

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MARCEL BRELOT

Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 61 (1944), p. 301-332

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__301_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LE RÔLE DU POINT À L'INFINI

DANS LA

THÉORIE DES FONCTIONS HARMONIQUES

PAR M. BRELOT.

I. — Introduction.

1. Les problèmes sur les fonctions harmoniques et sousharmoniques ne sont pas tous considérés pour des ensembles ouverts quelconques, mais souvent pour des ensembles *bornés*, ce qui permet alors de traiter à la fois les cas des espaces à $\tau \geq 2$ dimensions ⁽¹⁾. Il y a donc lieu d'examiner ensuite *en toute généralité les extensions aux ensembles ouverts non bornés* en cherchant une présentation précisant mais atténuant les différences entre le cas du plan et celui des espaces supérieurs provenant de la divergence d'allure à l'infini des *fonctions harmoniques fondamentales* [$h(r) = \log \frac{1}{r}$ dans le plan, $h(r) = \frac{1}{r^{\tau-2}}$ pour $\tau \geq 3$ dim.] et de l'usage de la transformation de Kelvin qui se réduit dans le plan à une simple inversion. C'est ce que nous ferons brièvement en commençant par une *étude sommaire à l'infini des fonctions sousharmoniques*, complétant ainsi les études antérieures au voisinage d'un point supposées connues ⁽²⁾. On considérera *des moyennes sur des sphères (cercles) à centres et*

⁽¹⁾ Voir les articles suivants qui serviront de base et seront utilisés plus ou moins explicitement : *Familles de Perron et problème de Dirichlet* (*Acta Szeged*, t. IX, fasc. III, 1939, p. 133), noté AS ; *Sur la théorie autonome des fonctions sousharmoniques* (*Bull. Sc. Math.*, t. 63, 1941, p. 72), noté TA. (Dans TA, il est fait usage au théorème 3 d'un lemme topologique inexact, introduit pour abrégé une démonstration qu'on pourra restituer.)

⁽²⁾ Voir : *Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* (*Act. Sc. et Ind.*, n° 139, 1934) ; *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potentiel* (*Journal de Math.*, t. 49, 1940, p. 319) ; *Sur les ensembles effilés* (*Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, p. 12).

rayons variables, et il s'y rattachera aussitôt des critères pour qu'une fonction sousharmonique dans tout l'espace soit un potentiel de masses ≤ 0 à noyau $h(r)$ (soit exactement, soit à une fonction harmonique ou constante près).

Puisque le *point à l'infini* s'introduit comme un point-frontière, il paraît naturel, surtout en pensant au plan et aux applications à la théorie des fonctions de variable complexe, de l'introduire même dans les domaines de sousharmonie. Si R_τ désigne l'espace euclidien ordinaire à $\tau \geq 2$ dimensions, on notera \mathcal{R}_τ le *point à l'infini* (et aussi pour abrégé, comme pour un autre point, l'ensemble qu'il constitue) qui lui est adjoint pour le rendre compact, formant ainsi l'espace noté \overline{R}_τ . On définira l'harmonie et la sousharmonie sur les ensembles ouverts de \overline{R}_τ même contenant \mathcal{R}_τ , de manière à conserver des propriétés fondamentales comme le « principe du maximum », clef des résultats d'unicité. Et c'est ainsi que l'on reprendra pour les étendre, à la fois pour $\tau \geq 2$, les premières grandes questions de la théorie générale : *suites et familles*, dans un exposé modernisé; *problème de Dirichlet* pour ensemble ouvert (d'énoncé unique englobant et généralisant donc les problèmes classiques dits « intérieur » et « extérieur ») et théorie de la mesure harmonique; *représentation potentielle des fonctions sousharmoniques (même à l'infini)*, étendant les résultats classiques de F. Riesz grâce à un noyau généralisant la fonction harmonique fondamentale.

Enfin on profitera de cette reprise d'exposé pour apporter par ailleurs améliorations et compléments divers (exemple d'un nouveau critère de régularité au n° 14).

On notera : 1° D_0^r et Δ_0^r les domaines de R_τ , où $OM < r$ et $OM > r$, $\Delta_0^{r'} = \Delta_0^r \cup \mathcal{R}_\tau$, enfin \mathcal{D} les domaines D_0^r , $\Delta_0^{r'}$ de \overline{R}_τ ;

2° Σ_0^r la circonférence ou péricône $OM = r$, σ_τ la longueur ou aire de Σ_0^r dans R_τ , φ_τ le flux de $h(OM)$ à travers Σ_0^r entrant dans D_0^r (c'est-à-dire pour normale orientée vers le centre) et qui vaut 2π si $\tau = 2$, $(\tau - 2)\sigma_\tau$ si $\tau > 2$; enfin $\mathcal{M}_u^r(O)$ la moyenne sur Σ_0^r d'une fonction u .

3° \overline{E} et \dot{E} l'adhérence (fermeture) et la frontière dans \overline{R}_τ d'un ensemble E quelconque.

II. — L'allure à l'infini des fonctions sousharmoniques (dans un ensemble ouvert de R_τ).

2. *Cas harmonique.* — Soit d'abord dans R_τ ($\tau \geq 2$), u harmonique dans un ouvert $\omega \supset \Delta_0^R$. Rappelons le développement dans Δ_0^R

$$(1) \quad u(M) = K + \alpha h(OM) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{OM}^n Y_n(P) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n^{(1)}(P)}{\overline{OM}^{n+\tau-2}} \quad (\tau \geq 2),$$

où les Y_n , $Y_n^{(1)}$ sont des fonctions de Laplace (en particulier trigonométriques)

d'ordre n du point P sur la sphère-unité ($OP = 1$) de R_τ (OP vecteur-unité de OM)⁽³⁾.

On en déduira directement des propriétés de limitation analogues à celles du voisinage d'un point O (et par le même type de raisonnement) : par exemple la nullité du premier Σ équivaut à la condition que u soit bornée dans un sens « à l'infini » ; plus généralement si $\frac{1}{r^s} \mathfrak{M}_u^r(O) \rightarrow 0$ (pour $r \rightarrow \infty$) ($s > 0$), les Y_n sont nuls dès que $n \geq s$.

On peut aussi être ramené à ce cas du voisinage de O par la transformation de Kelvin : $OM \cdot OM' = 1$, $v(M') = u(M)$ et fonction transformée $w(M') = \frac{v(M')}{OM'^{\tau-2}}$ (dont la transformation redonne d'ailleurs u).

Étudions plutôt le développement (1) pour un point O_1 variable et spécialement les coefficients K et α qu'on notera $K_u(O_1)$, $\alpha_u(O_1)$. Comme

$$(2) \quad \mathfrak{M}_u^r(O) = K_u(O) + \alpha_u(O)h(r),$$

K et α apparaissent comme l'ordonnée à l'origine et la pente de la droite représentant la variation de la moyenne $\mathfrak{M}_u^r(O)$ en fonction de $t = h(r)$.

D'abord le flux Φ_u sortant de $D_{O_1}^r$ à travers $\Sigma_{O_1}^r$ est indépendant de O_1 et r [pour $\Delta_{O_1}^r \subset \omega$] et vaut $-\alpha_u(O_1)\varphi_\tau$, d'où l'indépendance en O_1 de α_u ; la nullité de α_u équivaut d'après (2) à l'invariance en r de $\mathfrak{M}_u^r(O)$; et si $\mu_u(O) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathfrak{M}_u^r(O)$

$$(3) \quad \begin{cases} \mu_u(O) = K_u(O) \text{ si } \tau \geq 3 \text{ ou si } \tau = 2 \text{ avec } \alpha_u = 0, \\ \mu_u(O) \text{ infini du signe de } \alpha \text{ si } \tau = 2 \text{ et } \alpha_u \neq 0. \end{cases}$$

Enfin on verra aisément⁽⁴⁾ que, si $r > OO_1$:

$$(4) \quad \mathfrak{M}_u^r(O_1) = K_u(O) + \alpha_u h(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{OO_1}^n Y_n(P_1) \quad (P_1 \text{ correspondant à } O_1)$$

d'où

$$(5) \quad K_u(O_1) = K_u(O) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{OO_1}^n Y_n(P_1)$$

harmonique en O_1 variable. Soulignons spécialement que :

THÉORÈME 1. — L'invariance en O_1 de $K_u(O_1)$ [qui vaut $\mu_u(O_1)$ si $\tau \geq 3$, ou si $\tau = 2$ et $\alpha_u = 0$] équivaut à la nullité de $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{OM}^n Y_n(P)$ pour le développe-

(3) Pour $OM < \lambda$ fini fixé quelconque, les termes du premier Σ sont majorés en module par les termes d'une série numérique convergente. Pour $OM > \lambda$ fixé $> R$, propriété analogue du second Σ . Ces conditions, ou seulement l'uniformité en P de la convergence des séries, suffisent à assurer l'unicité du développement.

(4) Le second Σ de (1) est de flux nul à travers $\Sigma_{O_1}^r$ ou tout $\Sigma_{O_1}^r$ enveloppant O , donc de moyenne sur $\Sigma_{O_1}^r$ constante en r et tendant vers zéro pour $r \rightarrow \infty$, c'est-à-dire nulle.

ment (1) relatif à tout point O (c'est-à-dire à ce que u soit à l'infini borné dans un sens).

L'invariance de $\mathfrak{M}_u^r(O_1)$ en O_1 et r [pour $\Delta_0^r \subset \omega$] équivaut à la double condition que u soit borné à l'infini dans un sens et de flux nul (c'est-à-dire que le premier Σ et α_u soient nuls) et u admet alors pour $M \rightarrow \mathcal{R}_r$ une limite égale à cette valeur invariante.

3. Cas de u sousharmonique dans $\omega \supset \Delta_0^R$. — D'abord $\mathfrak{M}_u^r(O)$ est fonction convexe de $h(r) = t$, donc pour t croissant (à partir de $t = 0$ pour $\tau \geq 3$, de $t = -\infty$ pour $\tau = 2$) croissante, décroissante ou d'abord décroissante, puis croissante (5) et admet quand $r \rightarrow \infty$ une limite $\mu_u(O)$ qui pour $\tau \geq 3$ est toujours $\neq -\infty$ (6).

Étudions en fonction de O cette courbe des moyennes en t . Considérons, sortant de D_0^r , les flux généralisés f_i et f_e de F. Riesz (7) qui valent les produits par $-\varphi_r$ des dérivées respectives à droite et à gauche en t de $\mathfrak{M}_u^r(O)$. Ces dérivées admettent pour $r \rightarrow \infty$ une même limite α_u , déjà rencontrée dans le cas harmonique et qui vaut en général :

pour $\tau \geq 3$, $-\infty$ si $\mu_u(O) = +\infty$ ou la pente initiale ($< +\infty$) de la courbe en t , soit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}_u^r(O) - \mu_u(O)}{h(r)};$$

pour $\tau = 2$, la pente de la direction asymptotique ($< +\infty$), soit

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathfrak{M}_u^r(O)}{h(r)}$$

ou, pour résumer, toujours la pente initiale de la courbe en t (d'ailleurs $< +\infty$).

La limite Φ_u des flux considérés, pour $r \rightarrow \infty$, est indépendante de O , à cause de la croissance du flux quand on passe d'une sphère à une autre quelconque qui

(5) Notions de croissance et décroissance prises toujours au sens large (avec signes \geq, \leq), donc constance incluse.

(6) Soulignons en passant que pour u sousharmonique dans le domaine ($r_1 < OM < r_2$), la condition que $\mathfrak{M}_u^r(O)$ soit linéaire en $h(r)$ ($r_1 < r < r_2$) équivaut à l'harmonicité de u dans le domaine. Car en retranchant $K + \alpha h(OM)$ convenable, on se ramène au cas de $\mathfrak{M}_u^r(O)$ constant. Considérons alors la fonction de Wiener $H_u = \Phi_\rho$ dans le domaine ($r_1 < r'_1 < OM < \rho < r_2$). On a

$$\mathfrak{M}_{\Phi_\rho}^r(O) = \mathfrak{M}_u^{r'_1}(O).$$

Quand ρ croît, Φ_ρ croît et l'invariance de $\mathfrak{M}_{\Phi_\rho}^r(O)$ en ρ exige la constance de Φ_ρ en ρ en chaque point. On en déduit $u = \Phi$. On pourrait aussi se servir de l'interprétation potentielle et du flux.

(7) On prend $\Sigma_0^{r_1}(r_1 < r)$ et la fonction de Wiener pour l'intersphère et valeurs-frontières u (c'est-à-dire la meilleure ou plus petite majorante harmonique); le flux de celle-ci sortant de $\Sigma_0^{r_2}(r_1 < r_2 < r)$ a comme limite f_i quand $r_1 \rightarrow r$. De même pour f_e avec $\Sigma_0^{r_1}(r'_1 > r)$.

Sur la courbe en t , la corde $[h(r_1), h(r_2)]$ correspond à la moyenne relative à la majorante précédente dans l'intersphère (r_1, r_2).

l'enveloppe. On l'appellera *flux à l'infini* (ou en \mathcal{R}_τ). Ainsi $\Phi_u = -\varphi_\tau \alpha_u$ et α_u est indépendant de O .

Introduisons encore $K_u(O)$ limite commune pour $r \rightarrow \infty$ de

$$\mathfrak{N}_u^r(O) - \alpha_u h(r)$$

et de

$$\mathfrak{N}_u^r(O) - \varphi h(r),$$

où φ désigne la pente à droite ou à gauche de la courbe en t des $\mathfrak{N}_u^r(O)$.

On voit que $K_u(O)$ vaut $\mu_u(O)$ si $\tau \geq 3$ et dans le plan, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de la courbe en t , y compris $-\infty$ en cas de branche parabolique [donc encore $\mu_u(O)$ si $\alpha_u = 0$].

