante, toujours assujettie à vérifier (2) et (2'), est continue dans chacun des intervalles $\alpha \leq l \leq l_1; l_j \leq l \leq l_{j+1} (j = 1, 2, \dots, n-1), l_n \leq l \leq \beta$, mais subit pour $l = l_j (j = 1, 2, \dots, n)$ une discontinuité. Pour des raisons que l'on précisera par la suite [cf. J. K., l'équation (1.25), p. 70 et le raisonnement de la page 73], il sera essentiellement supposé que les nombres α_j définis par

$$(11) \quad \Psi(l_j+0) - \Psi(l_j-0) = (2\alpha_j - 1)\pi \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

et, par suite, compris entre 0 et 1, sont différents de 0 et de 1

$$(11') \quad \begin{cases} \alpha_j \neq 1 \\ \alpha_j \neq 0 \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Géométriquement, cela veut dire que l'arc \widehat{BC} est dépourvu de points de rebroussement et ne possède que des points anguleux.

Ceci étant, supposons encore le problème résolu et soient $s_j (j = 1, 2, \dots, n)$ les arguments des points $Z_j = e^{is_j}$, images des points P_j dans le plan Z . D'après (7) et (8), $\Omega(Z)$ et, par suite $z(Z)$ présente en chaque point Z_j une singularité, en sorte que l'équation (10₁) n'est pas suffisamment régulière pour $s = s_j$. Il apparaît, dès lors, avantageux, quitte à augmenter le nombre des inconnues, de modifier le système (10) de manière à se débarrasser de l'inconnue qui rend discontinue la fonction $\Psi[l(s)]$.

A cet effet, observons que les valeurs des paramètres s_j , *a priori* inconnues, sont assujetties à vérifier le système

$$(12) \quad l(s_j) = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

où $l(s)$ est toujours donné par (10₁). Nous verrons, d'autre part, que la fonction $\Psi[l(s)]$ est suffisamment régulière dans chacun des intervalles $0 \leq s \leq s_1, s_j \leq s \leq s_{j+1} [j = 1, 2, \dots, (n-1)], s_n \leq s \leq \pi$ (cela moyennant quelques hypothèses complémentaires de régularité concernant l'arc \widehat{BC}); il y a donc intérêt à prendre pour nouvelles inconnues les $(n+2)$ paramètres $a, b, s_1, s_2, \dots, s_n$ et les $(n+1)$ fonctions $l_j(s), [j = 1, 2, \dots, (n+1)]$ définies par

$$(13) \quad \begin{cases} l_1(s) = l(s) & \text{pour } 0 \leq s \leq s_1, \\ l_2(s) = l(s) & \text{pour } s_1 \leq s \leq s_2, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots, \\ l_{n+1}(s) = l(s) & \text{pour } s_n \leq s \leq \pi, \end{cases}$$

où $l(s)$ est encore donnée par (10). Dès lors, eu égard à (12) et à (13), (10) sera remplacé par

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} l_1(s) = \int_0^s e^{-\mathbf{T}(e^{is})} |df| + \alpha \quad (0 \leq s \leq s_1), \\ l_j(s) = \int_{s_{j-1}}^s e^{-\mathbf{T}(e^{is})} |df| + l_{j-1} \quad (s_{j-1} \leq s \leq s_j; j = 2, 3, \dots, n); \\ l_{n+1}(s) = \int_{s_n}^s e^{-\mathbf{T}(e^{is})} |df| + l_n \quad (s_{n+1} \leq s \leq \pi), \\ \frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \lambda \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{\int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1} \right], \\ \frac{1}{a+1} = \frac{1}{a+1} + \lambda \left[\frac{1}{d_2} - \frac{1}{\int_q^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_2} \right]; \\ s_1 = s_1 + \frac{1}{\lambda} \left[l_1 - \alpha - \int_0^{s_1} e^{-\mathbf{T}(e^{is})} |df| \right] \\ s_j = s_j + \frac{1}{\lambda} \left[l_j - l_{j-1} - \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-\mathbf{T}(e^{is})} |df| \right] \quad (j = 2, 3, \dots, n). \end{array} \right.$$

On remarquera la forme donnée aux équations (10₂) et (10₃) et dont on verra plus loin l'avantage (*). On observera aussi qu'en vertu des n dernières équations (14) toute solution éventuelle de (14) vérifie les conditions

$$(14a) \quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \pi.$$

D'après ce qui précède, les seconds membres des équations (14) sont des fonctionnelles des données $\Psi(l, d_1, d_2, l_1, l_2, \dots, l_n, \alpha, \beta$ et aussi des $(2n+3)$ inconnues du système (14). Introduisons alors l'ensemble fonctionnel $\mathcal{E}[l_1(s), l_2(s), \dots, l_{n+1}(s), a, b, s_1, s_2, \dots, s_n]$ [ou plus simplement \mathcal{E} (²²) lorsqu'aucune ambiguïté ne sera à craindre] dont un élément x sera constitué par l'ensemble des $(2n+3)$ éléments inconnus, les $(n+1)$ fonctions, $l_j(s)$, les $(n+2)$ paramètres s_j et a et b ; on peut encore considérer l'ensemble des rela-

(*) Il y a lieu d'observer que les inconnues et les données sont assujetties à vérifier la condition de compatibilité suivante :

$$\pi = \pi + \frac{1}{\lambda} \left[\beta - l_n - \int_{s_n}^{\pi} e^{-\mathbf{T}(e^{is})} |df| \right]$$

qui exprime que la longueur totale de l'arc \widehat{BC} est égale à $(\beta - \alpha)$. Mais cette condition est satisfaite d'elle-même (cf. J. K., 23, pp. 173-174).

(²²) Bien entendu, il y aura lieu de préciser avec soin les propriétés de cet ensemble; c'est ce qui sera fait dans les paragraphes qui suivent.

tions (14) comme une transformation fonctionnelle unique, opérant sur l'ensemble \mathcal{E} et qui fournit un élément du même ensemble. Il suit de là que le système (14) est équivalent à une équation fonctionnelle unique

$$(14') \quad x = \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}[x, \Psi(l); l_1, l_2, \dots, l_n; \alpha, \beta, d_1, d_2]$$

que nous allons maintenant étudier plus en détail, de même que nous allons préciser les propriétés topologiques de l'ensemble \mathcal{E} .

11. En premier lieu, rappelons qu'en vertu des inégalités (2) toute solution éventuelle du problème du sillage posé relativement à la configuration \mathcal{C} correspondante, possède la propriété suivante : l'intersection des lignes libres λ_1 et λ_2 avec toute parallèle à Ox se réduit à un point unique.

Reprenons la démonstration de ce fait, en insistant sur un point, trop brièvement traité dans ma Thèse. Supposons qu'il existe une solution du problème de Helmholtz, posé pour le contour \mathcal{C} dont la portion \widehat{BC} soit caractérisée par une fonction $\Psi(l)$ satisfaisant à (2), continue pour $\alpha \leq l \leq \beta$, sauf pour $l = l_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Alors, d'après (14), l'inconnue correspondante $l(s)$ est nécessairement croissante pour $0 \leq s \leq \pi$. Il en résulte que la fonction $\Phi(s)$, associée à $\Psi[l(s)]$ comme il suit,

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \Psi[l(s)] - \pi && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \\ \Phi(s) &= \Psi[l(s)] && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi \end{aligned}$$

[où s_0 est le paramètre défini par (7')], vérifie les trois conditions (*) [cf. (2) et (7')]

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Phi(s) \leq \pi && \text{pour } s_0 \leq s \leq \pi, \\ -\pi &\leq \Phi(s) \leq 0 && \text{pour } 0 \leq s \leq s_0, \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \Phi(s) ds = 0.$$

On remarquera que $l(s)$ n'est pas supposée continue; mais comme $l(s)$ est, par hypothèse, une solution de (14), la fonction $\Omega(Z)$ sera toujours donnée par (7), où l'on aura substitué à $\Psi[l(s)]$ la fonction $\Phi(s)$ que nous venons d'introduire.

Dans ces conditions, les raisonnements du paragraphe 16 de J. K s'appliquent intégralement et montrent que la fonction $\Theta(X, 0)$, définie par (7), est positive pour $-1 \leq X \leq -q$, c'est-à-dire sur λ_1 et négative pour $q \leq X \leq 1$, c'est-à-dire sur λ_2 ; les formules (3) et (8) prouvent alors que sur λ_1 et λ_2

$$\frac{dz}{df} = \frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} = \cos \Theta(X, 0) + i \sin \Theta(X, 0),$$

(*) Le paramètre s_0 peut éventuellement se confondre avec l'un des n paramètres s_j .

donc

$$\frac{dy}{ds} = \sin \Theta(X, o),$$

où $ds = df$ désigne l'élément d'arc de λ_1 et λ_2 , orienté dans le sens des f croissants; cette relation justifie le lemme sus-énoncé.

12. Nous supposerons maintenant que les distances d_1 et d_2 sont toutes deux bornées inférieurement par une longueur fixe d . Les raisonnements du paragraphe 24 de J. K. s'appliquent encore à la configuration \mathcal{C} correspondante, assujettie à vérifier (2) et justifient l'inégalité [cf. (5') et (6) pour la signification de q] ⁽²³⁾

$$(15) \quad q \leq e^{-\frac{1}{10\pi} \frac{d^2}{D^2}}.$$

On déduit de là (cf. *loc. cit.*, p. 182) l'existence d'une constante $K(d)$ ne dépendant que de d , positive, non nulle, telle que

$$(15') \quad \left\{ \begin{array}{l} |a+1| \geq \frac{1}{K(d)}, \\ |b-1| \geq \frac{1}{K(d)}, \\ \frac{1}{|a+1|} \leq K(d); \quad \frac{1}{|b-1|} \leq K(d). \end{array} \right.$$

Ainsi les valeurs des inconnues a, b , solutions éventuelles du système (14) correspondant à une configuration \mathcal{C} (dont les bords μ_1 et μ_2 sont à des distances d_1 et d_2 inférieurement bornées de l'arc \widehat{BC}) sont différentes de -1 et 1 respectivement. Il suit de là [Cf. les paragraphes 14, 14 bis, 28 de J. K.] que la correspondance $z(Z)$ — à supposer qu'elle existe — ne dégénère pas et reste holomorphe pour $q \leq |Z| < 1$, même si l'une des distances d_1 ou d_2 (ou les deux à la fois) devient infinie. On sait que si $d_1 = \infty$ (ou $d_2 = \infty$ ou $d_1 = d_2 = \infty$), le paramètre b (ou a) correspondant (ou les deux à la fois) devient infini et que, réciproquement, la relation $b = \infty$, par exemple, entraîne $d_1 = \infty$. Toutefois, la démonstration complète de ce dernier résultat repose non seulement sur les minoration des distances d_1 et d_2 , mais aussi sur quelques hypothèses de régularité concernant \widehat{BC} (Cf. J. K. paragraphe 27) que les configurations \mathcal{C} , considérées au cours de ce travail, vérifient.

