

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER
Configurations récurrentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 61 (1944), p. 199-230

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__199_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONFIGURATIONS RÉCURRENTES

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. *Introduction.* — Le travail actuel m'a été suggéré par deux articles récents de M. W. Richmond (1) dont le premier étudie le théorème de Cox :

D'un point O de l'espace ordinaire à 3 dimensions menons divers plans a_1, a_2, \dots, a_n ; sur la droite commune à a_i, a_j marquons un point, distinct de O , soit $a_i a_j$; on appelle $a_i a_j a_k$ le plan déterminé par $a_j a_k, a_k a_i, a_i a_j$. Si $n = 4$, les 4 plans $\frac{P_4}{a_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$), en posant $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$, concourent en un même point, que l'on appelle $a_1 a_2 a_3 a_4$. Pour $n = 5$, posons $P_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$; les 5 points $\frac{P_5}{a_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) sont dans un même plan, que l'on appelle $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$. Et ainsi de suite : $2n$ plans a_1, a_2, \dots, a_{2n} définissent un point $P_{2n} = a_1 a_2 \dots a_{2n}$ qui est commun aux $2n$ plans $\frac{P_{2n}}{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n$); $2n + 1$ plans $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ définissent un plan, que l'on appellera $P_{2n+1} = a_1 a_2 \dots a_{2n+1}$, contenant les $2n + 1$ points $\frac{P_{2n+1}}{a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, 2n + 1$).

Or, beaucoup de théorèmes récurrents admettent cette même forme *alternée*; leur caractéristique est la suivante : on envisage des *éléments géométriques de deux espèces*, points et plans par exemple; ou bien, points et cercles d'une même sphère; ou encore, droites et congruences rectilignes; les uns sont dits *pairs* (pour Cox, les points), les autres, *impairs* (pour le théorème de Cox, les plans); on définit l'*union* de deux éléments de parités opposées : par exemple, le point est dans le plan; ou bien la droite appartient à la congruence. On part d'un élément initial O , qui sera avantageusement représenté par 1 et sera dit pair; on définit des éléments impairs a_1, \dots, a_n , unis à O , jouant tous le même rôle vis-à-vis de O , et ensuite, soit l'élément unique $a_i a_j$ uni à a_i, a

(1) On a chain of theorems due to Homersham Cox; a chain of theorems for lines in space (*J. Lond. Math. Soc.*, 16, 1941, p. 105-107 et 108-112); un addendum de 9 lignes se trouve p. 208, à la fin du même tome.

(par exemple deux cercles a_i, a_j issus de O se recoupent en $a_i a_j$), soit un élément choisi parmi ceux qui sont unis simultanément à a_i, a_j (par exemple, dans le théorème de Cox, un point pris au hasard sur la droite commune aux plans a_i, a_j); on vérifie ou l'on démontre, suivant les cas, qu'il existe un seul élément impair $a_i a_j a_k$ uni à $a_j a_k, a_k a_i, a_i a_j$; au point de vue analytique, cela revient à vérifier que 3 équations à 3 inconnues ont une solution unique (3 points déterminent un plan, 3 points déterminent un cercle). Cela fait, nous étudions les 4 éléments impairs $a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4, a_1 a_2 a_4, a_1 a_2 a_3$: déterminer un élément pair, qui est uni à tous les quatre, revient en général à discuter un système d'équations dont le nombre est supérieur à celui des inconnues; *si ce système est incompatible, le théorème récurrent n'existe pas; si ce système est compatible et a une solution unique, le théorème récurrent alterné existe* et son énoncé est celui de Cox, les mots points et plans étant remplacés par les noms des éléments *pairs* ou *impairs* respectivement substitués à *points* ou *plans*.

J'arrive à ce résultat par un *raisonnement récurrent* qui m'a été suggéré par la comparaison des articles déjà cités et d'un travail de Bianchi (¹), où le théorème de Cox est obtenu, incidemment, d'une façon si naturelle que Bianchi ne le signale pas à l'attention spéciale du lecteur; les autres auteurs, quand les éléments $(1; a_1, a_2, \dots, a_n)$ ont été définis, portent leur attention uniquement sur l'ultime élément $a_1 a_2 \dots a_n$, tandis que Bianchi montre qu'il faut envisager la totalité des éléments pairs, en nombre 2^{n-1} , représentés par les symboles

$$1; a_1 a_2, \dots, a_{n-1} a_n; a_1 a_2 a_3 a_4, \dots,$$

à zéro, deux, quatre ... lettres a_i et les éléments impairs

$$a_1, a_2, \dots, a_n; a_1 a_2 a_3, \dots; a_1 a_2 a_3 a_4 a_5, \dots,$$

à une, trois, cinq ... lettres; ces symboles sont ceux que l'on obtient en développant le produit

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n).$$

Chacun des éléments pairs joue le même rôle dans la configuration totale et pourrait servir d'élément origine; chaque élément impair joue aussi le même rôle.

Il est évident que les éléments unis à $(a_\alpha a_\beta \dots a_\lambda)$, où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des entiers distincts pris parmi $1, 2, \dots, n$, s'obtiennent en supprimant de ce produit l'un quelconque des facteurs qui le composent ou en lui ajoutant l'un quelconque de ceux qui n'y entrent pas; donc *chacun des 2^{n-1} éléments pairs (ou impairs) est uni à n éléments de parité opposée* et l'on peut décomposer la configuration C_{n+1} , à 2^n éléments pairs et 2^n éléments impairs, définie par

(¹) *Rendiconti del Cir. mat. di Palermo*, 25, 1908, p. 291-325: Transformation asymptotique des courbes et des surfaces; congruences W.

(1; $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$), en la réunion de la configuration C_n provenant de (1; a_1, \dots, a_n) et d'une autre C'_n , de même nature, dont le symbole de chaque élément s'obtient en multipliant par a_{n+1} les symboles relatifs à C_n ; chaque configuration C_n, C'_n offre, par rapport à l'autre, la disposition classique depuis Möbius (qui l'a signalée pour les couples de tétraèdres dits de Möbius): chacun des éléments de C_n ou C'_n est uni à un élément, et un seul, de parité opposée, de l'autre. C'est ce que Bianchi a appelé *la configuration de Möbius généralisée*; C_{n+1} peut, en faisant jouer à $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ ce rôle de multiplicateur ou diviseur, être, de $(n + 1)$ façons, décomposée en deux configurations de Möbius.

Dans ce travail j'étudie le théorème de Cox; j'expose ensuite le raisonnement récurrent; le théorème de Miquel Clifford est rappelé et je passe aux congruences axiales qui font l'objet du second travail de M. Richmond.

Je donne quelques propriétés des couples de tétraèdres de Möbius, puisque tous les théorèmes récurrents que nous rencontrons reviennent à vérifier ou démontrer une propriété, géométrique ou analytique, analogue à celle de Möbius. Des recherches personnelles sur les cycles orthogonaux à une même inversion me permettent de donner quelques exemples inédits.

Enfin M. Labrousse a bien voulu me communiquer un grand nombre de propositions récurrentes alternées qu'il a rassemblées ⁽¹⁾ et nous étudierons des propositions dues à Tzitzeica-Oùe, ou à M. Tadahiko Kubota, ou à M. Pacquement.

Il m'a semblé intéressant de joindre divers énoncés récurrents, mais cette fois non alternés, dus encore à M. Labrousse. Je termine par une comparaison entre les théorèmes alternés *réguliers* et les théorèmes alternés *irréguliers*.

2. *Théorème de Cox.* — L'énoncé a été donné au paragraphe précédent; le nombre de paramètres engagé pour C_n est : 3 pour le point O, 2 pour chaque a_i , 1 pour chaque $a_i a_j$, soit un total de $3 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}$ ou $\frac{n^2 + 3n + 6}{2}$.

La configuration $C_2(1; a_1, a_2; a_1 a_2)$ est la réunion de $C_1(1, a_1)$ et de $C'_1(a_2, a_1 a_2)$: chaque point de C_1 et C'_1 est uni au plan de l'autre. La configuration $C_3(1; a_1, a_2, a_3; a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2; a_1 a_2 a_3)$ est réunion de $C_2(1; a_1, a_2; a_1 a_2)$ et de $C'_2(a_3; a_1 a_3, a_2 a_3; a_1 a_2 a_3)$ et l'on voit encore que chaque point de C_2 ou C'_2 est uni à un plan et un seul de l'autre.

Jusqu'ici nous n'avons eu à donner que des définitions; la valeur $n = 4$ est la valeur critique; posons $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$; nous avons défini, au moyen de (1; a_1, a_2, a_3, a_4)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 7 \text{ points : } 1; \quad a_1 a_2, a_1 a_3, a_1 a_4, a_2 a_3, a_2 a_4, a_3 a_4; \\ 8 \text{ plans : } a_1, a_2, a_3, a_4, \frac{P_4}{a_1}, \frac{P_4}{a_2}, \frac{P_4}{a_3}, \frac{P_4}{a_4}. \end{array} \right.$$

(1) *Revue de Mathématiques spéciales*, octobre-novembre 1936.

Démontrons que *les 4 derniers plans ont un point commun*, auquel il est naturel d'attribuer le symbole $a_1 a_2 a_3 a_4$. Beaucoup de démonstrations de ce fait ont été données : une des plus simples repose sur le théorème : *sept points déterminent un réseau ponctuel de quadriques, ayant un huitième point commun*. Parmi les quadriques contenant les sept points inscrits sur la première ligne (1), nous apercevons 4 quadriques dégénérées en 2 plans

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1(\text{points } 1, a_1 a_2, a_1 a_3, a_1 a_4); a_2 a_3 a_4 (\text{points } a_2 a_3, a_2 a_4, a_3 a_4), \\ a_2(\text{ » } 1, a_2 a_1, a_2 a_3, a_2 a_4); a_1 a_3 a_4 (\text{ » } a_1 a_3, a_1 a_4, a_3 a_4), \\ a_3(\text{ » } 1, a_3 a_1, a_3 a_2, a_3 a_4); a_1 a_2 a_4 (\text{ » } a_1 a_2, a_1 a_4, a_2 a_4), \\ a_4(\text{ » } 1, a_4 a_1, a_4 a_2, a_4 a_3); a_1 a_2 a_3 (\text{ » } a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3). \end{array} \right.$$

Le huitième point commun est situé sur la biquadratique, dégénérée en 4 droites, commune aux deux premières, par exemple, de ces quadriques; une de ces droites ne peut contenir que deux des huit points communs; indiquons les points, déjà connus, situés sur chacune d'elles

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_1, a_2), \text{ points } (1, a_1 a_2); (a_1, a_1 a_3 a_4), \text{ points } (a_1 a_3, a_1 a_4), \\ (a_2, a_2 a_3 a_4), \text{ point } (a_2 a_3, a_2 a_4); (a_2 a_3 a_4, a_1 a_3 a_4) \text{ point } (a_3 a_4). \end{array} \right.$$

Ce tableau montre que le huitième point est commun aux deux plans $a_2 a_3 a_4$, $a_1 a_3 a_4$; par raison de symétrie, il est aussi dans $a_1 a_2 a_4$, $a_1 a_2 a_3$ et la proposition est démontrée. En même temps, nous avons décomposé C_4 en deux configurations

$$\begin{aligned} C_3(1; a_1, a_2, a_3; a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3; a_1 a_2 a_3), \\ C_3(a_4; a_1 a_4, a_2 a_4, a_3 a_4; a_1 a_2 a_4, a_1 a_3 a_4, a_2 a_3 a_4; a_1 a_2 a_3 a_4), \end{aligned}$$

qui donnent chacune les 4 sommets et les 4 faces d'un tétraèdre; ces deux tétraèdres sont en position de Möbius, et réciproquement, tout couple de Möbius peut s'obtenir par le procédé de Cox.

3. *Raisonnement récurrent.* — Nous supposons avoir vérifié le théorème de Cox jusqu'à une certaine valeur de n , soit n_0 (jusqu'ici, il a été vérifié jusqu'à $n_0 = 4$); nous avons reconnu que, dans la configuration C_{n_0} et dans toutes celles qui la précèdent, chaque élément pair (ou impair) joue le même rôle; chaque point, réuni aux plans, en nombre n_0 , qui en sont issus, peut servir à reconstituer toute la configuration.