Dans le plan une inversion de pôle O conserve harmonicité et sousharmonicité, et le flux; les courbes des moyennes en t des fonctions correspondantes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour $\tau \geq 3$ la transformée de Kelvin (de pôle O) de u sousharmonique au voisinage de \mathcal{R}_τ (ce point exclus) est une fonction sousharmonique w au voisinage de O (exclus). Comparant les deux courbes en t des moyennes sur Σ_0^r , on voit que l'ordonnée initiale $\mu_u(O)$ de la première vaut la pente de la direction asymptotique de la deuxième et que la pente initiale α_u de la première vaut l'ordonnée à l'origine de l'asymptote de la deuxième.

THÉORÈME 2. — *a. L'existence d'une majorante harmonique au voisinage de \mathcal{R}_τ (*) équivaut à la condition : $\mu_u(O)$ fini si $\tau \geq 3$, α_u fini si $\tau = 2$;*

b. $\mu_u(O)$, $K_u(O)$ sont partout soit infinies de signe déterminé, soit harmoniques;

c. Si $\limsup_{M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} u < +\infty$, $\mu_u(O)$ lui est égale. Si $\mu_u(O)$ est finie et invariante pour O variable, $\limsup_{M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} u$ lui est égale (9).

(a) se vérifie par la transformation de Kelvin et le résultat analogue de l'étude locale déjà connue, mais se démontre aussi très facilement de manière directe (10).

(b) résulte de a. lorsqu'il n'y a pas de majorante harmonique. S'il y en a, on

(*) C'est-à-dire par exemple dans tout $\Delta_{O_1}^{R_1}$ avec O_1 fixe quelconque et R_1 alors assez grand. On pourra introduire la plus petite majorante harmonique et son développement (1), d'où des propriétés de limitation comme au voisinage d'un point O .

(9) Dans le cas du plan on complètera comme suit : α . La condition : $\limsup_{M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} \frac{u}{\log OM}$ fini (d'où l'égalité à $-\alpha_u$) équivaut à l'existence d'une majorante harmonique v au voisinage de \mathcal{R}_τ avec invariance de $K_v(O)$ (et alors invariance pour toute majorante). Cas particulier : $K_u(O)$ fini invariant.

β . La condition $\limsup_{M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} \frac{u}{\log OM} \leq 0$ équivaut à $\limsup_{M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} u < +\infty$ et aussi et à l'existence d'une majorante harmonique v au voisinage de \mathcal{R}_τ avec $\alpha_v \geq 0$ et invariance de $K_v(O)$ (et alors invariance pour toute majorante avec $\alpha \geq 0$). Cas particulier : $\mu_u(O)$ fini invariant.

(10) Grâce à l'interprétation des cordes de la courbe (convexe) des moyennes.

introduira la plus petite majorante v_R dans $\Delta_{O_1}^R$ (O_1 fixé) ⁽¹¹⁾ et l'on remarquera que $\mu_{v_R}(O)$ et $K_{v_R}(O)$ qui sont harmoniques en O sont fonctions de R décroissantes et tendant (pour $R \rightarrow \infty$) vers $\mu_u(O)$ et $K_u(O)$.

(c) en première partie, résulte encore d'une transformation de Kelvin ⁽¹²⁾. Supposons $\mu_u(O)$ finie et invariante. Soit v une majorante harmonique, prise pour $\tau = 2$ égale à la plus petite majorante dans un $\Delta_{O_1}^R$ de sorte que son flux soit ainsi nul. On sait que $\mu_v(O)$ est fini. Donc μ_{u-v} qui vaut $\mu_u - \mu_v$ l'est aussi. Comme $u - v$ est sousharmonique et ≤ 0 , μ_{u-v} est invariant en O comme μ_u . Donc aussi $\mu_v(O)$, ce qui entraîne que v , donc u soient bornées supérieurement au voisinage de \mathcal{R}_τ .

Nous reviendrons plus loin (n° 8) sur l'allure à l'infini (avec pseudo-limite) après introduction d'une sousharmonicité à l'infini.

4. *Fonctions sousharmoniques dans R_τ entier et potentiels.* — Si u est harmonique dans R_τ , elle admet un développement (1) avec α et deuxième Σ nuls. Le premier Σ disparaît, c'est-à-dire qu'elle se réduit à une constante si elle est bornée dans un sens (Picard) ⁽¹³⁾. Plus généralement si $\frac{1}{r^s} \mathcal{M}_u^r(O) \rightarrow o(r \rightarrow \infty)$ ($s > 0$) elle se réduit à un polynôme de degré $< s$.

Si u est sousharmonique dans R_τ , $\mathcal{M}_u^r(O)$ est fonction convexe et décroissante de $t = h(r)$ et $\alpha_u \leq 0$ (ou $\Phi_u \geq 0$). La condition $\alpha_u = 0$ équivaut à la constance en r de $\mathcal{M}_u^r(O)$ (pour un point O , donc aussi pour tout point O) et entraîne l'harmonicité ⁽¹⁴⁾.

THÉORÈME 3. — Soit u sousharmonique dans R_τ .

Pour qu'elle y admette une majorante harmonique il faut et il suffit que $\mu_u(O)$ soit fini (pour un O ou pour tout O).

Pour qu'elle soit harmonique il faut et il suffit que $\alpha_u = 0$ (ou $\Phi_u = 0$).

(Dans le plan les deux propriétés d'être harmonique ou d'admettre une majorante harmonique sont équivalentes.)

Pour qu'elle soit constante, il faut et il suffit que $\alpha_u = 0$ et que u soit bornée supérieurement ⁽¹⁵⁾ (la première condition étant inutile dans le plan).

⁽¹¹⁾ C'est la limite de la plus petite majorante (ou fonction de Wiener) dans le domaine compris entre $\Sigma_{O_1}^R$ et $\Sigma_{O_2}^R$ (O_2 quelconque, $\rho \rightarrow +\infty$). Son prolongement par u est sousharmonique dans ω .

⁽¹²⁾ Remarquer aussi que si u est bornée supérieurement, il en est de même pour $\mu_u(O)$ qui est donc constant vu son harmonicité, d'après b .

⁽¹³⁾ Ce théorème de Picard s'obtient encore comme suit : Si u est harmonique et > 0 dans R_τ , les moyennes A_P, A_Q de u dans D_P^R, D_Q^R satisfont, si $D_P^R \supset D_Q^R$ à $R^{\tau-1} A_P \geq r^{\tau-1} A_Q$, d'où $\frac{u(P)}{u(Q)} \geq \left(\frac{r}{R}\right)^{\tau-1}$ où le second membre peut être arbitrairement voisin de 1.

⁽¹⁴⁾ Grâce au résultat de la note (7).

⁽¹⁵⁾ Extension des théorèmes classiques de Liouville-Picard. On peut substituer à la seconde condition d'autres moins fortes assurant la constance d'une fonction harmonique, comme : u bornée

Potentiels (16). -- Soit dans R_r une distribution m de masses ≤ 0 , qui soit sur tout compact une mesure classique de Radon. L'intégrale $\int_{D_0^r} h(MP) dm(P)$ a pour O et M fixés une limite pour $r \rightarrow \infty$, indépendante de O ; cette limite fonction de M est partout infinie ou une fonction sousharmonique (17) $u(M)$ dite alors *potentiel* de m .

Approfondissons ce cas : 1° $m(D_0^r)$ et $m(\bar{D}_0^r)$ (masses portées par D_0^r, \bar{D}_0^r) valent les pentes à droite et à gauche de la courbe en t des moyennes $\mathcal{M}_u^r(O)$.

Donc la masse totale [limite pour $r \rightarrow \infty$ de $m(D_0^r)$] vaut $\alpha_u \leq 0$.

2° $\mathcal{M}_u^r(O) - h(r)m(D_0^r)$ vaut le potentiel en O des masses hors D_0^r , donc tend vers zéro pour $r \rightarrow \infty$, c'est-à-dire que $K_u(O) = 0$ quel que soit O .

Cela implique : si $\tau \geq 3$, $\mu_u(O) = 0$ et $m(D_0^r)h(r) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$);
 si $\tau = 2$, α_u (ou la masse totale) est finie, (autrement dit u admet une majorante harmonique au voisinage de l'infini) ce qu'on peut établir sans la convexité de la courbe des moyennes, par étude directe de l'intégrale-potential.

3° Si $\tau \geq 3$, $u \leq 0$, $\limsup_{M \rightarrow \infty} u = \mu_u(O) = 0$ et la plus petite majorante harmonique est nulle;

si $\tau = 2$, $\limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{u}{\log OM} = \alpha_u$.

Ce second point ne semble pas immédiat. Il suffit, grâce à une inversion, de voir que $\frac{u}{\log OM}$ est bornée supérieurement à l'infini puis de considérer seulement le potentiel v des masses hors \bar{D}_0^1 . On considérera la couronne ($1 < OM < r$) ($r \rightarrow \infty$) dont on fera le balayage. Les masses hors D_0^r donnent en tout point fixé un potentiel tendant vers zéro, celles balayées sur Σ_0^1 donnent en O un potentiel nul; celles balayées sur Σ_0^r donnent donc un potentiel tendant vers $v(O)$ en O , par suite tendant en tout point fixé vers ce même $v(O)$.

dans un sens non précisé, $\mathcal{M}_u^r(O)$ bornée en r pour un point O (cette dernière condition entraînant encore dans le plan que $\alpha = 0$).

L'énoncé plan (sans intervention de α_u) est bien connu. Dans l'espace signalons sur la recherche de la constance s'il y a borne supérieure, des travaux de Privaloff et Keldych introduisant d'autres conditions supplémentaires que $\alpha_u = 0$ comme la continuité et l'absence de minimum. Voir KELDYCH : *Sur le théorème de Liouville pour les fonctions sousharmoniques* (Recueil Math. de Moscou, nouvelle série, t. 2, 1937, p. 369).

(16) On reprendra cette notion sous une forme plus générale au n° 19.

(17) Ce cas est caractérisé par la propriété que l'intégrale $\int h(OP) dm(P)$ est bornée lorsqu'on l'étend à un domaine ($r_1 < OP < r_2$) pour O et r_1 fixés, r_2 arbitraire.

En P hors \bar{D}_0^{-1} , le nouveau potentiel a une limite (plus petite majorante harmonique de v sur Δ_0^1) visiblement majorée par

$$v(O) + \log(OP - 1) \times |\text{masse totale}|,$$

d'où le résultat.

THÉORÈME 4. — *Pour que u sousharmonique dans R_τ soit un potentiel de masses ≤ 0 , il faut et il suffit que $K_u(O) = 0$ quel que soit O .*

Il reste à montrer la suffisance. Or soit m la distribution de masses ≤ 0 obtenue localement par la représentation potentielle selon F. Riesz. Sur un domaine borné δ quelconque, son potentiel vaut u à une fonction harmonique près, de sorte que $m(D_0^r)$ vaut la pente à droite de la courbe en t des $\mathfrak{N}_u^r(O)$; on sait même que $u(M) = \int_{D_0^r} G_\delta(M, P) dm(P) + w(M)$ où G_δ est la fonction de Green de δ et w la plus petite majorante harmonique égale ici à la fonction de Wiener pour δ et u . D'après cela

$$\begin{aligned} u(O) &= \int_{D_0^r} [h(OP) - h(r)] dm(P) + \mathfrak{N}_u^r(O) \\ &= \int_{D_0^r} h(OP) dm(P) + \mathfrak{N}_u^r(O) - h(r)m(D_0^r). \end{aligned}$$

L'hypothèse $K_u(O) = 0$ montre que

$$\int_{D_0^r} h(OP) dm(P) \underset{(r \rightarrow \infty)}{\rightarrow} u(O).$$

On conclut aisément que m admet bien un potentiel et que celui-ci vaut u .

COROLLAIRES. — 1° *Pour que u sousharmonique dans R_τ soit un potentiel à une fonction harmonique près, il faut et il suffit que $K_u(O)$ soit fini (en un point, donc en tous), ce K_u étant alors une fonction harmonique et, si $\tau \geq 3$, la plus petite majorante harmonique.*

2° *Pour que u sousharmonique dans R_τ soit un potentiel à une constante près, il faut et il suffit que $K_u(O)$ soit fini et invariant en O , sa valeur étant celle de la constante,*

ou qu'en un point O , $K_u(O)$ soit fini et que $\frac{\mathfrak{N}_u^r(O)}{r^s} \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) pour un s (ou tout s) tel que ($0 < s \leq 1$),
ou encore simplement si $\tau \geq 3$ que u [ou même seulement $\mathfrak{N}_u^r(O)$ pour un O] soit bornée supérieurement ⁽¹⁸⁾.

(18) Dans le plan, la condition $\limsup_{M \rightarrow \infty} \frac{u}{\log OM} < +\infty$ n'est pas suffisante, même pour que u soit un potentiel à une fonction harmonique près. On obtient un contre-exemple par une fonction [dans $(-\infty, +\infty)$] de la variable t (qu'on remplacera par $\log \frac{1}{OM}$), convexe décroissante dont la branche de gauche a une pente asymptotique finie mais est parabolique.

III. — Étude dans \overline{R}_τ . Harmonicité et sous-harmonicité à l'infini.
Premières propriétés.

5. *Définition.* — Dans un ensemble ouvert ω de \overline{R}_τ contenant \mathcal{R}_τ , une fonction u sera dite sousharmonique si :

A. Elle l'est sur $\omega - \mathcal{R}_\tau$ au sens habituel;

B. et si elle est au point \mathcal{R}_τ :

a. $< +\infty$;

b. semi-continue supérieurement;

c. de valeur $u(\mathcal{R}_\tau)$ majorée par $\mathcal{M}_u^r(0)$ pour 0 fixé arbitrairement et r alors assez grand.

