Henri Cartan

Idéaux de fonctions analytiques de *n* variables complexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 61 (1944), p. 149-197
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__149_0>

IDÉAUX DE FONCTIONS ANALYTIQUES

DE

n VARIABLES COMPLEXES

PAR M. HENRI CARTAN.

I. — Introduction [1].

1. Rappelons le théorème célèbre de Poincaré : une fonction f de deux variables complexes, partout méromorphe à distance finie, est le quotient de deux fonctions entières, premières entre elles (c'est-à-dire ne s'annulant simultanément qu'en des points isolés). Pour le démontrer, on prouve l'existence d'une fonction entière admettant pour zéros les pôles de la fonction f, avec les mêmes ordres de multiplicité. Ces pôles forment, on le sait, des variétés à deux dimensions réelles.

Cousin [2] a repris la question pour n variables complexes, en étudiant systématiquement le problème : *construire une fonction holomorphe ayant des zéros donnés dans un domaine donné*. Il faut, bien entendu, préciser ce qu'on entend par « zéros donnés ». Nous appellerons *donnée de Cousin* dans un domaine D la donnée, en chaque point [3] x de D, d'une fonction f_x holomorphe au point x, ces fonctions satisfaisant à la condition suivante : tout point a de D possède un voisinage V dans lequel f_a est holomorphe et en tout point x duquel le quotient $\frac{f_x}{f_a}$ est holomorphe et $\neq 0$. Cette dernière condition exprime que, dans l'anneau des fonctions holomorphes au point x, les fonctions f_x et f_a engendrent le même *idéal*. Le problème posé par Cousin est alors le suivant : pour toute *donnée de Cousin* dans le domaine D, existe-t-il une

(1) Pour faciliter la lecture, nous avons dressé, à la fin de ce travail, un index des principaux termes employés, en indiquant, pour chacun d'eux, le numéro du paragraphe au cours duquel il est défini.

(2) *Acta Mathematica*, 19, 1895, pp. 1-62.

(3) Nous désignons par une lettre unique un point de l'espace à n dimensions complexes.

fonction f, *holomorphe dans* D, telle que, pour tout point x de D, le quotient $\frac{f}{f_x}$ soit holomorphe et $\neq 0$ au point x?

Cousin s'est borné à étudier ce problème pour une catégorie particulière de domaines, que nous appelons aujourd'hui *polycylindres*. On appelle polycylindre un ensemble de points du type

$$x_1 \in \delta_1, \quad \ldots, \quad x_n \in \delta_n,$$

où $\delta_1, \ldots, \delta_n$ désignent des ensembles donnés respectivement dans les plans des n variables complexes $x_1, \ldots, x_n$; ces n ensembles s'appellent les *composantes* du polycylindre. Cousin s'est borné à envisager des *polycylindres ouverts*, donc des polycylindres dont les composantes sont des ensembles ouverts dans les plans des n variables complexes; et il a démontré que le problème posé ci-dessus est possible pour tout polycylindre ouvert dont *toutes les composantes, sauf peut-être une, sont simplement connexes*. C'est ce résultat que nous désignerons ici sous le nom de *théorème de Cousin*. [En réalité, Cousin avait cru démontrer son théorème pour tous les polycylindres ouverts; c'est Gronwall qui a signalé la restriction nécessaire relative à la simple connexion des composantes (*Amer. Math. Soc. Trans.*, 18, 1917).]

Depuis Cousin, on a cherché à étendre ce théorème à des domaines plus généraux ([4]); on sait aujourd'hui qu'il n'est pas valable pour n'importe quel domaine, mais la recherche systématique des domaines pour lesquels il est valable est un problème difficile que nous laisserons de côté. D'ailleurs les résultats que nous obtiendrons, dans ce Mémoire, sur les idéaux de fonctions holomorphes, permettront, en modifiant légèrement l'énoncé du problème, de le résoudre pour des domaines très généraux (*voir* § XII).

2. Voici une conséquence bien connue du théorème de Cousin. Appelons, dans un domaine D, *variété analytique complexe à n — 1 dimensions* ([5]) tout ensemble E de points qui peut, au voisinage de chaque point a de D, être défini par une équation $f_a(x_1, \ldots, x_n) = 0$, f_a étant une fonction holomorphe au voisinage de a et non identiquement nulle (le cas où $f_a \neq 0$ au point a n'est pas exclu). On sait que la fonction f_a peut être choisie de manière que toute fonction holomorphe au voisinage de a et qui s'annule identiquement sur E (au voisinage de a) appartienne à l'idéal de base f_a, c'est-à-dire soit de la forme φf_a, φ étant holomorphe au point a; lorsque f_a est ainsi choisie, toute fonction holomorphe

---

([4]) *Voir* par exemple H. Cartan, *Comptes rendus*, 199, 1934, pp. 1284-1287; K. Oka, *Journ. of Sc. of the Hirosima Univ.*, Series A, vol. 6, 1936, pp. 245-255 et vol. 7, 1937, pp. 115-130; H. Behnke, *Jahresbericht der D. Math. Verein.*, 47, 1937, pp. 177-192. *Voir* aussi P. Thullen, *Math. Ann.*, 111, 1935, pp. 137-157.

([5]) Il s'agit de dimensions *complexes*; une telle variété est un sous-ensemble à $2n - 2$ dimensions de l'espace de n variables complexes considéré comme espace réel à $2n$ dimensions.

en un point x assez voisin de a, et qui s'annule identiquement sur E au voisinage de x, a la forme φf_x, φ étant holomorphe au point x. L'ensemble des f_a ainsi associées aux divers points a de D constitue donc une « donnée de Cousin »; par suite, si D est un polycylindre dont toutes les composantes (sauf peut-être une) sont *simplement connexes*, il existe une fonction f, *holomorphe dans* D, qui s'annule en tous les points de E et en ceux-là seulement, et qui jouit de la propriété précise que toute fonction, qui est holomorphe dans D et s'annule identiquement sur E, est *divisible* par f, c'est-à-dire a la forme φf, φ étant holomorphe dans D.

Une autre conséquence du théorème de Cousin, moins connue, est la suivante : E désignant une variété analytique complexe à $n-1$ dimensions (dans un polycylindre D dont toutes les composantes, sauf peut-être une, sont simplement connexes), on peut se donner arbitrairement, sur E, les valeurs d'une fonction *holomorphe dans* D, pourvu que ces valeurs constituent la trace, sur E, d'une fonction holomorphe *au voisinage de* E. D'une façon plus précise et plus générale : si, à chaque point x de E, on associe une fonction f_x holomorphe au voisinage de x, et cela de manière que tout point a de E possède un voisinage V tel que, pour tout point x de E situé dans V, f_x et f_a soient égales en tout point de E suffisamment voisin de x, alors il existe une fonction f *holomorphe dans* D, telle que, pour tout point x de E, f et f_x soient égales en tout point de E suffisamment voisin de x. Ce théorème n'est qu'un cas particulier d'un théorème qui sera démontré plus loin (§ V, théorème I).

3. Pour ce théorème, comme pour le théorème de Cousin, le principe de la démonstration est le suivant : pour passer de *données locales* à une *existence globale*, on procède à des assemblages successifs de morceaux, et ceci successivement dans les plans des n variables complexes; c'est ainsi que Cousin lui-même avait procédé. Chaque stade d'assemblage consiste en ce que nous appellerons une *opération élémentaire*. Voici par exemple en quoi consiste l'opération élémentaire qui conduit au théorème de Cousin :

Étant donnés deux polycylindres compacts [6] Δ' et Δ'', qui ont respectivement mêmes composantes dans les plans des $n-1$ dernières variables complexes, et dont l'intersection $\Delta' \cap \Delta''$ est *simplement connexe*, étant donnée d'autre part une fonction $f(x)$ holomorphe et $\neq 0$ en tout point de $\Delta' \cap \Delta''$, il s'agit de

---

[6] C'est-à-dire *bornés* et *fermés*. Pour qu'un polycylindre

$$x_1 \in \delta_1, \quad \ldots, \quad x_n \in \delta_n$$

soit compact, il faut et il suffit que ses composantes $\delta_1, \ldots, \delta_n$ soient compactes. Pour qu'il soit simplement connexe, il faut et il suffit que ses composantes soient simplement connexes. Quand nous parlons d'un ensemble plan (ouvert ou compact) *simplement connexe*, nous ne sous-entendons pas qu'il soit connexe; nous voulons seulement dire que son complémentaire est connexe.

mettre cette fonction f sous la forme d'un quotient $\frac{f'}{f''}$, f' étant holomorphe et $\neq 0$ en tout point de Δ', et f'' étant holomorphe et $\neq 0$ en tout point de Δ''. Ce problème est *toujours possible* (7); l'affirmation de cette possibilité sera désormais désignée sous le nom de *lemme de Cousin*.

4. Les résultats de Cousin, nous l'avons rappelé, permettent l'étude *globale* des variétés analytiques complexes à $n-1$ dimensions de l'espace à n dimensions, ainsi que l'étude globale des fonctions holomorphes sur ces variétés. Mais rien ne semble avoir été tenté pour *l'étude globale des variétés analytiques complexes à un nombre quelconque de dimensions*. Nous nous proposons, dans ce travail, de combler partiellement cette lacune. Analysons de plus près le problème : nous dirons que, dans un domaine D, un ensemble E est une variété analytique complexe (ou, plus brièvement, une variété analytique) si chaque point a de D possède un voisinage dans lequel l'ensemble E peut être défini comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes. Une telle variété peut-elle être définie *globalement* comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini, ou même infini, de fonctions *holomorphes dans* D? Nous donnerons une réponse partielle à cette question (§§ IX, X et XII). Voici un autre problème : étant donné une variété analytique E dans D, et, en chaque point x de E, une fonction f_x holomorphe en ce point, de manière que tout point a de E possède un voisinage V tel que, pour tout point x de l'intersection $E \cap V$, f_x et f_a soient égales en tout point de E suffisamment voisin de x, existe-il une fonction *f holomorphe dans* D et qui, au voisinage de tout point x de E, coïncide sur E avec la fonction f_x relative à ce point? Nous étudierons, au paragraphe V, ce problème dans un cas qui se révélera important ensuite (*voir* §§ IX et X).