Comme cette valeur de n_0 , à savoir $n_0 = 4$, est paire, nous allons supposer, en changeant légèrement la notation, que nous ayons fait ces vérifications pour la configuration d'ordre pair C_{2n} définie avec $(1; a_1, a_2, \dots, a_{2n})$; introduisons le plan a_{2n+1} issu de 0 et choisissons les points $a_1 a_{2n+1}, \dots, a_{2n} a_{2n+1}$. La proposition démontrée pour 4 plans tels que $a_{2n-2}, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$, prouve

que les 4 plans suivants concourent en un même point

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{plan } a_{2n-1} a_{2n} a_{2n+1} \text{ des points } a_{2n-1} a_{2n}, a_{2n-1} a_{2n+1}, a_{2n} a_{2n+1}, \\ \text{» } a_{2n-2} a_{2n} a_{2n+1} \text{ » } a_{2n-2} a_{2n}, a_{2n-2} a_{2n+1}, a_{2n} a_{2n+1}, \\ \text{» } a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n+1} \text{ » } a_{2n-2} a_{2n-1}, a_{2n-2} a_{2n+1}, a_{2n-1} a_{2n+1}, \\ \text{» } a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n} \text{ » } a_{2n-2} a_{2n-1}, a_{2n-2} a_{2n}, a_{2n-1} a_{2n}. \end{array} \right.$$

Nous allons substituer aux plans et points qui figurent dans ce tableau ceux que l'on obtient en multipliant tous les symboles par $a_1 a_2 \dots a_{2n-2}$ et supprimant a_{2n-2} quand il est répété deux fois : cela revient à appliquer le résultat de Möbius-Cox au point $a_1 a_2 \dots a_{2n-2}$, pris comme origine au lieu de O (ou 1) et aux plans $a_1 a_2 \dots a_{2n-3}$, $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n-1}$, $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n}$, $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n+1}$ issus de cette nouvelle origine; le point $a_{2n-2} a_{2n-1}$ commun à a_{2n-2} et a_{2n-1} est remplacé par le point $a_1 a_2 \dots a_{2n-3} a_{2n-1}$ commun aux plans $a_1 a_2 \dots a_{2n-3}$ et $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n-1}$; de même $a_{2n-1} a_{2n}$ est remplacé par $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n-1} a_{2n}$ commun aux plans $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n-1}$ et $a_1 a_2 \dots a_{2n-2} a_{2n}$; nous allons poser $P_{2n+1} = a_1 a_2 \dots a_{2n} a_{2n+1}$, ce symbole P_{2n+1} n'étant, pour l'instant, qu'une abréviation d'écriture; les trois derniers plans du tableau (4) sont remplacés par les plans de symbole abrégé $\frac{P_{2n+1}}{a_{2n-2} a_{2n-1}}$, $\frac{P_{2n+1}}{a_{2n-2} a_{2n}}$, $\frac{P_{2n+1}}{a_{2n-2} a_{2n+1}}$, plans qui, d'après les résultats obtenus pour une configuration déduite de O et des $2n$ plans initiaux $a_1, a_2, \dots, a_{2n-3}, a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ concourent au point de symbole $\frac{P_{2n+1}}{a_{2n-2}} = a_1 a_2 \dots a_{2n-3} a_{2n-1} a_{2n} a_{2n+1}$; ce point est aussi dans le plan qui se déduit, par notre changement d'origine, du plan de la première ligne (4); pour ce plan, nous ne pouvons faire immédiatement la multiplication sur le symbole $a_{2n-1} a_{2n} a_{2n+1}$, car nous ne savons pas encore ce que signifie un symbole à $2n + 1$ lettres, mais nous ne pouvons donner les symboles des trois points qui définissent notre plan transformé : ce sont les points

$$\frac{P_{2n+1}}{a_{2n+1}}, \quad \frac{P_{2n+1}}{a_{2n}}, \quad \frac{P_{2n+1}}{a_{2n-1}}.$$

Leur plan contient le point $\frac{P_{2n+1}}{a_{2n-2}}$ commun aux trois autres plans du tableau (4). Autrement dit, en raison de la symétrie du rôle des lettres a_i pour $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$, nous constatons que quatre quelconques des points $\frac{P_{2n+1}}{a_i}$ sont dans un même plan : ils sont donc tous dans un même plan que nous représentons par le symbole $a_1 a_2 \dots a_{2n} a_{2n+1}$. Nous avons ainsi vérifié que la configuration C_{2n+1} contient 2^n points, 2^n plans, qu'il y a symétrie entre les rôles des points et les rôles des plans, que chaque point appartient à $2n + 1$ plans et que chaque plan contient $2n + 1$ points.

Étendons, de la même façon, le résultat à la configuration obtenue en ajoutant à la précédente C_{2n+1} , le $(n + 2)^{\text{ième}}$ plan a_{2n+2} . Les quatre derniers

plans issus de O , a_{2n-1} , a_{2n} , a_{2n+1} , a_{2n+2} fournissent 4 plans à 3 lettres, $a_{2n}a_{2n+1}a_{2n+2}$, $a_{2n-1}a_{2n+1}a_{2n+2}$, $a_{2n-1}a_{2n}a_{2n+2}$, $a_{2n-1}a_{2n}a_{2n+1}$, concourant au même point; en multipliant par $a_1a_2\dots a_{2n-2}$, c'est-à-dire, géométriquement parlant, en prenant pour nouvelle origine le point $a_1a_2\dots a_{2n-2}$, nous avons encore 4 plans concourants, de symboles

$$\frac{P_{2n+2}}{a_{2n-1}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{a_{2n}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{a_{2n+1}}, \quad \frac{P_{2n+2}}{a_{2n+2}},$$

où $P_{2n+2} = a_1a_2\dots a_{2n+1}a_{2n+2}$; les symboles à $(2n+1)$ lettres ont été définis, et les vérifications se feraient comme plus haut. Mais alors, quatre *quelconques* des plans $\frac{P_{2n+2}}{a_i}$ sont concourants, autrement dit *tous ces plans concourent* en un même point qu'il est naturel d'appeler $a_1a_2\dots a_{2n+2}$. *La chaîne se poursuit donc indéfiniment.*

La forme de raisonnement est indépendante de la nature des éléments introduits, pourvu qu'ils soient partagés en deux catégories, l'une *paire*, l'autre *impaire*, que l'on ait su définir l'*union* de deux éléments de parités différentes et que les éléments de même parité jouent tous le même rôle.

4. *Configuration de Möbius.* — Les tétraèdres de Möbius jouent un rôle important dans beaucoup de questions géométriques; leur existence paraît un peu mystérieuse et pourtant nous allons pouvoir, par un dessin simple, prouver, expérimentalement, si j'ose dire, leur existence.

M. Charles H. Rowe et moi avons écrit en collaboration une étude sur ces tétraèdres (¹); adoptons la notation plus commode ABCD, A'B'C'D', A étant dans le plan B'C'D' et A' dans le plan BCD, et de même pour les autres sommets. Un couple connu fournit 3 autres couples, suivant le schéma

ABCD	ABC'D'	AB'CD'	AB'C'D
A'B'C'D'	A'B'CD	A'BC'D	A'BCD'

Ce résultat a été prévu au paragraphe 1. La construction de Cox à partir de A, pris comme origine, des plans ACD, ABD, ABC, B'C'D' et des points B, C, D, B', C', D' placés sur les six arêtes issues de A, donne le point A' commun aux plans BCD, BC'D', B'CD', B'C'D. Un résultat, connu depuis longtemps, est que *les segments AA', BB', CC', DD' sont partagés harmoniquement par le couple (unique, formé de 2 droites distinctes) Δ , Δ' des sécantes communes aux droites supports de ces segments.*

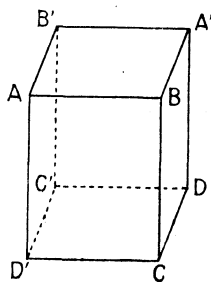
Un autre résultat, donné par M. Rowe, est que *toutes les quadriques du réseau déterminé par les huit sommets admettent Δ , Δ' comme droites conjuguées; réci-*

(¹) *Annales Sc. de l'École Norm. Sup.*, 3, LVI, 1939 p. 71-118 et 3, LVIII, 1941, p. 261-280.

proquement, les huit points communs à trois quadriques ayant un couple commun de droites conjuguées Δ, Δ' se répartissent (de 4 façons) aux sommets de deux tétraèdres de Möbius.

Cette dernière propriété nous conduit au cas très particulier où les quadriques du réseau sont conjuguées par rapport à un tétraèdre donné : chaque couple d'arêtes opposées peut jouer le rôle de Δ, Δ' et nous aurons 12 façons de séparer les points communs en sommets de deux tétraèdres de Möbius. Une transformation homographique permet de remplacer le tétraèdre conjugué commun par celui dont les sommets sont O et les points à l'infini sur les arêtes du trièdre trirectangle Ox, Oy, Oz et, même, de supposer que les huit points communs sont les sommets d'un cube (fig. 1). Cheminons sur 3 arêtes consécutives, parallèles aux trois directions Ox, Oy, Oz ; nous avons

Fig. 1.



ainsi les sommets A, B, C, D d'un premier tétraèdre; la symétrie, dont l'axe est la parallèle issue du centre du cube à l'arête BC , change A, B, C, D en A', B', C', D' . Le plan BCD contient A' ; le plan ACD contient B' , car AB' est parallèle à CD ; ABD contient C' , car DC' est parallèle à BA ; ABC contient D' ; la symétrie échangeant les deux tétraèdres, prouve que A, B, C, D sont chacun dans les plans $B'C'D', A'C'D', A'B'D', A'B'C'$. Il y a 12 arêtes; BC fournit deux circuits possibles $ABCD, A'BCD'$, de sorte que nous avons ainsi les 24 tétraèdres ou 12 couples annoncés.

Rappelons que l'on obtient le couple général de Möbius (17 paramètres) avec un tétraèdre quelconque $ABCD$ (12 paramètres) et un complexe linéaire quelconque (5 paramètres) et prenant les pôles A', B', C', D' des faces BCD, ACD, ABD, ABC . On peut encore prendre une quadrique Q quelconque (9 paramètres), un tétraèdre $ABCD$ conjugué (6 paramètres), deux génératrices Δ, Δ' de même système de Q (2 paramètres); l'involution biaxiale d'axes Δ, Δ' remplace $ABCD$ par le tétraèdre $A'B'C'D'$, en position de Möbius avec $ABCD$.

Remarquons encore, qu'une configuration C_n étant construite, sa transformée C'_n relativement à un complexe linéaire quelconque est en position de Möbius avec C_n , l'ensemble (C_n, C'_n) étant une configuration C_{n+1} de Cox; mais, dans la construction générale de Cox, le passage d'une C_n à une C_{n+1} se fait en

donnant a_{n+1} , puis choisissant les points $a_1 a_{n+1} \dots, a_n a_{n+1}$ ce qui introduit $n+2$ paramètres nouveaux : or $n+2$ surpasse 5 si n surpasse 3.

5. *Théorème de Miquel et Clifford.* — La forme usuelle de l'énoncé est la suivante : dans un plan, deux droites a_1, a_2 déterminent un point $a_1 a_2$; trois droites a_1, a_2, a_3 conduisent au cercle $a_1 a_2 a_3$ circonscrit aux trois points $a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3$; avec quatre droites a_1, a_2, a_3, a_4 , en posant $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$, les quatre cercles $\frac{a_i}{P_4}$ ont un point commun $P_4 \dots$; et ainsi de suite, par le même processus récurrent. $\frac{a_i}{P_4}$

L'élément pair initial n'est pas signalé; mais, puisque par inversion, des droites se transforment en cercles ayant le pôle comme point commun, il est naturel de transformer par inversion l'énoncé primitif et nous obtenons l'énoncé général récurrent étudié dans l'introduction, où l'élément pair initial 1 est le point O, et où a_1, a_2 sont des cercles issus de O dans le plan; l'élément $a_1 a_2$ est le nouveau point commun à a_1, a_2 : cette fois-ci, il n'y a plus de paramètre intervenant pour le choix de $a_1 a_2$.

Il y a avantage, soit pour l'énoncé initial, soit pour le nouveau, à transformer par inversion avec un pôle situé hors du plan de la figure. L'élément initial O (ou 1) est arbitraire dans l'espace; les éléments a_1, a_2, \dots , sont des cercles issus de O sur une même sphère.

Revenons au théorème de Cox, avec ce point O et des plans a_1, a_2, a_3, a_4 issus de O; les 6 points $a_i a_j$ seront choisis aux points où chaque droite (a_i, a_j) recoupe la sphère S; les 4 plans $\frac{P_4}{a_i}$ ont un point commun $a_1 a_2 a_3 a_4$ appartenant à toutes les quadriques passant par O et les points $a_i a_j$, donc ce point nouveau est aussi sur la sphère S et les plans $\frac{P_4}{a_i}$ coupent S suivant quatre cercles ayant un même point commun : c'est le théorème de Miquel et Clifford démontré pour $n=4$, donc, grâce à notre raisonnement récurrent, démontré pour toute valeur de n .

