

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN DIEUDONNÉ

## Dérivées et différences des fonctions de variables réelles

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 61 (1944), p. 231-248

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1944\\_3\\_61\\_\\_231\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__231_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# DÉRIVÉES ET DIFFÉRENCES

## DES

# FONCTIONS DE VARIABLES RÉELLES

PAR M. JEAN DIEUDONNÉ.

---

1. On a remarqué depuis longtemps que la définition de la dérivée d'ordre  $n$  d'une fonction d'une variable réelle en un point  $x_0$  est, à certains égards, assez peu satisfaisante pour  $n > 1$ , parce qu'elle fait intervenir  $n$  passages à la limite successifs au lieu de donner directement la dérivée d'ordre  $n$  comme limite d'une expression ne faisant intervenir que les valeurs de la fonction elle-même et non celles de ses dérivées d'ordre inférieur à  $n$ . On a donc cherché de telles définitions « directes »; une des plus étudiées provient de la théorie de l'interpolation : on y considère les « différences divisées » successives d'une fonction  $f$ ; ce sont les expressions définies par récurrence de la manière suivante :

$$[x_0; f] = f(x_0),$$
$$[x_0, x_1, \dots, x_n; f] = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n; f] - [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}$$

pour  $n + 1$  valeurs distinctes  $x_0, x_1, \dots, x_n$  de la variable. On montre alors que lorsque  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tendent vers  $x_0$  (en restant distincts deux à deux et distincts de  $x_0$ ), la différence divisée d'ordre  $n$ ,  $[x_0, x_1, \dots, x_n; f]$  tend vers  $\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$  lorsque  $f$  admet une dérivée d'ordre  $n$  au point  $x_0$  <sup>(1)</sup>. Le problème inverse se pose naturellement aussitôt : que peut-on dire des dérivées de  $f$  lorsque la limite de la différence divisée d'ordre  $n$  existe et est finie ? Cette question a été entièrement résolue par M. E. Hopf dans sa Thèse <sup>(2)</sup>; le résultat

---

<sup>(1)</sup> Résultat dû à Stieltjes (*Œuvres complètes*, t. 1, p. 67).

<sup>(2)</sup> *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften* (Inaug.-Diss., Berlin, 1926). Les résultats de E. Hopf ont été retrouvés par M. T. Popoviciu et publiés par lui dans sa Thèse quelques années plus tard [*Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* (*Mathematica*, Cluj, t. 8, 1934, p. 1-85)].

est qu'en un certain sens, la fonction admet « presque » une dérivée  $n^{\text{ème}}$  au point  $x_0$ .

Au lieu des « différences divisées » précédentes, il paraît plus naturel, quand on songe à la définition de la dérivée d'ordre  $n$  par récurrence, de considérer les *différences* successives de  $f$ , définies par les relations

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0; h_1) &= f(x_0 + h_1) - f(x_0), \\ \Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n) &= \Delta^{n-1} f(x_0 + h_n; h_1, \dots, h_{n-1}) - \Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \dots, h_{n-1}).\end{aligned}$$

On sait que, lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tendent indépendamment vers zéro, le rapport  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  tend vers  $f^{(n)}(x_0)$  lorsque cette dérivée existe <sup>(1)</sup>. Ici encore, il y a lieu de chercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette limite existe et soit finie; c'est ce que nous allons faire dans cet article, et nous verrons que, si l'on se limite aux fonctions bornées, la condition cherchée est *identique* à celle de E. Hopf <sup>(2)</sup>.

Cette identité de résultats, et l'analogie entre la formation de  $\Delta^n f$  et des « différences divisées » pourrait faire penser au premier abord que notre proposition est un corollaire immédiat de celle de E. Hopf; un peu de réflexion prouve qu'il n'en est rien : par exemple, lorsque  $n = 2$ , l'hypothèse que la différence divisée  $[x_0, x_1, x_2; f]$  reste bornée pour  $x_1$  et  $x_2$  voisins de  $x_0$  se traduit immédiatement par l'inégalité

$$\left| \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right| \leq M |x_2 - x_1|$$

( $M$  nombre fixe), et il en résulte aussitôt (critère de Cauchy) que  $f$  admet une dérivée première au point  $x_0$ . Au contraire, l'inégalité  $|\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)| \leq M |h_1 h_2|$  s'écrit

$$\left| \frac{f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0)}{h_1 h_2} \right| \leq M$$

et il n'en résulte pas avec la même évidence que la dérivée première de  $f$  existe au point  $x_0$  (ce qui est pourtant le cas, comme nous allons le voir, lorsque  $f$  est bornée).

2. Le résultat essentiel sur lequel nous nous appuyerons est le suivant :

LEMME 1. — Soit  $f$  une fonction bornée au voisinage de  $x_0$ , et telle que le rapport  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste borné lorsque les  $h_i$  sont assez voisins de zéro. Dans ces conditions, le rapport  $\frac{\Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \dots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}}$  tend vers une limite finie lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$  tendent vers zéro.

(1) Voir par exemple E. HOBSON, *The theory of functions of a real variable*, t. 1, 3<sup>e</sup> éd., p. 370.

(2) *Loc. cit.*, p. 19-22.

Nous allons faire la démonstration pour  $n = 3$  pour simplifier l'écriture, mais le lecteur verra aisément que le raisonnement est général.

Par hypothèse, il existe deux nombres positifs  $M$  et  $r$  tels que pour  $|h_1| \leq r$ ,  $|h_2| \leq r$  et  $|h_3| \leq r$ , on ait

$$(1) \quad |\Delta^2 f(x_0 + h_3; h_1, h_2) - \Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)| \leq M |h_1 h_2 h_3|.$$

Soient  $z_1, z_2$  deux nombres tels que  $|z_1| \leq r$ ,  $|z_2| \leq r$ , et soient  $m$  et  $n$  deux entiers positifs quelconques; donnons à  $h_1$  la valeur  $\frac{z_1}{m}$ , à  $h_2$  la valeur  $\frac{z_2}{n}$ , et successivement à  $h_3$  chacune des  $mn$  valeurs  $\frac{p z_1}{m} + \frac{q z_2}{n}$  ( $p, q$  entiers tels que  $0 \leq p \leq m - 1$ ,  $0 \leq q \leq n - 1$ ) dans l'inégalité (1); ajoutant les  $mn$  inégalités ainsi obtenues, il vient

$$(2) \quad \left| \Delta^2 f(x_0; z_1, z_2) - mn \Delta^2 f\left(x_0; \frac{z_1}{m}, \frac{z_2}{n}\right) \right| \leq M \frac{|z_1 z_2|}{mn} \left[ \frac{n(m-1)}{2} |z_1| + \frac{m(n-1)}{2} |z_2| \right] \leq \frac{M}{2} |z_1 z_2| (|z_1| + |z_2|).$$

En donnant à  $m$  et  $n$  toutes les valeurs entières  $> 0$ , et à  $z_1$  et  $z_2$  toutes les valeurs telles que

$$\frac{r}{2} \leq |z_1| \leq r, \quad \frac{r}{2} \leq |z_2| \leq r,$$

on déduit d'abord de cette relation, compte tenu du fait que  $f$  est supposée bornée pour  $|x - x_0| \leq r$ , que  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  est borné pour  $|h_1| \leq \frac{r}{2}$ ,  $|h_2| \leq \frac{r}{2}$ , donc aussi pour  $|h_1| \leq r$ ,  $|h_2| \leq r$ .