13. Pour continuer, il faut préciser le mode de continuité de $\Psi(l)$ dans chacun des intervalles $\alpha \leq l \leq l_j, l_j \leq l \leq l_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, (n-1)$), $l_n \leq l \leq \beta$.

⁽²³⁾ Soient D_1 le diamètre apparent de \widehat{BC} dans le sens Ox , égal, d'ailleurs, à la différence des ordonnées des points C et B; $2D_2$ le diamètre apparent de \widehat{BC} dans le sens Oy , on posera dans (15), si $d_1 \leq d_2$:

$$D^2 = D_2^2 + (d_1 + D_1)^2.$$

Nous admettrons désormais qu'en chaque point d'un tel intervalle, la dérivée $\Psi'(l)$ existe (extrémités comprises) et qu'elle vérifie l'inégalité

$$(16) \quad |\Psi'(l)| \leq \text{const.}, \quad \alpha \leq l \leq \beta.$$

Il est clair, qu'en général,

$$\Psi'(l_j + 0) \neq \Psi'(l_j - 0) \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

14. Voici, en définitive, l'ensemble des hypothèses de régularité que nous imposons à la configuration \mathcal{C} , caractérisée par les éléments $\Psi(l)$, α , β , d_1 , d_2 .

1° Les paramètres α , β sont bornés en valeur absolue; il en sera de même des n paramètres l_1, l_2, \dots, l_n puisque $\alpha \leq l_j \leq \beta$ ($j = 1, 2, \dots, n$).

2° Les distances d_1, d_2 vérifient les inégalités $d_j \geq d$ ($j = 1, 2$), où d est une longueur fixe.

3° $\Psi(l)$ vérifie les inégalités (2) et (2') pour $\alpha \leq l \leq \beta$.

4° Pour $l = l_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $\Psi(l)$ possède les discontinuités (11), assujetties à satisfaire (11').

5° $\Psi(l)$ est continue et dérivable pour

$$\alpha \leq l \leq l_1, \quad l_j \leq l \leq l_{j+1} \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)], \quad l_n \leq l \leq \beta;$$

la dérivée $\Psi'(l)$ vérifie (16); les expressions $\Psi'(l_j + 0)$ et $\Psi'(l_j - 0)$ existent mais sont, en général, distinctes.

Nous supposons désormais que la configuration \mathcal{C} satisfait à l'ensemble des hypothèses qui précèdent, ensemble que, pour abrégé, nous désignerons par (H). De plus, nous admettrons au cours du paragraphe 23 que $\Psi'(l)$ est continue au sens de Hölder; mais cette hypothèse, qui permet de simplifier l'exposition, n'est pas indispensable.

15. Dans ces conditions nous savons que (H₃) et (H₄) entraînent ce corollaire (2⁴):

Toute solution éventuelle des équations fonctionnelles (14), relatives à une configuration \mathcal{C} satisfaisant aux hypothèses (H) possède la propriété suivante: l'inconnue $l(s)$ vérifie une condition $\mathcal{L}_p(s)$ (2⁵) sur tout l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$:

(2⁴) L'hypothèse de la continuité (H₃) de $\Psi(l)$ sans être indispensable, permet de simplifier la démonstration [Cf. J. K., 22, pp. 159-160; voyez le renvoi (9²), p. 159].

(2⁵) On trouvera une étude détaillée du mode de continuité $\mathcal{L}_p(s)$ au paragraphe 11 de J. K. Rappelons que l'extension de (17) aux voisinages des points $s = 0, s = s_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$), $s = \pi$ repose sur les inégalités (2') et (11') (Cf. J. K., pp. 164-167).

en d'autres termes, s et s' étant deux points quelconques de l'intervalle en cause, on a

$$(17) \quad |l(s) - l(s')| \leq \frac{K}{\left| \log \frac{1}{|s - s'|} \right|^p},$$

où p désigne un nombre positif aussi grand qu'on le veut et K une constante bien déterminée, dépendant de α , β , p et du maximum de $\Psi'(l)$ sur \widehat{BC} .

Il en résulte, en particulier, que chacune des inconnues $l_j(s)$ du système (14) satisfait à (17) sur l'intervalle $s_{j-1} \leq s \leq s_j$ où elle est définie.

16. Les raisonnements exposés dans ma Thèse permettent d'améliorer les résultats qui précèdent sur chacun des intervalles où $\Psi(l)$ est continue. On tire, en effet, de (16)

$$|\Psi(l) - \Psi(l')| \leq \text{const.} |l - l'|,$$

où l et l' désignent les abscissés curvilignes de deux points appartenant à l'un des arcs $\widehat{BP}_1, \widehat{P_1P_2}, \dots, \widehat{P_nC}$; il s'ensuit, eu égard à (17) ⁽²⁶⁾,

$$(18) \quad |\Psi[l_j(s)] - \Psi[l_j(s')]| \leq \frac{\text{const.} K}{\left| \log \frac{1}{|s - s'|} \right|^p},$$

valable même en leurs extrémités $l = l_j$. On en déduit [Cf. les paragraphes 22 et 26 de J. K.] que la dérivée $\frac{dl_j(s)}{ds}$ existe et vérifie une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ à l'intérieur de son intervalle de définition ⁽²⁷⁾. Il nous reste à préciser l'allure de $\frac{dl_j(s)}{ds}$ en les extrémités de l'intervalle en cause.

17. Employons à cet effet un artifice depuis longtemps classique et envisageons la fonction auxiliaire

$$(19) \quad H(Z) = \Omega_0(Z) + \sum_{j=1}^n \frac{(2\alpha_j - 1)}{i} \log \frac{Z - Z_j}{Z - \bar{Z}_j},$$

⁽²⁶⁾ Le nombre p étant arbitrairement grand, il suffirait, pour justifier l'inégalité du texte, de supposer que $\Psi(l)$ vérifie une condition de Hölder. M. Oudart (*loc. cit.*) se borne, justement, à cette hypothèse.

⁽²⁷⁾ (Cf. J. K.; pp. 161-166 et pp. 193-196). On remarquera que la constante de l'inégalité

$$\left| \left[\frac{dl_j(s)}{ds} \right]_{s=s} - \left[\frac{dl_j(s)}{ds} \right]_{s=s'} \right| \leq \frac{\text{Const.}}{|\log(s - s')|^{p-1}}$$

dépend cette fois, non seulement de α , β , p et $\text{Max} |\Psi''(l)|$ mais aussi de la minorante d de d_1 et d_2 .

où les α_j sont donnés par (11), où l'on a posé $\bar{Z}_j = e^{-is_j}$, $Z_j = e^{is_j}$ ($j=1, 2, \dots, n$), où $\log(Z - Z_j) - \log(Z - \bar{Z}_j) = i(s_j - \pi)$ pour $Z = 1$ et où l'on a pris [Cf. (7)]

$$(19') \quad \Omega_0(Z) = \Omega(Z) + i \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} = \Theta_0(X, Y) + iT_0(X, Y).$$

Alors la partie réelle $\Re H(e^{is})$ de $H(e^{is})$ s'écrit

$$(19_1) \quad \Re H(e^{is}) = \Psi[l(s)] + \Re \sum_1^n \frac{(2\alpha_j - 1)}{i} \log \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}}.$$

Comme $\Re \frac{(2\alpha_j - 1)}{i} \log \frac{e^{is} - e^{is_j}}{e^{is} - e^{-is_j}}$ est égale à $(s_j - \pi)(2\alpha_j - 1)$ pour $0 \leq s \leq s_j$ et à $(s_j - 2\pi)(2\alpha_j - 1)$ pour $s_j \leq s \leq \pi$ [c'est-à-dire qu'elle diminue en traversant la singularité $s = s_j$ de

$$\pi(2\alpha_j - 1) = \Psi[l(s_j) + 0] - \Psi[l(s_j - 0)],$$

d'après (11)] la fonction $\Re H(e^{is})$ sera continue pour $0 \leq s \leq \pi$ et vérifiera même sur tout cet intervalle une condition $\mathcal{L}_p(s)$ analogue à (18) et dont le coefficient dépendra des mêmes paramètres, à savoir α, β, p , la cte. de l'inégalité (16). Comme, de plus, $|H(X, 0)|$ est bornée (1), il s'ensuit [Cf. J. K., 11] que la fonction $H(Z)$, holomorphe pour $q \leq |Z| < 1$, vérifie pour $Z = e^{is}$, $0 \leq s \leq \pi$ une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$. Or, de (7) et de (19), on tire

$$(19'') \quad e^{i\Omega(e^{is})} = \frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)\right]} \prod_{j=1}^n \left(\frac{e^{is} - e^{-is_j}}{e^{is} - e^{is_j}}\right)^{2\alpha_j - 1} e^{iH(e^{is})},$$

en sorte que le premier membre est continu au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ dans le voisinage de chaque point de l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$ sauf pour $s = s_0$, où l'expression (19'') possède un pôle simple et, éventuellement [suivant le signe de $(2\alpha_j - 1)$] pour $s = s_j$ ($j=1, 2, \dots, n$). Mais la fonction analytique $\frac{df}{dZ}$ est holomorphe pour $Z = e^{is}$ et possède pour $Z = Z_0$ un zéro simple [Cf. (4) et (5) : Cf. aussi la formule (2.11) de J. K.]; il en résulte que le produit réel

$$\frac{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)\right]}{\sigma\left[\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)\right]} \frac{df(e^{is})}{ds}$$