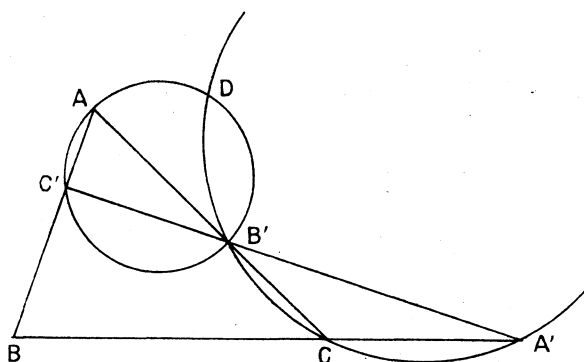
Le théorème de Miquel et Clifford est donc un cas particulier du théorème de Cox : si, dans la construction de Cox, on imagine une quadrique Q, issue de O, et si chaque point $a_i a_j$ est choisi au nouveau point de rencontre de la droite (a_i, a_j) avec Q, tous les points successifs, qui sont nos éléments pairs, sont tous sur Q. Il me semble intéressant de signaler que, réciproquement, la démonstration, du théorème de Miquel et Clifford suffit pour pouvoir énoncer le théorème, plus général, de Cox : en effet, pour $n=4$, les deux théorèmes coïncident et le raisonnement récurrent exige seulement que la proposition soit démontrée pour $n=4$. On peut, à cette affirmation qui n'est pas adoptée par les auteurs précédents, faire la critique suivante : pour remonter du théorème de Miquel-Clifford à celui de Cox, il faut savoir que l'on peut passer d'une quadrique à une autre par une transformation homographique, afin que la démonstration,

faite sur la sphère pour $n = 4$, puisse s'étendre au théorème de Cox, toujours pour $n = 4$; si cette proposition sur l'homographie est admise, on n'a plus besoin, pour établir le théorème de Cox, pour $n = 4$, de savoir que les quadriques qui ont en commun sept points en ont un huitième commun à toutes.

Remarquons que le théorème de Cox, pour $n = 4$, fait vérifier que 4 plans ont un point commun : analytiquement parlant, on a 4 équations linéaires à 3 inconnues, qui sont compatibles. Sur la sphère, ou dans le plan, on a 4 cercles qui doivent avoir un point commun, donc analytiquement parlant, 4 équations quadratiques à 2 inconnues, qui ont une solution commune.

Démontrons, élémentairement, le théorème de Miquel et Clifford, en nous bornant à $n = 4$ et supposant que l'élément initial soit le point à l'infini du plan; nous avons un triangle ABC (*fig. 2*) coupé par la transversale A'B'C'; les

Fig. 2.



deux cercles AB'C', CA'B' se coupent en B' et en un nouveau point D; on a, entre les angles orientés de droites non orientées, les égalités, vraies à $k\pi$ près,

$$\begin{aligned} (DA, DB') &= (C'A, C'B') = (BA, A'B'C'), \\ (DB', DC) &= (A'B', A'C) = (A'B'C', BC). \end{aligned}$$

En ajoutant, on a

$$(DA, DC) = (BA, BC);$$

A, B, C, D sont donc sur un même cercle; on peut échanger les rôles de A et C, de C' et A', en remplaçant la droite AB'C par la droite C'B'A', par suite C', B, A', D sont sur un même cercle.

Rappelons que Lebesgue a réuni un grand nombre de démonstrations du théorème de Miquel et Clifford, en apportant sa contribution personnelle (1):

6. *Congruences axiales de droites orientées.* — Ce paragraphe reproduit l'essentiel du second Mémoire de M. Richmond. Un axe A (qu'il n'est pas

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4^e série, 16, 1916, p. 481-495.

indispensable d'orienter) est donné et une droite orientée \vec{O} peut tourner d'un angle arbitraire autour de A et subir une translation, d'amplitude arbitraire, parallèle à A; on obtient ainsi une *congruence axiale* dont les caractéristiques sont au nombre de 6 : 4 pour l'axe, 1 pour l'angle de la congruence, c'est-à-dire l'angle constant, compris entre 0 et π , d'une droite quelconque de la congruence et de l'axe (préalablement orienté), 1 pour le rayon, c'est-à-dire la plus courte distance de l'axe et d'une génératrice. Les projections des droites sur un plan perpendiculaire à l'axe sont des droites orientées toutes tangentes à un même cycle, ayant même axe et rayon que la congruence. On peut appeler *cône directeur* le demi-cône de révolution de sommet ω , dont les génératrices sont les demi-droites issues de ω parallèles aux droites de la congruence; la base de ce demi-cône sur la sphère unité de centre ω peut être appelée *cercle directeur*.

Deux congruences axiales a_1 (axe A_1 , angle φ_1 , rayon r_1) et a_2 (axe A_2 , angle φ_2 , rayon r_2) ont deux génératrices communes et deux seulement : leurs cercles directeurs se coupent en deux points α et β ; les droites de a_1 parallèles à $\vec{\omega}\alpha$ sont dans un plan parallèle à $\omega\alpha$; de même pour a_2 ; l'intersection de ces deux plans est l'unique droite relative à α . Si D est une droite rencontrant à angle droit l'axe A d'une congruence a , la symétrie d'axe D change a en la même congruence, *changée de sens* : c'est évident, en prenant d'abord pour D la perpendiculaire commune à A et une génératrice, puis remarquant qu'un mouvement de verrou autour de A ne change pas la congruence. Si donc a_1, a_2 résultent de la rotation d'une droite orientée \vec{O} autour de A_1 ou A_2 , il suffira de construire la perpendiculaire D commune à A_1, A_2 , puis de faire tourner de π la droite $(-\vec{O})$ autour de D pour avoir la droite orientée, autre que \vec{O} , commune à a_1, a_2 .

Trois droites orientées $\vec{O}_1, \vec{O}_2, \vec{O}_3$ définissent une seule congruence axiale, dont le cône directeur s'obtient en menant par ω les demi-droites parallèles à $\vec{O}_1, \vec{O}_2, \vec{O}_3$; en projetant $\vec{O}_1, \vec{O}_2, \vec{O}_3$ sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône directeur, nous obtenons trois droites orientées $\vec{o}_1, \vec{o}_2, \vec{o}_3$ tangentes à un cycle unique, dont l'axe est celui de la congruence cherchée.

Une droite orientée peut être définie par un vecteur $+1$ porté sur elle, c'est-à-dire par les projections (x, y, z) de ce vecteur sur les 3 droites rectangulaires Ox, Oy, Oz et par les moments (l, m, n) de ce vecteur relativement à ces trois axes. On a

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad lx + my + nz = 0.$$

Écrivons

$$X = x + l\varepsilon, \quad Y = y + m\varepsilon, \quad Z = z + n\varepsilon$$

où ε est un symbole jouissant des propriétés suivantes : l'égalité $a + a'\varepsilon = b + b'\varepsilon$

revient à $a = b$, $a' = b'$; la somme $(a + a'\varepsilon) + (b + b'\varepsilon)$ est $a + b + (a' + b')\varepsilon$; le produit $(a + a'\varepsilon)(b + b'\varepsilon)$ est $ab + (ab' + a'b)\varepsilon$; autrement dit la multiplication $(a_1 + a'_1\varepsilon)(a_2 + a'_2\varepsilon) \dots (a_n + a'_n\varepsilon)$ se fait en opérant comme si ε était une variable habituelle, puis en réduisant le produit à son terme constant et à son terme du premier degré en ε . La droite orientée (x, y, z, l, m, n) envisagée plus haut est donc connue si l'on donne X, Y, Z , quantités complexes qui vérifient la relation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$. Si $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ sont les quantités analogues relatives à un axe orienté \vec{A}_1 , on a

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \lambda_1 \alpha_1 + \mu_1 \beta_1 + \nu_1 \gamma_1 = 0;$$

en posant

$$\xi_1 = \alpha_1 + \lambda_1 \varepsilon, \quad \eta_1 = \beta_1 + \mu_1 \varepsilon, \quad \zeta_1 = \gamma_1 + \nu_1 \varepsilon,$$

on a

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1;$$

la congruence axiale d'axe \vec{A}_1 et de génératrice $\vec{O}(x_0, y_0, z, l_0, m_0, n_0)$ ou simplement (X_0, Y_0, Z_0) avec $X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = 1$ est caractérisée par l'équation

$$X\xi_1 + Y\eta_1 + Z\zeta_1 = X_0\xi_1 + Y_0\eta_1 + Z_0\zeta_1 = K_1 \\ (X^2 + Y^2 + Z^2 = 1, \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = 1, X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = 1).$$

La partie réelle de K_1 est le cosinus de l'angle V_1 de la congruence et le coefficient de ε dans K_1 est $\Delta_1 \sin V_1$ où Δ_1 est le rayon de la congruence, pris positivement ou négativement suivant que le moment relatif des segments unitaires portés par \vec{A}_1 et \vec{O} est positif ou négatif.

Il est clair, d'après cela, qu'une congruence axiale a_1 est parfaitement définie par un cercle (complexe) de la sphère unité ω . Le théorème de Miquel et Clifford s'étend aux cercles complexes, puisque les calculs de vérification sont les mêmes que pour les cercles ordinaires.

Nous avons donc un théorème récurrent où l'élément pair initial est une droite orientée \vec{O} (ou 1) et où les éléments impairs a_1, \dots, a_n initiaux sont les congruences axiales d'axes $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \dots, \vec{A}_n$, quelconques, dont \vec{O} est une génératrice; $a_1 a_2$ est la nouvelle droite orientée commune à a_1, a_2 (vérification faite plus haut), $a_1 a_2 a_3$ la congruence unique définie par $a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3$ (vérification faite plus haut); en posant $P_i = a_1 a_2 a_3 a_4$, les 4 congruences $\frac{P_i}{a_i}$ ont une droite, unique, commune : vérification faite par le théorème de Miquel et Clifford étendu aux cercles complexes. La chaîne récurrente s'en déduit. On doit remarquer qu'il a fallu non seulement démontrer le théorème pour $n = 4$, mais donner des explications, détaillées, déjà pour $n = 2$ et $n = 3$.

7. *Congruences axiales de cycles.* — J'ai montré ⁽¹⁾ que tout cycle \vec{A} orthogonal à l'inversion négative de pôle O et puissance $-R^2$ peut être représenté par les pieds (a, α) de ses focales orientées, positive et négative, relatives à O , sur les feuilletés sphériques de centre commun O et de rayon R ; deux cycles \vec{A}, \vec{B} de cette espèce, sécants, donc bisécants, ont des images $(a, \alpha), (b, \beta)$ caractérisées par $\widehat{ab} = \widehat{\alpha\beta}$, la valeur commune de $\frac{\widehat{ab}}{R}$ et $\frac{\widehat{\alpha\beta}}{R}$ étant l'angle des deux cycles; si a', α' sont les points diamétralement opposés à a et α , les deux cycles $(a, \alpha), (a', \alpha')$ ont même support, mais sont opposés; les deux cycles $(a, \alpha), (a, \alpha')$ sont axiaux. Une rotation anallagmatique d'amplitude φ et d'axe (a, α) fait tourner les feuilletés, positif et négatif, autour de \vec{Oa} ou $\vec{O\alpha}$ respectivement, du même angle φ . Toute opération sphérique conforme directe conservant l'inversion négative I en jeu se traduit par une rotation d'amplitude φ autour d'un certain cycle $\vec{A}(a, \alpha)$ orthogonal à I et une rotation d'amplitude ψ autour du cycle conjugué $\vec{A}'(a, \alpha')$, les deux rotations pouvant se faire dans un ordre quelconque; le feuillet positif tourne de l'angle $(\varphi + \psi)$ autour de \vec{Oa} , le feuillet négatif de $(\varphi - \psi)$ autour de $\vec{O\alpha}$.

Considérons sur le feuillet positif un cercle quelconque, de pôle sphérique a_1 , et sur le feuillet négatif un cercle quelconque, de pôle sphérique α_1 ; les ∞^2 cycles orthogonaux à I , dont l'image positive est sur le premier cercle et la négative sur le second dérivent tous de l'un d'eux par des rotations anallagmatiques arbitraires effectuées successivement autour de $(a_1, \alpha_1), (a_1, \alpha'_1)$. Nous appellerons une telle congruence, *congruence axiale* d'axes $(a_1, \alpha_1), (a_1, \alpha'_1)$; les *invariants* de cette congruence sont les rayons sphériques des deux cercles portant les images positives et négatives des cycles de cette congruence orientée.

Le théorème de Miquel et Clifford pour chacun des feuilletés sphériques permet d'énoncer, pour les congruences axiales de cycles, tous orthogonaux à une même inversion négative I , le même théorème que pour les congruences axiales de droites.

L'élément pair initial est un cycle Ω orthogonal à I ; les éléments impairs initiaux a_1, a_2, \dots, a_n sont des congruences axiales de cycles orthogonaux à I , définies par leurs axes $(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2) \dots, (a_n, \alpha_n)$ tous orthogonaux à I et leurs 2 invariants respectifs: dans la configuration C_n , on a 2^{n-1} cycles, 2^{n-1} congruences, chaque cycle étant commun à n congruences et chaque congruence contenant n cycles.

(1) *Mém. Sc. math.*, fascicule CIV, Paris, Gauthier-Villars, 1944, *Cycles paratactiques*.