La même méthode, appliquée à  $\Delta^2 f$  au lieu de  $\Delta^3 f$ , prouve ensuite que  $\frac{\Delta f(x_0; h_1)}{h_1}$  est borné pour  $|h_1| \leq r$ , résultat qui établit d'abord la *continuité* de  $f$  au point  $x_0$ . Comme  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  est borné pour  $|h_1| \leq r$ ,  $|h_2| \leq r$ , on a

$$|[f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_2)] - [f(x_0 + h_1) - f(x_0)]| \leq A |h_1 h_2|,$$

ce qui, en faisant tendre  $h_1$  vers zéro, prouve la *continuité* de  $f$  pour  $|x - x_0| \leq r$ .

Cela étant, revenons à l'inégalité (2);  $\varepsilon > 0$  étant donné arbitrairement, choisissons  $a > 0$  tel que  $a < \frac{\varepsilon}{M}$  et  $a < r$ ; puis déterminons un nombre  $b$  tel que  $0 < b < a$ , et que, lorsque  $z_1$  et  $z_2$  varient arbitrairement dans l'intervalle d'extrémités  $b$  et  $a$ , la fonction continue  $\frac{\Delta^2 f(x_0; z_1, z_2)}{z_1 z_2}$  varie de moins de  $\varepsilon$ ; en choisissant convenablement les entiers  $m$  et  $n$ , on peut toujours faire en sorte que, pour deux nombres  $h_1$  et  $h_2$  appartenant à l'intervalle d'extrémités  $0$  et  $a - b$ ,  $z_1 = m h_1$  et  $z_2 = n h_2$  appartiennent à l'intervalle d'extrémités  $b$  et  $a$ ; l'inégalité (2) prouve par suite que, lorsque  $h_1$  et  $h_2$  varient dans l'intervalle

d'extrémités 0 et  $a - b$ , la fonction  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  varie de moins de  $3\varepsilon$ . D'autre part, en remplaçant  $h_3$  par  $-h_1$  dans (1), il vient

$$\left| \frac{\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2)}{(-h_1)h_2} - \frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \right| \leq M |h_1| \leq \varepsilon$$

et en remplaçant de même  $h_3$  par  $-h_2$  ou par  $-(h_1 + h_2)$  dans (1), on voit finalement que lorsque  $h_1$  et  $h_2$  varient de sorte que  $|h_1| \leq a - b$  et  $|h_2| \leq a - b$ ,  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  varie de moins de  $5\varepsilon$ . Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, cela démontre l'existence de la limite de  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  lorsque  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers zéro, en vertu du critère de Cauchy.

On déduit de ce lemme le suivant :

LEMME 2. — Lorsque, pour  $n > 2$ ,  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste borné quand les  $h_i$  sont assez petits,  $f$  est dérivable dans un voisinage de  $x_0$ .

D'après le lemme 1, il suffit de démontrer la proposition lorsque  $n = 3$ . Or, la relation  $|\Delta^3 f(x_0; h_1, h_2, h_3)| \leq A |h_1 h_2 h_3|$  s'écrit

$$\left| \frac{\Delta^2 f(x_0 + h_3; h_1, h_2)}{h_1 h_2} - \frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \right| \leq A |h_3|.$$

Comme, d'après le lemme 1,  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  reste borné lorsque  $h_1$  et  $h_2$  sont assez petits, on voit que pour tout  $h_3$  fixe assez petit,  $\frac{\Delta^2 f(x_0 + h_3; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  reste borné lorsque  $h_1$  et  $h_2$  sont assez petits; d'après le lemme 1, cela prouve que  $f$  admet une dérivée au point  $x_0 + h_3$ .

3. Nous allons maintenant démontrer notre résultat central.

THÉORÈME 1. — Soit  $f$  une fonction bornée au voisinage de  $x_0$ . Pour que le rapport  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  tende vers une limite  $a$  lorsque  $h_1, \dots, h_n$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que :

1°  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n - 2$  en tout point d'un intervalle ouvert  $I$  contenant  $x_0$ , et une dérivée d'ordre  $n - 1$  au point  $x_0$ ;

2° On ait  $f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0) = \int_{x_0}^x u(t) dt$ , où  $u$  est une fonction sommable et bornée dans l'intervalle  $I$ , et  $f^{(n-1)}(x_0) = u(x_0)$ ;

3° Si  $H$  est l'ensemble des points de  $I$  où  $f^{(n-2)}$  admet  $u$  comme dérivée (le complémentaire de  $H$  par rapport à  $I$  étant de mesure nulle) le rapport  $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$  tend vers  $a$  lorsque  $h$  tend vers zéro, de sorte que  $x_0 + h$  reste dans  $H$ .

Montrons d'abord que la condition est *nécessaire*. D'après le lemme 2, nous pouvons raisonner par récurrence lorsque  $n > 2$ ; en effet, l'hypothèse entraîne que  $f$  est dérivable dans un voisinage de  $x_0$ ; d'autre part, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\left| \frac{1}{h_n} \left[ \frac{\Delta^{n-1} f(x_0 + h_n; h_1, \dots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} - \frac{\Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \dots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} \right] - a \right| \leq \varepsilon$$

dès que les  $h_i$  sont assez petits. Si, dans cette relation, on fait tendre  $h_n$  vers zéro, les autres  $h_i$  restant fixes, il vient

$$\left| \frac{\Delta^{n-1} f'(x_0; h_1, \dots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}} - a \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que  $\frac{\Delta^{n-1} f'(x_0; h_1, \dots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}}$  tend vers  $a$  lorsque les  $h_i$  tendent vers zéro : or, on ne change pas les trois conditions de l'énoncé en y remplaçant  $n$  par  $n - 1$  et  $f$  par  $f'$ .

Nous sommes ainsi ramenés à démontrer le théorème lorsque  $n = 2$ ; d'après le lemme 1,  $f$  admet alors une dérivée au point  $x_0$ ; ce fait, et la relation

$$(3) \quad \left| \frac{f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1)}{h_2} - \frac{f(x_0 + h_2) - f(x_0)}{h_2} - ah_1 \right| \leq \varepsilon |h_1|$$

entraînent que  $f$  a ses nombres dérivés *bornés* dans un intervalle ouvert I contenant  $x_0$ ; on en conclut <sup>(1)</sup> que  $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x u(t) dt$ , où  $u$  est une fonction sommable bornée dans I; en outre,  $f(x)$  a pour dérivée  $u(x)$  en tous les points de I, sauf aux points d'un ensemble K de mesure nulle (auquel n'appartient d'ailleurs pas  $x_0$ ). Si, dans (3), on suppose que  $x_0 + h_1$  n'appartient pas à K, on peut donc faire tendre  $h_2$  vers zéro, et il vient

$$|u(x_0 + h_1) - u(x_0) - ah_1| \leq \varepsilon |h_1|,$$

ce qui prouve que le rapport  $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$  tend vers  $a$  lorsque  $x_0 + h$  tend vers  $x_0$  en restant dans le complémentaire de l'ensemble K.