(B) peut être remplacée par : $u(\mathcal{R}_\tau) = \limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau, M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} u < +\infty$ et $\Phi_u \leq 0$ (cette condition en Φ_u étant la conséquence des autres); et alors $\mathcal{M}_u^r(0)$ est fonction décroissante de r [pour $\Delta_0^r \subset \omega$] et tend vers $u(\mathcal{R}_\tau)$.

Exemple : $h(\text{PM})$ (P fixé $\neq \mathcal{R}_\tau$) est sousharmonique au voisinage de \mathcal{R}_τ .

α . Critères de « prolongement sousharmonique à l'infini ». — Par exemple : u sousharmonique dans $\omega - \mathcal{R}_\tau$ n'est « sousharmonique en \mathcal{R}_τ », c'est-à-dire prolongeable sousharmoniquement dans ω (et de manière unique) que si u est bornée supérieurement à l'infini et $\Phi_u \leq 0$; et si, de plus, u est harmonique dans $\omega - \mathcal{R}_\tau$, son prolongement est donné par le développement (1) au voisinage de \mathcal{R}_τ avec $\alpha \geq 0$ et premier Σ nul.

β . Premières propriétés de u sousharmonique dans ω ouvert quelconque de \overline{R}_τ . — Il n'y a de maximum en un point qu'en cas de constance au voisinage. La borne supérieure :

1° n'est atteinte dans un domaine qu'en cas de constance ;

2° est toujours égale à la borne supérieure des $\lim \sup$ à la frontière si celle-ci existe.

Si u est sousharmonique dans \overline{R}_τ entier, elle est constante.

L'enveloppe supérieure de deux fonctions sousharmoniques est sousharmonique.

Soit $\omega \subset \overline{R}_\tau$ et ω' son inverse de pôle 0 (hors ω) et puissance τ . Dans le plan l'inversion simple fait correspondre les fonctions sousharmoniques sur ω et ω' . Pour $\tau \geq 3$ la transformation de Kelvin (définie hors des points inverses 0 et \mathcal{R}_τ) transforme u sousharmonique dans ω , valant K (nécessairement fini) en \mathcal{R}_τ en la somme de $Kh(OM')$ et d'une fonction sousharmonique u' dans ω' (c'est-à-dire sousharmonique dans $\omega' - 0$, mais prolongeable sousharmoniquement dans ω') avec $u'(0) = \alpha_u \geq 0$ et flux nul de u' en 0; mais elle ne trans-

forme une fonction sousharmonique $v(M')$ dans ω' en la somme d'une fonction sousharmonique dans ω et d'une fonction $\beta h(OM)$ que si la courbe en $t = h(r)$ de $\mathcal{N}_r^r(O)$ n'a pas de branche parabolique (pour $t \rightarrow +\infty$); noter que si $v(O)$ est fini ≥ 0 , la transformée sera sousharmonique nulle en \mathcal{R}_r .

Notions analogues pour la *surharmonicit e*. Par conjonction, définition et propriétés de l'*harmonicité*, d'ailleurs aisée à étudier directement.

Ainsi u sera harmonique dans ω contenant \mathcal{R}_r si elle est harmonique dans $\omega - \mathcal{R}_r$ et, en \mathcal{R}_r , finie continue, égale à $\mathcal{N}_u^r(O)$ [pour O fixé quelconque et r alors assez grand, ou encore quel que soit $\Delta_0^r \subset \omega$]. Cette condition au point \mathcal{R}_r revient à supposer dans le développement (1) que α et le premier Σ sont nuls.

On soulignera pour ω quelconque de $\overline{\mathcal{R}_r}$:

1  si u est sousharmonique et h harmonique et si   la frontière non vide, $\lim \sup(u - h) \leq 0$, alors $u \leq h$ dans ω ;

2  si u harmonique tend vers 0 en tout point de la frontière non vide, $u = 0$.

6. *Extension de l'intégrale de Poisson*. — A côté de l'intégrale de Poisson (qui sera dite aussi intégrale - \mathcal{P}) pour un D_0^R et une fonction sur Σ_0^R , on introduira une intégrale - \mathcal{P} pour Δ_0^R et f (sommable - σ sur Σ_0^R), qui sera la fonction dans Δ_0^R égale à

$$(6) \quad \mathcal{P}(M) = \frac{1}{\alpha_r R} \int_{\Sigma_0^R} f(P) \left[\frac{\overline{OM}^2 - R^2}{MP^\tau} - \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}} + \frac{1}{R^{\tau-2}} \right] d\sigma_P,$$

où le crochet est pris égal à $\frac{1}{R^{\tau-2}}$ pour M en \mathcal{R}_r , donc toujours > 0 et se simplifiant d'ailleurs pour $\tau = 2$.

On verra que $\mathcal{P}(M)$ est harmonique dans Δ_0^R et tend vers $f(P)$ aux points de continuité de f . Il serait banal d'introduire et d'étudier une intégrale étendue de Poisson-Stieltjes.

Remarque. — Si u est sousharmonique dans $\omega \supset \overline{D_{M_0}^r}$, on sait qu'elle est major e dans $D_{M_0}^r$ par l'intégrale - \mathcal{P} correspondante et lui est égale si u est harmonique dans $D_{M_0}^r$. Il en sera de même avec $\Delta_{M_0}^r$. L'égalité se voit en considérant $\mathcal{N}_u^\rho(M_0)$ qui est continue pour $\rho = r$.

Inégalités. — Si $f \geq 0$, les inégalités de Harnack s'étendent selon

$$(6) \quad \left[\frac{OM - R}{(OM + R)^{\tau-1}} - \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}} + \frac{1}{R^{\tau-2}} \right] R^{\tau-2} \mathcal{P}(\mathcal{R}_r) \leq \\ \leq \mathcal{P}(M) \leq \left[\frac{OM + R}{(OM - R)^{\tau-1}} - \frac{1}{\overline{OM}^{\tau-2}} + \frac{1}{R^{\tau-2}} \right] R^{\tau-2} \mathcal{P}(\mathcal{R}_r).$$

On en déduira l'extension suivante d'un résultat classique pour un domaine borné :

Pour toute fonction harmonique $u > 0$ dans le domaine ω de \overline{R}_τ le rapport des valeurs de u en deux points variables d'un ensemble compact de ω est compris entre deux nombres positifs *indépendants* de u .

6 bis. *Laplaciens et flux généralisés.* — Soit la fonction f définie au voisinage d'un point M_0 d'abord différent de \mathcal{R}_τ et sommable - σ sur $\Sigma_{M_0}^r$ (pour tout r assez petit) ou sommable au sens large mais finie en M_0 . Introduisons les paramètres analogues à ceux de Privaloff (^{18 bis})

$$\begin{aligned} \overline{P}_f(M_0) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\tau}{r^2} [\mathcal{N}_f^r(M_0) - f(M_0)] \right. \\ \underline{P}_f(M_0) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \left. \right\} \end{aligned}$$

qui, comme ceux de Privaloff, coïncident avec le laplacien ordinaire lorsque f admet des dérivées secondes finies continues.

On fera l'extension au point \mathcal{R}_τ en considérant les deux limites pour $r \rightarrow \infty$ de $2\tau r^2 [\mathcal{N}_f^r(O) - f(\mathcal{R}_\tau)]$ où O est un point fixé. Laisant de côté ici plus de développements, indiquons brièvement qu'en adaptant des raisonnements de Blaschke-Privaloff on trouve :

Pour que u dans le domaine ω de \overline{R}_τ soit $-\infty$ ou sousharmonique, il faut et il suffit qu'elle soit $< +\infty$, semi-continue supérieurement et qu'en tout point où elle est finie, $P_u \geq 0$.

On se ramène à voir que u est majorée par l'intégrale- \mathcal{I} relative à un domaine \mathcal{D} et sur \mathcal{D}^* une fonction φ finie continue majorant u . On considérera pour cela $v = u - \mathcal{I} + \varepsilon w$ ($\varepsilon > 0$) où w est une fonction auxiliaire dans $\overline{\mathcal{D}}$, finie continue, ≤ 0 sur \mathcal{D}^* et admettant un $\overline{P}_w > 0$ dans \mathcal{D} . Alors v qui est ≤ 0 sur \mathcal{D}^* l'est dans \mathcal{D} , sinon y admettrait un maximum où \overline{P}_v serait > 0 (ce qui est contraire aux propriétés évidentes du \overline{P}_v).

Reprenons d'autre part la notion de flux généralisé (selon F. Riesz). Plaçons-nous dans \overline{R}_τ , mais ne considérons pour simplifier, que des surfaces sphériques. Soit u sousharmonique dans ω et $\overline{\mathcal{D}} \subset \omega$. On considérera une surface sphérique concentrique Σ située dans \mathcal{D} et la fonction de Wiener pour l'intersphère avec valeurs-frontière u . Elle admet à travers une sphère intermédiaire et pour la normale dirigée dans le sens de \mathcal{D}^* vers \mathcal{D} un certain flux. Vu l'interprétation

(^{18 bis}) Ceux de Privaloff (encadrés par les nôtres) sont relatifs à une moyenne spatiale dans D_M^r avec remplacement de $\frac{2\tau}{r^2}$ par $2 \frac{\tau+2}{r^2}$, f étant sommable en volume au voisinage de M_0 , ou sommable au sens large mais finie en M_0 .

L'énoncé qui suit améliore le critère analogue de Szpilrajn avec moyennes spatiales, outre l'extension relative à \mathcal{R}_τ .

sur la courbe des moyennes, ce flux a une limite quand Σ tend vers \mathcal{O} . Ce sera le *flux généralisé relatif* à \mathcal{O} . De même, en prenant une surface sphérique concentrique hors $\overline{\mathcal{O}}$, on définirait à la limite un *flux généralisé relatif* à $\overline{\mathcal{O}}$.

Nous voulons souligner qu'une *fonction sousharmonique dans ω est déterminée à une fonction harmonique près par ses flux relatifs aux $\overline{\mathcal{O}}$ contenus dans ω* (ou encore par les flux relatifs aux \mathcal{O} dont l'adhérence est contenue dans ω). Autrement dit, si u et v sont sousharmoniques dans ω et de mêmes flux précédents, $u - v$ vaut, là où elle est définie, une fonction harmonique dans ω .

En effet pour M_0 fixé et r assez petit, $\mathcal{N}_u^r(M_0)$ et $\mathcal{N}_v^r(M_0)$ ont mêmes dérivées, finies, en r ou t à droite ou à gauche, donc différent d'une constante. Ainsi $\mathcal{N}_{u-v}^r(M_0)$ est constante et vaut donc sa limite pour $r \rightarrow 0$, soit $u(M_0) - v(M_0)$ si cette différence a un sens (ce qui entraîne qu'elle soit alors finie). De même, par suite, pour la moyenne spatiale. Par médiation spatiale de $u - v$ à rayon constant, on obtient hors \mathcal{R}_τ une fonction égale quasi-partout à $u - v$ mais aussi harmonique. Ainsi dans ω hors \mathcal{R}_τ , $u - v$ vaut quasi-partout ω harmonique. Voyons, si $\mathcal{R}_\tau \in \omega$, que ω se prolonge harmoniquement en \mathcal{R}_τ en y prenant la valeur $u - v$ lorsque celle-ci a un sens. Supposons d'abord $\tau \geq 3$. Alors $\mathcal{N}_{u-v}^r(O)$ et $\mathcal{N}_{u-v}^r(O)$ sont bornés pour $r \rightarrow \infty$, donc aussi $\mathcal{N}_{u-v}^r(O)$; cela exige que dans le développement (1) de ω à l'infini, le premier Σ soit nul; le coefficient α est nul aussi puisque u et v ont même flux à l'infini; d'où le prolongement de ω . Il doit valoir en \mathcal{R}_τ , $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{N}_w^r(O)$ ou [puisque $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{N}_u^r(O)$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{N}_v^r(O)$ sont finies et valent $u(\mathcal{R}_\tau)$ et $v(\mathcal{R}_\tau)$] la différence $u - v$. On conclut aussitôt. Démonstration analogue pour $\tau = 2$ en considérant $\frac{u}{h(\overline{OM})}$ et $\frac{v}{h(\overline{OM})}$.

7. *Ensembles polaires et effilés.* — On dira qu'un ensemble E de $\overline{\mathbb{R}_\tau}$ y est *polaire* s'il possède la propriété locale que pour tout point M de $\overline{\mathbb{R}_\tau}$ (19), il existe un voisinage ouvert ω et une fonction sousharmonique dans ω valant $-\infty$ sur $E \cap \omega$.

Il faut noter que le point \mathcal{R}_τ ne forme un ensemble polaire que si $\tau = 2$. Si $\tau > 2$, un ensemble contenant \mathcal{R}_τ n'est pas polaire.

Je laisse de côté les démonstrations assez faciles (20) des propriétés suivantes :

a. Une inversion de pôle O (qui fait correspondre O et \mathcal{R}_τ) transforme un

(19) Ou même « tout point M de E » comme il résulte de l'étude ultérieure et d'un recouvrement dénombrable.