8. *Configurations de semi-cyclides de Dupin.* — Employons encore notre représentation de cycles orthogonaux à l'inversion I de pôle O et puissance $(-R^2)$. Choisissons, une fois pour toutes, un point α du feuillet négatif; un cercle du feuillet positif, de pôle sphérique a et de rayon sphérique $R\varphi$, peut être considéré comme l'image d'une semi-cyclide de Dupin, d'axe anallagmatique (a, α) , engendrée par un cycle de Villarceau de cette cyclide en tournant autour de (a, α) ; l'image positive de chaque cercle de Villarceau est un point du cercle de pôle a défini plus haut et son image négative est α .

On choisit un point o sur le feuillet positif et des points A_1, A_2, \dots, A_n de ce feuillet; on envisage les demi-cyclides a_1, a_2, \dots, a_n engendrées par la rotation du cycle (o, α) autour de $(A_1, \alpha), (A_2, \alpha), \dots, (A_n, \alpha)$; deux de ces demi-cyclides a_1, a_2 ont un unique cycle commun autre que (o, α) , soit $a_1 a_2$ et nous continuons par notre processus habituel; *les éléments pairs sont des cycles, tous paratactiques négativement entre eux, puisque leur image négative est α ; les éléments impairs sont des demi-cyclides.* Répéter l'énoncé complet serait fastidieux.

9. *Théorème de Tzitzeica-Oùe.* — Nous avons donné diverses applications, les unes de nature *anallagmatique*, les autres de nature *projective*. Voici une application *métrique* due au géomètre japonais S. Oùe ⁽¹⁾, retrouvée par Tzitzeica qui ignorait le travail de Oùe. Nous empruntons à M. Labrousse (*loc. cit.*) l'énoncé de Tzitzeica :

Soient A_1, A_2, A_3 trois points quelconques sur un cercle Γ de rayon R . Les cercles de centres A_1, A_2, A_3 et de rayon R se coupent 2 à 2 en 3 points autres que O ; soit Σ_3 le cercle passant par ces 3 points; on fait correspondre Σ_3 à A_1, A_2, A_3 . Étant donnés quatre points de Γ , à leurs combinaisons 3 à 3 correspondent quatre cercles Σ_3 , dont les centres sont sur un cercle Σ_4 , et qui passent par un même point P_4 . D'une manière générale, on fait correspondre un cercle Σ_n à n points du cercle Γ ; soient $(n+1)$ points de Γ : les $(n+1)$ cercles Σ_n correspondant à leurs combinaisons n à n passent par un même point P_{n+1} et ont leurs centres sur un même cercle Σ_{n+1} . Les cercles $\Sigma_3, \Sigma_4, \dots$ ont tous même rayon R .

Cette proposition revient à la suivante : reprenons le théorème de Miquel et Clifford, en supposant que les n cercles a_1, \dots, a_n issus du point initial O aient tous le même rayon R : tous les cercles successivement introduits ont le même rayon R . On forme une configuration de même nature en remplaçant chaque point de la configuration de Miquel et Clifford par le cercle de rayon R centré en ce point et chaque cercle de Miquel et Clifford par son centre : les deux configurations ainsi obtenues sont *réiproques* et s'échangent par une *dilatation* de module R

(1) *Tohoku Mathematical Journal*, 1916, p. 225-228.

(le module étant la longueur portée sur le rayon, orienté positivement vers le centre).

La démonstration est intuitive et, d'ailleurs, ne fait usage ni du théorème de Miquel ni de notre raisonnement récurrent. Les points A_i , centres des cercles a_i , ont pour coordonnées, si O est pris pour origine, $(R \cos \varphi_i, R \sin \varphi_i)$. Il est clair que le point de coordonnées

$$R(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \dots + \cos \varphi_p), \quad R(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \dots + \sin \varphi_p)$$

est à la distance R de tout point obtenu en supprimant un seul terme $(\cos \varphi_i, \sin \varphi_i)$ dans ces deux parenthèses, ou en ajoutant $\cos \varphi_{p+1}$, dans l'une, et $\sin \varphi_{p+1}$ dans l'autre parenthèse; cette remarque si simple démontre l'existence des deux configurations; $R(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)$, $R(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)$ sont les coordonnées du point $a_1 a_2$; le centre du cercle $a_1 a_2 a_3$ est

$$R(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3), \quad R(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3),$$

le point $a_1 a_2 a_3 a_4$ est

$$R(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 + \cos \varphi_4), \quad R(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \varphi_3 + \sin \varphi_4),$$

et ainsi de suite, indéfiniment.

Les deux configurations qui s'échangent par dilatation ne sont pas inscrites-circonscrites l'une à l'autre; pour $n = 2$, par exemple, nous avons deux cercles, de rayon R, a_1, a_2 issus de O; a_1, a_2 sont remplacés par leurs centres α_1, α_2 et les points O, $a_1 a_2$ par des cercles de rayon R, ω et $\alpha_1 \alpha_2$; la figure montre que les 4 cercles $a_1, a_2, \omega, \alpha_1 \alpha_2$ ne comprennent aucun groupe de trois cercles ayant un point commun.

L'énoncé donné par S. Oûe est le suivant : *soient trois points B_1, B_2, B_3 sur un cercle Γ' ; on leur fait correspondre le cercle Γ_3 des neuf points du triangle $B_1 B_2 B_3$; étant donnés 4 points B_1, B_2, B_3, B_4 de Γ' , à leurs combinaisons 3 à 3 correspondent quatre cercles Γ_3 ; ces 4 cercles ont un point commun P_4 que l'on fait correspondre aux 4 points. Étant donnés 5 points de Γ' , à leurs combinaisons 4 à 4 correspondent 5 points P_4 qui sont sur un même cercle Γ_3 que l'on fait correspondre aux 5 points donnés, et ainsi de suite indéfiniment.*

Introduisons les milieux A_1, A_2, \dots des rayons OB_1, OB_2, \dots ; ils sont sur un même cercle Γ de rayon R et, puisque les deux cercles de rayon R et centres A_1, A_2 se recoupent au milieu de $B_1 B_2$, les deux énoncés de Tzitzeïca et de S. Oûe coïncident.

Dans l'un ou l'autre énoncé, on s'aperçoit que les théorèmes récurrents font intervenir alternativement des points et des cercles : donc, pour pouvoir appliquer notre méthode et surtout le raisonnement récurrent, on a besoin de faire intervenir, au début, un point fixe O et des cercles a_1, a_2, \dots, a_n qui y

passent : en remarquant qu'ils ont tous le même rayon R , nous apercevons l'identité des deux énoncés. Nous aurons de même, pour d'autres exemples de théorèmes récurrents, à rétablir la symétrie dès le début quand ce sera possible; cela nous permettra ou bien d'énoncer un théorème plus général ou bien de reconnaître que le théorème récurrent alterné proposé ne rentre pas dans la catégorie de ceux que nous étudions (1)

10. THÉORÈME DE TADAHIKO KUBOTA (2). — On considère des cycles a_1, a_2, \dots, a_n tangents à une même droite orientée \vec{O} (employons le mot abrégé : flèche); a_1, a_2 ont une unique flèche tangente commune nouvelle, $a_1 a_2$. Les 3 flèches $a_1 a_2, a_1 a_3, a_2 a_3$ sont tangentes à un seul et même cycle $a_1 a_2 a_3$. Étant donnés 4 cycles a_1, a_2, a_3, a_4 tangents à \vec{O} , et posant, $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$, les 4 cycles $\frac{P_4}{a_i}$ ont une même flèche tangente commune $a_1 a_2 a_3 a_4$, et ainsi de suite indéfiniment.

Les éléments pairs sont des flèches, les éléments impairs des cycles. Rappelons quelques notions sur les cycles et leurs flèches tangentes. Un cycle décrit dans le sens direct (ou rétrograde) est regardé comme ayant un rayon R positif (ou négatif); si le centre est pris pour origine, un point m du cercle a pour coordonnées $R \cos \alpha, R \sin \alpha$ et un point M de la tangente, $R(\cos \alpha - \lambda \sin \alpha), R(\sin \alpha + \lambda \cos \alpha)$; la valeur algébrique du segment \overline{mM} est λR , car le sens positif sur la flèche est celui qui correspond à la circulation sur le cycle. Les deux tangentes au cercle aux points $m(R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ et $m_1(R \cos \beta, R \sin \beta)$ se coupent au point M représenté indifféremment par

$$R(\cos \alpha - \lambda \sin \alpha), \quad R(\sin \alpha + \lambda \cos \alpha)$$

ou

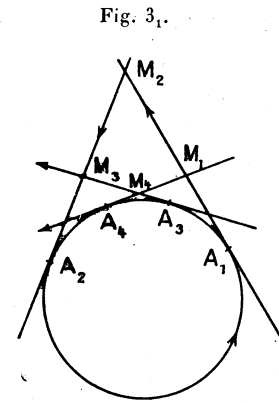
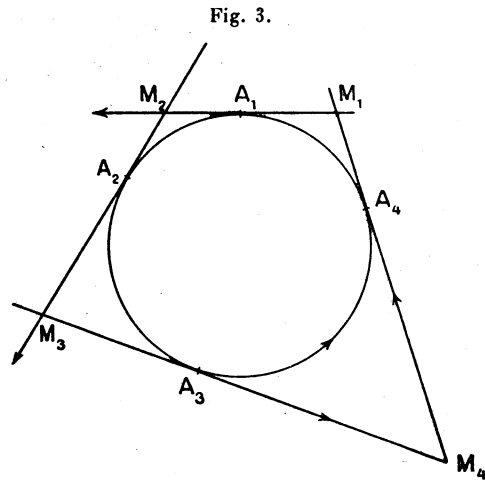
$$R(\cos \beta + \lambda \sin \beta), \quad R(\sin \beta - \lambda \cos \beta)$$

avec $\lambda = \tan \frac{\beta - \alpha}{2}$; ce résultat met en évidence que les deux segments \overline{mM} $\overline{m_1 M}$ sont mesurés par des nombres opposés. Démontrons, d'une façon

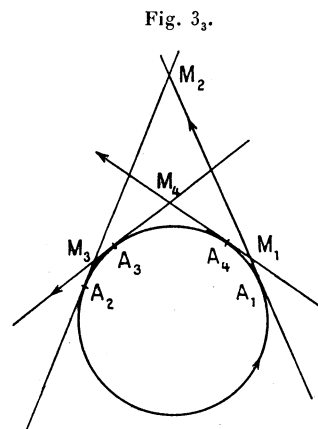
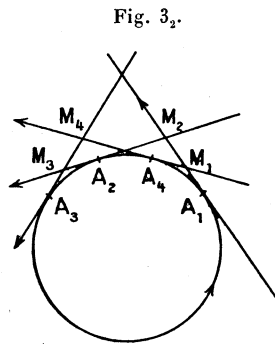
(1) Il y aurait beaucoup de propriétés géométriques intéressantes à développer, mais elles sortent de notre sujet précis. Une inversion de pôle P non situé dans le plan A des cercles égaux a_1, a_2, \dots, a_n donne une sphère S , des cercles a'_1, \dots, a'_n tous issus d'un point O' de S , tels que les pôles de leurs plans soient répartis sur la conique σ commune au plan tangent à S en O' et au cône qui a pour sommet P et pour directrice le cercle ω contenant les centres de a_1, a_2, \dots, a_n ; cette conique σ a pour foyer O' et, pour directrice correspondante D , l'intersection des plans tangents à S en P et O' , puisque, par perspective, O' et cette directrice deviennent O et la droite à l'infini du plan contenant O, a_1, a_2, \dots, a_n . Les plans des cercles a'_1, \dots, a'_n enveloppent le cône C qui a son sommet en O , transformé par polarité de σ ; ce cône a pour base dans le plan tangent à S en P une conique qui admet P pour foyer et pour directrice correspondante la droite D ; le plan tangent en O' à S est une direction de plan de sections circulaires de ce cône C ; toutes ces propriétés s'aperçoivent aisément au moyen d'éléments imaginaires, en particulier des génératrices de S .

(2) *Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. 142, 1936, p. 66-68.

générale, le résultat relatif à un quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$, convexe ou non, circonscrit à un cercle. Nous avons dessiné (*fig. 3* et *fig. 3₁*) les deux cas



relatifs à un quadrilatère convexe, le cercle tangent aux 4 côtés étant intérieur ou extérieur, puis (*fig. 3₂* et *fig. 3₃*) le quadrilatère biconcave et le quadri-



latère en fer de lance; nous avons orienté le cercle et les flèches; dans les 4 figures, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_2M_3}$ sont mesurés par des nombres positifs; dans la première figure, $\overline{M_3M_4}$, $\overline{M_4M_1}$ sont mesurés par des nombres positifs, dans les trois dernières par des nombres négatifs. On a, avec certains nombres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$,

$$\begin{aligned} \overline{A_1M_1} &= -\lambda_1 R, & \overline{A_2M_2} &= -\lambda_2 R, & \overline{A_3M_3} &= -\lambda_3 R, & \overline{A_4M_4} &= -\lambda_4 R, \\ \overline{A_1M_2} &= \lambda_2 R, & \overline{A_2M_3} &= \lambda_3 R, & \overline{A_3M_4} &= \lambda_4 R, & \overline{A_4M_1} &= \lambda_1 R, \\ \overline{M_1M_2} &= (\lambda_1 + \lambda_2) R, & \overline{M_2M_3} &= (\lambda_2 + \lambda_3) R, & \overline{M_3M_4} &= (\lambda_3 + \lambda_4) R, & \overline{M_4M_1} &= (\lambda_4 + \lambda_1) R. \end{aligned}$$

On a, dans tous les cas,

$$\overline{M_1M_2} + \overline{M_3M_4} = \overline{M_2M_3} + \overline{M_4M_1} = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) R.$$

Démontrons la réciproque : on a 4 flèches $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$; M_1 est au point de croisement de $\vec{f}_3, \vec{f}_1, M_2$ de $\vec{f}_1, \vec{f}_2, M_3$ de $\vec{f}_2, \vec{f}_3, M_4$ de \vec{f}_3, \vec{f}_4 et nous supposons

$$(1) \quad \overline{M_1 M_2} + \overline{M_3 M_4} = \overline{M_2 M_3} + \overline{M_4 M_1},$$

chaque segment étant évalué, avec son signe, sur la flèche qui le porte; dans ces conditions il existe un cycle tangent aux 4 flèches.