Prouvons maintenant que la condition de l'énoncé est *suffisante*. Raisonnons de nouveau par récurrence : la dérivée de  $\Delta^{n-1} f(x; h_1, \dots, h_{n-1})$  est  $\Delta^{n-1} f'(x; h_1, \dots, h_{n-1})$ ; par hypothèse, on a, lorsque les  $h_i$  sont assez petits,

$$|\Delta^{n-1} f'(x_0; h_1, h_2, \dots, h_{n-1}) - ah_1 h_2 \dots h_{n-1}| \leq \varepsilon |h_1 h_2 \dots h_{n-1}|,$$

c'est-à-dire

$$(4) \quad \left| \frac{\Delta^{n-2} f'(x_0 + h_{n-1}; h_1, \dots, h_{n-2})}{h_{n-1}} - \frac{\Delta^{n-2} f'(x_0; h_1, \dots, h_{n-2})}{h_{n-1}} - ah_1 h_2 \dots h_{n-1} \right| \leq \varepsilon |h_1 h_2 \dots h_{n-1}|.$$

(1) Théorème classique de Lebesgue (voir, par exemple, H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 1<sup>re</sup> éd., p. 123).

Remplaçant successivement  $h_{n-1}$  par  $h$  et  $h + h_{n-1}$  dans (4), et retranchant, il vient

$$|\Delta^{n-1}f'(x_0 + h; h_1, h_2, \dots, h_{n-1}) - ah_1 h_2 \dots h_{n-1}| \leq \varepsilon |h_1 h_2 \dots h_{n-2}| (|h| + |h + h_{n-1}|)$$

et par suite, d'après le théorème des accroissements finis, appliqué pour  $h$  variant entre zéro et  $h_n$ , on a

$$|\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n) - ah_1 h_2 \dots h_n| \leq \varepsilon |h_1 h_2 \dots h_{n-2}| (2|h_n| + |h_{n-1}|) |h_n|.$$

Si  $|h_n| \leq |h_{n-1}|$ , on déduit de là que

$$|\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n) - ah_1 h_2 \dots h_n| \leq 3\varepsilon |h_1 h_2 \dots h_{n-1} h_n|.$$

Sinon, il suffit de permuter  $h_{n-1}$  et  $h_n$  pour obtenir la même inégalité, en tenant compte de la symétrie de  $\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)$ .

Nous sommes donc ramenés à démontrer la proposition pour  $n = 2$ ; on a alors

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x u(t) dt,$$

où  $u$  est sommable et bornée; en outre, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que, dans l'intervalle  $x_0 - r < x < x_0 + r$ , on ait, en tout point  $x$  où  $f'(x)$  existe et est égale à  $u(x)$ ,  $|u(x) - u(x_0) - a(x - x_0)| \leq \varepsilon |x - x_0|$ . On en conclut aussitôt que, pour  $|h_1| < \frac{r}{2}$ , on a, pour  $|x - x_0| < \frac{r}{2}$ ,

$$|u(x + h_1) - u(x) - ah_1| \leq \varepsilon (|x - x_0| + |x + h_1 - x_0|),$$

sauf aux points  $x$  appartenant à un ensemble de mesure nulle [réunion de l'ensemble des points où  $f'(x)$  n'existe pas ou est  $\neq u(x)$ , et de cet ensemble auquel on a fait subir la translation  $-h_1$ ]; pour tout  $h_2$  tel que  $|h_2| < \frac{r}{2}$ , on a, par suite

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h_2} [u(t+h_1) - u(t)] dt - ah_1 h_2 \right| \leq \varepsilon (2|h_2| + |h_1|) |h_2|,$$

c'est-à-dire

$$|\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2) - ah_1 h_2| \leq \varepsilon (2|h_2| + |h_1|) |h_2|.$$

Si  $|h_2| \leq |h_1|$ , on déduit de là

$$|\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2) - ah_1 h_2| \leq 3\varepsilon |h_1| |h_2|.$$

Dans le cas contraire, il suffit de permuter  $h_1$  et  $h_2$  pour avoir encore la même inégalité, ce qui prouve bien que  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  tend vers  $a$  lorsque  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers zéro, et achève la démonstration du théorème.

**COROLLAIRE.** — Soit  $f$  une fonction bornée dans un intervalle ouvert  $I$ . Pour que, en tout point  $x$  de  $I$ , le rapport  $\frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  tende vers une limite lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n$  en tout point de  $I$ .

En effet, d'après le théorème précédent, si  $\frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  a une limite pour tout point  $x$  de  $I$ ,  $f^{(n-1)}(x)$  existe quel que soit  $x$ , et  $u(x) = f^{(n-1)}(x)$ ; en outre, comme  $f^{(n-2)}$  admet  $u$  comme dérivée en tout point,  $u$  admet une dérivée en tout point de  $I$ , ce qui signifie que  $f^{(n)}(x)$  existe pour tout  $x$  dans  $I$ .

On notera que l'hypothèse que la fonction  $f$  est bornée est essentielle pour la validité de tous les résultats précédents; en effet, si  $f$  est une fonction discontinue satisfaisant à l'équation fonctionnelle  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  (on sait qu'il existe de telles fonctions, qui ne sont bornées dans aucun intervalle) on a  $\Delta^p f(x; h_1, \dots, h_p) = 0$  quels que soient  $x$  et les  $h_i$ , pour tout entier  $p \geq 2$ .

4. On démontre de la même manière le théorème suivant :

**THÉORÈME 2.** — Soit  $f$  une fonction bornée au voisinage de  $x_0$ . Pour que le rapport  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste borné lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que :

1°  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n - 2$  en tout point d'un intervalle ouvert  $I$  contenant  $x_0$ , et une dérivée d'ordre  $n - 1$  au point  $x_0$ ;

2° On ait  $f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(x_0) = \int_{x_0}^x u(t) dt$ , où  $u$  est une fonction sommable et bornée dans  $I$ , et  $f^{(n-1)}(x_0) = u(x_0)$ ;

3° Si  $H$  est l'ensemble des points où  $f^{(n-2)}$  admet  $u$  comme dérivée, le rapport  $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$  reste borné lorsque  $x_0 + h$  tend vers  $x_0$  en restant dans  $H$ .

En effet, le lemme 2 permet, par récurrence sur  $n$ , d'être ramené à démontrer la nécessité des conditions de l'énoncé dans le cas où  $n = 2$ ; et dans ce dernier cas, le raisonnement est tout à fait analogue à celui du théorème 1. On démontre également que les conditions sont suffisantes, en procédant exactement comme dans la seconde partie de la démonstration du théorème 1.

**COROLLAIRE.** — Soit  $f$  une fonction bornée dans un intervalle ouvert  $I$ . Pour que, en tout point  $x$  de  $I$ , le rapport  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste borné (par un nombre dépendant de  $x$ ) lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n - 1$  en tout point de  $I$ , et que les nombres dérivés de  $f^{(n-1)}$  soient finis en tout point de  $I$ .