(1) En effet, $|\Omega(X, 0)| < \pi$, $\left| \sum_1^n \log \frac{Z - Z_j}{Z - \bar{Z}_j} \right| \leq 2\pi n$ pour $Z = X$, $X > 0$; le logarithme du second membre de (19') est borné pour $Z = X$, $X > 0$.

est holomorphe pour $s = s_0$. Or [Cf. (8)]

$$\frac{dl}{ds} = |e^{i\Omega(e^{is})}| \left| \frac{df(e^{is})}{ds} \right|.$$

Les trois dernières égalités prouvent donc bien que $\frac{dl}{ds}$ est continue $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ (comme on l'a annoncé) pour $s = s_0$ tant que $s_0 \neq s_j (j = 1, 2, \dots, n)$. Les relations précédentes montrent aussi que dans le voisinage de $s = s_j$, $\frac{dl(s)}{ds}$ se comporte comme $F(s)|s - s_j|^{1-2\alpha_j}$, où $F(s)$ désigne une fonction continue au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$. Comme, d'après (II'), on a $|1 - 2\alpha_j| < 1$, l'intégrale

$$l(s) = \int_0^s |e^{i\Omega(e^{is})}| df(e^{is}) + \alpha$$

existe quel que soit s , $0 \leq s \leq \pi$; de plus, elle vérifie sur tout cet intervalle une condition de Hölder. En effet, si $(1 - 2\alpha_j) > 0$, $\frac{dl(s)}{ds}$ s'annule pour $s = s_j$ et vérifie une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ dans le voisinage de cette valeur⁽²⁸⁾. Sinon appelons ν un nombre positif, inférieur au plus petit des nombres $2(1 - \alpha_j)$; d'après (II) et (II'), ce nombre existe nécessairement; nous avons, en reprenant la notation $\frac{dl}{ds} = F(s)|s - s_j|^{1-2\alpha_j}$, introduite ci-dessus et valable dans le voisinage de $s = s_j$ et en supposant, pour fixer les idées, $s \leq s_j$

$$\begin{aligned} |l(s_j) - l(s)| &= \int_s^{s_j} |F(s)|(s_j - s)^{1-2\alpha_j} ds \\ &\leq 4\pi^2 \text{Max}|F(s)| \int_s^{s_j} (s_j - s)^{\nu-1} ds = \frac{4\pi^2 \text{Max}|F(s)|}{\nu} |s_j - s|^\nu. \end{aligned}$$

Or, à l'alinéa suivant on vérifiera que les nombres $s_j (j = 1, 2, \dots, n)$ correspondant au squelette \mathcal{C} , assujetti à vérifier les hypothèses (H), sont tels que chacune des expressions $s_1, s_{j+1} - s_j [j = 1, 2, \dots, (n-1)]$ est inférieurement bornée par un nombre positif γ dépendant de α, β, d et $\text{Max}|\Psi'(l)|$. Il en résulte que l'inégalité précédente est valable sur chacun des intervalles

$$s_j - \frac{\gamma}{2} \leq s \leq s_j + \frac{\gamma}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

puisque $|F(s)|$ y vérifiera une condition $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ et y sera bornée par une constante, dépendant de $\text{Max}|\Psi'(l)|, \alpha, \beta, d$. Comme, par ailleurs, $\frac{dl(s)}{ds}$ est continue $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ à l'intérieur des intervalles où $\Psi[l(s)]$ est continue, $l(s)$ vérifiera la condition

$$(20) \quad |l(s') - l(s)| \leq C|s - s'|^\nu$$

⁽²⁸⁾ On se reportera au paragraphe 19 pour l'interprétation géométrique de cette condition. Il est clair que dans ce cas $l(s)$ vérifie une condition de Lipschitz.

sur tout son intervalle de définition $0 \leq s \leq \pi$. Rappelons que C est une fonctionnelle compliquée de α , β , $\text{Max} |\Psi'(l)|$ et de $\frac{1}{d}$, bornée supérieurement au moyen des majorantes de ces quatre paramètres ⁽²⁹⁾.

Pour achever de justifier les développements qui précèdent, il suffit de justifier l'existence de la constante γ . Or, on tire de (8) et (19'')

$$l_j - l_{j-1} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-\text{Imag. H}(e^{is})} \left\{ \prod_{j=1}^n \left| \frac{\sin \frac{s + s_j}{2}}{\sin \frac{s - s_j}{2}} \right|^{2x_j - 1} \right\} \left| \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} ds \right|.$$

Mais $|\text{H}(e^{is})|$ est bornée, ainsi que nous l'avons vu. Donc, l'expression $e^{-\text{Imag. H}(e^{is})}$ admet une minorante positive fixe, dépendant de $\text{Max} |\Psi'(l)|$, α , β , $\frac{1}{d}$ et p . Il en est de même de

$$\left| \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right| \quad \text{pour } 0 \leq s \leq \pi,$$

la minorante correspondante dépendant de $\frac{1}{d}$ seulement. Il s'ensuit que si la longueur $l_j - l_{j-1}$ de l'arc $\widehat{P_{j-1}P_j}$ de \widehat{BC} est inférieurement bornée, la différence $s_j - s_{j-1}$ sera minorée par un nombre positif fixe γ , fonctionnelle de α , β , p , $\frac{1}{d}$, $\text{Max} |\Psi'(l)|$.

C. Q. F. D.

18. Voici d'autres conséquences utiles de la discussion qui précède. L'argument x de la transformation fonctionnelle $\mathcal{F}(x)$ [Cf. (14')] était constitué, rappelons-le, par l'ensemble des $(n + 1)$ fonctions $l_j(s)$ et les $(n + 2)$ paramètres s_j , a et b . Les conclusions du précédent paragraphe permettent de définir $\mathcal{F}(x)$ seulement pour un x dont les $(n + 1)$ arguments $l_j(s)$ sont définis dans les intervalles respectifs $0 \leq s \leq s_1$, $s_j \leq s \leq s_{j+1}$, $s_n \leq s \leq \pi$, sur lesquels elles vérifient une condition (20), qui sont croissantes dans leurs intervalles de définition respectifs et qui, en outre, vérifient les conditions aux limites $l_j(s_j) = l_{j+1}(s_j)$ ($j = 1, 2, \dots, n$); de plus, les arguments s_j de x vérifiaient les inégalités : $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \pi$. Nous allons, à présent, élargir l'ensemble des arguments x sur lesquels est définie (14').

Considérons, à cet effet, l'ensemble $L_j(s)$ de $(n + 1)$ fonctions définies pour $0 \leq s \leq \pi$ sur lequel elles vérifient toutes une condition de la forme (20)

⁽²⁹⁾ Les raisonnements du paragraphe 16 pourraient être appliqués à (20). On montrerait successivement que $\Psi[l_j(s)]$ ($j = 1, 2, \dots, n$) vérifie une telle condition, extrémités de l'intervalle de définition comprises, puis (Théorème de Fatou-Priwaloff) qu'il en est ainsi de $\text{H}(e^{is})$ et, par suite, de $\frac{dl_j(s)}{ds}$, sauf, éventuellement, en les extrémités de son intervalle de définition.

et un groupe de n paramètres s_j , $0 < s_j < \pi$. En général, les $L_j(s)$ ne seront pas monotones et croissantes pour $0 \leq s \leq \pi$; de même, les paramètres s_j ne vérifieront pas les inégalités $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \pi$, en sorte que les intervalles $(0, s_1), (s_1, s_2), \dots, (s_n, \pi)$ pourront empiéter les uns sur les autres (*). Enfin, les fonctions $L_j(s)$ ne vérifieront pas les conditions aux limites $L_j(s_j) = L_{j+1}(s_j)$, en sorte que la fonction $L(s)$, égale à $L_j(s)$ pour $s_{j-1} \leq s \leq s_j$, etc., n'est pas continue pour $0 \leq s \leq \pi$.

Ceci posé, considérons le squelette \mathcal{C} défini par les éléments

$$\alpha < l_1 < l_2 < \dots < l_n < \beta, \quad \Psi(l), \quad d_1, \quad d_2.$$

Associons à $L_j(s)$ la fonction $L_j^*(s)$ en posant

$$\begin{aligned} L_j^*(s) &= l_{j-1} & \text{et} & \quad \Psi[L_j^*(s)] = \Psi(l_{j-1} + 0), & \text{si} & \quad L_j(s) \leq l_{j-1} \\ & & & \text{pour } s \text{ tel que } s_{j-1} \leq s \leq s_j; \\ L_j^*(s) &= L_j(s) & \text{et} & \quad \Psi[L_j^*(s)] = \Psi[L_j(s)], & \text{si} & \quad l_{j-1} \leq L_j(s) \leq l_j \\ & & & \text{pour } s \text{ tel que } s_{j-1} \leq s \leq s_j; \\ L_j^*(s) &= l_j & \text{et} & \quad \Psi[L_j^*(s)] = \Psi(l_j - 0), & \text{si} & \quad L_j(s) \geq l_j \\ & & & \text{pour } s \text{ tel que } s_{j-1} \leq s \leq s_j. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, $\Psi[L_j^*(s)]$ est définie dans tout l'intervalle $s_{j-1} \leq s \leq s_j$; on définirait d'une manière analogue $\Psi[L_1^*(s)]$ sur $0 \leq s \leq s_1$ et $\Psi[L_{n+1}^*(s)]$ sur $s_n \leq s \leq \pi$. On peut alors déterminer le paramètre s_0 en écrivant [Cf. (7)']

$$\pi s_0 = \int_0^{s_1} \Psi[L_1^*(s)] ds + \sum_{j=2}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} \Psi[L_j^*(s)] ds + \int_{s_n}^{\pi} \Psi[L_{n+1}^*(s)] ds.$$

De même, la formule (7) fera correspondre à l'élément x considéré une fonction $\Omega(Z)$, pourvu que l'on écrive l'intégrale du second membre

$$\int_0^{s_1} + \int_{s_1}^{s_2} + \dots + \int_{s_n}^{\pi}.$$

Observons, toutefois, que les discontinuités subies aux points $s = s_j$ par $\Psi(s)$ peuvent n'être pas données par (11); il en sera ainsi, par exemple, lorsque $l_{j-1} < L_j^*(s_{j-1}) < l_j$, car dans ce cas, en général, $\Psi[L_j(s_{j-1})] \neq \Psi(l_{j-1} - 0)$.