En revenant aux valeurs absolues, une relation telle que (1) est remplacée par

$$M_1 M_2 \pm M_2 M_3 \pm M_3 M_4 \pm M_4 M_1 = 0.$$

On ne peut avoir 4 signes +; on ne peut avoir ni 3 signes +, ni 3 signes —, parce qu'un segment rectiligne est plus court que toute ligne brisée réunissant ses extrémités. On doit donc étudier les hypothèses

$$(a) \quad M_1 M_2 + M_2 M_3 - M_3 M_4 - M_4 M_1 = 0,$$

$$(b) \quad M_1 M_2 - M_2 M_3 + M_3 M_4 - M_4 M_1 = 0,$$

$$(c) \quad M_1 M_2 - M_2 M_3 - M_3 M_4 + M_4 M_1 = 0.$$

On peut, sans changer la figure, avec une permutation circulaire sur les lettres M_1, M_2, M_3, M_4 , échanger les relations (a) et (c); il suffit donc d'étudier (b) et (c). La relation (c) $M_1 M_2 + M_1 M_4 = M_3 M_2 + M_3 M_4$ signifie que M_1, M_3 sont sur une même ellipse de foyers M_2, M_4 (écartons, du moins momentanément, le cas où $M_1 M_2 M_3 M_4$ serait un parallélogramme); les tangentes en M_1, M_3 (fig. 3₁ ou 3₂) concourent en un point O à distance finie; d'après Poncelet, OM₂ bissecte l'angle $\widehat{M_3 M_2 M_1}$ et OM₄ l'angle $\widehat{M_3 M_4 M_1}$; O est donc commun à 4 bissectrices d'angles formés en M_1, M_2, M_3, M_4 par les côtés du quadrilatère $M_1 M_2 M_3 M_4$; il existe un cercle de centre O tangent aux côtés du quadrilatère.

La relation (b) $M_1 M_2 - M_1 M_4 = M_3 M_2 - M_3 M_4$ exprime que M_1, M_3 sont sur une même branche d'hyperbole de foyers M_2, M_4 ; le quadrilatère $M_1 M_2 M_3 M_4$ ne peut cette fois être un parallélogramme et le même raisonnement prouve qu'il existe encore un cercle de centre O tangent aux côtés du quadrilatère.

Nous orientons le cercle trouvé dans le sens que lui imprime la flèche \vec{f}_1 support du segment $M_1 M_2$: ou bien le cycle obtenu est tangent aux flèches $\vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ et notre proposition est vérifiée ou bien le cycle de centre O donne des flèches $\vec{f}'_2, \vec{f}'_3, \vec{f}'_4$ dont un certain nombre sont opposées à la flèche $\vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ de même indice; la relation

$$(2) \quad M_1 M_2 + \varepsilon_1 M_2 M_3 + \varepsilon_2 M_3 M_4 + \varepsilon_3 M_4 M_1 = 0 \quad (\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \varepsilon_3 = \pm 1)$$

qui nous a servi est accompagnée, en étudiant O et le cycle obtenu, par

$$(3) \quad M_1 M_2 + \varepsilon'_1 M_2 M_3 + \varepsilon'_2 M_3 M_4 + \varepsilon'_3 M_4 M_1 = 0,$$

où les ε'_i peuvent être égaux à l' ε_i de même indice ou opposés, car la valeur d'un segment $\overline{M_2M_3}$ change de signe si la flèche support change de sens. On ne peut avoir $\varepsilon'_1 = -\varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = -\varepsilon_2$, $\varepsilon'_3 = -\varepsilon_3$, car on aurait par addition $M_1M_2 = 0$, et nous avons supposé M_1, M_2 non confondus; le cas où un seul ε_i a changé de signe donne la conclusion analogue; si deux ε'_i sont opposés à l' ε_i correspondant, nous ajouterons et retrancherons les égalités (2) et (3), et cela nous conduit à 2 égalités exprimant chacune l'égalité de deux longueurs: si donc ce sont 2 couples de côtés contigus qui donnent chacun des côtés égaux, le quadrilatère a un axe de symétrie, et il y a 2 cercles tangents aux 4 côtés: l'un deux, orienté comme il a été dit, donne la relation segmentaire primitive et l'autre fournit la nouvelle relation, de sorte que notre réciproque est vérifiée; si ce sont 2 couples de côtés opposés qui donnent chacun des côtés égaux, il y a 2 cas possibles: dans le premier, le quadrilatère est biconcave, avec un axe de symétrie et notre réciproque est encore vérifiée, comme à l'instant, pour la même raison; le second cas donne un parallélogramme: les flèches supports de M_1M_2, M_3M_4 sont parallèles et de même sens, de façon que $\overline{M_1M_2} + \overline{M_3M_4}$ soit nul; de même les flèches \vec{f}_2, \vec{f}_4 sont parallèles et de même sens: ce cas doit être regardé comme cas limite de la figure 3, quand, sur l'ellipse de foyers M_2, M_4 , le point M_3 varie et tend vers le point diamétralement opposé à M_1 ; le cercle, exinscrit au quadrilatère convexe $M_1M_2M_3M_4$ s'éloigne tout entier à l'infini: analytiquement parlant, il tend vers la droite de l'infini, comptée 2 fois: nous considérons donc la réciproque comme vérifiée encore dans ce cas.

Cela posé, démontrons un lemme de E. Müller (1): Soient 4 flèches $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ tangentes à un même cycle \vec{C} ; on construit quatre cycles $c_{12}, c_{23}, c_{34}, c_{41}$, touchant respectivement $(\vec{f}_1, \vec{f}_2), (\vec{f}_2, \vec{f}_3), (\vec{f}_3, \vec{f}_4), (\vec{f}_4, \vec{f}_1)$; on mène ensuite les flèches \vec{f}'_1 touchant $(c_{41}, c_{12}), \vec{f}'_2$ touchant $(c_{12}, c_{23}), \vec{f}'_3$ touchant $(c_{23}, c_{34}), \vec{f}'_4$ touchant (c_{34}, c_{41}) , (et distinctes des flèches déjà connues telles que \vec{f}_1 qui touche c_{41}, c_{12}). Ces quatre nouvelles flèches sont tangentes à un même cycle.

La figure 4 correspond au cas particulier très simple où le cycle initial \vec{C} est tangent intérieurement aux côtés du quadrilatère convexe formé par $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4$ et nous avons supposé les cycles $c_{12}, c_{23}, c_{34}, c_{41}$ inscrits dans les angles opposés aux angles M_2, M_3, M_4, M_1 du quadrilatère initial. Nous avons marqué les points de contact B_{12}, A_{12} sur \vec{f}_1 et de même sur les autres flèches; on a, en valeur absolue,

$$A_{12}B_{12} = A'_{12}B'_{12},$$

(1) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, t. 14, 1905, p. 574-578.

d'autre part nous voulons démontrer l'égalité

$$(E') \quad M'_1 M'_2 + M'_3 M'_4 = M'_2 M'_3 + M'_4 M'_1.$$

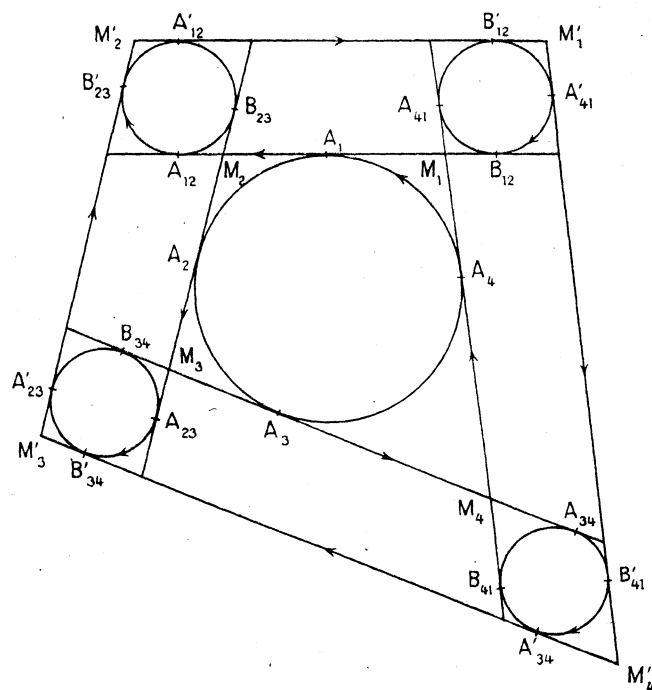
On peut supprimer au premier membre les segments

$$M'_1 B'_{12}, A'_{12} M'_2, M'_3 B'_{34}, A'_{34} M'_4$$

à condition d'enlever au second membre les segments respectivement égaux

$$M'_1 A'_{41}, M'_2 B'_{23}, M'_3 A'_{23}, M'_4 B'_{41}.$$

Fig. 4.



L'égalité présumée se réduit à

$$A'_{12} B'_{12} + A'_{34} B'_{34} = B'_{23} A'_{23} + B'_{41} A'_{41}$$

ou

$$A_{12} B_{12} + B_{34} A_{34} = B_{23} A_{23} + B_{41} A_{41}.$$

Si j'enlève au premier membre les segments

$$B_{12} M_1, M_2 A_{12}, M_3 B_{34}, M_4 A_{34}$$

et au second membre les segments respectivement égaux

$$M_1 A_{41}, M_2 B_{23}, M_3 A_{23}, M_4 B_{41},$$

il reste l'égalité exacte

$$(E) \quad M_1 M_2 + M_3 M_4 = M_2 M_3 + M_4 M_1,$$

de sorte que (E'), elle aussi, est exacte et que les flèches $\vec{f}'_1, \vec{f}'_2, \vec{f}'_3, \vec{f}'_4$ sont tangentes à un même cycle.

La proposition est donc vraie, *quelle que soit la figure*, car nous aurions pu traiter la question par le calcul en n'introduisant que des calculs *algébriques et rationnels* : les variables seraient les rayons, positifs ou négatifs, de \vec{C} , c_{12} , c_{23} , c_{34} , c_{41} et les quantités $\text{tang } \frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2}, \frac{\alpha_3}{2}, \frac{\alpha_4}{2}$ qui déterminent les points de contact A_1, A_2, A_3, A_4 des flèches \vec{f}_i , avec \vec{C} [O étant centre de \vec{C} , ($\widehat{Ox, OA_1}$) est l'angle orienté α_1 , déterminé à 2π près]; donc le théorème, vérifié géométriquement, dans un cas de figure particulier, est vrai d'une façon générale. Le raisonnement, fait plus haut par limite, prouve que la proposition serait encore vraie si $M_1M_2M_3M_4$ est un parallélogramme.

Démontrons maintenant le théorème de Kubota : les flèches $\vec{O}, a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4$ touchent un même cycle, a_1 ; or a_1a_2, a_1a_3 touchent $a_1a_2a_3$; a_1a_3, a_1a_4 touchent $a_1a_3a_4$; a_1a_4, \vec{O} touchent a_4 ; \vec{O}, a_1a_2 touchent a_2 ; nous appliquons le lemme; soit $\vec{\varphi}$ la flèche, autre que a_1a_3 tangente à $a_1a_2a_3, a_1a_3a_4$; les cycles $a_1a_3a_4, a_4$ ont une flèche commune autre que a_1a_3 , qui est a_3a_4 ; a_4, a_2 ont une flèche commune autre que \vec{O} , qui est a_2a_4 ; $a_2, a_1a_2a_3$ ont une flèche commune autre que a_1a_2 , qui est a_2a_3 ; donc $\vec{\varphi}, a_3a_4, a_2a_4, a_2a_3$ sont tangentes à un même cycle que nous avons appelé $a_2a_3a_4$; donc $\vec{\varphi}$ est tangente à $a_1a_2a_3, a_1a_3a_4, a_2a_3a_4$; pour la même raison, elle est tangente à $a_1a_2a_4$ et notre proposition est démontrée; les 4 cycles $\frac{P_i}{a_i}$ ont une flèche tangente commune, que nous appellerons $a_1a_2a_3a_4$ et le raisonnement récurrent peut s'appliquer.