(20) On utilisera le lemme suivant : s'il existe au voisinage d'un point O une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur E (ne contenant pas O), il en existe une, analogue, finie en O . C'est immédiat si O n'est pas adhérent à E . On passe au cas général par sommation et décomposition dénombrable de E (grâce aux propriétés de convergence des suites décroissantes des fonctions sousharmoniques).

ensemble polaire E en un ensemble polaire, à condition, si $\tau > 2$, que E ne contienne pas O .

b. La définition de polarité équivaut à dire que $E \cap R_\tau$ est polaire dans R_τ au sens antérieurement connu ⁽²¹⁾ à condition, si $\tau > 2$, que E ne contienne pas R_τ .

c. Soit dans ω ouvert (de $\overline{R_\tau}$) un ensemble α polaire fermé dans ω . Toute fonction u sousharmonique dans $\omega - \alpha$; bornée supérieurement au voisinage de tout point de α est prolongeable sousharmoniquement dans ω et de manière unique; et si u est harmonique dans $\omega - \alpha$ et bornée ^(21 bis) au voisinage de tout point de α , le prolongement est harmonique dans ω .

d. Soit ω ouvert différent de $\overline{R_\tau}$ et contenant E . Pour que E soit polaire, il faut et suffit qu'il existe dans ω une fonction sousharmonique valant $-\infty$ sur E .

e. Toute réunion dénombrable d'ensembles polaires est polaire.

Un ensemble sera dit *intérieurement polaire*, si toute partie compacte est polaire. On dira *quasi-partout* ou *à peu près partout* dans le sens de « sauf sur un ensemble polaire, respectivement, intérieurement polaire » ⁽²²⁾.

Une fonction dans un ensemble ouvert y sera dite *quasi-sous-harmonique* si elle est *au plus égale* (condition suggérée par M. Lelong) et *quasi-partout égale* à une fonction sousharmonique (nécessairement unique) dite régularisée.

8. On dira que l'ensemble E est *effilé* en R_τ ⁽²³⁾ si $E \cup R_\tau$ est borné, sinon s'il existe au voisinage de R_τ , u sousharmonique telle que

$$(8) \quad \limsup_{M \in E, M \neq R_\tau, M \rightarrow R_\tau} u < u(R_\tau) = \limsup_{M \neq R_\tau, M \rightarrow R_\tau} u.$$

avec la restriction que R_τ n'appartient pas à E pour $\tau > 2$.

Une fonction sousharmonique au voisinage d'un point Q vaut donc toujours en Q sa \limsup en Q sur tout ensemble non effilé en Q .

Pour que E de R_τ soit effilé en R_τ , il faut et suffit que l'inverse de pôle O soit effilé en O si $\tau = 2$, effilé d'allure $h(OM) = \frac{1}{OM^{\tau-2}}$ si $\tau > 2$.

D'après cela on peut dans la définition de l'effilement remplacer l'inégalité par $u \rightarrow -\infty (M \in E, M \neq R_\tau, M \rightarrow R_\tau)$.

⁽²¹⁾ Voir l'article (TA) à utiliser.

^(21 bis) Cette condition évidemment nécessaire de « u bornée » a été oubliée dans l'énoncé du théorème 2 de (TA).

⁽²²⁾ Rappelons que les ensembles de R_τ intérieurement polaires et polaires sont aussi les ensembles de capacité intérieure respectivement extérieure nulle (Evans-Frostman et Cartan).

⁽²³⁾ Pour l'effilement en un point, voir les articles précités au *Journ. de Math.*, 1940 et *Bull. sc. Math.*, 1944.

Comme en un autre point, une fonction f admettra en \mathcal{R}_τ une *pseudo-limite* λ (finie ou $\pm \infty$) si pour tout voisinage \mathcal{V} de λ , il existe un ensemble effilé en \mathcal{R}_τ sur le complémentaire duquel f est, hors \mathcal{R}_τ , définie et de valeur contenue dans \mathcal{V} . Il y a unicité. Une fonction sousharmonique au voisinage de \mathcal{R}_τ y admet une pseudo-limite égale à $u(\mathcal{R}_\tau)$.

Remarque. — Pour que E donne par inversion un ensemble effilé au pôle O, il faut et suffit qu'il existe u sousharmonique dans un Δ_0^R avec

$$\limsup_{(M \neq \mathcal{R}_\tau, M \in E, M \rightarrow \mathcal{R}_\tau)} u < \limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau, M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} u < +\infty.$$

Il y correspond une notion analogue à la pseudo-limite en \mathcal{R}_τ qui permet d'interpréter $\limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau, M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} u$ pour toute fonction u sousharmonique et bornée supérieurement dans un Δ_0^R . Le cas plan donne lieu à quelques compléments immédiats.

Enfin on utilisera la notion d'ensemble E *effilé intérieurement* en \mathcal{R}_τ , définie par l'effilement en ce point de toute partie dont la réunion avec \mathcal{R}_τ est compacte.

Un ensemble polaire (respectivement intérieurement polaire) est effilé (resp. intérieurement effilé) en tout point. *Les points d'un ensemble où il est effilé (resp. effilé intérieurement) forment un ensemble polaire (resp. intérieurement polaire)* ⁽²⁴⁾.

La réunion de deux ensembles effilés en un point est effilé en ce point.

IV. — Suites et familles dans un ouvert de \overline{R}_τ ^(24 bis).

9. *Fonctions harmoniques.* — Dans ω ouvert de \overline{R}_τ , considérons un ensemble H_0 de fonctions harmoniques *bornées sur tout compact K contenu*. Elles sont *également continues*, comme on le voit en se ramenant au cas où elles sont > 0 au voisinage d'un point et utilisant les inégalités de Harnack ou leurs extensions relatives à \mathcal{R}_τ .

Considérons alors une suite S de fonctions de H_0 ou plus généralement une famille de telles fonctions f_i et un filtre \mathcal{F} sur l'ensemble des indices i ; grâce à l'égalité continue, il vient comme dans le cas classique :

⁽²⁴⁾ Cela résulte de mon dernier article du *Bull. des Sc. Math.*, n° 7.

^(24 bis) Pour les résultats sur la topologie générale et les espaces fonctionnels utilisés ci-après (et basés sur le théorème d'Arzela) voir le traité de Bourbaki en cours de publication par fascicules (*Act. sc. et ind.*, Hermann, Paris). Cela permet de moderniser en particulier les résultats classiques de Harnack et Montel sur les fonctions harmoniques.

Rappelons la définition de l'égalité continue. Considérons une famille de fonctions f sur l'espace E prenant leurs valeurs dans l'espace uniforme E'. Elles sont également continues dans E, si pour tout point x de E et tout entourage \mathcal{E} de E', il existe un voisinage de x pour tout point y duquel $f(x)$ et $f(y)$ sont voisins d'ordre \mathcal{E} quelle que soit f .

a. S'il y a convergence simple, il y a convergence uniforme sur tout K (au sens ordinaire de la structure uniforme additive de la droite) et la limite est harmonique ⁽²⁵⁾.

b. Il existe une suite extraite de S ou un filtre plus fin que \mathcal{F} avec convergence uniforme sur tout K et limite harmonique.

Passons à un ensemble (H_1) de fonctions harmoniques u dans un *domaine* ω , bornées supérieurement sur tout $K \subset \omega$. Avec des fonctions de (H_1) , et une suite ou un filtre :

a'. S'il y a convergence simple, la limite est $-\infty$ ou harmonique et la convergence est uniforme sur tout K , au sens ordinaire dans les deux cas.

b'. Il existe une suite extraite ou filtre plus fin avec convergence uniforme comme ci-dessus vers $-\infty$ ou une fonction harmonique ^(25 bis).

En effet dans a' il est évident, que la limite est $-\infty$ ou bornée sur tout K grâce à la remarque finale du n° 6; il y a alors dans le second cas convergence uniforme ordinaire sur tout K d'où l'harmonicité. Quant à b', on commencera par assurer la convergence en un point, ce qui entraîne la convergence uniforme vers $-\infty$ ou nous ramène au cas de H_0 .

On en déduirait que les fonctions de H_1 sont également continues en prenant sur l'espace de leurs valeurs la structure uniforme de la droite numérique achevée, c'est-à-dire par exemple que les e^u sont également continues au sens ordinaire. Et cela se démontre directement et facilement grâce aux inégalités de Harnack.

COROLLAIRE. — Toute famille ordonnée filtrante croissante (ou décroissante) de fonctions harmoniques converge vers une fonction harmonique ou $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Résumé topologique. — Considérons l'ensemble des fonctions harmoniques u dans le domaine ω de $\overline{\mathbb{R}}$, majorées par une fonction donnée finie continue; adjoignons la fonction $-\infty$ et introduisons pour l'espace de ces fonctions (u et $-\infty$) la structure uniforme de la convergence compacte relativement à la structure uniforme de la droite numérique achevée dans laquelle les fonctions prennent leurs valeurs ⁽²⁶⁾. L'espace ainsi uniformisé est compact ⁽²⁷⁾.

⁽²⁵⁾ Cette harmonicité vient de la représentation par intégrale- \mathcal{P} et, pour les filtres, de l'uniformité de convergence qui permet le passage à la limite sous le signe \int .

^(25 bis) Cet énoncé pour les suites se traduit dans le langage classique de M. Montel en disant que la famille (H_1) est normale.

⁽²⁶⁾ On peut dire encore que cette structure est donnée par la base d'entourages définie par $|e^{u_1} - e^{u_2}| < \varepsilon$ sur K (ε et K variables).

⁽²⁷⁾ Cette structure uniforme, évidemment séparée, est aussi métrisable puisque (Weil, *Act. sc. et ind.*, n° 531) le filtre des entourages est à base dénombrable.

La compacité traduit (b') qu'il est donc équivalent d'énoncer seulement pour des suites.

De même le sous-espace des fonctions harmoniques précédentes majorant une seconde fonction finie continue.

10. *Fonctions sousharmoniques*. — On pourrait d'abord étendre les résultats du cas harmonique à un ensemble de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement sur tout compact et *également continues* en tout point (au sens de la structure uniforme additive ou de la droite numérique achevée) ⁽²⁸⁾.

Laissant de côté cette explicitation, étudions les fonctions sousharmoniques les plus générales, en commençant par étendre la propriété fondamentale de F. Riesz :

Une suite décroissante de fonctions sousharmoniques dans le domaine ω de \bar{R}_τ , tend vers une fonction sousharmonique ou vers $-\infty$ (dans ce dernier cas avec uniformité de convergence sur tout compact de ω).

Car la limite est $< +\infty$, semi-continue supérieurement, majorée sur un \mathcal{O} par son intégrale- \mathcal{E} (dans laquelle on a pu passer à la limite) ⁽²⁹⁾.

La propriété s'étend à la limite relative à une famille ordonnée filtrante décroissante ⁽³⁰⁾.

⁽²⁸⁾ Un cas intéressant est celui des médiantes spatiales sphériques à rayon constant de fonctions sousharmoniques données dans ω de R_τ et bornée supérieurement sur tout compact. On l'étend à ω de \bar{R}_τ en remplaçant d'abord les fonctions sousharmoniques dans un Δ_0^R fixé par l'intégrale- \mathcal{E} correspondante puis prenant les médiantes. L'intérêt de cette classe est que toute fonction sousharmonique est limite d'une suite décroissante de fonctions sousharmoniques de cette classe.

⁽²⁹⁾ On achève en sachant que dans un domaine de R_τ la semi-continuité supérieure et l'inégalité de moyenne pour une fonction $< +\infty$ entraîne qu'elle soit sousharmonique ou $-\infty$ et l'uniformité se voit en remarquant que l'intégrale- \mathcal{E} prolongée par la fonction doit tendre vers $-\infty$ avec celle-ci.

⁽³⁰⁾ Cela résulte par exemple de ce qu'on peut extraire une suite décroissante admettant localement la même limite, ce qui peut se déduire du lemme suivant (Dini-H. Cartan) : si une famille ordonnée filtrante décroissante de fonctions $< +\infty$, semi continues supérieurement sur un compact tend vers 0, la convergence est *uniforme*. De ce lemme H. Cartan déduit d'ailleurs en se ramenant à une convergence uniforme : soit sur un compact une mesure $\mu \geq 0$ et une famille ordonnée filtrante décroissante de fonctions $f_i \leq 0$ et semi-continues supérieurement. Alors

$$\int f_i d\mu \rightarrow \int \lim f_i d\mu.$$

On en tire directement et c'est préférable, le résultat du texte.

On peut aussi procéder de la manière particulière qui suit : soit U la limite ou enveloppe inférieure, qui est semi-continue supérieurement. Prenons $\bar{D}_{M_0}^r \subset \omega$ et déduisons des u_i de la famille, les v_i sousharmoniques obtenues en remplaçant dans $D_{M_0}^r$, u_i par l'intégrale- \mathcal{E} . Dans $D_{M_0}^r$ les v_i ont une limite harmonique ou $-\infty$ et $U(M_0) \leq \lim v_i(M_0)$. Comme $\lim v_i(M_0)$ ou $\mathcal{N}_{\lim v_i}^r(M_0)$ indépendant de $r < R$ est majoré par $\mathcal{N}_{\lim v_i}^r(M_0)$ à cause de la semi-continuité supérieure de $\lim v_i$, on a

$$U(M_0) \leq \mathcal{N}_U^r(M_0).$$

Raisonnement analogue avec \mathcal{R}_τ remplaçant M_0 et $\Delta_0^R \subset \omega$. On remarquera *comme conséquence* le passage à la limite dans l'intégrale- \mathcal{E} ; en effet, $\lim v_i$ sousharmonique mais harmonique dans le \mathcal{O} vaut sa propre intégrale.

Les énoncés précédents pourraient se déduire aussitôt des résultats généraux de H. Cartan sur le potentiel ⁽³¹⁾ auxquels il nous faut avoir recours maintenant pour étudier le cas de croissance.

D'après eux, *une suite croissante* ⁽³²⁾ *ou famille ordonnée filtrante croissante de fonctions sousharmoniques* u_i *dans un ouvert de* R_τ , *bornées supérieurement sur tout compact contenu, tend vers une fonction quasi-sousharmonique* ⁽³³⁾.

L'énoncé s'étend tel quel à un ouvert ω *quelconque de* \bar{R}_τ .