Comme les $L_j(s)$ satisfont à (20), les $\Psi[L_j^*(s)]$, eu égard à (16), vérifieront également une condition de Hölder sur chacun des intervalles où $\Psi[L_j^*(s)]$ considérée est définie : il en sera par suite, de même, en vertu du théorème de Fatou et Priwaloff de $\Omega(e^{is})$. A partir de là, le raisonnement se développe comme

(*) Si $s_{j-1} > s_j$, l'intervalle de définition des fonctions $L_j^*(s)$, introduites ci-dessous, sera $s_j \leq s \leq s_{j-1}$ au lieu de $s_{j-1} \leq s \leq s_j$. Pour simplifier les écritures, nous adopterons dans la suite la notation $s_{j-1} \leq s \leq s_j$ pour l'intervalle en cause.

au paragraphe 17. On montre ainsi que si, dans les seconds membres des $(n + 1)$ premières équations de (14), on remplace par les

$$L_j(s), s_j, a, b, [(a + 1) < 0, (b - 1) > 0]$$

une solution éventuelle $l_j(s), s_j, a, b$ du problème du sillage, posé relativement au squelette \mathcal{C} , on obtient $(n + 1)$ fonctions $L'_j(s)$ différentes, en général, des $L_j(s)$ mais qui vérifieront sur leurs intervalles respectifs de définition (lesquels seront étendus à tout l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$; Cf. le paragraphe 21) une condition de Hölder telle que (20). Étant données les transformations effectuées sur les $L_j(s)$ pour construire les $L'_j(s)$, les constantes des deux inégalités de Hölder, vérifiées par les $L_j(s)$ et $L'_j(s)$ respectivement, peuvent n'être pas les mêmes; mais si a et b vérifient (15) et (15'), ces deux constantes seront majorées en fonction de $d, \alpha, \beta, \text{Max}[\Psi'(l)]$ et p . Ajoutons qu'en général, les $L'_j(s)$ ne seront pas croissantes et ne vérifieront pas les conditions aux limites $L'_j(s_j) = L'_{j+1}(s_j)$ (30). Enfin, on peut étendre ces conclusions à tout intervalle borné de l'axe réel s .

19. Faisons ici une remarque à titre de parenthèse. Au cours du paragraphe 17, nous avons constaté que toute solution éventuelle $l(s)$ de (14) possédait une dérivée qui, dans le voisinage de $s = s_j$, se comporte comme $F(s)|s - s_j|^{1-2\alpha_j}$, où $F(s)$ désigne une fonction continue au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ dans le voisinage considéré de $s = s_j$. Il suit de là que si $1 - 2\alpha_j > 0$ [d'après (11), cela veut dire qu'au point P_j correspondant, image de $Z_j = e^{is_j}$, \widehat{BC} tourne sa pointe du côté des x négatifs, ou encore, en langage hydrodynamique, que \widehat{BC} y présente un angle saillant au liquide en mouvement], $\frac{dl}{ds}$ existe et est continue $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ au point $s = s_j$. S'il en est de même de tous les points anguleux P_j , c'est-à-dire si \widehat{BC} tourne sa convexité du côté des x négatifs, toutes les inconnues $l_j(s)$ [$j = 1, 2, \dots, (n + 1)$] du système (14) posséderont des dérivées $\frac{dl_j(s)}{ds}$ continues au sens $\mathcal{L}_{p-1}(s)$ sur leurs intervalles de définition, extrémités comprises. Dans ce cas, la démonstration du théorème d'existence se simplifie et ne diffère pas essentiellement de celle que j'ai donnée dans ma Thèse dans le cas des arcs \widehat{BC} à tangente continue. Mais nous avons déjà fait remarquer que toute solution éventuelle du problème du sillage, posé pour un squelette semblable, serait inacceptable physiquement.

20. Il nous reste à étudier les $(n + 2)$ dernières équations (14). Ici encore, les seconds membres se présentent sous forme de fonctionnelles compliquées

(30) C'est ici qu'apparaît nettement l'avantage qu'il y a à substituer à l'inconnue $l(s)$ les $(n + 1)$ inconnues $l_j(s)$. Moyennant cette substitution, il devient possible (Cf. les paragraphes 21 et 22) de munir l'ensemble \mathcal{E} , introduit au paragraphe 20, de toutes les propriétés topologiques utiles pour définir la transformation $\mathcal{F}(x)$ sur des hypersphères convenables de \mathcal{E} .

des données $\Psi(l), l_1, l_2, \dots, l_n, d_1, d_2, \alpha, \beta$ et des inconnues $l_j(s), s_j, a$ et b . Reprenons l'élément $x = x[l_j(s), s_j, a, b]$, envisagé déjà au paragraphe 18; rappelons qu'à présent les paramètres s_j ne sont pas les fonctions croissantes de leurs indices. Portons les $L_j(s)$ et les s_j ainsi définis dans les fonctionnelles qui figurent dans les seconds membres des n dernières équations (14). D'après ce qu'on a vu aux paragraphes 17 et 18, les expressions telles que

$$\int_{s_{i-1}}^{s_j} e^{-\mathbf{I}(e^{is})} |df(e^{is})|$$

sont supérieurement bornées en fonction des majorantes de $\alpha, \beta, \text{Max } \Psi'(l)$ et de la minorante d de d_1 et d_2 ; il s'ensuit que les premiers membres des équations considérées, différents, en général des s_j et dont les valeurs peuvent être étrangères à l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$, sont nécessairement bornés, en valeur absolue, par des fonctionnelles convenables des mêmes éléments que ci-dessus.

D'un autre côté, les raisonnements de J. K., § 27, pp. 163 et les suivantes, s'appliquent intégralement. Il s'ensuit que les quantités positives

$$\int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) \quad \text{et} \quad \int_q^1 \sin \Omega(X, 0) df(X, 0)$$

sont minorées par un nombre positif, non nul, dépendant des minorantes de d_1 et d_2 d'une part et de la minorante de la mesure de l'ensemble sur lequel $\Psi(s) = \Psi[L(s)]$ est supérieure à $\varepsilon > 0$. Donc les seconds membres des équations $n+2$ et $n+3$ de (14) sont bornés supérieurement.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS TOPOLOGIQUES DE L'ENSEMBLE \mathcal{E} . THÉORÈME D'EXISTENCE.

21. Nous sommes maintenant en mesure de préciser les propriétés topologiques de l'ensemble abstrait $\mathcal{E}[l_1(s), l_2(s), \dots, l_{n+1}(s), a, b, s_1, \dots, s_n]$ que nous avons introduit au paragraphe 10. Il sera commode, en premier lieu, d'assigner aux inconnues $l_j(s)$ un intervalle commun de définition. Nous écrivons donc désormais

$$\begin{aligned} l_1(s) &= l(s) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_1; & l_1(s) &= l_1(s_1) \quad \text{pour } s_1 \leq s \leq \pi; \\ l_j(s) &= l(s) \quad \text{pour } s_{j-1} \leq s \leq s_j; & l_j(s) &= l_j(s_{j-1}) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_{j-1}; \\ & & l_j(s) &= l_j(s_j) \quad \text{pour } s_j \leq s \leq \pi \quad (j=2, 3, \dots, n); \\ l_{n+1}(s) &= l(s) \quad \text{pour } s_n \leq s \leq \pi; & l_{n+1}(s) &= l_{n+1}(s_n) \quad \text{pour } 0 \leq s \leq s_n. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, toutes les fonctions $l_j(s)$ [$j=1, 2, \dots, (n+1)$] vérifient une condition (20) dans l'intervalle $0 \leq s \leq \pi$; elles possèdent donc

sur leur intervalle commun de définition une égale continuité. Considérons alors l'ensemble $E[L(s), 0, \pi]$ de toutes les fonctions assujetties à satisfaire aux conditions suivantes :

1° elles sont définies pour $0 \leq s \leq \pi$;

2° chacune d'elles vérifie sur son intervalle de définition la condition de Hölder telle que (20) ⁽³¹⁾.

Nous appellerons *norme* d'un élément de $E[L(s), 0, \pi]$ la grandeur $\|L(s)\|$ définie par

$$(21) \quad \|L(s)\| = \text{maximum de } |L(s)| + C,$$

où C désigne la constante de la condition de Hölder vérifiée par $L(s)$. Soient, d'autre part, m et m_1 deux nombres réels quelconques. Il est clair que la combinaison linéaire $mL(s) + m_1L_1(s)$ des deux éléments $L(s)$ et $L_1(s)$ de $E[L(s), 0, \pi]$ est encore un élément de l'ensemble. Il résulte de ce qui précède que $E[L(s), 0, \pi]$ peut être considéré comme un espace fonctionnel linéaire, normé et complet ⁽³²⁾.

Cela étant, observons que les $(n+1)$ inconnues $l_j(s)$ sont des éléments particuliers de $E[L(s), 0, \pi]$; on peut, dès lors, regarder l'ensemble \mathcal{E} comme le produit de $\{E[L(s), 0, \pi]\}^{n+1}$ par l'espace euclidien dont un point aurait pour coordonnées les nombres $\frac{1}{b-1}, \frac{1}{a+1}, s_1, s_2, \dots, s_n$. Soient alors

$$\begin{aligned} x &= x \left[L_1(s), L_2(s), \dots, L_{n+1}(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}, s_1, \dots, s_n \right] \\ &= x \left[L_j(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}, s_j \right], \\ x^* &= x^* \left[L_1^*(s), L_2^*(s), \dots, L_{n+1}^*(s), \frac{1}{a^*+1}, \frac{1}{b^*-1}, s_1^*, \dots, s_n^* \right] \\ &= x^* \left[L_j^*(s), \frac{1}{a^*+1}, \frac{1}{b^*-1}, s_j^* \right] \end{aligned}$$

⁽³¹⁾ Il est essentiel de noter que les fonctions $L(s)$ ne sont pas nécessairement croissantes, à l'encontre des solutions $l_j(s)$ du système (14). D'ailleurs, nous serons obligés de regarder l'ensemble \mathcal{E} , introduit au paragraphe 10 et sur lequel opère la transformation (14') comme un espace abstrait linéaire. Cela veut dire que toute combinaison linéaire à coefficients constants des éléments de cet espace doit être encore un élément de cet espace. Or, une combinaison linéaire de fonctions croissantes n'est pas toujours une fonction croissante.