Suivant une idée de K. Oka (8), l'étude d'une fonction holomorphe dans un domaine quelconque (pourvu que ce soit un domaine total d'existence) se ramène, en définitive, à celle d'une fonction holomorphe sur une variété analytique d'un polycylindre compact et simplement connexe (situé dans un espace à un nombre assez grand de dimensions). Or le cas de ces variétés pourra précisément être traité par les méthodes du présent Mémoire (*voir* § X). C'est d'ailleurs dans ce but que j'ai été amené, il y a quelques années, à entreprendre systématiquement *l'étude globale des idéaux de fonctions holomorphes*, alors que le seul cas étudié jusqu'à présent était celui, très particulier, des idéaux qui possèdent une base formée d'une fonction unique (cas étudié par Cousin).

---

(7) Pour le voir, on considère la fonction $\log f(x)$, qui est holomorphe et uniforme dans un voisinage de $\Delta' \cap \Delta''$; considérée comme fonction de x_1, on lui applique la formule intégrale de Cauchy.

(8) *Voir* les Mémoires cités dans la note (4). Cette idée sera exposée au paragraphe X du présent travail.

II. — Idéaux de fonctions holomorphes; modules de fonctions holomorphes à valeurs dans l'espace à q dimensions.

5. Un *idéal* de fonctions holomorphes est, conformément aux définitions générales en usage en Algèbre, un ensemble $\mathcal{I}$ de fonctions holomorphes satisfaisant aux deux conditions suivantes : 1° la somme de deux fonctions de $\mathcal{I}$ est une fonction de $\mathcal{I}$; 2° le produit d'une fonction de $\mathcal{I}$ par une fonction holomorphe quelconque appartient à $\mathcal{I}$. Ces deux conditions s'expriment en une seule : quelles que soient les fonctions $f_1, \ldots, f_p$, en nombre fini, de l'idéal $\mathcal{I}$, toute combinaison linéaire $c_1 f_1 + \ldots + c_p f_p$ à coefficients holomorphes appartient à $\mathcal{I}$.

Mais la définition précédente reste vague si l'on ne précise pas dans quelle région sont envisagées les fonctions. La notion d'idéal sera toujours relative à un ensemble E déterminé de l'espace à n dimensions complexes. Un *idéal sur* E sera, par définition, un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_E$ des fonctions *holomorphes sur* E; j'appelle fonction holomorphe sur E toute fonction définie et holomorphe dans un voisinage de E (ce voisinage n'étant pas fixé à l'avance, mais dépendant de la fonction); deux fonctions sont considérées comme *identiques* s'il existe un voisinage de E dans lequel elles coïncident. Un cas particulier est celui où l'ensemble E est réduit à un point; un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_E$ correspondant s'appellera un *idéal ponctuel*.

6. Une famille $\mathcal{F}$ quelconque de fonctions holomorphes sur E *engendre* un idéal : l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions de $\mathcal{F}$, à coefficients dans $\mathcal{O}_E$, forme en effet un idéal sur E, et c'est le plus petit idéal contenant $\mathcal{F}$. On appelle *base* d'un idéal sur E, tout système *fini* de fonctions de $\mathcal{O}_E$ qui engendre l'idéal. On ignore si un idéal quelconque possède une base; mais on sait qu'un idéal *ponctuel* possède toujours une base ([9]).

Parmi les idéaux sur E, signalons l'idéal-zéro, réduit à la seule fonction identiquement nulle, et l'idéal-unité, identique à $\mathcal{O}_E$. Le premier a une base formée de la fonction zéro, le second une base formée de la fonction 1 (constante un).

Toute fonction holomorphe sur E peut être considérée comme une fonction holomorphe sur n'importe quel ensemble E' contenu dans E. Il en résulte que *tout idéal sur* E *engendre un idéal sur* E', lorsque $E' \subset E$; il importe de ne pas confondre ces deux idéaux : le second se compose de toutes les combinaisons linéaires finies, à *coefficients holomorphes sur* E', des fonctions du premier idéal. Ainsi, un idéal sur E porte en puissance une foule d'idéaux, un sur

([9]) *Cf.* Rückert, *Math. Annalen*, 107, 1933, pp. 259-281. Le lecteur trouvera une démonstration de ce résultat dans l'Appendice I du présent travail.

chaque sous-ensemble de E. Sauf au paragraphe XII, nous ne considérerons que des idéaux sur des polycylindres (ouverts ou compacts); les idéaux ponctuels rentrent dans cette catégorie.

7. Nous aurons besoin d'une notion plus générale que celle d'idéal sur un ensemble E. L'entier q étant donné une fois pour toutes, considérons les systèmes de q fonctions holomorphes sur E; un tel système définit, si l'on veut, une fonction holomorphe sur E, mais à valeurs non plus dans le corps des nombres complexes, mais dans l'espace à q dimensions complexes; pour abréger, nous dirons : *fonction à q dimensions*. Les fonctions à q dimensions, holomorphes sur E, forment un *module* $\mathcal{O}_E^q$ sur l'anneau $\mathcal{O}_E$: la somme de deux éléments F et G de $\mathcal{O}_E^q$ se définit d'une manière évidente, et le « produit » d'un élément F de $\mathcal{O}_E^q$ par un élément f de $\mathcal{O}_E$ est, par définition, l'élément de $\mathcal{O}_E^q$ dont les q composantes (qui sont des éléments de $\mathcal{O}_E$) sont les produits par f des q composantes de F. D'une manière générale, nous appellerons *module à q dimensions sur* E tout sous-module du module $\mathcal{O}_E^q$, c'est-à-dire tout sous-ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{O}_E^q$ tel que : 1° la somme de deux éléments de $\mathcal{M}$ appartienne à $\mathcal{M}$; 2° le produit d'un élément de $\mathcal{M}$ par un élément quelconque de $\mathcal{O}_E$ appartienne à $\mathcal{M}$.

Les notions indiquées ci-dessus pour les idéaux s'étendent immédiatement aux modules : *module engendré* (par un système de fonctions à q dimensions), *base* d'un module, module engendré sur E′ par un module sur E (lorsque $E' \subset E$), module ponctuel. On sait que *tout module ponctuel possède une base finie*. Ce « théorème de la base finie » sera étendu, au paragraphe IX, à toute une catégorie de modules sur des polycylindres compacts.

Nous utiliserons les notations suivantes : $\mathcal{M}$ désignant un module sur E, et x un point de E, $\mathcal{M}_x$ désignera le module engendré par $\mathcal{M}$ sur l'ensemble réduit au point x; Δ désignant un ensemble contenu dans E, $\mathcal{M}_\Delta$ désignera le module engendré par $\mathcal{M}$ sur Δ.

III. — Généralisation du lemme de Cousin.

8. Avant de voir comment la notion de « donnée de Cousin » (*voir* I, 4) peut se généraliser aux idéaux et aux modules généraux, commençons par indiquer une généralisation du « lemme de Cousin » (I, 3) qui permettra, au paragraphe IX, d'établir les résultats fondamentaux. Le « problème élémentaire » à résoudre est maintenant le suivant :

Étant donnés deux polycylindres compacts Δ' et Δ'', qui ont mêmes composantes dans les plans des variables $x_2, \ldots, x_n$ (mais non dans le plan de x_1), et dont l'intersection Δ est *simplement connexe* ([6]), on suppose donnée une matrice carrée X (à p lignes et p colonnes, p étant un entier quelconque) dont les éléments sont des fonctions holomorphes sur Δ, et dont le déterminant est $\neq 0$ en tout point de Δ; pour abréger, nous dirons : une matrice *holomorphe et inversible sur* Δ. Il s'agit de *mettre cette matrice* X *sous la forme d'un produit* $X'.X''^{-1}$, X' *étant une matrice holomorphe et inversible sur* Δ' *et* X'' *une matrice holomorphe et inversible sur* Δ''.

Pour $p=1$, on retombe sur le problème élémentaire de Cousin (I, 3). Pour p quelconque, *le problème a toujours une solution* : c'est là un résultat que j'ai établi dans un Mémoire antérieur ([10]), et qui jouera un rôle essentiel dans la démonstration du théorème fondamental du présent travail (§ IX). Ce résultat sera désigné, dans la suite de ce paragraphe, sous le nom de « lemme de Cousin généralisé ».

Nous ne le démontrerons pas à nouveau. Signalons seulement ici que la démonstration est beaucoup plus délicate pour p quelconque que pour $p=1$ (cas du lemme de Cousin proprement dit), et qu'il ne servirait à rien de prendre le logarithme de la matrice étudiée X, parce que l'on n'a pas en général $e^{A+B}=e^A.e^B$ lorsque A et B sont des matrices à p lignes et p colonnes ($p>1$).

9. Voyons maintenant quel parti immédiat l'on peut tirer du « lemme de Cousin généralisé ». Ici se présente une difficulté qui n'existait pas pour $p=1$: si un idéal $\mathcal{I}$ sur Δ possède deux bases formées chacune de p fonctions, *il n'est pas certain que l'on puisse passer de l'une à l'autre par une substitution linéaire à coefficients holomorphes sur* Δ *et de déterminant* $\neq 0$ *en tout point de* Δ ([11]). Mais cette difficulté peut être tournée, grâce au résultat suivant :

LEMME I. — *Si, sur un ensemble* E *quelconque, on a deux bases*

$$f_1,\ \ldots,\ f_{p'} \quad \text{et} \quad g_1,\ \ldots,\ g_{p''}$$

d'un même module sur E (module à un nombre quelconque q de dimensions; les fonctions f_i et g_j prennent donc leurs valeurs dans l'espace à q dimensions), *on peut passer de la base formée des* $p'+p''$ *fonctions*

$$f_1,\ \ldots,\ f_{p'} \quad \text{et} \quad F_1,\ \ldots,\ F_{p''} \quad (\text{où les } F_j \text{ sont identiquement nulles})$$

à la base formée des $p'+p''$ *fonctions*

$$g_1,\ \ldots,\ g_{p''} \quad \text{et} \quad G_1,\ \ldots,\ G_{p'} \quad (\text{où les } G_i \text{ sont identiquement nulles})$$

par une substitution linéaire à coefficients holomorphes sur E, *de déterminant* $\neq 0$ *en tout point de* E.