En effet, d'après le théorème 2,  $f^{(n-1)}(x)$  existe quel que soit  $x$ , et  $f^{(n-1)}(x) = u(x)$ ; en outre, pour un  $x$  quelconque dans  $I$ , le rapport  $\frac{u(x+h) - u(x)}{h}$  reste borné (par un nombre dépendant de  $x$ ) lorsque  $h$  tend vers zéro de manière quelconque, puisque  $f^{(n-2)}$  admet  $u$  comme dérivée en tout point.

5. Élargissant encore nos hypothèses, nous allons seulement supposer qu'au voisinage de  $x_0$ ,  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste borné dans un seul sens, par exemple *borné inférieurement*; en ajoutant à  $f$  un monôme  $ax^n$ , on peut toujours supposer que la condition imposée à  $f$  est  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n} \geq 0$  lorsque les  $h_i$  sont assez petits.

Raisonnons de nouveau pour simplifier dans le cas où  $n = 3$ , la généralisation au cas où  $n$  est quelconque étant facile. Par hypothèse, on a

$$(5) \quad \Delta^2 f(x_0 + h_3; h_1, h_2) - \Delta^2 f(x_0; h_1, h_2) \geq 0$$

lorsque  $h_1, h_2, h_3$  sont assez petits et  $h_1 h_2 h_3 > 0$ ; le sens de l'inégalité doit être renversé lorsque  $h_1 h_2 h_3 < 0$ .

Supposons d'abord  $h_1 = \frac{z_1}{m} > 0$ ,  $h_2 = \frac{z_2}{n} > 0$  et donnons à  $h_3$  les valeurs  $\frac{pz_1}{m} + \frac{qz_2}{n}$  dans (5) ( $0 \leq p \leq m-1$ ,  $0 \leq q \leq n-1$ ); ajoutant les inégalités obtenues, il vient

$$\Delta^2 f(x_0; z_1, z_2) - mn \Delta^2 f\left(x_0; \frac{z_1}{m}, \frac{z_2}{n}\right) \geq 0$$

pour  $z_1$  et  $z_2$  assez petits et positifs; on conclut aussitôt de là et du fait que  $f$  est bornée, que  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  est *borné supérieurement* lorsque  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers zéro par valeurs  $> 0$ . De la même manière, on déduit de l'inégalité (5) renversée que

$$\Delta^2 f(x_0; -z_1, -z_2) - mn \Delta^2 f\left(x_0; -\frac{z_1}{m}, -\frac{z_2}{n}\right) \leq 0$$

et par suite que  $\frac{\Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2)}{h_1 h_2}$  est *borné inférieurement* lorsque  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers zéro par valeurs  $> 0$ . D'autre part, en remplaçant  $h_3$  par  $-h_1$  dans l'inégalité (5) renversée, il vient

$$\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2) \geq -\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2);$$

et de même l'inégalité

$$\Delta^2 f(x_0 + h_1; -h_1, -h_2) - \Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2) \geq 0$$

s'écrit

$$\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2) \leq -\Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2).$$

Finalement, pour  $h_1$  et  $h_2$  positifs, on a

$$\Delta^2 f(x_0; -h_1, -h_2) \leq -\Delta^2 f(x_0; -h_1, h_2) \leq \Delta^2 f(x_0; h_1, h_2),$$

d'où l'on tire la conclusion que  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  est borné lorsque  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers zéro avec un signe quelconque.

Ainsi, l'analogie du lemme 1 du n° 2 est que, si  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n} \geq 0$  lorsque les  $h_i$  tendent vers zéro,  $\frac{\Delta^{n-1} f(x_0; h_1, \dots, h_{n-1})}{h_1 h_2 \dots h_{n-1}}$  reste borné lorsque les  $h_i$  tendent vers zéro. Appliquant le théorème 2, on en déduit tout d'abord que  $f^{(n-3)}$  existe dans un intervalle ouvert I contenant  $x_0$ . Dans la relation  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n} \geq 0$ , en faisant tendre successivement vers zéro les variables  $h_n, h_{n-1}, \dots, h_3$ , il vient  $\frac{\Delta^3 f^{(n-3)}(x_0; h_1, h_2, h_3)}{h_1 h_2 h_3} \geq 0$ ; autrement dit, on peut se borner à considérer le cas où  $n=3$ . Alors comme  $\frac{\Delta^2 f(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  reste borné, on a  $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x u(t) dt$ , où  $u$  est une fonction sommable et bornée dans un intervalle ouvert I contenant  $x_0$ ; en outre, si H est l'ensemble des points de I où  $f$  admet  $u$  comme dérivée,  $x_0$  appartient à H et  $\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$  reste borné lorsque  $x_0+h$  tend vers zéro en restant dans H (th. 2).

Si l'on suppose que les points  $x_0+h_1, x_0+h_2, x_0+h_1+h_2$  appartiennent à H, on déduit de la relation  $\frac{\Delta^3 f(x_0; h_1, h_2, h_3)}{h_1 h_2 h_3} \geq 0$ , en faisant tendre  $h_3$  vers zéro, que  $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geq 0$ . D'autre part, il existe un nombre fini  $a$  tel que, lorsque  $x_0+h$  appartient à H,  $\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \geq a$ ; si l'on pose  $v(x) = u(x) - a(x-x_0)$ , on a donc  $\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \geq 0$  lorsque  $x_0+h$  appartient à H, et

$$\frac{\Delta^2 v(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} = \frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geq 0$$

si  $x_0+h_1, x_0+h_2$  et  $x_0+h_1+h_2$  appartiennent à H. Soit  $I_1$  la partie de l'intervalle I formée des points  $x \geq x_0$ ,  $H_1$  l'intersection de  $I_1$  et de H. Si  $x_0+h_1$  appartient à  $H_1$ , on a donc

$$\frac{v(x_0+h_1+h_2) - v(x_0+h_1)}{h_2} \geq \frac{v(x_0+h_2) - v(x_0)}{h_2} \geq 0$$

pour  $h_2 > 0$  et  $x_0+h_1+h_2$  dans  $I_1$ , sauf pour un ensemble de valeurs de  $h_2$  de mesure nulle. Nous allons en déduire que, dans  $I_1$ ,  $v(x)$  est égale presque partout à une fonction croissante. En effet, pour tout  $x \in I_1$ , désignons par  $\omega(x)$  la borne inférieure en mesure des valeurs de  $v(y)$  pour  $y \in I_1$  et  $y \geq x$ ;  $\omega(x)$  est évidemment croissante dans  $I_1$ , et d'après ce qui précède, on a  $v(x) \leq \omega(x)$