⁽³²⁾ Pour ces notions on pourra se reporter à J. K., paragraphe 28; spécialement les pp. 201-207. On y trouvera un rapide résumé de la théorie de MM. Leray et Schauder [*Cf., Loc. cit.* (10)] dont nous aurons à faire usage ainsi que de brèves indications sur certaines notions de Topologie, utilisées au cours des paragraphes qui suivent. Pour plus de détail, cf. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Chap. I.

Aucune confusion n'est à craindre entre la lettre x désignant l'abscisse du plan $z = x + iy$ et l'élément x de l'espace fonctionnel défini dans le texte.

deux éléments quelconques de \mathcal{E} , m et m^* deux nombres réels quelconques; il est clair que l'élément

$$mx + m^*x^* = \left[\begin{array}{c} m L_1(s) + m^* L_1^*(s), \dots, m L_{n+1}(s) + m^* L_{n+1}^*(s), \\ \frac{m}{a+1} + \frac{m^*}{a^*+1}, \frac{m}{b-1} + \frac{m^*}{b^*-1}, ms_1 + m^*s_1^*, \dots, ms_n + m^*s_n^* \end{array} \right]$$

appartient encore à \mathcal{E} , ce qui prouve que \mathcal{E} est un ensemble linéaire. Nous appellerons, pareillement, norme $\|x\|$ d'un élément x de \mathcal{E} , le nombre positif défini par

$$\|x\| = \|L_1(s)\| + \dots + \|L_{n+1}(s)\| + \left| \frac{1}{a+1} \right| + \left| \frac{1}{b-1} \right| + |s_1| + |s_2| + \dots + |s_n|,$$

où les symboles $\|L_j(s)\|$ désignent les normes des $L_j(s)$ sur l'ensemble $E[L(s), 0, \pi]$. Moyennant ces conventions, l'ensemble \mathcal{E} peut être encore considéré comme un espace fonctionnel, linéaire, normé, complet.

22. Or, au paragraphe 18, nous avons défini la transformation $\mathcal{F}(x)$ en chaque point

$$x = x[L_j(s), s_j, a, b]$$

de l'espace \mathcal{E} . La correspondance fonctionnelle $x' = \mathcal{F}(x)$ opère donc sur un espace linéaire, normé, complet. Il reste à étudier le produit x' de cette transformation de \mathcal{E} .

En premier lieu, observons que toute solution éventuelle x de l'équation (14), relative à une configuration \mathcal{C} satisfaisant aux hypothèses (H) (cf. § 14) appartient à l'hypersphère de \mathcal{E} définie par

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{1}{a+1} \right| \leq K(d), \quad \left| \frac{1}{b-1} \right| \leq K(d), \\ \|L_j(s)\| \leq \text{const.} \quad [j=1, 2, \dots, (n+1)]; \quad |s_j| \leq \pi \quad (j=1, 2, \dots, n), \end{array} \right.$$

ce qui s'écrit encore

$$(22') \quad \|x\| \leq n\pi + (n+1) \text{const.} + 2K(d).$$

Les deux premières inégalités (22) résultent, en effet, de (15'). Ensuite, chaque inconnue $l_j(s)$ est telle que $\alpha \leq |l_j(s)| \leq \beta$, $0 \leq s \leq \pi$; elle satisfait, d'autre part à l'inégalité (20); (21) montre alors que $\|l_j(s)\|$ est majorée par une constante qui demeure bornée tant que le sont les quantités $\alpha, \beta, \text{Max} |\Psi'(l)|$ et tant que $d > 0, d \neq 0$. Enfin, les n dernières inégalités (22) résultent de (14a). Les résultats des paragraphes 18 et 20 prouvent alors qu'à tout élément x de l'hypersphère (22) de \mathcal{E} , $\mathcal{F}(x)$ fait correspondre un élément x' du même espace \mathcal{E} , intérieur à l'hypersphère

$$\|x\| \leq \text{const.},$$

dont le rayon est encore une fonctionnelle de α , β , $\text{Max} |\Psi'(l)|$ et $\frac{1}{a}$, bornée supérieurement en fonction des majorantes de ces quantités. Cela montre aussi que tout ensemble borné de l'espace \mathcal{E} est transformé par $\mathcal{F}(x)$ en un ensemble borné du même espace; ce dernier ensemble, d'ailleurs, est compact en vertu du théorème d'Arzela, puisque ses éléments sont constitués par des paramètres numériques et par des fonctions également continues. Il en résulte que la correspondance $x' = \mathcal{F}(x)$ sera complètement continue, au sens de Riesz, si nous prouvons, de plus, que $\mathcal{F}(x)$ est continue en norme, par rapport à son argument x à l'intérieur de l'hypersphère (22). Cela veut dire que x et x' étant deux éléments de (22) et ε un nombre positif aussi petit qu'on le veut, l'inégalité

$$\|x - x'\| \leq \varepsilon$$

entraîne

$$\|\mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(x')\| \leq \eta(\varepsilon),$$

où $\eta(\varepsilon)$ est un nombre positif, décroissant avec ε , tendant vers zéro avec ε .

23. Voici une vérification rapide de cette propriété⁽³³⁾. Posons

$$(23) \quad \begin{cases} x = x \left[L_j(s), \frac{1}{a+1}, \frac{1}{b-1}, s_j \right], \\ x' = x' \left[L_j(s) + \delta L_j(s), \frac{1}{a+1} + \delta \left(\frac{1}{a+1} \right), \frac{1}{b-1} + \delta \left(\frac{1}{b-1} \right), s_j + \delta s_j \right] \end{cases}$$

et supposons que

$$(23') \quad \|x - x'\| = \sum_{j=1}^{n+1} \|\delta L_j(s)\| + \sum_{j=1}^n |\delta s_j| + \frac{|\delta a|}{|a+1|^2} + \frac{|\delta b|}{|b-1|^2} < \varepsilon.$$

La fonction $\frac{df(e^{is})}{ds}$ est une fonction de a et de b holomorphe dans l'hypersphère (22) (cf. J. K., pp. 247-253); il en est de même de $\Omega(Z)$, envisagée comme fonction des mêmes paramètres. Par suite, les variations des seconds membres de (14), provenant des variations subies par a et b , peuvent, d'après (23'), être majorés par une expression de la forme const. ε , où la constante est bornée en fonction de α , β , $\frac{1}{a}$, $\text{Max} |\Psi'(l)|$.

D'un autre côté, $\Psi'(l)$ vérifie sur chacun des arcs \widehat{BP} , $\widehat{P_1P_2}$, ..., $\widehat{P_nC}$ de \widehat{BC} une condition de Lipschitz [cf. (16)]; on a donc, si $L_j(s)$ et $L_j(s) + \delta L_j(s)$ sont deux fonctions voisines en norme

$$(24) \quad \begin{aligned} |\delta \Psi[L_j(s)]| &= |\Psi[L_j(s) + \delta L_j(s)] - \Psi[L_j(s)]| \\ &\leq \max |\Psi'(l)| \cdot |\delta L_j(s)| \leq \max |\Psi'(l)| \varepsilon. \end{aligned}$$

⁽³³⁾ Le lecteur trouvera de plus amples détails dans un travail de M. R. Huron au cours duquel sera effectuée la différentiation, au sens de M. Fréchet, de la fonctionnelle $\mathcal{F}(x)$ de (14'). Toutefois, cette différentiation n'est légitime que si $\Psi'(l)$ est continue pour $\alpha \leq l \leq l_1$, $l_1 \leq l \leq l_2$, ..., $l_n \leq l \leq \beta$ et si, de plus, tous les nombres $2\alpha_j - 1$ sont positifs.

où les expressions $\Psi[L_j(s)]$ ont été définies au paragraphe 18; l'inégalité précédente fournit donc une majorante pour $|\delta\Psi[L_j(s)]|$ en un point s fixe. Pour préciser, utilisons l'hypothèse (H_s) (cf. § 14) et supposons même que $\Psi'(l)$ soit continue au sens de Hölder sur chacun des intervalles où $\Psi(l)$ est continue. Dans ce cas, la partie principale de $\delta\Psi[L_j(s)]$ s'écrit $\Psi'[L_j(s)]\delta L_j(s)$ et nous avons, en désignant par μ l'exposant de l'inégalité de Hölder qui vérifie $\Psi'(l)$ ⁽³⁴⁾

$$(25) \quad \begin{aligned} & |\delta\Psi[L_j(s)] - \delta\Psi[L_j(s')]| \\ &= | \{ \Psi'[L_j(s)] - \Psi'[L_j(s')] \} \delta L_j(s) + \Psi'[L_j(s')] [\delta L_j(s) - \delta L_j(s')] | \\ &\leq |\delta L_j(s)| \text{const.} |L_j(s) - L_j(s')|^\mu + \max |\Psi'(l)| \cdot |\delta L_j(s) - \delta L_j(s')| \\ &\leq \text{const.} \varepsilon \cdot |s - s'|^{\mu\nu} \quad [j = 1, 2, \dots, (n+1)], \end{aligned}$$

inégalité valable pour $s_{j-1} \leq s \leq s_j$, $s_{j-1} \leq s' \leq s_j$.