([10]) Sur les matrices holomorphes de n variables complexes (*Journal de Math.*, 9e série, 19, 1940, pp. 1-26); *voir* pp. 9 et suivantes.

([11]) Dans le Mémoire cité dans la note ([10]), j'ai donné l'exemple d'un polycylindre Δ simplement connexe de l'espace à $n=3$ dimensions, et de deux bases formées chacune de $p=2$ fonctions holomorphes sur Δ, qui engendrent le même idéal, mais sont telles que le passage de l'une à l'autre ne puisse s'effectuer par une matrice holomorphe et inversible sur Δ (*voir* pp. 24-26 de ce Mémoire).

La démonstration se trouve pages 16-17 du Mémoire déjà cité; elle est donnée dans le cas de deux idéaux, mais est valable pour des modules à un nombre quelconque de dimensions sans qu'il y ait un seul mot à changer.

En combinant ce résultat avec le « lemme de Cousin généralisé », on obtient aussitôt [*voir* p. 15 du Mémoire cité dans la note ([10])] :

Lemme II. — *Soient deux polycylindres compacts Δ' et Δ'' qui ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une, et dont l'intersection Δ est simplement connexe. Si deux modules de bases finies* (à un même nombre q de dimensions) $\mathcal{M}'$ *sur* Δ', *et* $\mathcal{M}''$ *sur* Δ'', *engendrent, sur* Δ, *le même module, alors il existe un module* $\mathcal{M}$ *de base finie sur la réunion* $\Delta' \cup \Delta''$, *qui engendre* $\mathcal{M}'$ *sur* Δ' *et* $\mathcal{M}''$ *sur* Δ''. On peut préciser : si $\mathcal{M}'$ possède une base de p' fonctions et $\mathcal{M}''$ une base de p'' fonctions, il est possible de donner à $\mathcal{M}$ une base de $p'+p''$ fonctions.

Tels sont les résultats préliminaires que mon Mémoire antérieur ([10]) avait pour but d'établir et qui nous serviront de point de départ dans l'étude des problèmes fondamentaux dont nous allons parler maintenant.

IV. — Problèmes fondamentaux relatifs aux systèmes cohérents de modules ponctuels.

10. Il s'agit d'abord de généraliser la notion de « donnée de Cousin » exposée au paragraphe I (n°1). Une donnée de Cousin, c'est en somme la donnée d'idéaux ponctuels (un idéal ponctuel en chaque point du domaine envisagé) qui satisfont à une condition de *cohérence* qui a été indiquée explicitement, mais ceci dans le cas particulier où les idéaux ponctuels donnés ont chacun une *base formée d'une seule fonction*. Définissons maintenant la notion générale de *système cohérent d'idéaux ponctuels*, ou même de *modules ponctuels*.

Définition. — Soit E un ensemble quelconque de l'espace à n dimensions complexes, et soit q un entier $\geqq 1$ donné une fois pour toutes. Supposons qu'à chaque point x de E ait été attaché un module $\mathcal{M}_x$ (à q dimensions) de fonctions *holomorphes au point* x. Nous dirons que les modules ponctuels $\mathcal{M}_x$ forment un *système cohérent*, si tout point a de E possède un voisinage V sur lequel existe un module (à q dimensions) qui, en tout point x de l'intersection $E \cap V$, engendre le module ponctuel $\mathcal{M}_x$.

Remarque. — On sait ([12]) que si deux modules, sur un voisinage d'un point a, engendrent, au point a, le même module ponctuel, ils engendrent aussi le même module ponctuel en tout point x suffisamment voisin de a. Comme

([12]) *Voir*, à la fin de ce travail, l'Appendice I (2e corollaire du théorème α).

d'autre part tout module ponctuel a une base finie ([9]), on voit que si un système de modules ponctuels est *cohérent*, tout point a de E possède un voisinage W sur lequel existe un nombre *fini* de fonctions holomorphes qui engendrent le module $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de $E \cap W$.

Définissons encore la notion de *module associé* à un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ sur E : c'est le module des fonctions, holomorphes sur E, qui appartiennent à $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de E. Enfin, nous appellerons *module associé à un module* $\mathfrak{M}$ (sur E) le module associé au système cohérent des modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ engendrés par $\mathfrak{M}$ aux différents points x de E. Le module associé à $\mathfrak{M}$ contient évidemment $\mathfrak{M}$.

11. La notion de « donnée de Cousin » étant ainsi généralisée par celle de *système cohérent*, comment peut-on espérer généraliser le théorème de Cousin ? Pour simplifier, nous nous bornerons, pour le moment, au cas des polycylindres *compacts* et *simplement connexes*; de ce cas, on peut espérer passer à celui des polycylindres *ouverts* et simplement connexes, grâce à un passage à la limite convenable. Comme ce passage à la limite présente des difficultés supplémentaires, nous ne nous en occuperons pas tout d'abord.

Cela dit, un des premiers problèmes qui se posent est le suivant :

Problème I. — *Étant donné, sur un polycylindre compact et simplement connexe* Δ ([13]), *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$, *existe-t-il, sur* Δ, *un module qui engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en chaque point* x *de* Δ ?

Il est clair que si le problème I a une solution, le module associé au système cohérent est aussi une solution du problème; mais il n'est pas certain, *a priori*, que ce soit la seule. On est ainsi amené à se poser un problème d'*unicité* qui n'était pas à considérer dans le cas d'une « donnée de Cousin »; le voici :

Problème II. — *Si deux modules* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ (au même nombre q de dimensions) *sur un même polycylindre* Δ *engendrent, en chaque point de* Δ, *le même module ponctuel, s'ensuit-il nécessairement que* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{N}$ *soient identiques* ?

Or une analyse détaillée (que nous ne donnons pas ici) montre que si l'on savait résoudre par l'affirmative le problème II pour tous les modules *de base finie*, alors on pourrait, grâce au lemme II (§ III, n° 9), par des assemblages successifs de morceaux, résoudre par l'affirmative le problème I. Il semble donc que tout l'effort doive être porté sur le problème II. Or on voit aussitôt qu'il suffirait de savoir résoudre le :

([13]) La notation Δ désignera désormais toujours un polycylindre compact.

Problème III. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module (à q dimensions) sur Δ. Si une fonction f (à q dimensions) est holomorphe sur Δ, et si, en chaque point x de Δ, elle appartient au module $\mathfrak{M}_x$ engendré par $\mathfrak{M}$ en ce point, s'ensuit-il nécessairement que la fonction f appartienne au module $\mathfrak{M}$?*

Ce problème peut encore se formuler comme suit : peut-on affirmer que *le module associé à $\mathfrak{M}$ est contenu dans $\mathfrak{M}$*? Comme ce module associé contient évidemment $\mathfrak{M}$, la solution du problème III signifierait que tout module est identique à son associé.

Or, pour étudier le problème III, on peut se borner au cas où le module $\mathfrak{M}$ a une *base finie*, car *tout module $\mathfrak{M}$, sur un ensemble compact* E, *contient un sous-module de base finie qui engendre, en chaque point x de* E, *le même module ponctuel $\mathfrak{M}_x$* ([14]).

Mais, même dans le cas où $\mathfrak{M}$ a une base finie, la solution du problème III n'apparaît pas clairement. Prenons par exemple l'idéal $\mathcal{J}$ engendré, sur Δ, par p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$ qui ne s'annulent simultanément en aucun point de Δ; la constante 1 appartient à l'idéal associé, mais il n'est pas évident qu'elle appartienne à $\mathcal{J}$, c'est-à-dire que l'on ait une identité

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f_k = 1$$

à coefficients a_k *holomorphes sur* Δ. Il en est pourtant ainsi pour cet exemple particulier [*voir* la démonstration au paragraphe VI (n° 20) : corollaire du théorème II].

12. Si on analyse le problème III dans le cas général, on voit qu'il se ramène à un *problème élémentaire* que voici :

Soient Δ' et Δ'' deux polycylindres compacts qui ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables complexes sauf une. Soient $f, f_1, \ldots, f_p$ des fonctions (à q dimensions) holomorphes sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$ (que l'on peut supposer simplement connexe); supposons que l'on ait, sur Δ', une identité

$$f = \sum_k a'_k f_k$$

([14]) Voici comment on démontre ce fait : tout point a de E possède un voisinage ouvert V dans lequel existe un système *fini* de fonctions de $\mathfrak{M}$ qui, en chaque point x de $E \cap V$, engendrent le module $\mathfrak{M}_x$. Recouvrons E avec un nombre *fini* de tels voisinages (ce qui est possible d'après le théorème de Borel-Lebesgue), et réunissons les systèmes finis de fonctions qui leur correspondent. On obtient un système fini de fonctions de $\mathfrak{M}$, et ce système engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de E.

à coefficients a'_k holomorphes sur Δ', et, sur Δ'', une identité

$$f = \sum_k a''_k f_k$$

à coefficients a''_k holomorphes sur Δ''. Peut-on conclure de là à l'existence d'une identité

$$f = \sum_k a_k f_k$$

à coefficients a_k holomorphes sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$?