En effet soit v_i déduit de u_i par remplacement dans $\Delta_{M_0}^r$ par l'intégrale - \mathcal{E} ; $\lim v_i$ est harmonique dans $\Delta_{M_0}^r$, quasi-sousharmonique hors \mathcal{R}_τ donc même dans ω , coïncide dans $\Delta_{M_0}^r$ avec son intégrale- \mathcal{E} (puisqu'il en est ainsi pour la régularisée). Donc dans $\Delta_{M_0}^r$

$$\lim u_i \leq \lim v_i = \text{Intégrale - } \mathcal{E} \text{ de } \lim u_i.$$

La régularisée U de $\lim u_i$ hors \mathcal{R}_τ est aussi majorée par son intégrale - \mathcal{E} ; en la prolongeant en \mathcal{R}_τ par la valeur $\lambda = \limsup_{M \neq \mathcal{R}_\tau, M \rightarrow \mathcal{R}_\tau} U$, on aura une fonction sousharmonique dans ω ; on achève donc *en remarquant que dans le cas de* $\tau > 2$ (où le point \mathcal{R}_τ ne forme pas un ensemble polaire) *on a*

$$\lim u_i(\mathcal{R}_\tau) = \lambda.$$

En effet la majoration de U par l'intégrale - \mathcal{E} de $\lim u_i$ (pour $\Delta_{M_0}^r$) entraîne celle de λ par $\mathcal{N}_U^\rho(M_0)$ qui vaut donc λ . Il suffira par suite de voir que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} u_i(\mathcal{R}_\tau) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{N}_U^\rho(M_0),$$

où d'ailleurs

$$u_i(\mathcal{R}_\tau) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mathcal{N}_{u_i}^\rho(M_0).$$

Or on peut passer à la limite pour u_i dans une intégrale - \mathcal{E} de $\Delta_{M_0}^\rho$, ce qui équivaut à dire que $\mathcal{N}_{u_i}^\rho(M_0)$ tend selon le filtre vers $\mathcal{N}^\rho(M_0)$ ou \mathcal{N}_U^ρ ⁽³⁴⁾. On conclut alors grâce à la convexité de la courbe [en $t = h(\rho)$] $\mathcal{N}_{u_i}^\rho(M_0)$, et de la courbe limite $\mathcal{N}^\rho(M_0)$ ⁽³⁵⁾.

⁽³¹⁾ H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 946.

⁽³²⁾ Dans cet énoncé pour suites croissantes, on savait antérieurement que l'ensemble exceptionnel (où la limite diffère de la régularisée) était de mesure ordinaire nulle (Szpilrajn-Rado, voir T. RADO, *Subharmonic fonctions*, *Ergeb. Bd. V, Heft., 1*, 1937) puis même *intérieurement* polaire (Voir ma Note des *C. R. Acad. Sc.*, t. 207, nov. 1938, p. 836). L'énoncé actuel plus précis *caractérise* même localement les fonctions quasi-sousharmoniques comme on y reviendra dans la remarque du n° 12.

⁽³³⁾ Cela se déduit par exemple, selon H. Cartan, de l'énoncé pour potentiels > 0 décroissants, en voyant que localement les fonctions valent à un ϵ même constante près, des potentiels de masses ≤ 0 à fonction de base une certaine fonction de Green.

⁽³⁴⁾ Raisonnement analogue à celui du cas décroissant, selon la fin de la note ⁽³⁰⁾.

⁽³⁵⁾ On considérera le segment joignant le point initial (point limite, pour $t \rightarrow 0$) à un point d'abscisse fixe et à sa position limite. Celle-ci doit être au-dessus de la courbe limite d'où la propriété cherchée de son point initial.

Enveloppes supérieures. — Un bel exemple de l'utilité des filtres est dans l'application (H. Cartan) du théorème de convergence précédent aux enveloppes supérieures. En adjoignant à un ensemble de fonctions sousharmoniques toutes les enveloppes supérieures d'un nombre fini d'entre elles, on ne change pas l'enveloppe supérieure, mais l'ensemble total peut être ordonné selon une famille filtrante croissante dont la limite est l'enveloppe en question.

Donc un ensemble de fonctions sousharmoniques dans un ouvert ω de \bar{R}_τ , bornées supérieurement sur tout compact de ω , admet une enveloppe supérieure quasi sousharmonique; si les fonctions données sont harmoniques ⁽³⁶⁾, l'enveloppe supérieure est continue sousharmonique (ce qui peut s'établir sans appel au théorème le plus général).

Limite supérieure. — On passe aussitôt à l'énoncé général pour les suites : Soit une suite de fonctions sousharmoniques bornées supérieurement sur tout compact dans le domaine ω de \bar{R}_τ . La $\lim \sup$ est $-\infty$ ou quasi sousharmonique.

Extension immédiate aux filtres à base dénombrable ⁽³⁷⁾.

V. — Le problème de Dirichlet pour un ensemble ouvert de \bar{R}_τ .

11. Les seuls théorèmes de convergences donnés initialement sur les fonctions harmoniques fournissent aussitôt, grâce aux filtres, le résultat suivant :

LEMME. — Considérons une famille ordonnée filtrante croissante ⁽³⁸⁾ de fonctions sousharmoniques u_i dans un domaine ω de \bar{R}_τ , telle que l'intégrale- \mathcal{I} de tout u_i pour tout $\mathcal{O} \subset \omega$ prolongée par u_i , appartienne encore à la famille. Alors la limite ou enveloppe supérieure sera $+\infty$ ou harmonique.

Car les intégrales- \mathcal{I} des u_i dans un \mathcal{O} fixé forment une famille ordonnée filtrante croissante de fonctions harmoniques, avec même limite que les u_i . L'enveloppe cherchée est donc localement soit $+\infty$, soit harmonique, d'où le même résultat pour le domaine ω entier. D'où la forme élargie du théorème de Perron :

THÉORÈME 5. — Soit sur la frontière ω^* non vide de l'ensemble ouvert ω de \bar{R}_τ , une fonction f (pouvant valoir $\pm\infty$). L'enveloppe supérieure $\underline{\mathcal{H}}_f^\omega$ des fonctions u valant dans chaque domaine composant ω_i , $-\infty$ ou une fonction sousharmonique et qui admettent en tout point frontière une limite supérieure $\leq f$ est dans chaque ω_i , $-\infty$, $+\infty$ ou harmonique et vaut $\underline{\mathcal{H}}_f^{\omega_i}$.

⁽³⁶⁾ Ou si plus généralement les enveloppes supérieures avec l'une d'entre elles sont également continues en tout point.

⁽³⁷⁾ Comme H. Cartan l'a montré par un exemple, l'énoncé n'est plus vrai pour un filtre quelconque.

⁽³⁸⁾ C'est-à-dire, on le rappelle, telle que deux fonctions soient majorées par une troisième.

Si chaque u est assujettie à être de plus bornée supérieurement dans ω , l'enveloppe supérieure notée \underline{H}_f^ω est de même dans chaque ω_i , $\pm \infty$ ou harmonique et vaut $\underline{H}_f^{\omega_i}$.

Mêmes enveloppes respectives si les u sont de plus continues. Enfin résultats analogues avec fonctions surharmoniques et enveloppes inférieures $\overline{\mathcal{H}}_f^\omega, \overline{H}_f^\omega$.

On a essentiellement $\underline{H}_f^\omega \leq \overline{H}_f^\omega$ et l'égalité en un point entraîne l'égalité dans tout le domaine composant contenant ce point.

12. Un point frontière P (même \mathcal{R}_τ) de ω est dit régulier s'il existe un voisinage ouvert α et une fonction harmonique (ou ce qui est équivalent surharmonique) > 0 sur $\alpha \cap \omega$ s'annulant en P (c'est-à-dire tendant vers zéro quand $M \rightarrow P$). Si P est en \mathcal{R}_τ et $\tau > 2$, il est toujours régulier; sinon l'inversion de pôle $O \neq P$ conserve sa régularité. Dans tous les cas, l'irrégularité de P équivaut à l'effilement en P de $C\omega$; la régularité de P équivaut à l'existence dans ω d'une fonction surharmonique > 0 s'annulant en P et de $\liminf > 0$ en tout autre point frontière⁽³⁹⁾; il s'ensuit que si f est bornée supérieurement, \overline{H}_f^ω admet en P régulier une $\lim. \sup.$ au plus égale à celle de f en P sur ω . Enfin l'ensemble des points frontière irréguliers est une réunion dénombrable de compacts, polaire, et la réunion des ensembles analogues (d'ailleurs disjoints) pour chaque ω_i .

Lorsque $\underline{H}_f^\omega(M)$ et $\overline{H}_f^\omega(M)$ sont égaux et finis en M , on les note $H_f^\omega(M)$. Si cela a lieu quel que soit M , f est dite résolutive et H_f^ω dite fonction de Wiener. On verra aisément que si $C\omega$ est polaire (donc ω connexe) les u considérées d'enveloppes $\underline{H}_f^\omega, \overline{H}_f^\omega$ et celles-ci sont des constantes et f n'est résolutive que si $f = \text{const. finie}$. D'où la généralité du résultat suivant, point essentiel de l'extension entreprise de (AS) :

THÉORÈME 6. — Soit ω ouvert de complémentaire non polaire (ou ce qui est équivalent de frontière non polaire). On notera δ_M le domaine composant contenant le point M de ω . Toute f finie continue sur ω^* est résolutive; $H_f^\omega(M)$ est fonctionnelle linéaire de cette f et s'exprime (de manière unique) selon $\int_{\omega^*} f(P) d\mu_M(P)$, où μ_M

est une mesure ≥ 0 de Radon sur ω^* , nulle hors δ_M^* et identique sur δ_M^* à celle relative à δ_M .

La mesure μ_M (ou mesure harmonique relative à M) extérieure ou intérieure d'un ensemble e de ω^* (de fonction caractéristique φ_e) vaut $\overline{H}_{\varphi_e}^\omega(M)$ respectivement $\underline{H}_{\varphi_e}^\omega(M)$ ⁽⁴⁰⁾.

(39) On pourra obtenir une telle fonction en s'arrangeant pour la prendre harmonique dans un voisinage de P , constante ailleurs.

(40) Leur nullité respective, leur égalité sont indépendantes de M dans un même domaine composant ω_i ; de plus, comme pour toute fonction harmonique > 0 , le rapport des valeurs de chacune (supposée non nulle) en deux points arbitraires d'un compact d'un même ω_i est compris entre deux nombres > 0 indépendants de e .

La sommabilité μ_M (ou sommabilité harmonique relative à M fixé) d'une f quelconque sur ω^* équivaut au fait que $\bar{H}_f^\omega(M)$ et $\underline{H}_f^\omega(M)$ soient finis et égaux en M ⁽⁴¹⁾ (elle est donc indépendante de M dans un même domaine composant et équivaut à la résolutive de f pour δ_M) et l'on a alors

$$(9) \quad H_f^\omega(M) = \int_{\omega^*} f d\mu_M.$$

On y parvient en adaptant les raisonnements principaux de (AS) à partir des deux résultats suivants que nous allons démontrer : u étant un ouvert de complémentaire non polaire,

A. Si f sur ω^* est finie continue, elle est résolutive.

B. Il existe dans ω une fonction harmonique ≤ 0 tendant vers $-\infty$ aux points frontière irréguliers ⁽⁴²⁾ (d'où résulte que les enveloppes $\underline{H}_f^\omega, \bar{H}_f^\omega$ sont aussi celles des fonctions correspondantes assujetties à être de plus harmoniques).

Supposons d'abord $C\omega$ d'intérieur non vide. Alors (A) ainsi réduit résultera comme dans (AS) de :

A'. Étant donnée φ finie continue dans \bar{R}_τ , on peut l'approcher à ε près hors d'un point Q par la différence de deux fonctions finies continues sousesharmoniques hors Q .

Il suffit même de réaliser l'approximation hors d'un voisinage de Q ^(42 bis). Pour se ramener alors au cas connu de Q en \mathcal{R}_τ , on fera dans le plan une simple inversion; si $\tau > 2$, on remplacera φ par φ_1 voisine mais constante au voisinage de \mathcal{R}_τ et l'on se ramène donc au cas de φ nul au voisinage de \mathcal{R}_τ ; on approche la transformée de Kelvin (complétée par zéro au pôle Q) par une différence de deux fonctions sousesharmoniques continues dans $R_\tau, \geq 0$ en Q et l'on fait à nouveau la transformation de Kelvin.

Quant à B, on fera une inversion de pôle O extérieur à ω , ce qui nous ramène au cas connu de ω borné. Si $\tau > 2$ et si $\omega \supset \mathcal{R}_\tau$, on prendra, grâce à l'addition d'une constante, une fonction harmonique nulle en O dans l'inverse de ω , puis on ajoutera à la transformée une constante la rendant < 0 .

⁽⁴¹⁾ De plus, la condition $\underline{H}_f^\omega(M) = \bar{H}_f^\omega(M) = +\infty$ (indépendante de M dans un même domaine composant) équivaut à ce que f majoré une fonction mesurable μ_M , et sommable μ_M au sens large avec intégrale valant $+\infty$. De même avec $-\infty$.

Ajoutons que la condition « \bar{H}_f^ω partout $< +\infty$ » équivaut à l'existence d'une fonction résolutive (et même borélienne) majorant f .

⁽⁴²⁾ Voir plus loin un énoncé plus général (n° 13 c).

^(42 bis) Pour obtenir (A') lui-même, on partira de cet énoncé restreint avec $\varphi = \text{const.}$ dans un voisinage de Q et l'on modifiera convenablement les deux fonctions sousesharmoniques dans un $D_Q^r - Q$ (si $Q \neq \mathcal{R}_\tau$) ou Δ_Q^r .