En réunissant (24) et (25) on voit que [cf. (20)]

$$\|\delta\Psi[L_j(s)]\| \leq \text{const.} \varepsilon^\nu.$$

Étudions maintenant $|\delta\Psi[L_j(s_j)]|$; $|\delta\Psi[L_j(s_{j-1})]|$ se majore par un procédé identique à celui que nous allons indiquer}. Cette fois $L_j(s)$ varie en même temps que s_j et il vient [cf. (1.), (20) et (23')]

$$(26) \quad \begin{aligned} |\delta\Psi[L_j(s_j)]| &= |\Psi[L_j(s_j + \delta s_j) + \delta L_j(s_j + \delta s_j)] - \Psi[L_j(s_j)]| \\ &= | \Psi[L_j(s_j + \delta s_j) + \delta L_j(s_j + \delta s_j)] \\ &\quad - \Psi[L_j(s_j + \delta s_j)] + \Psi[L_j(s_j + \delta s_j)] - \Psi[L_j(s_j)] | \\ &\leq \max |\Psi'(l)| [|\delta L_j(s_j + \delta s_j)| + \text{const.} |\delta s_j|^\nu] \leq \text{const.} \varepsilon^\nu. \end{aligned}$$

Comme de (11), on tire

$$2 \delta\alpha_j = \frac{1}{\pi} \{ \delta\Psi[L_{j+1}(s_j)] - \delta[L_j(s_j)] \}$$

l'inégalité précédente donne ⁽³⁵⁾

$$(27) \quad |\delta\alpha_j| \leq \text{const.} \varepsilon^\nu.$$

Cela étant, on tire de (7') (cf. § 18)

$$\begin{aligned} \pi \delta s_0 &= \int_0^{s_1} \delta\Psi[L_1(s)] ds + \sum_{j=2}^n \int_{s_{j-1}}^{s_j} \delta\Psi[L_j(s)] ds + \int_{s_n}^{\pi} \delta\Psi[L_{n+1}(s)] ds \\ &\quad + \sum_1^n \{ \Psi[L_{j+1}(s_j)] - \Psi[L_j(s_j)] \} \delta s_j. \end{aligned}$$

⁽³⁴⁾ Dans tout le cours de ce paragraphe, le symbole const. désignera une fonction bornée des quantités : $\text{Max} |\Psi'(l)|$, α , β , $\frac{1}{d}$.

⁽³⁵⁾ Signalons, toutefois, que les quantités $\delta\alpha_j$ sont assujetties à être compatibles avec (2) et (11').

On déduit de là, eu égard à (25) et à (26),

$$|\delta s_0| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu$$

et, par suite,

$$(28) \quad \left| \frac{\partial}{\partial s_0} \left\{ \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right\} \delta s_0 \right| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu.$$

24. Introduisons alors la fonction $L(s)$ définie par les relations (*)

$$\begin{aligned} L(s) &= L_1(s) && \text{pour } 0 \leq s \leq s_1, \\ L(s) &= L_j(s) && \text{pour } s_j \leq s \leq s_{j+1} \quad [j = 1, 2, \dots, (n-1)], \\ L(s) &= L_{n+1}(s) && \text{pour } s_n \leq s \leq \pi. \end{aligned}$$

D'après cela, $L(s)$ ne sera pas, en général continue pour $s = s_j, j = 1, 2, \dots, (n-1)$; de plus, les paramètres s_j , n'étant pas, en général, des fonctions croissantes de leurs indices, $L(s)$ peut, en général, prendre plus d'une valeur en un point $s, 0 \leq s \leq \pi$. Moyennant cette convention d'écriture, nous pouvons définir $\delta\Psi[L(s)]$ pour $0 \leq s \leq \pi$; (19,) donne alors

$$\delta\mathcal{R}H(e^{is}) = \delta\Psi[L(s)] + \sum_1^n [(2\alpha_j - 1)\delta s_j + 2(s_j - \pi)\delta\alpha_j - 2\Delta(s)\pi\delta\alpha_j],$$

où le symbole $\Delta(s)$ désigne un nombre égal à zéro pour $s_j \geq s$, à l'unité pour $s \geq s_j$. Eu égard à (24), (25), (26) et (27), il en résulte

$$|\delta\mathcal{R}H(e^{is})| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu$$

et

$$|\delta\mathcal{R}H(e^{is'}) - \delta\mathcal{R}H(e^{is})| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu |s - s'|^{\mu\nu},$$

donc

$$\|\delta\mathcal{R}H(e^{is})\| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu.$$

Mais $\delta\mathcal{R}H(qe^{is})$ est analytique et borné; $\delta\mathcal{J}H(X, 0)$ est analytique et borné par $\text{const. } \varepsilon$ pour $q \leq X < 1$; enfin les termes additifs de $\delta H(Z)$ (en un point Z fixe) qui proviennent des variations subies par $\frac{1}{a+1}$ et $\frac{1}{b-1}$ sont majorés, comme on l'a vu en valeur absolue, par $\text{const. } \varepsilon$. Le théorème de Fatou-Priwaloff permet alors de déduire des inégalités précédentes

$$(29) \quad |\delta H(e^{is})| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu, \quad |\delta H(e^{is}) - \delta H(e^{is'})| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu |s - s'|^{\mu\nu}.$$

(*) On écrira $s_{j+1} \leq s \leq s_i$ dans les équations de définition du texte si $s_j > s_{i+1}$.

Or, en comparant (7), (14) et (19''), on voit que

$$\begin{aligned}
 (30) \quad & \left| \delta \int_0^s e^{-\Gamma(e^{is})} df \right| \\
 &= \left| \delta \int_0^s |e^{iH(e^{is})}| \prod_{j=1}^n \left| \frac{e^{is} - e^{-is_j}}{e^{is} - e^{is_j}} \right|^{2\alpha_j - 1} \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} ds \right| \\
 &\leq \int_0^s \prod_{j=1}^n \left| \frac{e^{is} - e^{-is_j}}{e^{is} - e^{is_j}} \right|^{2\alpha_j - 1} \left\{ \left| \delta e^{iH(e^{is})} \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right| ds \right\} \\
 &+ \int_0^s \left| e^{iH(e^{is})} \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right| \left| \delta \prod_{j=1}^n \left| \frac{e^{is} - e^{-is_j}}{e^{is} - e^{is_j}} \right|^{2\alpha_j - 1} \right| ds.
 \end{aligned}$$

Dès lors, les raisonnements du paragraphe 17 s'appliquent à l'intégrale du premier terme du troisième membre que nous appellerons $I(s)$; on conclut de là, eu égard à (28) et à (29), que

$$|I(s)| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu, \quad |I(s) - I(s')| \leq \text{const. } \varepsilon^\nu |s - s'|^\nu,$$

avec $0 \leq s \leq s_1$, $0 \leq s' \leq s_1$; l'extension aux autres intervalles est immédiate. Il reste à étudier la seconde intégrale de (30) que nous appellerons $I_1(s)$.

Le facteur

$$F_1(s) = \left| e^{iH(e^{is})} \frac{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right]}{\sigma \left[\frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) \right]} \frac{df(e^{is})}{ds} \right|$$

de son élément différentiel est, d'après ce que nous avons vu au paragraphe 17, une fonction de s bornée, assujettie à vérifier une condition (20), tant que $x[L_j(s), s_j, a, b]$ demeure intérieur à l'hypersphère (22), c'est-à-dire tant que les quantités $\text{Max}[\Psi'(l)]$, α , β , $\frac{1}{a}$ sont bornées. $I_1(s)$ se présentera donc sous forme de somme d'expressions dont les unes proviendront des variations des α_j et les autres des variations des s_j dans le produit

$$\prod_1^n |e^{is} - e^{-is_j}|^{2\alpha_j - 1} |e^{is} - e^{is_j}|^{1 - 2\alpha_j}.$$

La contribution à $|I_1(s)|$ de la première série de termes est, par suite, inférieure à

$$\sum_{k=1}^n \int_0^s F_1(s) \left\{ \prod_{i=1}^n \left| \frac{e^{is} - e^{-is_j}}{e^{is} - e^{is_j}} \right|^{2\alpha_j - 1} \right\} \left| \log \frac{e^{is} - e^{-is_k}}{e^{is} - e^{is_k}} \right| 2 |\delta \alpha_k| \quad (0 \leq s \leq s_1).$$

Cela montre que pour $s = s_k$ le noyau des intégrales précédentes se comporte comme

$$F_2(s) |s - s_k|^{1-2\alpha_k} |\log(s - s_k)|,$$

où $F_2(s)$ désigne encore une fonction bornée, assujettie à vérifier une condition (20) dans le voisinage de s_k : il s'ensuit, eu égard aux inégalités $2(1 - \alpha_j) > \nu$, $j = 1, 2, \dots, n$ ⁽³⁶⁾

$$|F_2(s)| |s - s_k|^{1-2\alpha_k} \log|s - s_k| \leq \frac{\text{const.}}{|s - s_k|^{1-\nu}}.$$

On conclut de là, comme au paragraphe 17, que la portion considérée de $I_1(s)$ a un sens, que sa valeur absolue est majorée par une expression telle que $\text{const. } \varepsilon^\nu$ [cf. (27)] et qu'enfin, elle vérifie une condition de Hölder d'exposant ν dont la constante est de la forme $\text{const. } \varepsilon^\nu$, et cela dans tout l'intervalle $0 \leq s \leq s_1$. Il est clair que les considérations qui précèdent s'appliquent non seulement aux intégrales (30) prises entre les limites $0, s$ ($0 \leq s \leq s_1$), mais aussi aux intégrales analogues, prises entre les limites s_j, s , l'argument s étant intérieur à l'intervalle (s_j, s_{j+1}) (mais on n'a pas nécessairement $s_j < s_{j+1}$ ou $s_n \leq \pi$). Mais pour étendre à ces nouvelles expressions les conclusions que nous pouvions tirer de l'étude des termes de $I_1(s)$ provenant des variations δs_j , il faut tenir compte des variations que peut subir l'intervalle (s_j, s_{j+1}) : nous sommes ainsi conduits à étudier l'effet des variations des s_j , les autres éléments de x restant fixes, sur les intégrales de la forme :

$$J(s) = \int_s^s e^{-T(e^{i\sigma})} df(e^{i\sigma}) = \int_{s_j}^s F(\sigma) |\sigma - s_j|^{1-2\alpha_j} d\sigma,$$

où $F(\sigma)$ désigne une fonction positive, bornée et hölderienne pour

$$s_j - \frac{\gamma}{2} \leq s \leq s_j + \frac{\gamma}{2},$$

déjà introduite au paragraphe 17. Cette fois, on ne peut pas appliquer, pour former $\delta J(s)$, la formule de différentiation sous le signe \int , puisque les expressions qu'on obtiendrait ainsi n'auraient aucun sens pour $\frac{1}{2} < \alpha_j < 1$. Mais nous avons, en négligeant les termes additifs provenant de $\delta F(\sigma)$ dont nous avons fait déjà l'étude, et en supposant toujours $2\alpha_j - 1 > 0$

$$\begin{aligned} |\delta J(s)| \leq & \left| \int_{s_j}^s F(\sigma) \left[\frac{1}{|\sigma - s_j - \delta s_j|^{2\alpha_j - 1}} - \frac{1}{|\sigma - s_j|^{2\alpha_j - 1}} \right] d\sigma \right| \\ & + \max |F(\sigma)| \left| \int_{s_j}^{s_j + \delta s_j} \frac{d\sigma}{|\sigma - s_j|^{2\alpha_j - 1}} \right|, \\ & \left(|s - s_j| \leq \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

⁽³⁶⁾ C'est ici qu'apparaît l'intérêt de choisir pour ν non pas le plus petit des nombres $2(1 - \alpha_j)$ mais un nombre positif inférieur au plus petit de ces paramètres. Il va de soi également que les raisonnements du texte n'intéressent que le cas des $1 - 2\alpha_j$ négatifs.