Si ce « problème élémentaire » pouvait être résolu par l'affirmative, le problème III pourrait être résolu affirmativement, donc aussi les problèmes I et II. Or, pour aborder le « problème élémentaire », on est conduit aux considérations suivantes : posons $a'_k - a''_k = c_k$; les fonctions c_k sont holomorphes sur l'intersection $\Delta' \cap \Delta''$ et y satisfont à l'identité

$$\sum_k c_k f_k = 0.$$

Considérons, sur tout ensemble E sur lequel les f_k sont holomorphes, le module (à p dimensions) des systèmes de p fonctions c_k (holomorphes sur E) qui satisfont à l'identité précédente; soit $\mathfrak{M}(f_k, \mathrm{E})$ ce module. Et posons-nous le problème suivant :

PROBLÈME IV. — *Soient p fonctions holomorphes f_k (à un nombre quelconque q de dimensions) sur un polycylindre compact et simplement connexe Δ. Est-ce que le module $\mathfrak{M}$ (f_k, Δ) a une base finie, et est-ce qu'il engendre, sur tout polycylindre compact* E *contenu dans Δ, le module $\mathfrak{M}(f_k, \mathrm{E})$? En particulier, engendre-t-il $\mathfrak{M}(f_k, \mathrm{E})$ lorsque* E *est réduit à un point?*

Si l'on savait répondre affirmativement au problème IV, on saurait du même coup résoudre le « problème élémentaire » ci-dessus. Voici comment. On aurait, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$a'_k - a''_k = c_k = \sum_\alpha \lambda_\alpha C_{k\alpha},$$

les λ_α étant holomorphes sur $\Delta' \cap \Delta''$, et les $C_{k\alpha}$ sur $\Delta' \cup \Delta''$, avec les identités

$$\sum_k C_{k\alpha} f_k = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha.$$

Or, d'après un théorème classique, les λ_α peuvent se mettre sous la forme

$$\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha - \lambda''_\alpha,$$

les λ'_α étant holomorphes sur Δ', et les λ''_α sur Δ''. En posant

$$c'_k = \sum_\alpha \lambda'_\alpha C_{k\alpha}, \qquad c''_k = \sum_\alpha \lambda''_\alpha C_{k\alpha},$$

on obtient des c'_k holomorphes sur Δ' et y satisfaisant à $\sum_k c'_k f_k = 0$, des c''_k holomorphes sur Δ'' et y satisfaisant à $\sum_k c''_k f_k = 0$, et l'on a, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$a'_k - a''_k = c'_k - c''_k.$$

Les fonctions a_k égales, sur Δ', à $a'_k - c'_k$, et, sur Δ'', à $a''_k - c''_k$, sont holomorphes sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$ et y satisfont à

$$f = \sum_k a_k f_k,$$

ce qui résout le « problème élémentaire ».

13. Ainsi, tout l'effort doit se porter, semble-t-il, sur le problème IV, dont la solution entraînerait celle de tous les autres. Or le problème IV soulève une *question préliminaire* : les f_k étant holomorphes sur Δ, associons à chaque point x de Δ le module ponctuel $\mathfrak{M}(f_k, x)$ formé des systèmes de p fonctions c_k (holomorphes au point x) telles que $\sum_k c_k f_k = 0$; *ces modules ponctuels forment-ils un système cohérent?* Or c'est là une question que je ne suis pas encore parvenu à résoudre. Serait-elle résolue, que le problème IV ne le serait pas encore; pour y parvenir, on aurait besoin de la solution du problème I, de sorte que les idées qui viennent d'être exposées ont l'air de conduire à un cercle vicieux! En fait, le cercle vicieux peut être évité par une récurrence subtile et compliquée, que je n'exposerai pas ici puisque la question préliminaire est encore pendante.

Si j'ai tenu néanmoins à indiquer les idées qui permettent de relier les différents problèmes les uns aux autres, c'est pour familiariser le lecteur avec des idées et des méthodes que nous utiliserons dans la suite de ce travail. Il nous reste maintenant à entrer dans le détail technique des notions et des théorèmes qui nous conduiront à une solution partielle des problèmes posés.

V. — Modules purs, modules parfaits.

14. Le problème II du paragraphe précédent nous conduit à poser la définition suivante :

Définition. — *Un module $\mathfrak{M}$ (à q dimensions) sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*) *est dit* PARFAIT *si, pour tout polycylindre compact Δ contenu dans* D, *tout module à q dimensions (sur Δ) qui engendre en chaque point x de Δ le* module $\mathfrak{M}_x$, *est identique au module* $\mathfrak{M}_\Delta$. [Conformément aux notations adoptées, $\mathfrak{M}_x$ désigne le module engendré par $\mathfrak{M}$ au point x, et $\mathfrak{M}_\Delta$ le module engendré par $\mathfrak{M}$ sur Δ.]

Un module parfait sur D engendre évidemment un module parfait sur tout polycylindre D′ (compact ou ouvert) contenu dans D. D'autre part, *un module parfait $\mathfrak{M}$ sur un polycylindre compact Δ possède une base finie*, puisqu'il existe, sur Δ, un module de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de Δ [*cf.* § IV, note (14)], module qui est nécessairement identique à $\mathfrak{M}$ puisque $\mathfrak{M}$ est parfait.

Enfin, si $\mathfrak{M}$ est parfait sur D, alors, sur tout polycylindre compact Δ contenu dans D, le module $\mathfrak{M}_\Delta$ est *identique à son associé*, puisque ce dernier engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de Δ.

Définition. — *Un module $\mathfrak{M}$ sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*) *est dit* pur *si, pour tout polycylindre compact Δ contenu dans* D, *le module $\mathfrak{M}_\Delta$ est identique à son associé.* Il est clair qu'un module pur sur D engendre, sur tout polycylindre D′ contenu dans D, un module pur.

D'après ce qui précède, tout module parfait est pur. J'ignore si la réciproque est exacte (*voir*, à ce sujet, le lemme IV, § VII, n° 22); il se peut même que tous les modules soient parfaits. Mais, dans l'ignorance de ce fait, j'ai été obligé d'introduire les notions précédentes.

15. Nous allons résoudre, pour tous les *modules purs*, un problème qui a été soulevé dans l'introduction (§ I, n° 2).

Théorème I. — *Soit $\mathfrak{M}$ un module pur (à q dimensions) sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*). *Supposons attachée, à chaque point x de* D, *une fonction f_x (à q dimensions) holomorphe au point x, et cela de manière que tout point a de* D *possède un voisinage* V *satisfaisant aux conditions suivantes* : 1° *f_a est holomorphe sur* V ; 2° *pour tout point x de* $D \cap V$, *la différence $f_a - f_x$ appartient, au point x, au module $\mathfrak{M}_x$ engendré par $\mathfrak{M}$. Dans ces conditions, il existe une fonction f (à q dimensions) holomorphe sur* D, *et telle que, pour tout point x de* D, *la différence $f - f_x$ appartienne, en ce point, au module $\mathfrak{M}_x$.*

Corollaire. — $\mathfrak{I}$ étant un idéal *pur* sur D, désignons par A la variété de cet idéal, c'est-à-dire l'ensemble des zéros communs à toutes les fonctions de $\mathfrak{I}$. Si une fonction φ est définie et holomorphe sur un voisinage de A, il existe une fonction *f holomorphe sur* D et *égale à φ en tout point de* A.

Nous allons démontrer le théorème I en supposant d'abord D *compact.* D'après l'hypothèse, et en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir D avec un nombre fini d'ensembles ouverts V_i, et associer à chaque V_i une fonction g_i (à q dimensions, holomorphe dans V_i), de manière que, pour tout x de D qui appartient à V_i, la différence $f_x - g_i$ appartienne, au point x, au module $\mathfrak{M}_x$. Il en résulte qu'on peut recouvrir chaque composante δ_k de $D (k = 1, \ldots, n)$ avec un nombre fini d'ensembles compacts $\delta_{ik} (i = 1, 2, \ldots)$ contenus dans δ_k, et, à chaque polycylindre

$$x_1 \in \delta_{i_1 1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n},$$

attacher une fonction holomorphe sur ce polycylindre, telle que, pour tout point x de ce polycylindre, cette fonction soit congrue, au point x, à la fonction f_x suivant le module $\mathfrak{M}_x$. Désignons par ε_{jk} la réunion (dans le plan de la variable x_k) des j ensembles $\delta_{1k}, \ldots, \delta_{jk}$. Nous démontrerons d'abord le théorème non pour le polycylindre D, mais pour le polycylindre

$$x_1 \in \varepsilon_{j1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n};$$

la démonstration se fera par récurrence sur j, en prouvant que si le théorème est vrai pour le polycylindre Δ'

$$x_1 \in \varepsilon_{j-1,1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n},$$

et pour le polycylindre Δ''

$$x_1 \in \delta_{j1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n},$$

il est vrai pour leur réunion

$$x_1 \in \varepsilon_{j1}, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n}.$$

Cela fait, on voit que le théorème sera établi pour le polycylindre

$$x_1 \in \delta_1, \qquad x_2 \in \delta_{i_2 2}, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_{i_n n}.$$

En procédant ensuite de même, successivement dans les plans des variables $x_2, \ldots, x_n$, on prouvera le théorème pour

$$x_1 \in \delta_1, \qquad x_2 \in \delta_2, \qquad \ldots, \qquad x_n \in \delta_n,$$

c'est-à-dire pour le polycylindre D. C'est là le procédé d'assemblages successifs employé déjà par Cousin. Ainsi, on est ramené à « *l'opération élémentaire* » suivante : Δ' et Δ'' désignant deux polycylindres compacts dont toutes les composantes, sauf une, sont les mêmes, on a une fonction g' holomorphe sur Δ', une fonction g'' holomorphe sur Δ'', et cela de manière que, en tout point x de l'intersection $\Delta' \cap \Delta''$, la différence $g' - g''$ appartienne au module $\mathfrak{M}_x$. Il s'agit de fabriquer une fonction unique g, holomorphe sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, congrue à g' en tout point x de Δ' (suivant $\mathfrak{M}_x$), et congrue à g'' en tout point x de Δ'' (suivant $\mathfrak{M}_x$).

Or la solution de ce problème est immédiate. Sur $\Delta' \cap \Delta''$, la différence $g' - g''$ appartient au module $\mathfrak{M}_\Delta$, puisque $\mathfrak{M}$ est *pur*. On a donc

$$g' - g'' = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_\alpha,$$

les φ_α (en nombre fini) appartenant à $\mathfrak{M}$, et les c_α étant holomorphes sur $\Delta' \cap \Delta''$. Or on a

$$c_\alpha = c'_\alpha - c''_\alpha,$$

c'_α étant holomorphe sur Δ' et c''_α sur Δ''; d'où, sur $\Delta' \cap \Delta''$,

$$g' - \sum_\alpha c'_\alpha \varphi_\alpha = g'' - \sum_\alpha c''_\alpha \varphi_\alpha.$$

La fonction égale, sur Δ', au premier membre de cette égalité, et égale, sur Δ'', au second membre, est une fonction g holomorphe sur $\Delta' \cup \Delta''$, qui fournit une solution du problème. Le théorème I est donc démontré dans le cas où D est compact.