Passons *au cas général*. On démontre (B) en utilisant sa validité lorsqu'on ôte de ω un voisinage \bar{D}_0^r d'un point O puis faisant un prolongement sur ce voisinage par la méthode alternée, dont le succès vient de l'existence d'un point frontière régulier du domaine composant de ω qui contient O ⁽⁴³⁾. Enfin (A) s'obtient en formant d'abord, grâce à sa forme réduite (en ôtant un D_0^r) et au procédé alterné, une fonction harmonique bornée prenant les valeurs de f aux points-frontière réguliers, puis achevant par usage de (B).

Remarque. — Ce-même emploi de la méthode alternée donne le résultat suivant grâce à la propriété (d , n° 7). Soit E polaire, sur ω de complémentaire non polaire. Il existe dans ω une fonction sousharmonique < 0 valant $-\infty$ sur E ⁽⁴⁴⁾ et même finie en un point fixé hors E. On en déduit que toute fonction quasi-sousharmonique dans un tel ω est l'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques qu'elle majore.

13. *Mesure harmonique.* — Le théorème 6 ainsi établi, poursuivons l'extension des résultats ultérieurs, en particulier de TA. ω étant ouvert et $C\omega$ non polaire, on mettra en relief la propriété de la note ⁽⁴⁰⁾; puis :

a. Soit Φ finie continue dans $\bar{\omega}$. Quel que soit $\varepsilon > 0$ et un compact E dans ω , il existe dans ω un compact $F \supset E$ tel que pour tout ouvert ω_0 satisfaisant à $F \subset \omega_0 \subset \omega$, on ait sur E, $|H_\Phi^\omega - H_\Phi^{\omega_0}| < \varepsilon$. D'où résulte que si ω_n tend en croissant vers ω , $H_{\Phi}^{\omega_n} \rightarrow H_\Phi^\omega$, ce qui équivaut à dire que, pour M, fixé, la mesure harmonique sur ω_n converge vaguement [au sens de H. Cartan ⁽⁴⁵⁾] vers la mesure harmonique sur ω .

⁽⁴³⁾ De façon précise soit $0 < r_1 < r_2 < r_3$ et $\bar{D}_0^{r_3} \subset \omega$. Soit dans $\omega - \bar{D}_0^{r_1}$ une fonction harmonique $u \leq 0$ tendant vers $-\infty$ aux points irréguliers, puis v_1 l'intégrale - \mathcal{X} pour $D_0^{r_2}$ et u , enfin

$$\omega_1 = \underline{H}_{f_1}^{\omega - \bar{D}_0^{r_2}},$$

où f_1 vaut 0 sur $\bar{\omega}$ et $v_1 - u$ sur $\Sigma_0^{r_2}$. Soit v_2 l'intégrale - \mathcal{X} pour $D_0^{r_1}$ et $u + \omega_1$,

$$\omega_2 = \underline{H}_{f_2}^{\omega - \bar{D}_0^{r_1}}$$

où f_2 vaut 0 sur $\bar{\omega}$ et $v_2 - u$ sur $\Sigma_0^{r_1}$, etc. Comme $\underline{H}_\varphi^{\omega - \bar{D}_0^{r_2}}$ où φ vaut 0 sur $\bar{\omega}$ et 1 sur $\Sigma_0^{r_2}$ est < 1 sur $\Sigma_0^{r_1}$, on verra par le procédé alterné que ω_n et v_n restent bornés et convergent uniformément vers des fonctions harmoniques ω et v , enfin que v et $\omega + u$ coïncident dans le domaine

$$r_2 < OM < r_3.$$

Alors la fonction égale à v dans $\bar{D}_0^{r_2}$ à $\omega + u$ dans $\omega - \bar{D}_0^{r_2}$ résout la question. On remarquera qu'il n'y a pas même besoin de connaître la forme réduite de (A).

⁽⁴⁴⁾ En partageant au besoin E en deux, on se ramène au cas où un D_0^r contenu dans ω ne rencontre pas E. On utilise (d , n° 7) pour $\bar{R}_\tau - O$, d'où une fonction sousharmonique < 0 dans $\bar{R}_\tau - \bar{D}_0^r$ valant $-\infty$ sur E, On la prolonge (en la modifiant) dans ω .

On complète l'énoncé en raisonnant comme dans la note ⁽²⁰⁾.

⁽⁴⁵⁾ Sur un ensemble localement compact une mesure de Radon μ_n converge vaguement vers μ si pour toute fonction finie continue f , nulle hors d'un compact $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$.

b. Soit ω_1 ouvert contenu dans ω et M dans ω_1 . Sur $\omega^* \cap \omega_1^*$, la mesure harmonique (extérieure ou intérieure) pour M décroît quand on passe de ω à ω_1 , et la sommabilité est conservée; de plus si f est résolutive pour ω , f_1 prise sur ω_1^* égale à f ou H_f^ω , est résolutive pour ω_1 et dans ω_1 , on a

$$H_f^\omega = H_f^{\omega_1}.$$

Enfin soit ω_n ouvert tendant en croissant vers ω , E un ensemble ouvert sur ω^* , appartenant aux ω_n^* . Sur E , la mesure harmonique pour M fixé et ω_n tend en croissant et au sens le plus fort vers la mesure harmonique pour ω (⁴⁶).

c. Soit l'ensemble e sur ω :

α . La condition $\underline{H}_{\varphi_e}^\omega(M) = 0$ en un point M (respectivement pour tout M) équivaut à ce que toute fonction sousharmonique et bornée supérieurement dans δ_M (respectivement dans ω) de $\limsup \leq 0$ aux points de $\delta_M^* \cap Ce$ (resp. $\omega \cap Ce$) est ≤ 0 .

β . La condition $\overline{H}_{\varphi_e}^\omega(M) = 0$ en un point M (respectivement pour tout M) équivaut à l'existence d'une fonction sousharmonique [ou ce qui est équivalent harmonique (⁴⁷)] ≤ 0 dans δ_M (respectivement dans ω) tendant vers $-\infty$ en tout point de $\delta_M^* \cap e$ (respectivement de $\omega^* \cap e$).

γ . Ces conditions prises séparément subsistent quand ω est changé en ω_1 ($C\omega_1$, non polaire) s'il existe Δ ouvert contenant e et tel que $\omega \cap \Delta = \omega_1 \cap \Delta$; ainsi sur l'ensemble $\omega^* \cap \Delta$ ou $\omega_1^* \cap \Delta$ et pour $M \in \omega \cap \omega_1$, la mesurabilité $-\mu_M$ est la même pour ω et ω_1 .

d. Les ensembles e tels que $\underline{H}_{\varphi_e \cap \omega^*}^\omega$ (ou $\overline{H}_{\varphi_e \cap \omega^*}^\omega$) soit nul, sont négligeables intérieurement (extérieurement) pour ω . Dans le second cas on pourra dire seulement « négligeables ».

Soit sur ω , l'ensemble E tel que $\Delta = \omega - E$ soit non vide ouvert; il y a équivalence des conditions que E soit négligeable pour Δ , que E soit polaire ou que toute fonction harmonique et bornée dans Δ soit prolongeable harmoniquement dans ω ; et dans cette hypothèse, pour toute fonction Φ dans \overline{R}_τ , $\underline{H}_\Phi^\Delta$, \overline{H}_Φ^Δ valent $\underline{H}_\Phi^\omega$, \overline{H}_Φ^ω .

e. Au qualificatif « négligeable intérieurement ou extérieurement » on

(⁴⁶) Sur E localement compact la mesure μ' limite forte par croissance et la mesure harmonique pour ω donnent la même intégrale pour toute fonction f finie continue nulle hors d'un compact, d'où leur identité.

(⁴⁷) Partons d'une telle fonction sousharmonique (voir le raisonnement d'existence dans TA) et considérons la fonction φ de ses \limsup à la frontière. On aura une fonction harmonique cherchée en ajoutant à H_φ^ω une fonction harmonique < 0 tendant vers $-\infty$ aux points irréguliers.

ajoutera « absolument » pour caractériser que la propriété a lieu quel que soit ω ⁽⁴⁸⁾.

Les ensembles polaires sont absolument négligeables.

Il y a identité des ensembles intérieurement polaires et des ensembles absolument négligeables intérieurement.

On explicitera aisément des conséquences particulières de toutes ces propriétés. Ainsi une fonction harmonique et bornée dans ω , est nulle si elle s'annule à la frontière, hors d'un ensemble intérieurement négligeable (en particulier à peu près partout).

14. *Mesure harmonique de \mathcal{R}_τ .* — Un point forme un ensemble absolument négligeable, sauf \mathcal{R}_τ si $\tau > 2$.

Pour que \mathcal{R}_τ ($\tau > 2$) soit négligeable pour un ouvert ω dont \mathcal{R}_τ est point frontière, il faut et il suffit que pour une ou toute inversion, le pôle O soit régulier pour l'inverse ω' (c'est-à-dire $C\omega'$ non effilé en O).

C'est avec un autre langage un résultat de Bouligand ⁽⁴⁹⁾, qui se déduit facilement de la remarque du n° 8. En effet la fonction de Wiener u pour ω , la valeur 0 sur $\omega - \mathcal{R}_\tau$ et 1 en \mathcal{R}_τ se prolonge sousharmoniquement au voisinage de \mathcal{R}_τ , ce point exclus, par la valeur zéro hors ω sauf aux points irréguliers où l'on prendra des valeurs convenables bornées. Si u n'est pas nulle, donc est > 0 dans un domaine composant δ de ω , on voit que $C\delta$ (donc $C\omega$) donne par inversion, à un ensemble polaire près, un ensemble effilé en O.

Réciproquement si O est régulier pour l'inverse de ω , il existe dans un Δ_0^R une fonction sousharmonique < 0 hors $\omega \cap \Delta_0^R$, mais de $\lim \sup > 0$ en \mathcal{R}_τ . Il en résulte que la fonction de Wiener pour $\omega \cap \Delta_0^R$ ($R_1 > R$) et distribution-frontière finie, mais nulle hors \mathcal{R}_τ n'est pas nulle partout.

Remarque. — D'après le critère (c, γ) traduisant la négligeabilité, le théorème précédent donne par inversion, pour $\tau > 2$, le critère suivant de régularité d'un point-frontière $O \neq \mathcal{R}_\tau$ d'un ouvert Ω : *il faut et il suffit qu'il existe au voisinage de O sur Ω une fonction surharmonique (ou, ce qui est équivalent, harmonique) $u > 0$ telle que $\frac{u}{h(OM)} \rightarrow +\infty, (M \rightarrow O)$.*

Ce critère est vrai même pour $\tau = 2$ comme va l'établir succinctement la démonstration directe suivante (pour $\tau \leq 2$), ce qui entraînera inversement aussitôt le théorème précédent. On se basera sur le critère suivant : pour que le point frontière O de Ω borné soit régulier, il faut et il suffit que $h(OM)$ soit égale à la

⁽⁴⁸⁾ Pour les ensembles de \mathcal{R}_τ , il y a bien équivalence avec les définitions de TA, où n'interviennent que des ω bornés.

⁽⁴⁹⁾ BOULIGAND, *Annales de la Soc. polonaise de Math.*, 1925, p. 98.

fonction de Wiener de Ω pour valeur-frontière $h(OM)$ ⁽⁵⁰⁾, ce qui équivaut directement ⁽⁵¹⁾ à la non existence d'une fonction harmonique dans Ω , ≥ 0 non partout nulle, $\leq h(OM) + \text{const.}$ s'annulant quasi-partout à la frontière ⁽⁵²⁾.

Si O est régulier, considérons pour Ω ramené à être borné, la fonction de Wiener u pour une distribution égale à $h(OM)$ dans D_0^r et à zéro ailleurs. Elle diffère de $h(OM)$ de la fonction de Wiener pour zéro dans D_0^r et $h(OM)$ ailleurs. Cette dernière s'annulant en O , on voit que K étant fixé ($0 < K < 1$) u majore $Kh(OM)$ pour tout r fixé, dans un voisinage de O choisi alors assez petit, tandis qu'en tout point fixé de Ω , u tend vers zéro avec r . On en déduit pour chaque composant Ω_i de Ω une fonction harmonique $u_i > 0$ telle, si O est point frontière, que $\frac{u_i}{h(OM)} \rightarrow +\infty (M \rightarrow O)$ ⁽⁵³⁾. On répond alors à la question pour Ω en prenant la fonction égale dans Ω_n à $u_n + nh(OM)$.

Réciproquement, considérons une fonction surharmonique u de l'énoncé dans $\delta = \Omega \cap D_0^r$. On voit facilement qu'elle majore toute fonction harmonique v dans δ , ≥ 0 , $\leq h(OM) + \text{const.}$ s'annulant quasi-partout à la frontière. De même εu . D'où $v = 0$.

15. *Extension de l'intégrale de Poisson-Stieltjes.* — Considérons dans \overline{R}_τ un domaine ω ($C\omega$ non polaire) et la fonction de Wiener $\int f d\mu_M$. La seule invariance en M des ensembles de mesure μ_M nulle entraîne l'existence d'une fonction de P sur $\overset{\star}{\omega}$, $\varphi_M^0(P)$ telle que

$$\mu_M(e) = \int_e \varphi_M^0(P) d\mu_0(P),$$

d'où

$$(10) \quad H_f^\varphi(M) = \int_{\overset{\star}{\omega}} f(P) \varphi_M^0(P) d\mu_0(P).$$

⁽⁵⁰⁾ Immédiat d'après l'expression générale de la différence entre « plus petite » et « meilleure » majorante harmonique dans un domaine (Voir mon article du *Bull. Ac. roy. des Sc. de Belgique*, t. 24, 1938, p. 426). Cela rentre d'ailleurs dans le théorème général 5 de mon article déjà cité (*Bull. Sc. Math.*, janvier 1944).