Au paragraphe 17 nous avons déjà construit une majorante de $\text{Max} |F(\sigma)|$ pour $|\sigma - s_j| \leq \frac{\delta s_j}{2}$; d'un autre côté, la deuxième intégrale du second membre vaut

$$\frac{1}{2(1-\alpha_j)} |\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)} \leq \text{const.} |\delta s_j|^\nu;$$

pour des valeurs de δs_j suffisamment petites, on a d'ailleurs

$$|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)} < |\delta s_j|^\nu \leq \varepsilon |\delta s_j|^\nu.$$

Pour étudier la première intégrale, supposons d'abord que $s > s_j$, $\delta s_j < 0$; dans ce cas, l'expression en cause est majorée, en valeur absolue par

$$\begin{aligned} & \max |F(\sigma)| \int_{s_j}^s \left[\frac{1}{(\sigma - s_j)^{2\alpha_j - 1}} - \frac{1}{(\sigma - s_j - \delta s_j)^{2\alpha_j - 1}} \right] d\sigma \\ & \leq \max |F(\sigma)| \left[\frac{|(s - s_j)^{2(1-\alpha_j)} - (s - s_j - \delta s_j)^{2(1-\alpha_j)}|}{2(1-\alpha_j)} + \frac{|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)}}{2(1-\alpha_j)} \right]. \end{aligned}$$

Une discussion élémentaire montre, d'ailleurs, que le premier terme du second membre est majoré par une expression de la forme $\text{const.} |\delta s_j|^\nu$; de l'ensemble des résultats qui précèdent on déduit

$$|\delta J(s)| \leq \text{const.} \varepsilon^\nu.$$

L'extension au cas où $\delta s_j > 0$ est immédiate; on écrira

$$\int_{s_j}^s = \int_{s_j}^{s_j + \delta s_j} + \int_{s_j + \delta s_j}^s.$$

Or, la première intégrale est visiblement de l'ordre de $|\delta s_j|^{2(1-\alpha_j)}$, alors que la deuxième relève du calcul ci-dessus. Des raisonnements tout semblables montreraient que

$$|\delta J(s) - \delta J(s')| \leq \text{const.} \varepsilon^\nu |s - s'|^\nu.$$

Les deux dernières égalités prouvent donc bien que $\delta J(s)$ est un élément de l'ensemble $E[L(s), s_j, s_{j+1}]$ considéré au paragraphe 21, tel que

$$\|\delta J(s)\| \leq \text{const.} \varepsilon^\nu,$$

cette inégalité étant valable pour $s = s_j$ ou $s = s_{j+1}$. En langage de l'analyse fonctionnelle, on peut résumer comme il suit les résultats de la discussion des deux derniers paragraphes (cf. le paragraphe 22) :

La transformation fonctionnelle $\mathcal{F}(x)$ est complètement continue dans l'hyper-sphère (22) de l'espace \mathcal{E} sur lequel elle opère.

25. Introduisons alors une configuration auxiliaire $\mathcal{C}(k)$ dépendant du paramètre réel k ($0 \leq k \leq 1$) et définie au moyen des éléments $\Psi^*(l)$, d_1^* , d_2^* , α^* , β^* , l_j^* ($j = 1, 2, \dots, n$) tels que

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi^*(l) = k\Psi(l) + (1-k)\frac{\pi}{2}, \quad l_j^* = l_j \quad (j = 1, 2, \dots, n); \\ d_1^* = \frac{d_1}{k}, \quad d_2^* = \frac{d_2}{k}; \quad \alpha^* = \alpha, \quad \beta^* = \beta. \end{array} \right.$$

Il est clair que $\mathcal{C}(1) = \mathcal{C}$; si k tend vers zéro, les bords rectilignes μ_1 et μ_2 s'éloignent à l'infini alors que l'arc \widehat{BC} se déforme de manière à se réduire, à la limite, au segment de droite du plan z dont l'équation serait :

$$x = 0, \quad -\frac{\beta - \alpha}{2} \leq y \leq \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Enfin, on voit que $\mathcal{C}(k)$ vérifie toutes les hypothèses (H) du paragraphe 14 et cela quel que soit k , $0 \leq k \leq 1$. Il en résulte que toute solution éventuelle x^* du problème du sillage, posé pour $\mathcal{C}(k)$, $0 \leq k \leq 1$ vérifie les conclusions du paragraphe 22 et satisfait, en particulier, aux inégalités (22); toutes les quantités α^* , β^* , $\text{Max} |\Psi^*(l)|$, $\frac{1}{d_1^*}$, $\frac{1}{d_2^*}$ sont, en effet, bornées supérieurement en vertu de (31) ⁽³⁷⁾.

26. Cela étant, l'élément x^* de l'espace \mathcal{E} sera solution du problème du sillage posé relativement à $\mathcal{C}(k)$ si [cf. les écritures développées (14')] ainsi que la définition (31) de $\mathcal{C}(k)$]

$$(32) \quad x = \mathcal{F}[x, \Psi^*(l), \alpha^*, \beta^*, d_1^*, d_2^*, l_1^*, l_2^*, \dots, l_n^*] = \mathcal{F}(x, k),$$

en notant $\mathcal{F}(x, k)$, pour abrégier, le second membre de cette équation. On a alors le théorème suivant :

La transformation $\mathcal{F}(x, k)$ opérant sur l'hypersphère (22) de l'espace \mathcal{E} est complètement continue quel que soit k , $0 \leq k \leq 1$.

Cela résulte de ce que (cf. le paragraphe 25) toutes les conclusions du paragraphe 22 (donc des paragraphes 23 et 24) s'appliquent à (32). De plus

La transformation $\mathcal{F}(x, k)$ est uniformément continue par rapport à k sur l'intervalle $0 \leq k \leq 1$ lorsque x appartient au domaine (22).

D'une manière précise, cela veut dire qu'à tout nombre positif ε aussi petit qu'on le veut, on peut faire correspondre un nombre positif $\eta(\varepsilon)$ assez petit pour que l'inégalité

$$|\delta k| = |k - k'| \leq \eta(\varepsilon),$$

⁽³⁷⁾ Plus généralement, nous affecterons d'un astérisque les éléments relatifs à $\mathcal{C}(k)$.

où k et k' désignent deux valeurs de l'intervalle $0 \leq k \leq 1$, entraîne

$$\|\delta \mathcal{F}(x, k)\| = \|\mathcal{F}(x, k) - \mathcal{F}(x, k')\| \leq \varepsilon.$$

Appelons $\delta\Psi^*$, δd_j^* , etc., les variations correspondantes des éléments (31), etc. Comme l'élément x reste fixe, les paramètres $(2\alpha_j^* - 1)$ définis par (11) relativement à $\Psi^*(l)$ subissent des variations $(2\alpha_j - 1)\delta k$, $j = 1, 2, \dots, n$; les calculs du paragraphe 24 montrent alors que la contribution à $\delta\mathcal{F}(x, k)$, provenant des variations des $(2\alpha_j^* - 1)$, est majorée en norme par une expression de la forme const. $|\delta k|^\nu$. D'un autre côté, les relations (19₁) et (31) montrent que $\delta\mathcal{R}H^*(e^{is}) \leq \text{const.} |\delta k|$; de plus, $\delta\mathcal{R}H^*(e^{is})$ vérifie pour $0 \leq s \leq \pi$ une condition de Hölder d'exposant ν , au moins, dont la constante contient en facteur $|\delta k|$; en reprenant les raisonnements du paragraphe 24, on en déduira, eu égard à (21) (*)

$$\|\delta H^*(Z)\| \leq \text{const.} |\delta k| \quad \text{pour } q \leq |Z| \leq 1.$$

Comme, d'un autre côté [cf. (7') et (31)],

$$\delta s_0^* = \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Psi[L(s)] ds - \frac{\pi}{2} \right] \delta k,$$

on a [cf. (2)]

$$|\delta s_0| \leq \frac{3}{2} \pi |\delta k|.$$

Ces deux derniers faits entraînent [cf. (4') et (5) et, pour plus de détail, J. K., 23, pp. 173-174]

$$\left| \frac{\delta\psi_1}{\psi_1^2} \right| \leq \text{const.} |\delta k|, \quad \left| \frac{\delta\psi_2}{\psi_2^2} \right| \leq \text{const.} |\delta k|$$

et, par voie de conséquence,

$$|\delta f^*(Z)| \leq \text{const.} |\delta k|,$$

puisque $f^*(Z)$ ne dépend de k que par l'intermédiaire de s_0 , de ψ_1 et de ψ_2 , donc de $\Psi^*(l)$. Enfin, on tire de (31)

$$\left| \delta \frac{1}{d_j^*} \right| = \left| \frac{\delta k}{d_j} \right| \leq \frac{1}{d} |\delta k| \quad (j = 1, 2).$$

Eu égard à (7) et à (14), il résulte de l'ensemble des résultats qui précèdent

$$\|\delta \mathcal{F}(x, k)\| \leq \text{const.} |\delta k|^\nu \quad (0 \leq k \leq 1),$$

ce qui démontre notre proposition.