16. Supposons maintenant que le polycylindre D soit *ouvert*. D est réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts D_i à chacun desquels on peut appliquer le théorème. Il existe donc, sur D_i, une fonction holomorphe g_i qui est, en chaque point x de D_i, congrue à la fonction f_x de l'énoncé, suivant le module $\mathfrak{M}_x$. Naturellement, on peut ajouter à g_i une fonction arbitraire du module $\mathfrak{M}$. Nous allons profiter de cette circonstance pour montrer que l'on peut choisir les g_i de manière à avoir

$$(1) \qquad |g_{i+1}(x) - g_i(x)| \leq \frac{1}{2^i} \qquad \text{pour tout } x \text{ de } D_i.$$

En effet, supposons déjà choisies $g_1, \ldots, g_i$, et montrons qu'on peut choisir g_{i+1}. La fonction g_{i+1} étant d'abord une solution quelconque du problème relatif à D_{i+1}, la différence $g_{i+1} - g_i$ appartient au module engendré par $\mathfrak{M}$ sur D_i, puisque $\mathfrak{M}$ est pur; on a donc

$$g_{i+1} - g_i = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_\alpha,$$

les φ_α (en nombre fini) appartenant à $\mathfrak{M}$, et les c_α étant holomorphes sur D_i. Or toute fonction holomorphe sur D_i peut être uniformément approchée par une fonction holomorphe sur D (résultat classique); si l'on applique ceci aux fonctions c_α, on voit qu'on peut retrancher de g_{i+1} une fonction du module $\mathfrak{M}$, de manière que la différence de cette nouvelle fonction et de g_i soit arbitrairement petite sur D_i. Et ceci prouve notre assertion.

Les inégalités (1) étant maintenant supposées vérifiées, il est clair que, au voisinage de tout point de D, les fonctions g_i sont définies et holomorphes, et convergent uniformément. Leur limite définit donc une fonction f *holomorphe sur* D. Cette fonction f satisfait aux conditions du théorème I ([15]), qui est ainsi démontré dans tous les cas.

VI. — Idéaux qui ont une base de p fonctions et dont la variété est à $n-p$ dimensions.

17. Nous dirons que la variété d'un idéal $\mathcal{J}$ (sur un ensemble E de l'espace à n dimensions) est à $n-p$ dimensions si, en tout point x de E où s'annulent toutes les fonctions de $\mathcal{J}$, les composantes irréductibles ([16]) de la variété de l'idéal ponctuel $\mathcal{J}_x$ sont toutes à $n-p$ dimensions. En particulier, tout idéal dont la variété est *vide* (c'est-à-dire tel que ses fonctions n'aient aucun zéro commun) doit être considéré comme un idéal dont la variété a $n-p$ dimensions.

En général, p fonctions holomorphes $f_1, \ldots, f_p$ (il s'agit de fonctions à une dimension, c'est-à-dire de fonctions à valeurs complexes) engendrent un idéal dont la variété V jouit de la propriété suivante : en chaque point de V, chaque composante irréductible ([16]) de B a *au moins* $n-p$ dimensions. Nous supposerons désormais que $f_1, \ldots, f_p$ sont telles que chaque composante irréductible ait *exactement* $n-p$ dimensions, et ceci en tout point de V.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit, sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*) *de l'espace à n dimensions, un idéal $\mathcal{J}$ dont la variété est à $n-p$ dimensions et qui possède une base formée de p fonctions. Si une fonction g, holomorphe sur* D (*et à valeurs complexes*), *appartient, en chaque point x de* D, *à l'idéal ponctuel $\mathcal{J}_x$ engendré par $\mathcal{J}$ au point x, alors g appartient à $\mathcal{J}$*. Autrement dit : *l'idéal $\mathcal{J}$ est identique à son associé.*

En appliquant ce théorème à tous les polycylindres compacts contenus dans D, on voit que *l'idéal $\mathcal{J}$ est pur; on peut donc appliquer le théorème* I *à l'idéal $\mathcal{J}$.*

18. Nous établirons d'abord un lemme :

Lemme III. — *Soient p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ (à valeurs complexes) holomorphes sur un ensemble ouvert* E. *Si la variété de l'idéal $\mathcal{J}$ de base $(f_1, \ldots, f_p)$ est à $n-p$ dimensions, il existe p combinaisons linéaires $g_1, \ldots, g_p$ de $f_1, \ldots, f_p$,*

([15]) Nous admettons ici le résultat suivant : si une suite de fonctions, holomorphes dans un voisinage fixe d'un point x, converge uniformément dans ce voisinage, et si les fonctions de la suite appartiennent, au point x, à un même module ponctuel, la fonction limite appartient aussi à ce module. Ce fait sera établi dans l'Appendice I de ce travail (premier corollaire du théorème α).

([16]) Il s'agit d'*irréductibilité en un point*. *Voir* l'Appendice II de ce travail.

à coefficients constants et linéairement indépendantes, telles que la condition suivante soit remplie : pour tout système de q fonctions distinctes $(1 \leqq q \leqq p)$ prises parmi $g_1, \ldots, g_p$, la variété des zéros communs à ces q fonctions est à $n-q$ dimensions.

Considérons la proposition suivante : « moyennant l'hypothèse du lemme, il existe r combinaisons $g_1, \ldots, g_r$ de $f_1, \ldots, f_p$, à coefficients constants et linéairement indépendantes, telles que, pour tout système de q fonctions distinctes $(1 \leqq q \leqq r)$ prises parmi $g_1, \ldots, g_r$, l'ensemble des zéros communs à ces q fonctions soit à $n-q$ dimensions ». Nous allons prouver cette proposition *par récurrence sur l'entier* $r \leqq p$; pour $r=p$, on obtiendra le lemme. Or la proposition est vraie pour $r=1$, car, si toutes les combinaisons linéaires (à coefficients constants) de $f_1, \ldots, f_p$ étaient identiquement nulles, $f_1, \ldots, f_p$ seraient identiquement nulles, contrairement à l'hypothèse ([17]). Supposons-la vraie pour $r-1$, et démontrons-la pour r. Soient $g_1, \ldots, g_{r-1}$ des combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$, linéairement indépendantes, et telles que, pour tout système de q fonctions distinctes $(1 \leqq q \leqq r-1)$ prises parmi elles, la variété des zéros communs soit à $n-q$ dimensions. Considérons toutes les variétés que l'on obtient ainsi, ou plutôt toutes les *composantes irréductibles* de ces variétés [il s'agit d'irréductibilité ([18]) sur l'ensemble ouvert E envisagé]. Elles forment une famille dénombrable ([18]). Pour chacune d'elles, les combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ qui s'annulent identiquement sur cette composante forment une variété linéaire à $p-1$ dimensions au plus. Excluons la famille dénombrable de ces variétés linéaires dans l'espace (à p dimensions) de toutes les combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$; excluons aussi les combinaisons linéaires qui sont combinaisons de $g_1, \ldots, g_{r-1}$ seulement. Il reste des combinaisons non exclues; si g_r désigne l'une d'elles, le système $(g_1, \ldots, g_{r-1}, g_r)$ satisfait à la condition voulue, et la proposition est démontrée.

19. Le lemme III étant ainsi établi, abordons la démonstration du théorème II. Nous utiliserons le résultat suivant, relatif aux *idéaux ponctuels* : si, en un point, le produit fg de deux fonctions holomorphes appartient à un idéal, et si f ne s'annule identiquement sur aucune des composantes irréductibles de la

---

([17]) Ce raisonnement suppose implicitement que l'ensemble E est *connexe*. S'il ne l'est pas, on peut raisonner ainsi : pour chacune de ses composantes connexes, l'ensemble des combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ qui sont identiquement nulles sur cette composante constitue une variété linéaire à $p-1$ dimensions au plus; comme les composantes connexes forment une famille dénombrable, on doit exclure de l'espace (à p dimensions) des combinaisons linéaires une famille dénombrable de variétés linéaires à $p-1$ dimensions au plus; il reste au moins une combinaison non exclue, c'est-à-dire une combinaison qui, égalée à zéro, définit une variété analytique à $n-1$ dimensions.

([18]) *Voir* l'Appendice II de ce travail.

variété de l'idéal, alors g *appartient à l'idéal* ([19]). Cela posé, nous établirons le théorème II par *récurrence sur l'entier* p. Il est vrai pour $p = 1$, car si une fonction g, holomorphe sur D, est divisible par f (holomorphe sur D) en chaque point de D, g est globalement divisible par f. Supposons alors le théorème vrai pour $p-1$, et démontrons-le pour p. Soient $g_1, \ldots, g_p$ les combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ définies au lemme III; les fonctions $g_1, \ldots, g_p$ servent de base à l'idéal $\mathfrak{I}$. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal (sur D) de base $g_2, \ldots, g_p$; le théorème II s'applique à l'idéal $\mathfrak{J}$, dont la variété est à $n-p+1$ dimensions. Il reste à montrer que si une fonction g, holomorphe sur D, se met, au voisinage de chaque point x de D, sous la forme

$$g = \sum_{k=1}^{p} a_x^k g_k \tag{1}$$

(dans a_x^k, la lettre k désigne un indice, la lettre x indique qu'il s'agit d'une fonction *holomorphe au point* x), g peut se mettre sous la forme

$$g = \sum_{k=1}^{p} a^k g_k,$$

$a^1, \ldots, a^p$ étant *holomorphes sur* D.

Or, soit V un voisinage ouvert du point x, dans lequel les a_x^k soient holomorphes et satisfassent à (1). En tout point y de $D \cap V$, la fonction $(a_x^1 - a_y^1) f_1$ appartient à l'idéal $\mathfrak{J}_y$, et par suite $a_x^1 - a_y^1$ appartient à $\mathfrak{J}_y$ (puisque f_1 ne s'annule identiquement sur aucune des compostantes irréductibles de la variété de $\mathfrak{J}_y$). On peut donc appliquer le théorème I à l'idéal pur $\mathfrak{J}$ et aux fonctions a_x^1 attachées aux divers points x de D : d'où l'existence d'une fonction a^1 *holomorphe sur* D et telle que, en tout point x de E, $a^1 - a_x^1$ appartienne à l'idéal $\mathfrak{J}_x$. Alors la différence $g - a^1 g_1$ appartient à $\mathfrak{J}_x$ en tout point x de D; et, comme le théorème à démontrer est vrai pour l'idéal $\mathfrak{J}$, il s'ensuit que $g - a^1 g_1$ est combinaison linéaire de $g_2, \ldots, g_p$ à coefficients holomorphes sur D. C. Q. F. D.