Remarquons que la différence entre $h(OM)$ et sa fonction de Wiener si elle n'est pas nulle, n'est pas bornée.

⁽⁵¹⁾ Existence évidente si $h(OM)$ diffère de la fonction de Wiener (toujours au plus égale); inversement s'il y a existence d'une telle fonction u , on verra que $h(OM) - u$ doit majorer toute fonction sousharmonique dans Ω , bornée supérieurement, de limite supérieure $\leq h(OP)$ en tout point frontière P , et doit donc majorer la fonction de Wiener de $h(OP)$.

⁽⁵²⁾ Cette seconde forme qui, comme l'autre, entraîne directement le théorème sur la mesure harmonique de \mathcal{R}_τ a justement été donnée de manière voisine et utilisée dans ce but par M. Bouligand (*loc. cit.*).

⁽⁵³⁾ On considère u_n correspondant à $r_n \rightarrow 0$, de sorte que, en P fixé, $u_n(P) < \frac{1}{n^3}$. On voit que

$\sum_1^\infty n u_n$ répond à la question. Tout cela n'est d'ailleurs qu'une transposition du lemme 2 de TA.

Lorsque ω est D_0^R , μ_0 est proportionnelle à la mesure superficielle sur Σ_0^R et l'intégrale précédente est celle de Poisson. On étendra celle de Poisson-Stieltjes en introduisant $\int_{\omega^*} \varphi_M^0(P) d\nu$ où ν est une mesure de Radon sur ω^* , O étant fixé. Cette intégrale doit permettre de représenter des classes étendues de fonctions harmoniques dans ω ⁽⁵⁴⁾, avec des applications dans le plan aux fonctions holomorphes. L'allure à la frontière dépendra de l'étude, à approfondir, du noyau φ .

16. *Prolongement sousharmonique et plus petite majorante harmonique.* — Soit u sousharmonique dans ω ouvert. On envisage son prolongement en considérant v sousharmonique dans δ ouvert rencontrant ω , telle que :

- a. $u \geq v$ dans $\delta \cap \omega$;
- b. sur $\omega^* \cap \delta$, $\limsup u$ est partout $< +\infty$ et quasi-partout égale à v .

Alors u prolongée par v dans $\delta \cap C\omega$ définit une fonction U quasi-sousharmonique dans $\omega \cup \delta$ ⁽⁵⁵⁾.

Applications. — 1° Cas de $v = 0$, u fonction de Wiener pour $f \geq 0$, nulle sur $\delta \cap \omega^*$;

2° Soit ω tel que $\bar{\omega}$ soit contenue dans Ω , où v est sous-harmonique; v est résolutive pour ω et H_v^ω prolongée par v hors ω est quasi-sousharmonique. H_v^ω est d'ailleurs l'enveloppe supérieure des fonctions sousharmoniques dans ω dont le prolongement par v est sousharmonique dans Ω .

Enfin si Ω est connexe, l'enveloppe supérieure des $H_v^\omega(\bar{\omega} \subset \Omega)$ (qui est aussi la limite des $H_v^{\omega_n}$ pour ω_n tendant en croissant vers Ω avec $\bar{\omega}_n \subset \Omega$) est harmonique ou vaut $+\infty$ suivant qu'il existe ou non une majorante harmonique de v dans Ω et vaut dans le premier cas la *plus petite majorante harmonique de v* .

17. *Extension de la fonction fondamentale $h(MP)$.* — On définira $h_Q^P(M)$ comme fonction de M dans \bar{R}_r dépendant de deux points *distincts* P et Q de \bar{R}_r selon les conventions suivantes, à partir de $h(r)$ définie pour $(0 \leq r \leq +\infty)$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a. h_{\mathcal{R}_r}^P(M) = h(PM), \quad h_{\mathcal{R}_r}^Q(M) = -h(QM); \\ b. \text{ si } P \text{ et } Q \text{ sont distincts de } \mathcal{R}_r : \\ \quad h_Q^P(M) = h(PM) - h(QM) - h(PQ), \quad \text{avec } h_Q^P(\mathcal{R}_r) = -h(PQ). \end{array} \right.$$

⁽⁵⁴⁾ Voir à ce sujet MARIA and MARTIN, *Representation of positive harmonic Functions* (Duke Math. Journal, Vol. 2, septembre 1936).

⁽⁵⁵⁾ On le voit localement en introduisant une fonction sousharmonique $\omega < 0$ valant $-\infty$ sur l'ensemble polaire exceptionnel de $\omega \cap \delta$; alors $U + \lambda\omega$ est sousharmonique ($\lambda > 0$), d'où la quasi-sousharmonicité de la limite pour $\lambda \rightarrow 0$, puis de U .

Propriétés. — Comme fonction de M elle est surharmonique hors Q , sous-harmonique hors P avec flux φ_τ et $-\varphi_\tau$ en ces points. Elle est, pour Q fixé, *symétrique* en M et P hors Q et alors notée $h_Q(M, P)$ (⁵⁶).

En extension d'un critère antérieurement rappelé, on verra que $h_Q^p(M)$, qui est *résolutive* (⁵⁷) pour tout ω ($C\omega$ non polaire), *coïncide avec sa fonction de Wiener si et seulement si P et Q sont tous deux hors de ω et de l'ensemble des points frontière irréguliers*; dans le cas général, la différence de ces fonctions, bornée au voisinage de tout point frontière autre que P et Q n'est bornée au voisinage de P pris sur $\overset{\star}{\omega}$ que si P est régulier; elle est nulle ou non bornée dans ω si P et Q sont hors ω .

Ainsi pour deux tels points P et Q (situés hors ω et non irréguliers) et $M \in \omega$, $h_Q^p(M) = h_Q^m(P) = \int h_Q^p(s) d\mu_M(s)$. Comme μ_M ne charge pas l'ensemble des points frontière irréguliers, on en déduira pour M et P dans ω , Q hors ω et non irrégulier :

$$(11) \quad \int h_Q^p(s) d\mu_M(s) = \int h_Q^m(s) d\mu_P(s) \quad \text{ou} \quad H_{h_Q^p}^\omega(M) = H_{h_Q^m}^\omega(P),$$

grâce à une interversion d'intégrations (^{57 bis}).

18. *Fonction de Green.* — Soit un ouvert ω ($C\omega$ non polaire) et le point $P \in \omega$. *Il existe une fonction et une seule surharmonique dans ω , harmonique dans $\omega - P$, de flux φ_τ en P , bornée à la frontière de ω et s'y annulant quasi-partout (ou même seulement sauf sur un ensemble intérieurement négligeable pour ω). Ces conditions à la frontière de ω équivalent à celle que la fonction, soit u , coïncide avec la fonction de Wiener pour $\omega - E$ où E est un compact de ω (déterminé ou arbitraire) dont P est intérieur, avec valeur zéro sur $\overset{\star}{\omega}$ et u sur E (⁵⁸).*

La fonction (qui s'annule aux points-frontière réguliers) est > 0 dans δ_P , nulle dans les autres domaines composants et vaut au voisinage de P , $h_Q^p(M)$ à une fonction harmonique près (Q quelconque). On l'appellera *fonction de Green pour ω* , soit $G_\omega^p(M)$.

(⁵⁶) On remarquera que ces propriétés la déterminent à une fonction de Q près.

(⁵⁷) On se ramène à voir la résolutive d'une fonction φ égale à $h(PM)$ au voisinage d'un point $P \neq \mathcal{R}_\tau$ nulle d'ailleurs. Évident s'il n'y a qu'un point-frontière régulier, nécessairement \mathcal{R}_τ . Sinon il suffit de se ramener à ω_1 plus grand contenant \mathcal{R}_τ ($C\omega_1$ non polaire). On montre alors à partir du cas d'un ouvert borné et grâce au procédé alterné, l'existence d'une fonction harmonique ≥ 0 dans ω , qui pour tout point de $\overset{\star}{\omega} - P$ est bornée au voisinage et prend la valeur φ s'il est régulier. On en déduira la résolutive cherchée. La fonction de Wiener de l'énoncé est bornée au voisinage de tout point-frontière autre que P et Q et le théorème s'achève en raisonnant sur des voisinages de P et Q .

(^{57 bis}) L'égalité (11) n'est d'ailleurs pas vraie pour Q intérieur ou irrégulier et il est intéressant de comparer à cet égard Δ_0^p dans le plan et dans les espaces supérieurs pour Q en \mathcal{R}_τ .

(⁵⁸) Cette présentation a été donnée, pour ω borné, à l'occasion d'une équation plus générale que celle de Laplace dans un article (*Rendiconti del R. Ist., Lombardo*, vol. 63, 1930).

L'existence se voit en considérant $h_Q^p(M)$ au voisinage de P et utilisant le procédé alterné avec deux domaines \mathcal{O} contenant P. L'unicité vient de ce que la différence de deux fonctions possibles est harmonique en P.

On montrera que si $\omega_1 \subset \omega$, $G_{\omega_1}^p \leq G_\omega^p$ et si ω_n tend en croissant vers ω , $G_{\omega_n}^p \rightarrow G_\omega^p$.

Si Q est extérieur à ω , ou point-frontière régulier

$$(12) \quad G_\omega^p(M) = h_Q^p(M) - H_{h_Q^p}^\omega(M),$$

d'où, d'après (11), la symétrie ⁽⁵⁹⁾ : $G_\omega^p(M) = G_\omega^M(P)$ qui conduit à la notation $G_\omega(M, P)$. Et grâce à un passage à la limite avec ω_n , on verra alors que pour tout Q hors ω

$$(13) \quad G_\omega^p(M) = h_Q^p(M) - \psi_Q^p(M),$$

où ψ_Q^p est la plus grande minorante harmonique de h_Q^p dans ω .

Remarque. — Supposons que δ étant ouvert borné, $\delta \cap \omega^*$ soit au voisinage de chaque point une ligne ($\tau = 2$) ou surface ($\tau > 2$) assez régulière (par exemple à courbures finies continues). Alors sur cette partie de la frontière $\frac{dG_\omega^p}{dn}$ existe

$$\text{et } \mu_r(e) = \int_e \frac{dG_\omega^p}{dn} d\sigma \text{ (}^{60}\text{)}.$$

VI. — Représentation potentielle dans \bar{R}_τ des fonctions sousharmoniques.

19. Potentiel - h_Q . — Reprenons pour Q fixé dans \bar{R}_τ la fonction $h_Q(M, P)$ définie pour M et P hors Q et d'ailleurs bornée inférieurement lorsque M et P varient sur un compact de $\bar{R}_\tau - Q$ (ce qui demande un petit examen du cas plan).

Donnons-nous dans $\bar{R}_\tau - Q$ une mesure de Radon $\mu \geq 0$ ⁽⁶¹⁾. La sommabilité - μ en un point M au moins de la fonction de P, $h_Q(M, P)$ équivaut à la sommabilité - μ au voisinage de Q de $h(QP)$ si $Q \neq \mathcal{R}_\tau$ (et entraîne dans ce

⁽⁵⁹⁾ Cette symétrie, qui entraîne inversement (11), se voit aussi grâce au passage à la limite $G_{\omega_n} \rightarrow G_\omega$, en se ramenant à une frontière plus régulière et adaptant les raisonnements « élémentaires » du cas de ω borné, enfin avec la propriété auxiliaire suivante : si u et v sont harmoniques au voisinage de \mathcal{R}_τ , on a, pour r assez grand,

$$\int_{\Sigma_r} \left(u \frac{dv}{dn} - v \frac{du}{dn} \right) d\sigma = 0.$$

⁽⁶⁰⁾ On utilisera le résultat (bien connu pour ω borné) lorsque la frontière entière est assez régulière et l'on fera un passage à la limite avec un ω_n à frontière assez régulière comprenant une partie de $\delta \cap \omega^*$. On se servira des propriétés de la dérivée normale à la frontière d'une fonction harmonique y prenant les valeurs d'une fonction assez régulière (Voir SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, 1931, Bd. 33).

⁽⁶¹⁾ Voir l'exposé sur la mesure de Radon dans un espace localement compact par H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1942).

cas que *la masse totale soit finie*), ou de $h(OP)$ si Q est en \mathcal{R}_τ (O quelconque). Il y a alors sommabilité- μ au sens large de h_Q quel que soit M et l'intégrale $\int_{\bar{R}_\tau - Q} h_Q(M, P) d\mu(P)$ dite *potentiel* — h_Q de μ est *surharmonique* dans $\bar{R}_\tau - Q$ et même *harmonique* sur tout ouvert partiel sans masses, comme il résulte des propriétés analogues de h_Q ⁽⁶²⁾.

Résultats analogues avec une mesure $\mu \leq 0$ et la sousharmonicité. On passerait à des masses de signe quelconque (mesure généralisée, somme d'une mesure ≥ 0 et d'une mesure ≤ 0 , avec potentiel somme des potentiels, définie quasi-partout).

On complètera par des propriétés qui se déduisent aussitôt du cas classique et de la décomposition de h_Q . Ainsi les flux généralisés relatifs à \mathcal{O} ou $\bar{\mathcal{O}}$ (Q hors $\bar{\mathcal{O}}$) (voir n° 6 bis) valent le produit de φ_τ par la masse portée par \mathcal{O} ou $\bar{\mathcal{O}}$.

20. *Représentation potentielle.* — Poursuivons l'extension des résultats classiques de F. Riesz.

THÉORÈME 7. — Soit u sousharmonique dans un ouvert ω et Q hors ω . Il existe sur ω une mesure de Radon $\mu \leq 0$ unique (dite associée) indépendante de Q telle que sur tout ouvert δ ($\bar{\delta} \subset \omega$), u soit égale, à une fonction harmonique près, au potentiel- h_Q des masses portées par δ .