(*) Ici encore, le symbole const. désigne au cours de ce paragraphe une fonction positive et bornée de $\alpha, \beta, d, \text{Max} |\Psi^*(l)|$.

27. A partir de cette étape, les raisonnements se développent comme dans ma Thèse. Je présenterai donc la démonstration d'existence proprement dite d'une manière condensée, en priant le lecteur de se reporter pour les détails à J. K., 28, pp. 201-211.

Notons, tout d'abord, que les deux théorèmes du paragraphe 26 montrent que la théorie de l'indice total de MM. Schauder et Leray s'applique à l'équation (31); nous pouvons donc énoncer :

Pour chaque valeur de k , $0 \leq k \leq 1$, on peut définir l'indice topologique $i(k) = d[x - \mathcal{F}(x, k), 0]$ relativement à tout domaine borné de l'espace fonctionnel \mathcal{E} .

Mais en vertu du théorème du paragraphe 25, à savoir que toute solution éventuelle de l'équation (32), $0 \leq k \leq 1$, est intérieure à une hypersphère bornée de \mathcal{E} , on peut affirmer

L'indice topologique $i(k)$ est indépendant de k .

Or pour $k=1$, l'équation se réduit à l'équation (14') qui gouverne le problème du sillage posé relativement à la configuration \mathcal{C} . Pour $k=0$, l'équation (32) se réduit à l'équation du problème de Helmholtz posé pour la configuration formée d'un segment de droite de longueur $(\beta - \alpha)$, parallèle à Oy , placé dans une bande de largeur infinie ($d_1 = d_2 = \infty$). Or, on sait que ce dernier problème possède une solution et une seule, en sorte que l'on a $i(0) = 1$.

D'après la propriété d'invariance du degré, rappelée ci-dessus, il s'ensuit

$$i(1) = i(0) = 1.$$

Cela montre que l'équation (14'), équivalente au système (14) dont les arguments $\Psi(l, \alpha, \beta, d_1, d_2)$ satisfont aux conditions (H), possède au moins une solution; nous pouvons donc conclure :

Le problème de représentation conforme de Helmholtz (cas du sillage) posé relativement à la configuration \mathcal{C} satisfaisant à l'ensemble des hypothèses (H), énumérées au paragraphe 14, admet au moins une solution. C. Q. F. D.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU PROBLÈME SYMÉTRIQUE.

28. Envisageons, à présent, le cas particulier d'un squelette \mathcal{C} symétrique par rapport à la droite équidistante des droites μ_1 et μ_2 . Nous appellerons, pour abrégé, squelette symétrique toute configuration \mathcal{C} jouissant de cette propriété.

Voici les nouvelles écritures que nous utiliserons pour traduire plus nettement cette hypothèse simplificatrice. Nous avons d'abord $d_1 = d_2$.

Nous prendrons pour axe Ox du plan $z = x + iy$ l'axe de symétrie de \mathcal{C} , pour origine O , le point d'intersection de \widehat{BC} avec l'axe de symétrie de \mathcal{C} . Nous compterons les abscisses curvilignes sur \widehat{OC} à partir de O , en sorte que la longueur commune des arcs \widehat{OC} et \widehat{BO} sera égale à $\frac{\beta - \alpha}{2}$. En résumé, la configuration \mathcal{C} sera définie au moyen des données $\Psi(l)$, $\left[0 \leq l \leq \frac{\beta - \alpha}{2}\right]$, d_1 . Nous appellerons encore n le nombre des points anguleux de \widehat{BC} , autres que O , sur \widehat{OC} ; nous noterons l_1, l_2, \dots, l_n leurs abscisses curvilignes ⁽³⁸⁾ d'après cela, le nombre des points anguleux de \widehat{BC} sera $(2n + 1)$ ou $2n$, suivant que le point O est ou n'est pas un point singulier de cet arc. De plus, les données caractéristiques de \mathcal{C} seront assujetties à satisfaire à toutes les hypothèses (H) du paragraphe 14.

29. Il suit de là que le problème du sillage de Helmholtz, posé relativement à une telle configuration, possède au moins une solution. Mais nous allons faire voir que l'ensemble de ces solutions contient au moins une solution présentant la même symétrie que \mathcal{C} (c'est-à-dire symétrique par rapport à Ox) ⁽³⁹⁾. A cet effet, modifions les notations des inconnues en connexion avec les écritures introduites au paragraphe 28. Par raison de symétrie, on devra avoir cette fois, *a priori*,

$$s_0 = \frac{\pi}{2}, \quad l\left(s + \frac{\pi}{2}\right) = -l\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq s \leq \pi\right).$$

Ces conditions sont compatibles avec l'équation (7'), eu égard à la relation

$$\Psi(l) + \Psi(-l) = \pi \quad \left(0 \leq l \leq \frac{\beta - \alpha}{2}\right),$$

qui traduit l'hypothèse de symétrie de \widehat{BC} par rapport à Ox . De plus, si P_1, P_2, \dots, P_n sont les n points anguleux de \widehat{OC} , distincts de O , s_1, s_2, \dots, s_n , les

⁽³⁸⁾ Il résulte des propriétés de symétrie que O est un point anguleux de \widehat{BC} toutes les fois que $\Psi(0) \neq \frac{\pi}{2}$.

⁽³⁹⁾ Nous ignorons si l'ensemble des solutions en question se réduit à une solution unique. Dans un mémoire ultérieur M. Huron prouvera que, pour des formes particulières de \widehat{BC} , le problème posé pour un squelette \mathcal{C} *symétrique* ne possède qu'une seule solution *symétrique*. Rappelons, à cette occasion, qu'une solution $z = z(f)$ du problème de Helmholtz est dite *symétrique* si l'expression $\frac{df}{dz}$ prend les valeurs imaginaires conjuguées en tout couple de points conjugués du plan f . Consulter aussi *loc. cit.* ⁽¹²⁾ et ⁽¹³⁾.

arguments de leurs images $Z_j = e^{is_j}$ ($\frac{\pi}{2} < s_1 < s_2 < \dots < s_n$) dans le plan Z , P'_1, P'_2, \dots, P'_n les points singuliers de \widehat{OB} (donc symétriques des points P_1, P_2, \dots, P_n respectivement par rapport à Ox), s'_1, s'_2, \dots, s'_n les arguments de leurs images $Z' = e^{is'_j}$ ($0 < s'_n < s'_{n-1} < \dots < s'_1 < \frac{\pi}{2}$), on doit avoir

$$s'_j + s_j = \pi \quad (j = 1, 2, \dots, n);$$

Enfin, il faut que

$$-a = b, \quad \psi_1 = \psi_2.$$

On montre alors que, moyennant ces relations jointes à $d_1 = d_2$, la solution correspondante est symétrique par rapport à Ox . En définitive, le problème actuel revient à déterminer $2n + 2$ inconnues : les $(n + 1)$ paramètres s_j et b et les $(n + 1)$ fonctions $l_j(s)$, déduites de $l(s)$ au moyen des formules (13), où il faudra, cependant, remplacer par $\frac{\pi}{2} \leq s \leq s_1$ l'intervalle de définition $0 \leq s \leq s_1$ de $l_1(s)$ (⁴⁰). Le système fonctionnel de M. Villat correspondant s'écrit [cf. (14)]

$$l_1(s) = \int_{\frac{\pi}{2}}^s e^{-T(e^{is})} df(e^{is}) \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq s \leq s_1\right),$$

$$l_j(s) = \int_{s_{j-1}}^s e^{-T(e^{is})} df(e^{is}) + l_{j-1} \quad (s_{j-1} \leq s \leq s_j; j = 2, 3, \dots, n),$$

$$l_{n+1}(s) = \int_{s_n}^s e^{-T(e^{is})} df(e^{is}) + l_n \quad (s_n \leq s \leq \pi);$$

$$\frac{1}{b-1} = \frac{1}{b-1} + \lambda \left[\frac{1}{d_1} - \frac{1}{\int_{-1}^{-q} \sin \Omega(X, 0) df(X, 0) + \psi_1} \right];$$

$$s_1 = s_1 + \frac{1}{\lambda} \left[l_1 - \int_{\frac{\pi}{2}}^{s_1} e^{-T(e^{is})} df(e^{is}) \right],$$

$$s_j = s_j + \frac{1}{\lambda} \left[l_j - l_{j-1} - \int_{s_{j-1}}^{s_j} e^{-T(e^{is})} df(e^{is}) \right] \quad (j = 2, 3, \dots, n).$$

On voit, somme toute, que, pour passer des écritures (14) aux écritures ci-dessus, il suffit de modifier l'équation de définition de $l_1(s)$ et de supprimer l'équation en a ; mais, bien entendu, il faudra tenir compte, en écrivant les fonctionnelles des seconds membres, des conditions de symétrie écrites ci-dessus et d'y poser, en particulier

$$-a = b, \quad \psi_1 = \psi_2.$$

(⁴⁰) On voudra se rappeler que n n'a pas la même signification dans (13) et (14) d'une part, et dans le présent chapitre, d'autre part.

Dès lors, le raisonnement s'achève exactement comme dans le cas général. On réduit d'abord le système précédent à une équation fonctionnelle unique, en introduisant un ensemble abstrait dont l'élément x serait constitué par l'ensemble des $(n+1)$ fonctions $l_j(s)$ et des $(n+1)$ paramètres s_j et b . On montrera ensuite que l'ensemble abstrait en cause est un espace linéaire, normé, complet, sur lequel la transformation fonctionnelle ci-dessus est complètement continue. Dès lors, le raisonnement se poursuit comme aux paragraphes 25, 26 et 27, et comme le problème symétrique de Helmholtz, posé pour une configuration \mathcal{C} symétrique par rapport à Ox (dont l'arc \widehat{BC} se réduit à un segment de droite disposé suivant Oy), possède pour $d_1 = d_2 = \infty$ une solution symétrique, on conclut que :

Le problème de représentation conforme de Helmholtz, posé relativement à une configuration symétrique par rapport à l'axe Ox et assujettie à vérifier les hypothèses (H), possède au moins une solution présentant la même symétrie.