11. *Énoncés récurrents alternés divers.* — Nous empruntons ces énoncés à M. Labrousse (*loc. cit.*)

1° A 3 points donnés A_1, A_2, A_3 on fait correspondre la conique S_3 de foyer O inscrite dans le triangle $A_1A_2A_3$; étant donnés 4 points, les 4 coniques S_3 correspondant à leurs combinaisons 3 à 3 ont une tangente commune T_4 , que l'on fait correspondre aux 4 points. Étant donnés 5 points, les 5 droites T_4 correspondant à leurs combinaisons 4 à 4 sont tangentes à une conique S_5 de foyer O, que l'on fait correspondre aux 5 points. Étant donnés 6 points, les 6 coniques S_5 correspondant à leurs combinaisons 5 à 5 ont une tangente commune T_6 et ainsi de suite.

Ici encore, comme pour le théorème de Tzitzeica-Oùe, nous allons essayer d'introduire la symétrie dès le début; les éléments pairs sont des droites T_{2i} ,

les éléments impairs des coniques S_{2i-1} ; si donc il existe un théorème récurrent du type étudié dans ce travail, nous devons essayer de vérifier le théorème suivant :

On considère une droite fixe O et des coniques de foyer commun F, tangentes à O, à savoir a_1, a_2, \dots, a_n . Les deux coniques a_i, a_j ont, en dehors de O et des droites isotropes issues de F, une seule tangente commune nouvelle $a_i a_j$; les 3 droites $a_i a_j, a_i a_k, a_j a_k$ déterminent une seule conique $a_i a_j a_k$, de foyer F, qui leur est tangente; 4 coniques a_1, a_2, a_3, a_4 définissent 4 coniques nouvelles de symbole $\frac{P_4}{a_i}$ ou $P_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$ et ces 4 coniques ont une tangente commune $a_1 a_2 a_3 a_4$ et ainsi de suite.

Pour démontrer la proposition, il suffit de songer au théorème de Miquel et Clifford : soient un point fixe ω et des cercles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ issus de ω ; on choisit un point F et l'on construit les courbes antipodaires par rapport au point F des points ou des cercles que le théorème de Miquel et Clifford fait intervenir successivement: à un cercle correspond la conique, de foyer F, admettant le cercle comme cercle principal; à un point μ correspond la perpendiculaire à $F\mu$ issue de μ . Si le point F est distinct de ω nous déduisons du théorème de Miquel et Clifford le théorème que nous venons d'énoncer; mais si F est pris en ω , chaque cercle issu de ω est remplacé par un point, diamétralement opposé à ω sur ce cercle et nous avons l'énoncé de M. Labrousse. La méthode suivie ici a donc permis de démontrer le théorème proposé et, en même temps, un autre plus général.

2° Voici un énoncé dû à M. Pacquement, cité par M. Labrousse :

A 4 droites du plan, on fait correspondre le centre de l'hypocycloïde à 3 rebroussements qui leur est tangente; étant données 5 droites, à leurs combinaisons 4 à 4 correspondent 5 points; aux cinq droites, correspond, par un procédé expliqué plus loin, un limaçon de Pascal qui passe en ces 5 points. Étant données 6 droites, à leurs combinaisons 5 à 5 correspondent 6 limaçons de Pascal passant par un même point, que l'on fait correspondre aux 6 droites et ainsi de suite.

Cet énoncé comporte deux espèces d'éléments : des points et des limaçons de Pascal. En appliquant au théorème de Kubota la transformation par podaires relativement au point F, pris arbitrairement dans le plan, la flèche \vec{O} est remplacée par la projection ω de F sur \vec{O} ; chaque cycle a_i est remplacé par un limaçon α_i de Pascal, de point double F, passant en ω ; deux cycles a_1, a_2 fournissent ainsi deux limaçons α_1, α_2 dont les points communs, autres que F et les points cycliques, sont au nombre de 4 : mais deux de ces points correspondent aux cycles a_1, a_2 et deux aux cycles a_1 et $(-a_2)$; nous écartons ces

deux points et il reste, en dehors de ω , un unique point $\alpha_1\alpha_2$, qui correspond à la flèche a_1a_2 : $\alpha_1\alpha_2$ est la projection de F sur a_1a_2 ; nous définissons ainsi, à partir de ω élément pair initial et de limaçons $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ issus de ω , dont les rayons vecteurs issus de F sont orientés, une configuration récurrente du type étudié dans ce Mémoire (l'orientation des rayons vecteurs, quand F est pris pour origine revient à distinguer deux limaçons $\varphi = a \cos \omega + b$, $\varphi = -a \cos \omega - b$ qui sont portés par la même courbe).

Quant au théorème de M. Pacquement, nous voyons aisément qu'il ne peut coïncider avec celui qui se déduit du théorème de Kubota; comptons le nombre de paramètres quand nous prenons 6 limaçons de Pascal initiaux : le théorème de Kubota fait choisir la flèche \vec{O} et 6 cycles; nous prenons ensuite F arbitrairement, nous avons 16 paramètres. Pour le théorème de M. Pacquement nous avons 6 limaçons déterminés par la connaissance de 6 droites, soit 12 paramètres seulement au lieu de 16; d'autre part le point double des limaçons introduits dans ce dernier théorème est variable (si l'on passe de 5 droites et du limaçon correspondant à la figure déduite par simple déplacement, le point double subit ce même déplacement) : donc, bien que récurrent alterné, le théorème de M. Pacquement ne peut être étudié par notre méthode, en raison de l'impossibilité de rétablir la symétrie dès le début.

12. Théorèmes récurrents non alternés (cités d'après M. Labrousse)

1° *Théorème donné par Clifford* : à trois droites du plan on fait correspondre le cercle C_3 circonscrit au triangle qu'elles déterminent; pour 4 droites, les 4 cercles C_3 correspondant à leurs combinaisons 3 à 3 ont leurs centres situés sur un même cercle C_4 ; 5 droites, prises 4 à 4, donnent 5 cercles C_4 dont les centres sont sur un même cercle C_5 et ainsi de suite.

2° Soit un cercle Γ , O un point fixe de Γ ; à 2 points A_1, A_2 de Γ on fait correspondre la droite A_1A_2 ; à trois points A_1, A_2, A_3 de Γ on fait correspondre la droite de Simson Δ_3 relative à O et au triangle $A_1A_2A_3$; 4 points de Γ donnent, pris 3 à 3, 4 droites Δ_3 et les projections de O sur ces 4 droites sont sur une même droite Δ_4 et ainsi de suite.

3° Considérons 6 droites tangentes à une hypocycloïde à 3 rebroussements H_3 ; les 6 coniques tangentes aux combinaisons de ces 6 droites 5 à 5 ont leurs centres situés sur un même cercle C_6 ; étant données 7 droites tangentes à H_3 , les centres des 7 cercles C_6 correspondant à leurs combinaisons 6 à 6 sont sur un même cercle C_7 et ainsi de suite indéfiniment : ce théorème est dû à M. Labrousse.

4° On donne dans le plan un point fixe O; à 3 points A_1, A_2, A_3 on fait correspondre la conique Σ_3 , de foyer O, tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$; aux combinaisons 3 à 3 de 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 correspondent 4 coniques Σ_3 ,

dont les directrices, relatives à O, sont tangentes à une même conique Σ_4 de foyer O. Aux combinaisons 4 à 4 de 5 points correspondent 5 coniques Σ_4 , dont les directrices, relatives à O, sont tangentes à une même conique Σ_5 de foyer O et ainsi de suite.

5° On considère des points d'un cercle Γ donné; à trois points A_1, A_2, A_3 , on fait correspondre l'orthocentre du triangle $A_1A_2A_3$; étant donnés 4 points de Γ , les 4 droites joignant chacun d'eux au point associé aux 3 autres sont concourantes en un point ω_4 que l'on fait correspondre aux 4 points. Soit, en général, ω_n le point correspondant ainsi à n points; étant donnés $n + 1$ points, les $(n + 1)$ droites joignant chacun d'eux au point ω_n associé aux n autres concourent en un même point ω_{n+1} .

En outre les $(n + 1)$ points ω_n sont sur un même cercle Γ_{n+1} que l'on peut associer aux $(n + 1)$ points et les centres des $(n + 1)$ cercles Γ_n associés à toutes les combinaisons n à n sont sur un même cercle.

13. *Théorème de M. Pacquement; théorèmes réguliers ou irréguliers.* — Notre étude a mis en évidence des théorèmes récurrents alternés, *réguliers* ou *irréguliers*. Pour ces derniers, à partir de certains êtres géométriques $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, nous avons défini des éléments de parités opposées, représentés par des symboles à $p, p + 1, \dots, p + q, \dots$ lettres, sans pouvoir définir les éléments à $0, 1, 2, \dots, p - 1$ lettres; le raisonnement récurrent ne s'applique plus à ces théorèmes irréguliers, de sorte que la diversité des démonstrations rend leur étude plus laborieuse. Mais, comme la classe des théorèmes réguliers est comprise dans celle des théorèmes irréguliers, il peut arriver que deux théorèmes, l'un régulier, l'autre irrégulier puissent se démontrer de façons presque identiques. Nous allons le prouver en donnant une démonstration analytique du théorème de Miquel et Clifford, reproduite par Lebesgue (*loc. cit.*), qui peut s'appliquer presque textuellement au théorème de M. Pacquement; elle s'applique encore à de nombreux théorèmes que nous apprendrons à former.

Soit, dans le plan, une courbe algébrique C_c , de classe c , pour laquelle la droite de l'infini est une tangente multiple d'ordre $(c - 1)$, sans que les points cycliques I, J soient points de contact; de I et J on peut mener à C_c une seule tangente autre que la droite de l'infini et les deux tangentes ainsi obtenues se coupent en un point F, unique foyer de C_c . L'équation tangentielle de C_c est

$$\omega f_{c-1}(u, v) + f_c(u, v) = 0,$$

f_{c-1}, f_c étant des polynômes homogènes en u, v de degré $c - 1$ ou c ; $2c$ droites a_1, a_2, \dots, a_{2c} données *a priori* déterminent une seule courbe C_c qui leur est tangente, un seul foyer que nous appelons $a_1 a_2 \dots a_{2c}$; $(2c - 1)$ droites $a_1, a_2, \dots, a_{2c-1}$ déterminent un faisceau linéaire tangentiel de

courbes C_c , dont le lieu des foyers est un cercle $a_1 a_2 \dots a_{2c-1}$, car les tangentes issues de I ou J à l'une de ces courbes se correspondent homographiquement; le point $a_1 a_2 \dots a_{2c-1} a_{2c}$ est sur le cercle $a_1 a_2 \dots a_{2c-1}$. D'autre part, soient C_{c-1} la courbe analogue, de classe $c-1$, définie par les tangentes $a_1, a_2, \dots, a_{2c-2}$, et F son foyer; en adjoignant à C_{c-1} le point à l'infini de a_{2c-1} , on obtient une C_c décomposée, de même foyer que C_{c-1} , incluse dans le faisceau tangentiel défini par $a_1, a_2, \dots, a_{2c-1}$, de sorte que $a_1 a_2 \dots a_{2c-2}$ est aussi un point du cercle $a_1 a_2 \dots a_{2c-1}$. Nous avons alors le théorème de Miquel et Clifford, car $a_1 a_2$ est le point de rencontre de a_1, a_2 ; $a_1 a_2 a_3$ est le cercle contenant $a_1, a_2, a_1 a_3, a_2 a_3$; $a_1 a_2 a_3 a_4$ le foyer de la parabole tangente à a_1, a_2, a_3, a_4 , et ainsi de suite. Du point de vue *métrique ou projectif*, le théorème est irrégulier, car l'élément 1 n'est pas défini; mais, du point de vue *anallagmatique*, les droites a_1, a_2, \dots sont des cercles ayant en commun un point fixe (à distance finie ou infinie). C'est cette circonstance heureuse qui explique que le théorème de Miquel et Clifford peut servir de théorème type aussi bien pour la classe des théorèmes réguliers que pour celle des théorèmes irréguliers.