20. Signalons un cas particulier important du théorème II :

Corollaire du théorème II ([20]). — *Si p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ holomorphes sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*), *et à valeurs complexes, n'ont aucun zéro*

([19]) Voici comment on peut démontrer ce résultat (*cf.* Van der Waerden, *Moderne Algebra*, t. II, 2ᵉ éd., p. 37) : tout idéal ponctuel ayant une base finie, il s'ensuit que tout idéal ponctuel $\mathfrak{I}$ est intersection d'un nombre fini d'idéaux *primaires* $\mathfrak{I}_\alpha$ dont les variétés sont les composantes irréductibles de la variété de $\mathfrak{I}$. Par hypothèse, $fg \in \mathfrak{I}$, donc $fg \in \mathfrak{I}_\alpha$ pour tout α; il faut montrer que $g \in \mathfrak{I}_\alpha$ pour tout α. Or si $g \notin \mathfrak{I}_\alpha$, alors une puissance de f appartient à $\mathfrak{I}_\alpha$, donc f s'annule identiquement sur une des composantes irréductibles de la variété de l'idéal $\mathfrak{I}$. C. Q. F. D.

([20]) *Cf.* p. 22 du Mémoire cité dans la Note ([10]).

commun sur D, *il existe une identité*

$$\sum_{k=1}^{p} a_k f_k = 1$$

à coefficients a_k holomorphes sur D.

En effet, le théorème II est applicable à l'idéal de base $(f_1, \ldots, f_p)$, et à la fonction g identique à *un*.

On peut compléter ce résultat : si *un idéal* $\mathcal{I}$ (dont on ne suppose pas *a priori* qu'il ait une base finie) *sur un polycylindre compact* Δ *jouit de la propriété que les fonctions de* $\mathcal{I}$ *n'ont aucun zéro commun sur* Δ, *cet idéal est l'idéal-unité*. En effet l'idéal $\mathcal{I}$ contient un idéal de base finie qui jouit de la même propriété.

Disons tout de suite qu'on peut compléter le théorème II :

Supplément au théorème II. — *Moyennant les hypothèses du théorème* II, *l'idéal* $\mathcal{I}$ *de base* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est non seulement pur, mais parfait.*

Nous ne donnerons pas maintenant la démonstration de ce résultat, qui apparaîtra comme cas particulier d'un résultat plus général (§ VIII, n° 27).

VII. — Module dérivé d'un système de fonctions.

21. Soient $f_1, \ldots, f_p$ p fonctions holomorphes (à q dimensions) sur un ensemble E. En chaque point x de E, considérons les systèmes de p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ (à valeurs complexes) *holomorphes au point* x et satisfaisant à l'identité

$$\sum_{k=1}^{p} c_k f_k = 0.$$

Chacun de ces systèmes peut être considéré comme une fonction à valeurs dans l'espace à p dimensions, et il est clair que ces systèmes forment un *module* (ponctuel) à p dimensions. Nous l'appellerons le *module dérivé*, *au point* x, du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Définition. — Un système de p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ (à q dimensions), holomorphes sur un ensemble compact Δ, sera dit *faiblement dérivable sur* Δ s'il existe, sur Δ, un module $\mathcal{M}$ (à p dimensions) qui, en chaque point x de Δ, engendre le module dérivé (au point x) du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Il est clair que si un système $(f_1, \ldots, f_p)$ est faiblement dérivable sur Δ, il est aussi faiblement dérivable sur tout ensemble compact contenu dans Δ. D'autre part, si $c_1, \ldots, c_p$ sont les composantes d'un élément quelconque du module $\mathfrak{M}$ de la définition précédente, on a, sur Δ, l'identité

$$\sum_{k=1}^{p} c_k f_k = 0,$$

puisque cette identité a lieu au voisinage de chaque point de Δ. On voit que : pour que $(f_1, \ldots, f_p)$ soit faiblement dérivable sur Δ, il faut et il suffit que, si $\mathfrak{L}$ désigne le module de *tous* les systèmes $(c_1, \ldots, c_p)$ holomorphes sur Δ et satisfaisant à l'identité précédente, le module $\mathfrak{L}$ engendre, en chaque point x de Δ, le module dérivé (au point x) du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Faisons tout de suite la remarque suivante : si un système $(f_1, \ldots, f_p)$ est faiblement dérivable sur Δ, tout système $(g_1, \ldots, g_p)$, qui se déduit du premier par une substitution linéaire à coefficients holomorphes et à déterminant $\neq 0$ en tout point de Δ, est faiblement dérivable sur Δ.

Définition. — Un système de p fonctions $f_1, \ldots, f_p$ (à q dimensions), holomorphes sur un polycylindre compact Δ, sera dit *dérivable sur* Δ s'il existe, sur Δ, un module *pur* $\mathfrak{M}$ (à p dimensions) qui, en chaque point x de Δ, engendre le module dérivé (au point x) du système $(f_1, \ldots, f_p)$.

Il est clair que si un système $(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable sur Δ, il est dérivable sur tout polycylindre compact contenu dans Δ. D'autre part, le module $\mathfrak{L}$ défini plus haut, contient $\mathfrak{M}$, donc est identique à $\mathfrak{M}$ si $\mathfrak{M}$ est pur; autrement dit : le module pur $\mathfrak{M}$ de la définition précédente est *unique* s'il existe; c'est le module $\mathfrak{L}$. On l'appellera alors le *module dérivé*, sur Δ, du système $(f_1, \ldots, f_p)$. On a la propriété importante que voici : *si* $(f_1, \ldots, f_p)$ *est dérivable sur* Δ, *son module dérivé engendre, sur tout polycylindre compact* Δ' *contenu dans* Δ, *le module dérivé sur* Δ'. En effet, le module dérivé sur Δ étant pur, engendre sur Δ' un module pur.

Faisons encore une remarque : par une substitution linéaire, holomorphe et inversible sur Δ, un système $(f_1, \ldots, f_p)$ *dérivable sur* Δ est transformé en un système dérivable, et les deux systèmes dérivés se déduisent l'un de l'autre par la transformation contragrédiente.

22. Lemme IV. — *Si un module pur, sur un polycylindre compact* Δ, *possède une base faiblement dérivable, ce module est parfait.*

En effet, soit $\mathfrak{M}$ un module pur sur Δ, et soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de $\mathfrak{M}$, supposée faiblement dérivable sur Δ. Nous voulons montrer que si un module $\mathfrak{N}$, sur Δ, engendre en chaque point x de Δ le même module $\mathfrak{M}_x$ que $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ est identique à $\mathfrak{M}$. Or, puisque $\mathfrak{M}$ est pur, on sait déjà que $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Il reste à montrer que $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$; pour cela, soit $\mathfrak{H}$ un sous-module de $\mathfrak{N}$, *ayant une base finie*, et engendrant en chaque point de Δ le même module que $\mathfrak{N}$, c'est-à-dire le module ponctuel $\mathfrak{M}_x$; il suffira de montrer que $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$. Dans ce but nous montrerons que $\mathfrak{M}$ possède une base de p fonctions dont chacune appartient à $\mathcal{H}$.

Tout d'abord, soient φ_i les fonctions (en nombre fini) qui servent de base à $\mathcal{H}$. On a des identités

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{p} u_{ik} f_k,$$

les u_{ik} étant holomorphes sur Δ. D'autre part, en chaque point x de Δ, la fonction f_1 (par exemple) appartient au module $\mathcal{H}_x = \mathfrak{M}_x$, d'où

$$f_1 = \sum_i a_i \varphi_i,$$

les a_i étant holomorphes *au point* x. On a donc, au voisinage de x, l'identité

$$\left(\sum_i a_i u_{i1} - 1\right) f_1 + \sum_{k=2}^{p} \left(\sum_i a_i u_{ik}\right) f_k = 0.$$

Le système $(f_1, \ldots, f_p)$ étant, par hypothèse, faiblement dérivable sur Δ, il existe un nombre fini de systèmes $(c_1^\alpha, \ldots, c_p^\alpha)$ holomorphes sur Δ et y satisfaisant aux identités

$$\sum_{k=1}^{p} c_k^\alpha f_k = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha,$$

et tels que $\sum_i a_i u_{i1} - 1$ soit combinaison linéaire des c_1^α à coefficients holomorphes au point x. Il en résulte que les fonctions u_{i1} et c_1^α ne s'annulent pas toutes au point x. Or ce raisonnement vaut pour tout point x de Δ, à cela près que les c_1^α dépendent peut-être du point x. Quoi qu'il en soit, les c_1^α appartiennent à l'idéal $\mathcal{I}$ des fonctions c_1 (holomorphes sur Δ) telles que $c_1 f_1$ appartienne à l idéal de base $(f_2, \ldots, f_p)$. Ainsi l'idéal $\mathcal{J}$, engendré par $\mathcal{I}$ et les u_{i1}, engendre, en chaque point x de Δ, l'idéal-unité; il en résulte (§ VI, n° 20, corollaire du théorème II) l'existence d'une identité

$$\sum_i A_i u_{i1} - 1 = \sum_\alpha B_\alpha c_1^\alpha,$$

où n'interviennent qu'un nombre fini de fonctions c_1^α de $\mathcal{I}$, et où les coefficients A_i et B_α sont *holomorphes sur* Δ. Alors

$$\left(\sum_i A_i u_{i1} - 1\right) f_1$$

appartient, sur Δ, à l'idéal de base $f_2, \ldots, f_p$; d'où finalement une identité de la forme

$$\sum_i A_i \varphi_i = f_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f_k,$$

à coefficients λ_k holomorphes sur Δ. Posons

$$f_1 + \sum_{k=2}^{p} \lambda_k f_k = f'_1;$$

les fonctions $f'_1, f_2, \ldots, f_p$ constituent une base du module $\mathfrak{M}$, et *la fonction* f'_1 *appartient à* $\mathcal{H}$.