presque partout. Montrons qu'on ne peut avoir  $v(x) < w(x)$  sur un ensemble de mesure positive; sinon, on aurait aussi  $v(x) < w(x) - \frac{1}{n}$  sur un ensemble  $E$  de mesure positive, pour un entier  $n$  convenable. En presque tous les points  $x$  de  $E$ , tout intervalle d'origine  $x$  a une intersection avec  $E$  qui est de mesure positive; on peut en outre trouver un tel point où  $w(x)$  est continue à droite, puisque cette fonction croissante n'a qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité. On peut alors trouver un intervalle  $x \leq y \leq x + h$  dans lequel  $w(y) \leq w(x) + \frac{1}{n}$ ; en tous les points de cet intervalle appartenant à  $E$ , on aurait donc  $v(y) < w(x)$ ; mais comme ces points forment un ensemble de mesure positive, cela contredirait la définition de  $w(x)$ . On a donc  $v(x) = w(x)$  presque partout. On raisonne de la même manière dans la partie  $I_2$  de  $I$  formée des points  $x \leq x_0$ , et l'on voit ainsi qu'on peut modifier la valeur de  $u$  aux points d'un ensemble de mesure nulle (ce qui ne modifie pas la fonction  $f$ ), de sorte que  $u$  ait en *tout point* de  $I$  une limite à droite et une limite à gauche; il en résulte qu'en tout point  $x$  de  $I$ ,  $f$  admet une dérivée à droite égale à  $u(x + 0)$  et une dérivée à gauche égale à  $u(x - 0)$ , ces dérivées étant égales sauf aux points d'un ensemble dénombrable. De plus, en supposant  $u$  continue à droite (ce qui revient à modifier éventuellement sa valeur aux points de discontinuité de  $u$ , qui forment un ensemble dénombrable), on a la relation  $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_0 h_2} \geq 0$  dans  $I$  *tout entier*, en faisant tendre  $h_3$  vers zéro par valeurs  $\geq 0$  dans l'inégalité  $\frac{\Delta^3 f(x_0; h_1, h_2, h_3)}{h_1 h_2 h_3} \geq 0$ .

Nous allons en déduire qu'au point  $x_0$ ,  $u$  admet une *dérivée à droite finie*. En effet, par le même raisonnement qu'au début de ce numéro, on voit que pour  $z > 0$ , on a, pour tout entier  $m > 0$

$$(6) \quad \frac{u\left(x_0 + \frac{z}{m}\right) - u(x_0)}{\frac{z}{m}} \leq \frac{u(x_0 + z) - u(x_0)}{z}.$$

Si l'on fait varier  $z$  dans un voisinage d'un point  $x$  où  $u$  est continue, on voit donc que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $r > 0$  tel que pour  $0 < h \leq r$ , on ait

$$\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \leq \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \varepsilon.$$

Or  $u$  est continue à droite en tout point, et est continue sauf aux points d'un ensemble dénombrable; on en conclut immédiatement que, si  $b$  est la limite inférieure de  $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers zéro par valeurs  $> 0$ , il existe des points  $x > x_0$  où  $u$  est continue et  $\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \leq b + \varepsilon$ ; il existe par suite un *intervalle* d'origine  $x_0$  dans lequel  $\frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \leq b + 2\varepsilon$ ;

d'après la définition de  $b$ , cela entraîne que  $b$  est la limite de  $\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers zéro par valeurs  $> 0$ . On démontre de même l'existence de la dérivée à gauche de  $u$  au point  $x_0$ ; d'ailleurs, de la relation  $\Delta^2 u(x_0; h_1, -h_1) \leq 0$ , on déduit, en faisant tendre  $h_1$  vers zéro par valeurs  $> 0$ , que  $u'_+(x_0) \geq u'_-(x_0)$ .

On peut résumer les résultats de ce numéro dans l'énoncé suivant :

**THÉORÈME 3.** — Soit  $f$  une fonction bornée au voisinage de  $x_0$ . Pour que le rapport  $\frac{\Delta^n f(x_0; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste  $\geq 0$  lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que :

1°  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n-3$  en tout point d'un intervalle ouvert  $I$  contenant  $x_0$ ;

2°  $f^{(n-3)}$  admette en tout point de  $I$  une dérivée à droite  $u$ , qui est une fonction à variation bornée telle que  $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2}$  reste  $\geq 0$  lorsque  $h_1$  et  $h_2$  tendent vers zéro.

Ici encore, nous laissons au lecteur le soin de démontrer que la condition est suffisante.

**COROLLAIRE.** — Soit  $f$  une fonction bornée dans un intervalle ouvert  $I$ . Pour que, en tout point  $x$  de  $I$ , le rapport  $\frac{\Delta^n f(x; h_1, h_2, \dots, h_n)}{h_1 h_2 \dots h_n}$  reste  $\geq 0$  lorsque  $h_1, h_2, \dots, h_n$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que  $f$  admette une dérivée d'ordre  $n-2$  en tout point de  $I$ , et que  $f^{(n-2)}$  soit une fonction convexe dans  $I$ .

En effet, d'après le théorème 3,  $f^{(n-3)}$  admet alors une dérivée à droite continue en tout point, donc une dérivée en tout point, égale à la fonction  $u$ ; en outre,  $u$  admet alors en tout point de  $I$  une dérivée à droite, et satisfait à la relation  $\frac{\Delta^2 u(x; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geq 0$  au voisinage de tout point  $x$  de  $I$ ; en faisant tendre  $h_2$  vers zéro par valeurs positives dans cette relation, on en déduit que  $u'_+(x)$  est croissante au voisinage de tout point de  $I$ , donc, d'après le théorème de Borel-Lebesgue,  $u'_+(x)$  est croissante dans  $I$ , ce qui équivaut, comme on sait, à la convexité de la fonction  $u$ .

6: Dans le théorème 3, il semble difficile de remplacer la condition  $\frac{\Delta^2 u(x_0; h_1, h_2)}{h_1 h_2} \geq 0$  par une condition équivalente plus simple pour  $u$ . Nous avons déjà tiré quelques conséquences de cette condition; indiquons encore la suivante: la dérivée à droite  $u'_+(x_0)$  est non seulement la limite de  $\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$  lorsque  $x_0+h$  tend vers  $x_0$  dans  $I$ , mais encore la borne

*inférieure* de ce rapport dans  $I_1$ ; cela résulte aussitôt de l'inégalité (6). On peut encore dire que, dans l'intervalle  $I_1$ , la courbe représentative  $y = u(x)$  est tout entière *au-dessus* de sa demi-tangente à droite au point  $x_0$ ; de même dans  $I_2$ , elle est tout entière au-dessus de sa demi-tangente à gauche au point  $x_0$ . Mais il est facile de voir que ces conditions ne sont nullement suffisantes.

Une autre conséquence est qu'en tout point de  $I_1$  où  $u$  admet une dérivée, c'est-à-dire presque partout, on a  $u'(x) \geq u'_+(x_0)$  et de même, en tout point de  $I_2$  où  $u$  admet une dérivée, on a  $u'(x) \leq u'_-(x_0)$ ; mais ici encore, ces conditions ne sont nullement suffisantes.

Une condition évidemment suffisante est la *convexité* de  $u$  dans  $I$ ; mais cette condition n'est pas nécessaire. Il n'est même pas nécessaire que le rapport  $\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h}$  soit fonction croissante de  $h$  dans  $I$ .

Enfin, la fonction  $u$  étant, dans  $I_1$ , différence d'une fonction croissante  $u_1$  et d'une fonction linéaire, on peut se demander si dans la décomposition de  $u_1$  en somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière, la partie singulière peut effectivement se présenter; on constate sur des exemples que tel est bien le cas.