Passons au théorème de M. Pacquement : *soit une courbe C_c de classe c , tangente $(c-1)$ fois à la droite de l'infini, les points cycliques I, J étant des points simples de contact. Cette définition suppose $c-1 \geq 2$ ou $c \geq 3$: c'est l'une des causes de l'irrégularité. Il existe ∞^1 coniques ayant avec C_c quatre points communs réunis en I, ou, ce qui est équivalent, quatre tangentes communes confondues avec la tangente en I à C_c ; J a même polaire (j) par rapport à ces coniques; I donne la droite (i) analogue; le point commun à (i), (j) sera dit *paracentre* de C_c et la courbe C_c étudiée, *parabole circulaire de Darboux* (en abrégé, PCD). L'équation tangentielle d'une PCD est*

$$w(u^2 + v^2)f_{c-3}(u, v) + f_c(u, v) = 0,$$

où f_{c-3}, f_c sont des polynômes homogènes en u, v de degré $c-3$ et c ; pour $c=3$, on obtient une *hypocycloïde à trois rebroussements*, H_3 ; $2(c-1)$ tangentes $A_1, \dots, A_{2(c-1)}$ données *a priori* déterminent une seule C_c , de paracentre $a_1 a_2 \dots a_{2(c-1)}$; $2c-3$ tangentes A_1, \dots, A_{2c-3} déterminent un faisceau linéaire tangentiel de PCD de classe c , donc un lieu unicursal $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$ pour le paracentre, lieu contenant $a_1 a_2 \dots a_{2c-3} a_{2c-2}$; la courbe C_{c-1} , de classe $c-1$, définie par $A_1, A_2, \dots, A_{2c-4}$, jointe au point à l'infini de A_{2c-3} donne une C_c décomposée, incluse dans le faisceau tangentiel qui précède, le paracentre étant le même pour C_{c-1} et la courbe décomposée C_c ; donc le point $a_1 a_2 \dots a_{2c-4}$ est sur le lieu $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$. Nous avons ainsi, en rééditant les termes de la démonstration du théorème de Miquel et Clifford, établi le théorème de M. Pacquement, sans avoir eu besoin de préciser la nature du lieu unicursal $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$: nous allons montrer maintenant que le lieu $a_1 a_2 a_3$ des paracentres des H_3 tangentes à trois droites A_1, A_2, A_3 est une droite, et que

le lieu $a_1 a_2 \dots a_{2c-3}$, pour un nombre de droites impair, supérieur ou égal à 5, est un *limaçon de Pascal*.

Pour trouver le paracentre d'une PCD, opérons en coordonnées isotropes, ou, ce qui est équivalent, effectuons une transformation homographique changeant I, J en les points à l'infini ξ, η des axes de coordonnées; l'équation tangentielle d'une PCD est alors $uvw f_{c-3}(u, v) + f_c(u, v) = 0$ avec

$$\begin{aligned} f_c(u, v) &\equiv Au^c + Bu^{c-1}v + \dots + Huv^{c-1} + Lv^c, \\ f_{c-3}(u, v) &\equiv au^{c-3} + bu^{c-4}v + \dots + huv^{c-4} + lv^{c-3}. \end{aligned}$$

Soit S une conique coupant la PCD en quatre points confondus avec ξ , ou encore ayant avec cette PCD quatre tangentes communes confondues avec la droite de l'infini, le point de contact étant ξ ; pour cela, passons aux courbes réciproques, obtenues en remplaçant u, v, w par $x, y, 1$; la réciproque de notre PCD est $xyf_{c-3}(x, y) + f_c(x, y) = 0$; la réciproque S' de S touche Oy en O et a une équation $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 - x = 0$; le faisceau de droites, de sommet O, passant aux points communs à ces deux transformées, a pour équation $y(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2)f_{c-3}(x, y) + f_c(x, y) = 0$ et contient x^2 en facteur, d'où $\gamma = -\frac{L}{I}$, $2\beta = \frac{hL - Hl}{I^2}$; la conique S a pour équation tangentielle $\alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2 - uv = 0$, où β, γ ont des valeurs indiquées, α restant arbitraire. La droite $y + m = 0$, qui joint le paracentre à ξ , est la polaire de η par rapport à S; le pôle de $y + m = 0$ a pour coordonnées homogènes $(2\beta - m, 2\gamma, 0)$ et doit être $\eta(0, 1, 0)$, donc $m = 2\beta$. Le paracentre est donc sur la droite $y = \frac{Hl - hL}{I^2}$ et, par symétrie, sur la droite $x = \frac{Ba - bA}{a^2}$; *c'est parce que le résultat de ce calcul est, au fond, indépendant de la valeur précise de c que le théorème récurrent peut être énoncé.*

Supposons que nous ayons un faisceau tangentiel de PCD tel que les points de contact, autres que I, J, avec la droite de l'infini restent fixes: les coefficients de f_{c-3} sont fixes, et A, B, ... sont des polynômes entiers du premier degré par rapport à un paramètre variable λ : le paracentre décrit une droite; c'est ce qui arrive pour les H_3 tangentes aux côtés d'un triangle fixe. L'équation tangentielle d'une H_3 , en coordonnées isotropes, est

$$uvw + Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3 = 0$$

et les coordonnées du paracentre sont (B, C); on voit, et cette remarque nous servira plus loin, que l'on peut définir un faisceau tangentiel de courbes H_3 soit en donnant trois tangentes fixes A_1, A_2, A_3 quelconques, soit deux tangentes fixes A_1, A_2 et une droite Δ quelconque, lieu du paracentre. Le paracentre d'une H_3 est évidemment son centre ternaire de rotation, point commun aux trois tangentes de rebroussement, car, par rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de ce centre ternaire, la courbe, I, J, donc aussi le paracentre restent invariants.

Supposons maintenant que, pour $c \geq 4$, nous ayons un faisceau tangentiel de PCD, dont les points de contact avec la droite de l'infini, autres que I, J, soient variables: A, B, L, H, a, b, l, h sont polynomes entiers du premier degré par rapport au paramètre λ ; le lieu du paracentre a pour équations paramétriques, en coordonnées isotropes (avec un léger changement de notations),

$$x = \frac{(a + \lambda a')(B + \lambda B') - (b + \lambda b')(A + \lambda A')}{(a + \lambda a')^2} \quad y = \frac{(l + \lambda l')(H + \lambda H') - (h + \lambda h')(L + \lambda L')}{(l + \lambda l')^2}.$$

Ce lieu est unicursal, de degré 4, admet ξ, η pour points de rebroussement. Autrement dit, revenant aux coordonnées cartésiennes, le lieu des paracentres des PCD tangentes à $2c - 3$ droites fixes, pour $c \geq 4$, est un limaçon de Pascal. On peut, en changeant les courbes bases du faisceau, supposer $a = 1, a' = 0, l = 0, l' = 1$; les coordonnées isotropes paramétriques sont alors

$$x = \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 \quad y = \frac{\alpha' + \beta'\lambda + \gamma'\lambda^2}{\lambda^2}.$$

Dans ces formules $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ peuvent prendre des valeurs arbitraires; en changeant λ en $m\lambda$, où m est arbitraire, on peut élever à 1 l'un des coefficients, de sorte que la courbe dépend de cinq paramètres effectifs et c'est le limaçon général: un limaçon peut en effet se définir par un cercle arbitraire (trois paramètres) et un point F quelconque (deux paramètres) que l'on projette sur les tangentes du cercle; si accidentellement le cercle est de rayon nul, le limaçon dégénère en un cercle compté deux fois: c'est ce qui arriverait, si β et β' étaient nuls (ce cas exceptionnel peut se présenter pour certaines dispositions de $2c - 3$ droites); si β et β' ne sont pas nuls tous deux, on peut réduire l'un à l'unité. Si F est au centre du cercle, le limaçon se réduit à ce cercle; on a alors $\gamma = \alpha' = 0$.

Il est bon de signaler une autre propriété: à cinq droites A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 , nous avons attaché le limaçon, unique, lieu des paracentres des PCD de classe 4 tangentes à ces droites; nous devons nous garder de dire: aux combinaisons 4 à 4 de cinq droites correspondent $5H_3$, donc 5 centres ternaires déterminant le limaçon attaché aux 5 droites, car 5 points déterminent, non pas un seul limaçon, mais des limaçons en nombre fini, au moins égal à 2, (deux limaçons arbitraires ont huit points communs à distance finie); nous devons commencer par construire le limaçon, puis constater que les 5 points sont sur le limaçon, sinon il y aurait ambiguïté et nous ne saurions plus continuer la chaîne; même avec sept droites, nous ne pouvons affirmer sans preuve que les sept points obtenus déterminent (surabondamment) un seul limaçon;

(1) Pour déterminer les limaçons passant par cinq points M_i donnés, on peut prendre pour élément inconnu le point double F à distance finie, élever en chaque point M_i la perpendiculaire Δ_i à M_iF ; exprimant que la conique tangente aux Δ_i est un cercle C, on a deux équations algébriques donnant un nombre fini de points F; le limaçon obtenu pour l'un de ces points F est la podaire de

à partir de neuf droites, la difficulté n'existe plus (¹). Dans le théorème de Miquel et Clifford, cette difficulté, ne se présente pas, puisque trois points déterminent un seul cercle, mais elle peut intervenir pour d'autres théorèmes réguliers ou irréguliers.

14. *Quelques théorèmes alternés irréguliers.* — Pour abrégé l'écriture, j'écrirai théorème M. C. ou théorème P. pour théorème de Miquel et Clifford ou théorème de M. Pacquement. Ces deux théorèmes relèvent d'un même mode de démonstration analytique qui réussit chaque fois que nous pouvons définir des courbes C_m algébriques, de degré (ou classe) m arbitraire, possédant les propriétés suivantes :

1° L'équation ponctuelle (ou tangentielle) rationnelle entière de C_m dépend linéairement de deux polynômes homogènes en x, y , (ou en u, v), de degré respectif $m - h, m - k$, où h, k sont fixes : soient P, Q ces polynômes.

2° On peut attacher à C_m un point F (ou un groupe de q points, q étant un entier fixe) bien déterminé, dont le lieu, si C_m engendre un faisceau linéaire ponctuel (ou tangentiel) a des équations paramétriques de forme indépendante de la valeur m .

3° Si P, Q viennent à contenir un même facteur linéaire en x, y ou u, v , C_m se décompose en une droite (ou un point) et une courbe C_{m-1} , de même définition, pour l'entier $m - 1$ au lieu de m ; on suppose que le point F relatif à cette courbe C_m décomposée est aussi le point F de la courbe C_{m-1} .

Dans ces conditions, le théorème récurrent alterné peut être énoncé et nous ne rééditons plus le raisonnement employé pour le théorème M. C., puis pour le théorème P.

Donnons un exemple précis : considérons la courbe C_c de classe c , d'équation tangentielle

$$f_c(u, v) + w^p f_{c-p}(u, v) = 0,$$

où f_c, f_{c-p} sont homogènes, de degré c et $c - p$ respectivement (M. Labrousse m'a suggéré cet exemple pour $p = 2$); c est un entier quelconque, au moins

ce cercle relativement à F. Dans cette question s'introduisent dix paramètres (deux pour chaque droite A_i); on peut les engager successivement de bien des façons : par exemple, si l'on donne le limaçon (cinq paramètres), puis cinq points M_i sur cette courbe, on ne peut affirmer *a priori* que ces cinq points puissent être choisis arbitrairement; s'ils peuvent être choisis sans restriction, les cinq paramètres nouveaux, ajoutés aux précédents, donnent un nombre fini de systèmes correspondants de cinq droites; sinon, il y aura h conditions de compatibilité, $5 - h$ points seront pris arbitrairement sur le limaçon, les h autres en résulteront et on aura, pour un tel système, ∞^h systèmes de cinq droites, de façon que le total $5 + (5 - h) + h$ reproduise dix. Si l'on veut commencer par cinq points, il faudra peut-être h conditions de compatibilité, où h est le même que précédemment; ensuite, on a un nombre fini de limaçons et, pour chacun d'eux, la détermination des cinq droites s'achève comme précédemment (h est probablement nul).