On peut recommencer le même raisonnement, f_2 prenant la place de f_1, et $f'_1, f_3, \ldots, f_p$ la place de $f_2, f_3, \ldots, f_p$. En effet, le système $(f'_1, f_2, \ldots, f_p)$ se déduit du système $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ par une substitution linéaire, holomorphe et inversible sur Δ; donc il est, lui aussi, faiblement dérivable. Alors on prouve l'existence d'une fonction

$$f'_2 = f_2 + \mu_1 f'_1 + \sum_{k=3}^{p} \mu_k f_k,$$

qui appartient à $\mathcal{H}$, et l'on peut prendre $f'_1, f'_2, f_3, \ldots, f_p$ comme nouvelle base de $\mathfrak{M}$. En poursuivant ainsi, l'on trouvera une base $(f'_1, f'_2, \ldots, f'_p)$ du module $\mathfrak{M}$, et chacune des fonctions de cette base appartiendra à $\mathcal{H}$. On a donc bien $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$, qui démontre le lemme IV.

23. Voici encore un lemme qui nous sera utile :

LEMME V. — *Soit, sur un polycylindre* D (*compact ou ouvert*), *un module* $\mathfrak{M}$ *qui possède une base finie* $f_1, \ldots, f_p$. *Si cette base est dérivable sur tout polycylindre compact contenu dans* D, *le module* $\mathfrak{M}$ *est identique à son associé. En particulier* (en appliquant le présent lemme aux polycylindres compacts contenus dans D), *le module* $\mathfrak{M}$ *est pur, et par suite* (en appliquant le lemme IV aux polycylindres compacts contenus dans D) *parfait.*

Faisons d'abord la démonstration lorsque D est *compact*. Nous devons montrer ceci : si une fonction f, holomorphe sur D, appartient, en tout point x de D, au module $\mathfrak{M}_x$ engendré par $\mathfrak{M}$ en ce point, alors f appartient à $\mathfrak{M}$. Or, une telle fonction f étant donnée, on peut, comme lors de la démonstration du théorème I (§ V, n° 15), recouvrir chaque composante δ_k de D ($k = 1, \ldots, n$) avec un nombre fini d'ensembles compacts δ_{ik} contenus dans δ_n, et, sur chaque polycylindre

$$x_1 \in \delta_{i_1 1}, \quad \ldots, \quad x_n \in \delta_{i_n n},$$

trouver p fonctions holomorphes $a_1, \ldots, a_p$ (à valeurs complexes) telles que l'identité

$$f = \sum_{j=1}^{p} a_j f_j$$

ait lieu sur ce polycylindre. On utilise alors la méthode d'assemblages successifs déjà exposée (§ V) : il suffit de savoir résoudre le « problème élémentaire » suivant :

Δ' et Δ'' désignant deux polycylindres compacts dont toutes les composantes, sauf une, sont les mêmes, on a une identité

$$f = \sum_j a'_j f_j \qquad \text{sur } \Delta',$$

et une identité

$$f = \sum_j a''_j f_j \qquad \text{sur } \Delta'';$$

il s'agit d'en déduire, sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, une identité

$$f = \sum_j b_j f_j$$

à coefficients holomorphes sur $\Delta' \cup \Delta''$. Or nous avons déjà indiqué au paragraphe IV (n° 12), à propos du « problème IV », comment on peut procéder. L'identité, sur $\Delta = \Delta' \cap \Delta''$,

$$\sum_j (a'_j - a''_j) f_j = 0$$

prouve que

$$a'_j - a''_j = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_j^\alpha,$$

les c_j^α étant holomorphes sur $\Delta' \cup \Delta''$ et y satisfaisant à $\sum_j c_j^\alpha f_j \equiv 0$ pour tout α, et les λ_α étant holomorphes sur Δ. Comme on a

$$\lambda_\alpha = \lambda'_\alpha - \lambda''_\alpha,$$

λ'_α étant holomorphe sur Δ' et λ''_α sur Δ'', on a, sur Δ,

$$a'_j - \sum_\alpha \lambda'_\alpha c_j^\alpha = a''_j - \sum_\alpha \lambda''_\alpha c_j^\alpha.$$

La fonction b_j égale, sur Δ', au premier membre, et, sur Δ'', au second membre, est holomorphe sur $\Delta' \cup \Delta''$; en outre

$$f = \sum_j b_j f_j.$$

Et ceci achève la démonstration, au moins dans le cas où le polycylindre donné D est *compact*.

Lorsque D est *ouvert*, il reste à effectuer un passage à la limite. D est réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts D_i, à chacun desquels on peut appliquer le lemme. Il existe donc des b_{ij} holomorphes sur D_i, tels que

$$f = \sum_j b_{ij} f_j \qquad \text{sur } D_i.$$

Naturellement, pour chaque valeur de i, les b_{ij} ne sont pas uniques : on peut leur rajouter des c_j holomorphes sur D_i et tels que $\sum_j c_j f_j = 0$. Nous allons profiter de cette circonstance pour montrer que les b_{ij} peuvent être choisis de manière à avoir

$$(1) \qquad |b_{i+1,j}(x) - b_{ij}(x)| \leqq 2^{-i} \qquad \text{pour tout } x \text{ de } D_i,$$

quel que soit j.

En effet, supposons déjà choisis les b_{ij} pour $i \leqq r$, et montrons que l'on peut choisir $b_{r+1,j}$ de manière que l'on ait

$$|b_{r+1,j}(x) - b_{rj}(x)| \leqq 2^{-r} \qquad \text{pour tout } x \text{ de } D_r.$$

Tout d'abord, il existe des $b_{r+1,j}$ tels que

$$f = \sum_j b_{r+1,j} f_j \qquad \text{sur } D_r,$$

d'où

$$\sum_j (b_{r+1,j} - b_{rj}) f_j = 0 \qquad \text{sur } D_r.$$

Puisque le système $(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable sur D_{r+1}, on a

$$b_{r+1,j} - b_{rj} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_j^\alpha,$$

les c_j^α étant holomorphes sur D_{r+1} et y satisfaisant à

$$\sum_j c_j^\alpha f_j = 0 \qquad \text{pour tout } \alpha,$$

et les λ_α étant holomorphes sur D_r. Mais les λ_α peuvent être uniformément approchés, sur D_r, par des fonctions μ_α holomorphes sur D_{r+1} ; de sorte qu'en remplaçant $b_{r+1,j}$ par $b_{r+1,j} - \sum_\alpha \mu_\alpha c_j^\alpha$, on arrive à réaliser les inégalités (1) relatives à $i = r$.

Cela étant, les inégalités (1) étant maintenant supposées vérifiées pour tout i, on voit que la suite des b_{ij} $(i = 1, 2, \ldots)$ converge, lorsque $i \to \infty$, vers une fonction b_j *holomorphe sur* D; et, en passant à la limite pour $i \to \infty$, on obtient l'identité

$$f = \sum_j b_j f_j$$

valable dans D tout entier. Ceci achève la démonstration du lemme V.

VIII. — Modules dérivés d'un module donné.

24. Nous allons d'abord montrer :

Si une base finie d'un module $\mathfrak{M}$ (sur un polycylindre compact Δ) est faiblement dérivable sur D, *toute autre base finie est faiblement dérivable sur* Δ. *Si une base finie d'un module $\mathfrak{M}$ est dérivable, toute autre base finie est dérivable.*

En effet, d'après le lemme I (§ III, n° 9), tout changement de base peut s'obtenir par application successive des deux opérations suivantes :

1° ajouter à la base une ou plusieurs fonctions identiquement nulles, ou retrancher de la base une ou plusieurs fonctions identiquement nulles (s'il y en a);

2° effectuer sur la base une substitution linéaire holomorphe et inversible.

Il suffit de vérifier que chacune de ces opérations conserve à la base la propriété d'être faiblement dérivable, ou celle d'être dérivable. Pour l'opération 2°, c'est évident (et cela a déjà été signalé). Pour l'opération 1° : en chaque point, il faut rajouter (ou retrancher) aux composantes $c_1, \ldots, c_p$ de chaque élément du module dérivé, un certain nombre de composantes *arbitraires*; la proposition à démontrer se vérifie alors facilement.

On peut donc définir la notion de *module faiblement dérivable* et celle de *module dérivable*, puisque ces notions sont indépendantes de la base particulière choisie. Lorsqu'on parle de module faiblement dérivable, ou de module dérivable, *il est sous-entendu que le module a une base finie*.

25. Pour définir la notion de *module dérivé d'un module*, il nous faut introduire une *relation d'équivalence* entre modules sur un même ensemble E, que ces modules aient ou non le même nombre de dimensions.

Tout d'abord, deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E seront dits A-*équivalents* s'ils ont le même nombre de dimensions, et si les fonctions f' de $\mathfrak{M}'$ se déduisent des fonctions f de $\mathfrak{M}$ en effectuant, sur leurs composantes, une substitution linéaire homogène fixe (c'est-à-dire la même pour toutes les f), à coefficients holomorphes sur E, de déterminant $\neq 0$ en tout point de E.

Deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E, de dimensions q et q', seront dits B-*équivalents* si, q désignant par exemple le plus petit des entiers q et q', les fonctions de $\mathfrak{M}'$ sont celles dont les q premières composantes sont celles d'une fonction de $\mathfrak{M}$, et dont les $q'-q$ dernières composantes sont *arbitraires*.

Deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E, de dimensions q et q', seront dits C-*équivalents* si, q désignant par exemple le plus petit des entiers q et q', les fonctions de $\mathfrak{M}'$ sont celles dont les q premières composantes sont celles d'une fonction de $\mathfrak{M}$, et dont les $q'-q$ dernières composantes sont *nulles*.

Enfin, deux modules $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E seront *équivalents* (tout court), s'il existe une suite finie de modules sur E

$$\mathfrak{M},\quad \mathfrak{M}_1,\quad \ldots,\quad \mathfrak{M}_k,\quad \mathfrak{M}'$$

(dont le premier terme est $\mathfrak{M}$ et le dernier $\mathfrak{M}'$) telle que deux termes consécutifs quelconques de cette suite soient ou A-équivalents, ou B-équivalents, ou C-équivalents. La relation d'équivalence ainsi définie est bien symétrique, réflexive et transitive. Observons que si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}'$ sur E sont équivalents, les modules qu'ils engendrent sur un sous-ensemble quelconque de E sont aussi équivalents. Observons aussi que tout module équivalent à un module pur est pur, à un module parfait est parfait.