Pour former des exemples de tous ces phénomènes, on peut utiliser la méthode générale suivante: on commence par former une fonction croissante  $w$  dans l'intervalle  $0 \leq x < +\infty$ , qui satisfasse à l'inégalité

$$w(x+y) \geq w(x) + w(y) \quad \text{pour } x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

soit nulle dans un certain intervalle d'origine 0, et soit telle que  $w(x) \leq x$ . On considère ensuite la fonction croissante

$$(7) \quad u(x) = w(x) + aw(2x) + a^2w(2^2x) + \dots + a^nw(2^nx) + \dots,$$

où  $a$  est un nombre  $< \frac{1}{2}$ , qu'on peut choisir arbitrairement petit; il est clair que  $u$  satisfera encore à  $u(x+y) \geq u(x) + u(y)$ .

On peut prendre par exemple  $w(x) = 0$  pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $w(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$  pour  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ , puis  $w(x+1) = w(x) + 1$  pour toutes les autres valeurs de  $x > 0$ . On constate alors aisément que si l'on prend le nombre  $a$  assez petit, la fonction  $u$  définie par (7) est telle que  $\frac{u(h) - u(0)}{h}$  ne soit croissante dans aucun intervalle contenant zéro.

On a un résultat analogue en prenant  $w(x) = 0$  pour  $0 \leq x < 1$ , puis  $w(x+1) = w(x) + 1$  pour les autres valeurs de  $x$ ; en outre, ici la fonction  $u$  est une fonction discontinue ayant presque partout sa dérivée nulle, si le nombre  $a$  est assez petit.

Enfin, si l'on prend  $\omega(x)$  continue pour  $0 \leq x \leq 1$ , égale à zéro pour  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ , à 1 pour  $x = 1$ , à une fonction croissante continue singulière et  $\leq x$  pour  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ , la fonction  $u$  donnée par (7) est continue et croissante, mais sa partie singulière n'est nulle dans aucun intervalle contenant zéro.

7. Nous terminerons ce travail en indiquant comment les résultats des nos 2 à 4 se généralisent aux fonctions de plusieurs variables réelles.

Supposons que  $f$  soit fonction d'un point  $\mathbf{x}$  variable au voisinage d'un point  $\mathbf{x}_0$  dans l'espace  $\mathbf{R}^m$  à  $m$  dimensions (c'est-à-dire, si l'on veut, que  $f$  soit fonction des  $m$  variables réelles, coordonnées de  $\mathbf{x}$ ); nous désignerons par  $\|\mathbf{x}\|$  une norme sur  $\mathbf{R}^m$  qu'il n'est pas besoin de préciser davantage (on sait qu'elles sont toutes équivalentes). Rappelons la forme qu'on peut donner à la notion de *différentielle* (Stolz) :  $f$  est différentiable au point  $\mathbf{x}_0$  s'il existe une fonction linéaire  $u$  définie dans  $\mathbf{R}^m$ , telle que  $|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{h})| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}\|$  dès que  $\|\mathbf{h}\|$  est assez petit;  $u$  est la *différentielle première* de  $f$  au point  $\mathbf{x}_0$  et  $u(\mathbf{h})$  est aussi noté  $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{h})$ . Si, pour chaque valeur de  $\mathbf{h}$ ,  $df(\mathbf{x}; \mathbf{h})$  considéré comme fonction de  $\mathbf{x}$  possède une différentielle au point  $\mathbf{x}_0$ , cette différentielle, notée  $d^2f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{k})$  est une fonction bilinéaire symétrique de  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{k}$ .

On définit ainsi par récurrence (lorsqu'elle existe) la différentielle  $n^{\text{ième}}$   $d^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$  de  $f$  au point  $\mathbf{x}_0$  : c'est une fonction multilinéaire symétrique des  $n$  vecteurs  $\mathbf{h}_i$ ; pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a

$$|d^{n-1}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_n; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{h}_n)| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| \dots \|\mathbf{h}_n\|,$$

quels que soient  $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}$ , et dès que  $\mathbf{h}_n$  est assez petit.

Cela étant, les *différences*  $\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n)$  d'une fonction  $f$  se définissent exactement comme au n° 1, où  $x_0$  et les  $h_i$  doivent être remplacés par des points arbitraires de  $\mathbf{R}^m$ . Le début du raisonnement du lemme 1 du n° 2 se répète sans modification essentielle, et prouve que si  $f$  est bornée au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ , et si  $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\| \dots \|\mathbf{h}_n\|}$  est bornée lorsque les  $\mathbf{h}_i$  sont assez petits, il en est de même de  $\frac{\Delta^p f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_p)}{\|\mathbf{h}_1\| \dots \|\mathbf{h}_p\|}$  pour  $1 \leq p \leq n$ ; en particulier,  $f$  est *continue* dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$  (si l'on a supposé  $n \geq 2$ ).

Montrons maintenant que, si  $\frac{\Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\|\mathbf{h}_1\| \|\mathbf{h}_2\|}$  est borné lorsque  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$  sont assez petits,  $f$  est *différentiable* au point  $\mathbf{x}_0$ . Nous raisonnerons par récurrence sur le nombre de dimensions  $m$  de l'espace  $\mathbf{R}^m$ , la proposition résultant du lemme 1 du n° 2 pour  $m = 1$ .  $\mathbf{R}^m$  peut être considéré comme *somme directe* d'un sous-espace  $U$  à 1 dimension et d'un sous-espace  $V$  à  $m - 1$  dimensions; l'hypothèse entraîne donc que si l'on *restreint*  $f$  aux variétés linéaires  $\mathbf{x}_0 + U$  et  $\mathbf{x}_0 + V$ , les fonctions obtenues sont différentiables au point  $\mathbf{x}_0$  dans ces variétés;

soient  $u$  et  $v$  leurs différentielles. D'autre part, tout  $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$  peut s'écrire d'une seule manière  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2$  avec  $\mathbf{h}_1 \in U$  et  $\mathbf{h}_2 \in V$ , et  $\|\mathbf{h}_1\| \leq a \|\mathbf{h}\|$ ,  $\|\mathbf{h}_2\| \leq b \|\mathbf{h}\|$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes indépendantes de  $\mathbf{h}$ ; comme on a

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = [f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_1) - f(\mathbf{x}_0)] + [f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_2) - f(\mathbf{x}_0)] + \Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2),$$

on voit que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a, dès que  $\mathbf{h}$  est assez petit

$$|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - u(\mathbf{h}_1) - v(\mathbf{h}_2)| \leq (a + b + abc \|\mathbf{h}\|) \varepsilon \|\mathbf{h}\|,$$

ce qui prouve que  $u(\mathbf{h}_1) + v(\mathbf{h}_2)$  est la différentielle de  $f$  au point  $\mathbf{x}_0$ .

Si l'on suppose que  $\frac{\Delta^3 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \cdot \|\mathbf{h}_3\|}$  reste borné lorsque les  $\mathbf{h}_i$  sont assez petits,  $f$  est différentiable en tout point d'un voisinage de  $\mathbf{x}_0$ . En effet,  $\frac{\Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\|}$  est alors borné lorsque  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$  sont assez petits; comme, d'autre part, l'hypothèse signifie que

$$|\Delta^2 f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_3; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) - \Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)| \leq c \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \cdot \|\mathbf{h}_3\|$$

pour  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$  assez petits ( $c$  constante), on en déduit que, pour  $\mathbf{h}_3$  fixe et assez petit,  $\frac{\Delta^2 f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_3; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\|}$  est borné lorsque  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$  sont assez petits, ce qui prouve, d'après ce qui précède, que  $f$  est différentiable au point  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_3$ .