La seule nouveauté est d'examiner le cas de $Q \neq \mathcal{R}_\tau$ avec $\mathcal{R}_\tau \in \omega$. Alors μ hors \mathcal{R}_τ est déterminé par la théorie classique et vaut pour l'ensemble $r_1 \leq OM < r_2$, la différence entre les flux généralisés de u relatifs à $\bar{\Delta}_0^{r_1}$ et $\bar{\Delta}_0^{r_2}$; comme le flux de u à travers Σ_0^r reste borné pour $r \rightarrow \infty$, on trouve pour tout $\delta - \mathcal{R}_\tau$ une masse totale finie. Enfin la charge de \mathcal{R}_τ doit valoir le quotient par φ_τ du flux à l'infini.

Ainsi est établie l'existence d'une mesure qui donne pour tout $\bar{\mathcal{O}} \subset \omega$ le quotient par φ_τ du flux généralisé de u relatif à $\bar{\mathcal{O}}$. Prise sur tout δ elle admet bien un potentiel et il résulte du n° 6 bis fin que ce potentiel y vaut u à une fonction harmonique près.

(62) Il n'y a aucune difficulté (en particulier pour prendre une moyenne et permuter les signes \int) si μ ne charge qu'un compact de $\bar{R}_\tau - Q$. On passe au cas général en introduisant un compact E_n tendant en croissant vers $\bar{R}_\tau - Q$.

Si ω_n est un ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \bar{R}_\tau - Q$, on a pour M fixé

$$\int_{E_n} = \int_{E_n - \omega} + \int_{\omega}$$

où \int_{E_n} et $\int_{E_n - \omega}$ tendent vers les intégrales relatives à $\bar{R}_\tau - Q$ et $(\bar{R}_\tau - Q) - \omega$. On conclut en remarquant que $\int_{E_n - \omega}$ est fonction de M qui dans ω est harmonique et monotone à partir d'un certain rang.

Remarque. — Comme lorsque ω ne contient par \mathcal{R}_τ , μ vaut sur tout ouvert partiel la mesure associée sur cet ouvert.

THÉOREME 8. — *Soit le domaine ω ($C \omega$ non polaire), u sousharmonique dans ω , μ la mesure de Radon associée. Pour que la fonction de P , $G_\omega(M, P)$, soit sommable- μ dans ω pour un point M au moins de ω , il faut et il suffit que u admette une majorante harmonique dans ω et alors*

$$(14) \quad u(M) = \int_{\omega} G_{\omega}(M, P) d\mu(P) + \overset{*}{u}(M),$$

où $\overset{*}{u}(M)$ est la plus petite majorante harmonique de u dans ω ⁽⁶³⁾.

Si $\int_{\omega} G_{\omega}(M, P) d\mu(P)$ est finie en un point M_0 , voyons (en reprenant le raisonnement connu), qu'elle vaut partout u à une fonction harmonique près, d'où l'existence d'une majorante harmonique pour u . Soit ω_n ouvert croissant tel que $\bar{\omega}_n \subset \omega$ et $\omega_n \rightarrow \omega$. En tout M , \int_{ω_n} tend en décroissant vers \int_{ω} et est donc finie en M_0 . De plus, dans ω_n , $\int_{\omega_n} = u + v_n$ est harmonique, comme il résulte de la décomposition de G_{ω} . Donc v_n décroît en tout point où u est finie, par suite quasi-partout, puis même (grâce à une moyenne) partout; sa limite v finie en M_0 est harmonique et $\int_{\omega} = u + v$.

Réciproquement supposons qu'il y ait majoration harmonique de u dans ω . Si E est un compact dans ω , on montrera que dans $\omega - E$, u admet une plus petite majorante harmonique dont le prolongement par u sur E est quasi sousharmonique dans ω ; et la régularisée w admet dans ω la même plus petite majorante harmonique $\overset{*}{u}$ que u .

Soit μ_1 la mesure associée à $\overset{\circ}{w}$, identique à μ sur l'intérieur $\overset{\circ}{E}$ de E , nulle hors E . Reprenons des domaines croissants ω_n [$\bar{\omega}_n \subset \omega$, $\omega_n \rightarrow \omega$]. Il est facile de voir que dans ω_n contenant E

$$w(M) = \int_E G_{\omega_n}(M, P) d\mu_1(P) + H_{\omega_n}^{\omega_n}$$

d'où

$$w(M) = \int_E G_{\omega}(M, P) d\mu_1(P) + \overset{*}{u}(M),$$

puis

$$w(M) \leq \int_{\overset{\circ}{E}} G_{\omega}(M, P) d\mu(P) + \overset{*}{u}(M).$$

⁽⁶³⁾ Sans utiliser le résultat pour ω borné, nous donnons une démonstration directe et en partie nouvelle.

Vu l'arbitraire de E , $\int_{\omega} G_{\omega}(M, P) d\mu(P)$ est finie quasi-partout et

$$u(M) \leq \int_{\omega} G_{\omega}(M, P) d\mu(P) + \bar{u}(M).$$

Mais alors, d'après la première partie, $u - \int_{\omega}$ est définie quasi-partout et y vaut une majorante harmonique de u , qui est donc égale à \bar{u} , d'où le théorème.

Remarque. — Si $\tau \geq 3$ la fonction de Green de R_{τ} est $h(MP)$ et le théorème précédent fournit les résultats du n° 4 pour $\tau \geq 3$.

21. *Fonction de Green prolongée et majorantes harmoniques.* — Soit P fixé dans ω ouvert de \bar{R}_{τ} . $G_{\omega}^P(M)$ est une fonction de M dans ω , qui, prolongée par zéro hors ω devient quasi-sousharmonique dans $\bar{R}_{\tau} - P$. La régularisée dans $\bar{R}_{\tau} - P$ définira la *fonction de Green prolongée*, notée encore $G_{\omega}^P(M)$.

Soit Q extérieur à ω ou point-frontière régulier. — Pour $M \in \omega$, on a vu que

$$(15) \quad G_{\omega}^P(M) = h_Q^P(M) - \int h_Q^P(S) d\mu_M(S),$$

ou encore,

$$(15') \quad G_{\omega}^P(M) = h_Q^P(M) - \int h_Q^M(S) d\mu_P(S).$$

La seconde intégrale est un potentiel $-h_Q$, qui pour M extérieur à ω ou point-frontière régulier représente la valeur en P d'une certaine fonction de Wiener et vaut alors d'après le n° 17 $h_Q^M(P)$ ou $h_Q^P(M)$. Il s'ensuit aisément que l'expression (15') de $G_{\omega}^P(M)$ est encore valable pour la fonction de Green prolongée et M quelconque $\neq Q$. Elle met en évidence que $-\mu_P$ est la mesure associée à la fonction sousharmonique de M , $G_{\omega}^P(M)$ hors P et Q et que $G_{\omega}^P(M)$ est le potentiel $-h_Q$ de la distribution ν_P hors Q de total zéro définie par $+1$ en P et $-\mu_P$ sur la frontière du domaine composant de ω contenant P . Tout cela généralise des résultats bien connus (pour ω borné, Q en \mathcal{R}_{τ}) de Vasilescu-Frostmann.

Application. — Soit u sousharmonique dans Ω ouvert différent de \bar{R}_{τ} et ω ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \Omega$. Si μ est la mesure ≤ 0 associée à u , nous allons voir que, pour $P \in \omega$

$$(16) \quad u(P) = \int_{\omega} G_{\omega}^P(M) d\mu(M) + H_u^{\omega}(P),$$

où G_{ω} est la fonction de Green généralisée et H_u^{ω} la fonction de Wiener dite aussi meilleure majorante harmonique de u dans ω (notée encore \bar{u}).

En effet soit ω_1 ouvert tel que $\bar{\omega} \subset \omega_1 \subset \bar{\omega}_1 \subset \Omega$ et Q hors $\bar{\omega}_1$.

Dans ω_1 ,

$$u(S) = \int_{\omega_1} h_Q^s(M) \cdot d\mu(M) + \omega(S)$$

où ω est harmonique.

Dans ω ,

$$H_u^\omega(P) = \int_{\omega}^* u(S) d\mu_P(S)$$

d'où en y substituant l'expression de $u(S)$ et permutant les intégrations

$$H_u^\omega(P) = \int_{\omega_1} d\mu(M) \int_{\omega}^* h_Q^s(M) d\mu_P(S) + \omega(P).$$

Le second membre de (16) vaut donc

$$\int_{\omega_1} \left[G_\omega^P(M) + \int_{\omega}^* h_Q^s(M) d\mu_P(S) \right] d\mu(M) + \omega(P),$$

où le crochet, d'après (15') vaut bien $h_Q^P(M)$, d'où le résultat (64).

Comparant enfin (14) et (16) il vient pour les majorantes de u dans ω

$$(17) \quad \bar{u}(P) - \hat{u}(P) = \int_{\omega}^* G_\omega^P(M) d\mu(M) \quad (P \in \omega).$$

Cela est évident aux points P où u est finie. La conclusion est générale puisque les deux membres sont harmoniques.

On remarquera que les formules (12) et (13) sont des cas particuliers de (16) et (14).

22. *Fonctions sousharmoniques et potentiels* — h_Q dans $\bar{R}_\tau - Q$, ($Q \neq \mathcal{R}_\tau$). — On adaptera sans difficultés les raisonnements du n° 4.

Si u est harmonique dans $\bar{R}_\tau - Q$, elle admet un développement

$$u = K + \sum_1^\infty \frac{Y_n^{(1)}(M)}{QM^{n+\tau-2}}.$$

(64) Le calcul est inspiré de celui de Frostman démontrant l'égalité de \bar{u} et \hat{u} pour un domaine borné ω sans points-frontière irréguliers (*Acta Szeged*, t. 8, 1937, p. 202). J'ai déjà utilisé une variante de ce raisonnement pour établir la formule (17) dans le cas de ω borné (*Bull. Ac. royale de Belgique*, t. 24, 1938, p. 427). Voici sommairement une autre variante, toujours basée sur une interversion d'intégrations, et où se présente normalement l'utilisation du résultat général suivant :

Soit ν une mesure généralisée sur un compact de E de $\bar{R}_\tau - Q$ de potentiel $-h_Q$ nul au voisinage de Q . Si ω est harmonique dans un ouvert contenant à la fois E et les domaines composants de CE ne contenant pas Q , $\int \omega d\nu = 0$ (explicité par Choquet et Deny dans le cas classique de Q en \mathcal{R}_τ).

Alors

$$\int_{\omega} G_\omega^P(M) d\mu(M) = \int u d\nu_P$$

et il suffira de décomposer le second membre.

Pour que ce Σ soit nul, c'est-à-dire que u se réduise à une constante, il faut et il suffit que u soit bornée dans un sens; d'une manière générale si

$$r^s \mathfrak{M}_u^r(Q) \rightarrow 0 \quad (\text{pour } r \rightarrow 0), \quad Y_n^{(1)} = 0 \quad \text{pour } n + \tau - 2 \geq s.$$

Si u est sousharmonique dans $\overline{R}_\tau - Q$, on considérera la courbe des $\mathfrak{M}_u^r(Q)$, convexe et croissante en $t = h(r)$; l'harmonicité de u équivaut à l'existence d'une majorante harmonique à la nullité du flux de u en Q ou encore à ce que $\lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{M}_u^r(Q)$ soit finie; la constance de u équivaut à ce que u soit bornée supérieurement, ou encore que $\mathfrak{M}_u^r(Q)$ soit bornée.

Potentiels - h_0 . — Examinons pour le potentiel- h_0 d'une mesure $\mu \leq 0$ les particularités de cette fonction sousharmonique u et de la courbe en t de $\mathfrak{M}_u^r(Q)$.

Les pentes à droite et à gauche valent $-\mu(\Delta_0^r)$ et $-\mu(\overline{\Delta}_0^r)$.

$\mathfrak{M}_u^r(Q) + h(r)\mu(\Delta_0^r)$ vaut le potentiel en \mathcal{R}_τ des masses hors Δ_0^r ; donc tend vers zéro pour $r \rightarrow 0$; autrement dit la courbe des moyennes en t admet à droite une branche de *pente asymptotique* $\beta \geq 0$ finie (c'est-à-dire que $\frac{\mathfrak{M}_u^r(Q)}{h(r)}$ est bornée supérieurement pour $r \rightarrow 0$, et cela implique l'existence d'une majorante harmonique au voisinage de Q et aussi que la masse totale soit finie) avec asymptote passant par l'origine. D'ailleurs

$$\limsup_{M \rightarrow Q} \frac{u(M)}{h(QM)} < +\infty,$$

comme on le voit aussitôt sur l'intégrale-potential par décomposition de h_0 et cette limite supérieure vaut donc β .

Pour que u souharmonique dans $\overline{R}_\tau - Q$ soit un potentiel- h_0 de masses ≤ 0 à une fonction harmonique près w , il faut et il suffit que la courbe des $\mathfrak{M}_u^r(Q)$ en t admette à droite une asymptote d'ordonnée à l'origine λ finie⁽⁶⁵⁾; w sera une constante si (et seulement si) $r^s \mathfrak{M}_u^r(Q) \rightarrow 0$ ($r \rightarrow 0$) pour un (ou tout) s tel que $\tau - 2 < s \leq \tau - 1$ et la constante vaut alors l'ordonnée à l'origine λ .

(65) On remplacera u par son intégrale- \mathcal{P} , dans un Δ_0^r ; la condition entraîne que les masses associées voisines de Q , qui sont les mêmes, donnent un potentiel fini en \mathcal{R}_τ ; il y a donc bien un potentiel (fini quasi-partout) pour la mesure associée de la fonction donnée u .