égal à p ; de chaque point cyclique I, J on peut mener p tangentes à C_c et nous définissons ainsi un groupe F de p^2 foyers; $2c - p + 1$ tangentes $A_1, A_2, \dots, A_{2c-p+1}$ déterminent une seule C_c , et un seul groupe F (qu'il sera commode d'appeler *multipoint focal d'ordre p*) désigné par $a_1 a_2 \dots a_{2c-p+1}$; $A_1, A_2, \dots, A_{2c-p}$ déterminent un faisceau linéaire tangentiel de C_c , donc un lieu $a_1 a_2 \dots a_{2c-p}$ de multipoints focaux, lieu contenant $a_1 a_2 \dots a_{2c-p} a_{2c-p+1}$; le multipoint focal de la courbe C_{c-1} définie par $A_1, A_2, \dots, A_{2c-p-1}$ est aussi focal pour la courbe C_c décomposée en cette C_{c-1} et le point à l'infini de A_{2c-p} , de sorte que le lieu $a_1 a_2 \dots a_{2c-p}$ contient les multipoints dont les symboles contiennent une lettre nouvelle ou une lettre de moins. Restent à trouver les équations paramétriques du lieu $a_1 a_2 \dots a_{2c-p}$. Nous écrivons

$$f_c(u, v) \equiv Au^c + A_1 u^{c-1} v + \dots + A_c v^c, \quad f_{c-p} \equiv au^{c-p} + a_1 u^{c-p-1} v + \dots + a_{c-p} v^{c-p}.$$

La droite $x + iy + h = 0$ est tangente si l'on a

$$A + A_1 i - A_2 - A_3 i + A_4 + \dots + h^p (a + a_1 i - a_2 - a_3 i + a_4 + \dots) = 0.$$

Les foyers sont donc définis par deux équations de la forme

$$x + iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}}, \quad x - iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i}}.$$

Les déterminations des deux radicaux peuvent être choisies indépendamment l'une de l'autre, mais on a les p foyers réels associant les déterminations conjuguées : *ils sont disposés aux sommets d'un polygone régulier de p côtés dont l'origine est le centre.* Si l'on suppose que la courbe C_c décrit un faisceau tangentiel, nous avons une représentation paramétrique, où λ est le paramètre variable et $\alpha, \beta, \dots, \delta'$, des constantes,

$$(1) \quad x + iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha + \beta i + \lambda(\alpha' + \beta' i)}{\gamma + \delta i + \lambda(\gamma' + \delta' i)}}, \quad x - iy = \sqrt[p]{\frac{\alpha - \beta i + \lambda(\alpha' - \beta' i)}{\gamma - \delta i + \lambda(\gamma' - \delta' i)}}.$$

La forme de ce résultat est indépendante du degré c , de sorte que, dans notre énoncé récurrent, tous les lieux $a_1 a_2 \dots a_{2c-p}$ sont de même nature, sauf quand c atteint sa valeur minimum p , le polynôme f_{c-p} se réduisant à l'unité : dans ce cas, on a

$$(2) \quad x + iy = \sqrt[p]{\alpha + \beta i + \lambda(\alpha' + \beta' i)}, \quad x - iy = \sqrt[p]{\alpha - \beta i + \lambda(\alpha' - \beta' i)}.$$

Notre théorème récurrent est établi :

p tangentes A_1, A_2, \dots, A_p déterminent un lieu $a_1 a_2 \dots a_p$; ensuite $(p + 1)$ tangentes A_1, A_2, \dots, A_{p+1} un multipoint $a_1 a_2 \dots a_p a_{p+1}$ situé sur le lieu qui précède et sur tous les lieux analogues obtenus en supprimant une tangente :

$(p+2)$ tangentes déterminent un nouveau lieu contenant les multipoints obtenus en supprimant une tangente, et ainsi de suite.

Si l'on pose

$$(3) \quad X + iY = (x + iy)^p, \quad X - iY = (x - iy)^p$$

le point (X, Y) décrit un cercle dans le cas des formules (1) ou une droite dans le cas des formules (2); si nous posons

$$(4) \quad X = r \cos \theta, \quad Y = r \sin \theta, \quad x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega,$$

les formules

$$r = \rho^p, \quad \theta = p\omega$$

sont plus strictes que les relations (1), car à un point (X, Y) réel, elles ne font correspondre que les valeurs de $x + iy$ et $x - iy$ qui sont *conjuguées*. Si x, y sont une solution des équations (1), la solution générale s'obtient en calculant une racine $p^{\text{ième}}$ de 1, que nous représenterons par ε et déterminant x_1, y_1 par les formules (1)

$$x_1 + iy_1 = \varepsilon(x + iy), \quad x_1 - iy_1 = x - iy$$

de sorte que le lieu du point (x, y) se décompose algébriquement en p courbes distinctes, dont une seule est réelle et se reproduit par rotation de $\frac{2\pi}{p}$ autour de O (proposition sans intérêt, pour $p = 1$). Dans l'énoncé du théorème nous pouvons nous borner au lieu réel.

Le cercle (ou droite) décrit par le point (X, Y) a une équation de la forme

$$Ar^2 + Br \cos(\theta - \theta_0) + C = 0,$$

où A, B, C sont trois paramètres homogènes et θ_0 une constante réelle; on a donc, pour l'équation polaire du lieu des foyers réels

$$A\rho^{2p} + B\rho^p \cos p(\omega - \omega_0) + C = 0.$$

Le théorème — du moins sous la forme présentée jusqu'ici — est *irrégulier* parce que nous n'avons pu définir, par ce procédé, les éléments à 0, 1, ... $(p-1)$ lettres. Nous ne parlons pas du cas $p = 1$ qui correspond au théorème M. C.

(1) Si p est impair, il est plus simple d'écrire $x_1 + iy_1 = \varepsilon(x + iy)$, $x_1 - iy_1 = \varepsilon(x - iy)$, de sorte que le lieu se compose de la partie réelle et des homothétiques de cette courbe par rapport à O , avec les rapports $\varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{p-1}$ (en supposant ε racine primitive); si p est pair, ce procédé ne donne pas tout le lieu imaginaire; on le voit aisément en supposant $p = 2$. Cela tient à ce que l'équation tangentielle de la courbe ne change pas si l'on remplace ω par $\varepsilon\omega$, ce qui revient à faire l'homothétie indiquée

On voit facilement que la courbe

$$A\rho^4 + B\rho^2 \cos 2\omega + C = 0$$

peut être considérée comme la section d'un tore par un plan issu de son centre.

Mais voici quelques résultats inattendus. Imaginons un théorème régulier alterné où les éléments de parité opposée sont, par exemple, des points et des courbes du plan Oxy ; effectuons une transformation ponctuelle quelconque : nous avons une nouvelle configuration de points (ou de groupes de points) et de courbes offrant encore la disposition étudiée au début de ce travail : cette configuration C_n comporte 2^{n-1} multipoints, 2^{n-1} courbes; chaque multipoint appartient à n courbes, chaque courbe contient n multipoints. La transformation $Z = z^p$ fait ainsi passer, dans le plan de la variable complexe, de la configuration M. C. (où le point initial est à l'infini) à une configuration qui comprend, parmi ses éléments, tous ceux que nous avons obtenus; l'irrégularité de notre figure tient précisément à ce qu'elle n'épuise pas toute la configuration déduite de M. C. En effet si nous nous bornons à $(p+1)$ tangentes, nous avons : 1° un lieu $a_1 a_2 \dots a_p$; 2° p multipoints situés sur ce lieu. Revenant au plan M. C. nous avons une droite α_1 et p points situés sur elle, points qui eussent dû correspondre aux intersections de α_1 et de p nouvelles droites $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{p+1}$; la configuration complète M. C. comprend donc 2^p points, 2^p droites.

On peut, dans le même ordre d'idées, considérer la courbe Γ de degré $c+p$ définie par l'équation $(x^2 + y^2)^p f_{c-p}(x, y) + f_c(x, y) = 0$; elle admet I, J pour points multiples d'ordre p , chacun d'eux donnant p asymptotes à distance finie; elle possède donc p^2 foyers singuliers (intersection de deux asymptotes isotropes); les conditions annoncées sont remplies pour un théorème récurrent, en déterminant soit un faisceau linéaire, soit une courbe, par la donnée de $2c-p$ ou $2c-p+1$ points; or cette courbe n'est autre (sauf symétrie complémentaire par rapport à O, si p est impair) que la podaire par rapport à O de la courbe $f_c(u, v) + \omega^p f_{c-p} = 0$.

Une asymptote isotrope peut être regardée comme une normale particulière; si F est un foyer de la courbe C, $f_c(u, v) + \omega^p f_{c-p} = 0$, la droite FI touche cette courbe en f et le milieu de Of est un point de la normale en I de la podaire Γ , de sorte que chaque foyer singulier de la podaire Γ est le milieu du segment réunissant O au foyer ordinaire de la courbe C. Donc le théorème que l'on obtient coïncide avec le précédent (c'est, pour $p=1$, une nouvelle façon de démontrer le théorème M. C.).

De même, au lieu de la courbe $f_c(u, v) + (u^2 + v^2)\omega f_{c-3} = 0$ employée pour le théorème P., nous pouvons étudier la courbe d'équation

$$f_c(u, v) + (u^2 + v^2)^p \omega^p f_{c-3p}(u, v) = 0,$$

qui admet en I ou J, p branches tangentes à la droite de l'infini; nous traçons en I une conique surosculatrice à l'une des branches, puis la polaire (j) de J relativement à cette conique; nous intervertissons les rôles de I, J et prenons les p^2 points communs à une droite (i) et une droite (j); le multipoint para-

centrique conduit à un théorème récurrent déduit du théorème P. comme le théorème établi à l'instant l'a été du théorème M. C.

15. *Régularité éventuelle d'un théorème alterné récurrent.* — Nous avons pu montrer l'identité des énoncés de Tzitzeica et S. Oïte, puis les ramener à un cas particulier du théorème M. C., en essayant de leur restituer le caractère régulier; de même le théorème donné au début du paragraphe 11 a pu être présenté comme dégénérescence d'un théorème régulier.

Supposons donc que certains êtres géométriques $A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, A_p, \dots, A_n \dots$ nous conduisent à des éléments récurrents alternés à $p, p+1, \dots$ lettres, satisfaisant aux conditions que nous avons énoncées pour les éléments de parité opposée. Cherchons s'il est possible de régulariser le théorème; laissons *fixes* les éléments A_1, A_2, \dots, A_{p-1} et faisons varier A_p : l'élément $a_1 a_2 \dots a_{p-1} a_p$ varie et nous étudions s'il reste *uni* à un certain élément, de même nature que les éléments à $p+1, p+3, \dots$ lettres; si ce n'est pas réalisé, le théorème est irrégulier; si l'élément inconnu cherché existe, nous l'adoptons comme représentation du symbole $a_1 a_2 \dots a_{p-1}$ et nous rendons leur liberté à A_1, A_2, \dots, A_{p-1} ; nous sommes ramenés à un problème de même nature, où p a été remplacé par $p-1$ et ainsi de suite, soit jusqu'à l'échec, soit jusqu'à la réussite, qui se traduit par la définition de l'élément *unité*.

Pour le théorème P., trois droites A_1, A_2, A_3 conduisent au lieu rectiligne $a_1 a_2 a_3$; nous avons vu que, A_1, A_2 restant fixes et A_3 variant, la droite $a_1 a_2 a_3$ peut venir coïncider avec une droite quelconque du plan, donc ne reste *unie* à aucun point fixe: le théorème P. est irrégulier.

Prenons le cas des théorèmes irréguliers: *ils semblent se partager en diverses classes, caractérisées chacune par la valeur de l'entier p indiqué à l'instant*; il suffit d'un changement de notations pour montrer que *cette classification ne doit pas être adoptée*. Considérons en effet les êtres A_1, A_2, \dots, A_{p-1} que nous laisserons fixes comme précédemment et adoptons la notation $B_1, B_2 \dots B_n \dots$ pour les êtres que nous appelions $A_p, A_{p+1}, \dots, A_{p+n-1}$, et $b_1, b_1 b_2, \dots$, pour les éléments appelés précédemment $(a_1 a_2 \dots a_{p-1}) a_p, (a_1 a_2 \dots a_{p-1}) a_p a_{p+1}, \dots$: nous avons donc une configuration récurrente alternée, dépendant des êtres initiaux A_1, A_2, \dots, A_{p-1} ; *l'irrégularité est, avec les nouvelles notations, caractérisée par l'impossibilité de définir l'élément 1*. C'est ainsi que la configuration M. C. quand on la détermine dans le plan projectif (et non anallagmatique) avec des droites $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ est irrégulière. La configuration obtenue avec les multipoints focaux des courbes $f_c(u, v) + \omega^p f_{c-p}(u, v) = 0$ donne la configuration M. C. pour $p=1$, et si p est supérieur à 1, se déduit de la configuration M. C. (avec des droites au début) par une transformation représentée en abrégé par $z = Z^p$, où z se rapporte à la configuration M. C. et Z à la nouvelle configuration: à un certain point de vue, on peut donc objecter à la recherche faite à ce propos, qu'il était beaucoup plus simple de définir la

configuration M. C., sans avoir à faire intervenir les courbes

$$f_c(u, v) + \omega f_{c-1}(u, v) = 0,$$

puis d'appliquer à cette configuration la transformation $z = Z^p$, ce qui eût dispensé d'étudier les courbes auxiliaires $f_c(u, v) + \omega^p f_{c-p}(u, v) = 0$, d'autant plus que la transformation $z = Z^p$ ne joue pas pour faire passer des courbes auxiliaires du théorème M. C. aux courbes auxiliaires de la nouvelle proposition; nous n'en avons pas moins obtenu des théorèmes intéressants pour certaines classes de courbes algébriques.

Nous devons remarquer qu'en adoptant ce mode de classification, où A_1, A_2, \dots, A_{p-1} ont été groupés et rendus fixes, la configuration déduite de $(A_1, A_1, \dots, A_{p-1}), A_p, \dots, A_n, \dots$ perd tous les éléments qui, primitivement, s'obtiennent par suppression d'un ou plusieurs êtres choisis parmi A_1, A_2, \dots, A_{p-1} .

Nous espérons que cette étude permettra de faire un tri parmi les nombreux théorèmes récurrents alternés, réguliers et irréguliers, qui ont pris naissance ces derniers temps, ou de préciser leurs énoncés; elle a mis en évidence l'importance du théorème de Miquel et Clifford comme prototype des théorèmes de l'une et de l'autre catégorie.