Ces remarques vont nous permettre de démontrer l'énoncé qui généralise le théorème 1 :

**THÉORÈME 4.** — *Étant donnée une fonction  $f$  bornée au voisinage de  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ , pour qu'il existe une fonction multilinéaire symétrique  $u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$  telle que le rapport*

$$\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{h}_n\|}$$

*tende vers zéro lorsque les  $\mathbf{h}_i$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que :*

1° *La fonction  $f$  soit  $n - 2$  fois différentiable en tout point d'un voisinage  $V$  de  $\mathbf{x}_0$ , et  $n - 1$  fois différentiable au point  $\mathbf{x}_0$ ;*

2° *Si l'on donne à  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-2}$  des valeurs fixes quelconques, la fonction  $g(\mathbf{x}) = d^{n-2} f(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-2})$  soit absolument continue sur l'intersection de  $V$  et d'une droite quelconque rencontrant ce voisinage;*

3° *Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un voisinage  $U_\varepsilon$  de  $\mathbf{x}_0$  tel que, pour tout système de valeurs de  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-2}$ , et tout point  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$  de  $U_\varepsilon$  tel que  $g(\mathbf{x})$  ait une dérivée en ce point dans la direction définie par un vecteur  $\mathbf{k}$  de norme 1, cette dérivée  $v(\mathbf{h}, \mathbf{k})$  satisfasse à l'inégalité*

$$(8) \quad |v(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-2}, \mathbf{k}) - u(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-2}, \mathbf{h}, \mathbf{k})| \\ \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{h}_{n-2}\| \cdot \|\mathbf{h}\|.$$

Supposons d'abord  $n > 2$ ; alors on peut raisonner par récurrence sur  $n$ . En effet, comme  $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|}$  reste borné au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ , il en est de même de  $\frac{\Delta^p f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_p)}{\|\mathbf{h}_1\| \dots \|\mathbf{h}_p\|}$  pour  $1 \leq p < n$ ; en particulier le rapport correspondant à  $p = 3$  reste borné, ce qui implique, comme nous l'avons vu, que  $f$  est différentiable dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$ . Donnons à  $\mathbf{h}_1$  une valeur fixe quelconque, et posons  $f_1(\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1)$ ; par hypothèse, lorsque les vecteurs  $\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$  sont assez petits, ainsi que le scalaire  $t$ , on a

$$\begin{aligned} |\Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - \Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - tu(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)| \\ \leq \varepsilon |t| \cdot \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|. \end{aligned}$$

Laissant fixes les  $\mathbf{h}_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ), faisons tendre  $t$  vers zéro dans cette inégalité, en remarquant que, dès que  $t$  est assez petit, on a

$$\begin{aligned} |\Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - \Delta^{n-1} f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) \\ - t \Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)| \leq \varepsilon' |t| \cdot \|\mathbf{h}_1\|, \end{aligned}$$

$\varepsilon'$  tendant vers zéro avec  $t$ ; il vient à la limite

$$|\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|$$

et, par suite, en posant  $u_1(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{h}_n) = u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$ , le rapport

$$\frac{\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{h}_n) - u_1(\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_2\| \cdot \|\mathbf{h}_3\| \dots \|\mathbf{h}_n\|}$$

tend vers zéro avec les  $\mathbf{h}_i$  ( $2 \leq i \leq n$ ). On peut donc appliquer le théorème supposé démontré pour la différence  $(n-1)^{\text{ème}}$  à la fonction  $f_1$ ; cela donne bien pour  $f$  les trois conditions nécessaires de l'énoncé, à cela près que, dans la troisième condition, le voisinage  $U_\varepsilon$  dépend de la valeur donnée à  $\mathbf{h}_1$ ; mais il suffit de prendre successivement pour  $\mathbf{h}_1$  les  $m$  vecteurs d'une base de  $\mathbf{R}^m$ , et pour norme dans  $\mathbf{R}^m$  la somme des valeurs absolues des composantes d'un vecteur sur cette base, pour voir aussitôt que l'inégalité (8) est vérifiée pour tout  $\mathbf{h}_1$  dans le voisinage intersection des  $m$  voisinages  $U_\varepsilon$  correspondant aux  $m$  valeurs particulières précédentes de  $\mathbf{h}_1$ .

La nécessité des conditions de l'énoncé sera donc démontrée si on l'établit pour  $n = 2$ . Or nous avons déjà vu que dans ce cas  $f$  est différentiable au point  $\mathbf{x}_0$ . D'autre part, pour  $\|\mathbf{k}\| = 1$ , et les scalaires  $t, t'$  assez petits, on a

$$(9) \quad |f[\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + (t + t')\mathbf{k}] - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + t\mathbf{k}) - [f(\mathbf{x}_0 + t'\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}_0)] - t'u(\mathbf{h} + t\mathbf{k}, \mathbf{k})| \\ \leq \varepsilon |t'| \cdot \|\mathbf{h} + t\mathbf{k}\|.$$

Comme  $\frac{f(\mathbf{x}_0 + t'\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}_0)}{t'}$  tend vers  $df(\mathbf{x}_0; \mathbf{k})$  lorsque  $t'$  tend vers zéro, on voit que pour toute valeur de  $t$  assez petite, la fonction  $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + t\mathbf{k})$  a ses



nombres dérivés bornés; elle est par suite absolument continue et a presque partout une dérivée; si l'on désigne cette dernière par  $v(\mathbf{h} + t\mathbf{k}, \mathbf{k})$  pour les valeurs de  $t$  où elle existe, on a, en faisant tendre  $t'$  vers zéro dans (9),

$$(10). \quad |v(\mathbf{h} + t\mathbf{k}, \mathbf{k}) - df(\mathbf{x}_0; \mathbf{k}) - u(\mathbf{h} + t\mathbf{k}, \mathbf{k})| \leq \varepsilon \|\mathbf{h} + t\mathbf{k}\|,$$

ce qui n'est autre que (8) où  $\mathbf{h}$  est remplacé par  $\mathbf{h} + t\mathbf{k}$ .

Montrons maintenant que les conditions de l'énoncé sont *suffisantes*, et d'abord dans le cas  $n = 2$ . Alors, si dans (10), on remplace  $t$  par  $z$ , l'inégalité obtenue a lieu presque partout pour  $t \leq z \leq t + t'$  (lorsque  $\mathbf{h}$ ,  $t$  et  $t'$  sont assez petits); en intégrant entre ces deux limites, il vient

$$\left| \begin{aligned} & f[\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + (t + t')\mathbf{k}] - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + t\mathbf{k}) \\ & - t' df(\mathbf{x}_0; \mathbf{k}) - t' u(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - \left( t' + \frac{t'^2}{2} \right) u(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \end{aligned} \right| \leq \varepsilon |t'| (2\|\mathbf{h} + t\mathbf{k}\| + \|t'\mathbf{k}\|).$$

Mais on peut aussi appliquer cette dernière inégalité pour  $\mathbf{h} = \mathbf{o}$ ,  $t = \mathbf{o}$ , d'où en retranchant

$$\left| \begin{aligned} & f[\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + (t + t')\mathbf{k}] - f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} + t\mathbf{k}) \\ & - f(\mathbf{x}_0 + t'\mathbf{k}) + f(\mathbf{x}_0) - t' u(\mathbf{h} + t\mathbf{k}, \mathbf{k}) \end{aligned} \right| \leq 2\varepsilon |t'| (\|\mathbf{h} + t\mathbf{k}\| + \|t'\mathbf{k}\|)$$

et, en y remplaçant  $\mathbf{h} + t\mathbf{k}$  par  $\mathbf{h}$ ,  $t'\mathbf{k}$  par  $\mathbf{k}$ , on a

$$|\Delta^2 f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}, \mathbf{k}) - u(\mathbf{h}, \mathbf{k})| \leq 2\varepsilon (\|\mathbf{h}\| + \|\mathbf{k}\|) \cdot \|\mathbf{k}\|,$$

d'où la propriété lorsque  $\|\mathbf{k}\| \leq \|\mathbf{h}\|$ ; dans le cas contraire, on échange les rôles de  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{k}$ , et l'on a encore le résultat cherché, puisque  $u$  a été supposée symétrique.

On peut maintenant achever le raisonnement par récurrence sur  $n$ ; avec les notations antérieures, l'hypothèse est que, pour tout  $\mathbf{h}_1$  assez petit,

$$|\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \dots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|,$$

d'où, en remplaçant successivement  $\mathbf{h}_3$  par  $t\mathbf{h}_1$ , et  $\mathbf{h}_2 + t\mathbf{h}_1$  dans cette inégalité, et retranchant les inégalités obtenues,

$$|\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)| \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| (\|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2 + t\mathbf{h}_1\|) \|\mathbf{h}_3\| \dots \|\mathbf{h}_n\|.$$

Supposons  $\mathbf{h}_1$  assez petit pour que dans cette inégalité on puisse faire varier  $t$  de 0 à 1; en remarquant que la dérivée de  $\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$  par rapport à  $t$  est égale à  $\Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$ , le théorème des accroissements finis donne l'inégalité

$$\left| \begin{aligned} & \Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}_1; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - \Delta^{n-1} f_1(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - u(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) \\ & \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| (2\|\mathbf{h}_1\| + \|\mathbf{h}_2\|) \|\mathbf{h}_3\| \dots \|\mathbf{h}_n\|, \end{aligned} \right|$$

d'où la proposition lorsque l'on suppose  $\|\mathbf{h}_1\| \leq \|\mathbf{h}_2\|$ ; dans le cas contraire, on intervertit les rôles de  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}_2$ , en utilisant la symétrie de la fonction  $u$ .

On notera que les conditions du théorème 4 entraînent que, dans un voisinage de  $\mathbf{x}_0$ ,  $d^{n-1}f$  existe sauf aux points d'un ensemble  $K$  de mesure  $m$ -dimensionnelle nulle (<sup>1</sup>); en outre, quel que soit  $\varepsilon > 0$ , pour tous les points n'appartenant pas à  $K$  et assez voisins de  $\mathbf{x}_0$ , on a, d'après (8),

$$(11) \quad |d^{n-1}f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) - u(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}, \mathbf{h})| \\ \leq \varepsilon \|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_{n-1}\| \cdot \|\mathbf{h}\|,$$

mais ces conditions n'entraînent pas réciproquement les conditions du théorème 4.

COROLLAIRE. — Soit  $f$  une fonction bornée dans un ensemble ouvert  $A$  de  $\mathbf{R}^m$ . Pour que, pour tout point  $\mathbf{x}$  de  $A$ , il existe une fonction multilinéaire symétrique  $u_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_n)$  telle que le rapport

$$\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n) - u_{\mathbf{x}}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|}$$

tende vers zéro lorsque les  $\mathbf{h}_i$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que  $f$  soit  $n$  fois différentiable en tout point de  $A$ .

En effet, d'après le théorème 4,  $f$  est  $n - 1$  fois différentiable en tout point de  $A$ ; en outre l'inégalité (11) montre qu'en chaque point  $\mathbf{x}_0$  de  $A$ ,  $f$  est  $n$  fois différentiable. La réciproque est immédiate.

On généralise de même le théorème 2 et son corollaire aux fonctions définies dans un voisinage d'un point de  $\mathbf{R}^m$ ; nous laissons au lecteur le détail des démonstrations, qui se font suivant les principes développés ci-dessus, et nous nous contentons d'indiquer les résultats. Pour que le rapport  $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\| \cdot \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|}$  reste borné lorsque les  $\mathbf{h}_i$  sont assez petits ( $f$  étant supposée bornée au voisinage de  $\mathbf{x}_0$ ), il faut et il suffit que  $f$  satisfasse aux conditions 1° et 2° de l'énoncé du théorème 4, et en outre qu'il existe un voisinage  $U$  de  $\mathbf{x}_0$  et un nombre fixe  $M$  tels que, pour tout système de valeurs  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-2}$ , et tout point  $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$  de  $U$  où  $g(\mathbf{x})$  admette une dérivée  $v(\mathbf{h}, \mathbf{k})$  dans la direction définie par un vecteur  $\mathbf{k}$  de norme 1, on ait

$$(12) \quad |v(\mathbf{h}, \mathbf{k}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-2}, \mathbf{k})| \leq M \|\mathbf{h}_1\| \dots \|\mathbf{h}_{n-2}\| \cdot \|\mathbf{h}\|.$$

Ces conditions entraînent encore l'existence de  $d^{n-1}f$  aux points de  $U$  n'appartenant pas à un ensemble  $K$  de mesure  $m$ -dimensionnelle nulle;

(<sup>1</sup>) Voir par exemple F. ROGER, *Les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points* (*Acta Math.*, t. 69, 1938, p. 99-133).

en outre, on a en ces points

$$|d^{n-1}f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}_0; \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{n-1})| \leq M \|\mathbf{h}_1\| \dots \|\mathbf{h}_{n-1}\| \|\mathbf{h}\|,$$

mais cette condition n'équivaut pas aux précédentes.

Enfin, pour que, pour tout point  $\mathbf{x}$  appartenant à un ensemble ouvert  $A$ , le rapport  $\frac{\Delta^n f(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)}{\|\mathbf{h}_1\| \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_n\|}$  reste borné (par un nombre dépendant de  $\mathbf{x}$ ) lorsque les  $\mathbf{h}_i$  tendent vers zéro, il faut et il suffit que  $f$  soit  $n - 1$  fois différentiable dans  $A$ , et que, pour tout point  $\mathbf{x}$  de  $A$ , le rapport

$$\frac{d^{n-1}f(\mathbf{x} + \mathbf{h}; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-1}) - d^{n-1}f(\mathbf{x}; \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_{n-1})}{\|\mathbf{h}_1\| \|\mathbf{h}_2\| \dots \|\mathbf{h}_{n-1}\| \|\mathbf{h}\|}$$

reste borné (par un nombre dépendant de  $\mathbf{x}$ ) lorsque  $\mathbf{h}$  tend vers zéro et que les  $\mathbf{h}_i$  prennent toutes les valeurs possibles  $\neq 0$ .