De ce qui précède, il résulte que si un module $\mathfrak{M}$ sur un polycylindre compact Δ est dérivable, *les modules dérivés de deux bases de $\mathfrak{M}$ sont équivalents.* Car un changement de base pour $\mathfrak{M}$ s'obtient par application successive d'opérations qui conduisent, pour le module dérivé, respectivement à l'A-équivalence et à la B-équivalence. On peut donc définir, à une équivalence près, *le module dérivé d'un module $\mathfrak{M}$*, lorsque $\mathfrak{M}$ est dérivable sur Δ.

26. Montrons maintenant : *si deux modules $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$, sur un polycylindre compact Δ, sont équivalents, et si l'un d'eux est dérivable, l'autre est aussi dérivable; en outre, les deux modules dérivés (dont chacun est défini à une équivalence près) sont équivalents.* (On pourra donc dire que l'opération de dérivation d'un module est compatible avec la relation d'équivalence). Il suffit de montrer : si deux modules $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont A-équivalents (resp. B-équivalents, resp. C-équivalents), et si l'un d'eux est dérivable, l'autre est aussi dérivable, et les deux modules dérivés sont équivalents. Or si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ sont A-équivalents, et si l'on choisit dans $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ deux bases formées de fonctions homologues, ces bases ont évidemment même module dérivé; donc la proposition est vraie dans ce cas. Si $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$ de dimensions q et q' $(q \leq q')$ sont B-équivalents, choisissons dans celui qui a le moindre nombre de dimensions une base $f^\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots)$, et désignons par $f_1^\alpha, \ldots, f_q^\alpha$ les composantes de chaque f^α; alors l'autre module admet la base formée : 1° des fonctions g^α dont les q premières composantes sont $f_1^\alpha, \ldots, f_q^\alpha$ et les $q'-q$ dernières sont 0; 2° des fonctions $h^\beta (\beta = q+1, \ldots, q')$ dont les composantes h_i^β sont égales à 1 si $i=\beta$, à zéro si $i \neq \beta$. *En chaque point*, le module dérivé de la première base se compose des

systèmes de fonctions $c_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots)$ tels que $\sum_\alpha c_\alpha f^\alpha = 0$; le module dérivé de la deuxième base se compose des systèmes de fonctions c_α et d_β tels que

$$\sum_\alpha c_\alpha g^\alpha + \sum_\beta d_\beta h^\beta = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\sum_\alpha c_\alpha f^\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad d_\beta = 0 \qquad \text{pour tout } \beta.$$

Donc, en chaque point, les modules dérivés sont C-équivalents. Il en résulte aussitôt que si le module $\mathcal{M}_1$ est dérivable sur Δ, $\mathcal{M}_2$ est *dérivable sur* Δ, et *vice versa*; et que, par un choix convenable des bases de $\mathcal{M}_1$ et de $\mathcal{M}_2$, les deux modules dérivés sont C-équivalents.

Enfin, si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont C-équivalents, on verrait de même que si l'un d'eux est dérivable, l'autre est dérivable; et que, par un choix convenable des bases de $\mathcal{M}_1$ et de $\mathcal{M}_2$, les deux modules dérivés sont B-équivalents.

Ainsi la proposition annoncée est démontrée. On verrait de même, plus facilement encore, que *si deux modules $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sur un polycylindre compact Δ sont équivalents, et si l'un d'eux est faiblement dérivable, l'autre est faiblement dérivable.*

N'envisageons désormais les modules qu'*à une équivalence près*; nous pourrons alors parler de *module dérivable*, de *module dérivé* d'un module donné. $\mathcal{M}$ étant un module dérivable sur Δ, soit $\mathcal{M}'$ le module dérivé; il se peut que $\mathcal{M}'$ soit, à son tour, dérivable; nous dirons alors que $\mathcal{M}$ est deux fois dérivable, et nous désignerons par $\mathcal{M}''$ le module dérivé de $\mathcal{M}'$, qui sera dit *module dérivé du second ordre* du module $\mathcal{M}$. On définit ainsi de proche en proche la notion de *module r fois dérivable* et celle de *module dérivé d'ordre r*. Enfin, nous dirons qu'un module $\mathcal{M}$ est $r+1$ *fois faiblement dérivable* s'il est r fois dérivable et si son dérivé d'ordre r est faiblement dérivable.

Remarque. — Si Δ se réduit à un point, tout module sur Δ est indéfiniment dérivable.

27. Nous terminerons ce paragraphe en étudiant les modules dérivés successifs d'un idéal $\mathcal{J}$ qui satisfait aux conditions du théorème II (§ VI, n° 17).

Lemme VI. — *Soit, sur un polycylindre compact Δ de l'espace à n dimensions, un idéal $\mathcal{J}$ dont la variété est à $n-p$ dimensions et qui possède une base formée de p fonctions. Un tel idéal est indéfiniment dérivable, et tous ses modules dérivés d'ordres $\geq p$ sont équivalents à zéro.*

Nous ferons la démonstration pour $p = 5$, à titre d'exemple, pour alléger l'exposé; le lecteur s'assurera qu'elle a un caractère général. Nous allons d'abord déterminer les modules dérivés successifs de l'idéal $\mathcal{I}$ *en un point*, d'ailleurs quelconque, du polycylindre Δ. Choisissons une base $(g_1, \ldots, g_p)$ de l'idéal $\mathcal{I}$ comme il est dit au lemme III (§ VI, n° 17). Le module dérivé $\mathcal{I}'$ se compose des systèmes de p fonctions $c_1, \ldots, c_p$ (holomorphes au point considéré) qui satisfont à l'identité $\sum_{k=1}^{p} c_k g_k = 0$; il contient donc (pour $p = 5$) les quatre systèmes

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} -g_2 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_3 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\ -g_4 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ -g_5 & 0 & 0 & 0 & g_1 \end{matrix}\right.$$

En outre $(c_1, \ldots, c_p)$ étant un système quelconque de $\mathcal{I}'$, on sait que c_1 appartient à l'idéal de base (g_2, g_3, g_4, g_5); donc tout système de $\mathcal{I}'$ est la somme d'une combinaison linéaire (à coefficients holomorphes) des quatre systèmes (1) et d'un système tel que $c_1 = 0$. En raisonnant ainsi de proche en proche, on trouve que le module dérivé $\mathcal{I}'$ possède une base $\mathcal{B}'$ formée des 10 systèmes (de 5 fonctions chacun)

$$(\mathcal{B}')\qquad \left\{\begin{matrix} -g_2 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_3 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\ -g_4 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ -g_5 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & -g_3 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & -g_4 & 0 & g_2 & 0 \\ 0 & -g_5 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & -g_4 & g_3 & 0 \\ 0 & 0 & -g_5 & 0 & g_3 \\ 0 & 0 & 0 & -g_5 & g_4 \end{matrix}\right.$$

Un raisonnement analogue prouve que le module dérivé $\mathcal{I}''$ de la base $\mathcal{B}'$ possède une base $\mathcal{B}''$ formée des 10 systèmes (de 10 fonctions chacun)

$$(\mathcal{B}'')\qquad \left\{\begin{matrix} -g_3 & g_2 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_4 & 0 & -g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_4 & g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_5 & 0 & -g_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & -g_5 & g_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_4 & -g_3 & 0 & g_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & 0 & g_3 & 0 & -g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_5 & -g_4 & 0 & 0 & g_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & g_4 & -g_3 \end{matrix}\right.$$

A son tour, la base $\mathcal{B}''$ a pour module dérivé $\mathcal{I}'''$, le module ayant pour base $\mathcal{B}'''$ les cinq systèmes de 10 fonctions

$$(\mathcal{B}''') \quad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} g_4 & g_3 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 & 0 \\ -g_5 & 0 & g_3 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & -g_5 & -g_4 & 0 & 0 & g_2 & 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_5 & -g_4 & -g_3 & 0 & 0 & 0 & g_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -g_5 & -g_4 & -g_3 & -g_2 \end{array} \right.$$

et $\mathcal{B}'''$ a pour module dérivé $\mathcal{I}^{(4)}$, le module ayant pour base l'unique système de 5 fonctions

$$(\mathcal{B}^{(4)}) \qquad g_5, \quad g_4, \quad g_3, \quad g_2, \quad g_1,$$

dont le module dérivé est évidemment *nul*.

Remarquons que les entiers successifs qui s'introduisent : 1, 5, 10, 10, 5, 1, ne sont autres que les coefficients du binome pour la puissance cinquième. Le fait est général.

Puisque le module dérivé $\mathcal{I}'$ en un point quelconque de Δ a une base $\mathcal{B}$ formée de fonctions *holomorphes sur* Δ, l'idéal $\mathcal{I}$ est *faiblement dérivable sur* Δ. Il en est de même des modules $\mathcal{I}'$, $\mathcal{I}''$, $\mathcal{I}'''$, $\mathcal{I}^{(4)}$. Pour montrer que $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}'$, $\mathcal{I}''$, $\mathcal{I}'''$, $\mathcal{I}^{(4)}$ sont *dérivables sur* Δ, il reste à montrer que les modules $\mathcal{I}'$, $\mathcal{I}''$, ..., $\mathcal{I}^{(5)}$ sont *purs*. Pour $\mathcal{I}^{(5)}$, c'est trivial puisque le module $\mathcal{I}^{(5)}$ est nul. Il en résulte que $\mathcal{I}^{(4)}$ est dérivable sur Δ, donc (lemme V) est pur (et même parfait). Mais alors $\mathcal{I}'''$ est dérivable sur Δ, donc (lemme V) est pur (et même parfait). En remontant ainsi, on voit que $\mathcal{I}$ *est parfait*, indéfiniment dérivable, et que tous ses modules dérivés successifs sont $\mathcal{I}'$, $\mathcal{I}''$, ... sont parfaits.

Nous avons ainsi établi non seulement le lemme VI, mais le *supplément au théorème* II annoncé au § VI (n° 20). Remarquons, en passant, que la démonstration du lemme VI, qui est indépendante du théorème II, fournit une nouvelle preuve de ce théorème.

IX. — Le théorème fondamental.

28. Nous allons pouvoir résoudre, dans un cas particulier, les problèmes posés au paragraphe 4.

THÉORÈME III (théorème fondamental). — *Soit* Δ *un polycylindre compact et simplement connexe de l'espace à* n *dimensions. Soit sur* Δ *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathfrak{M}_x$ *jouissant de la propriété suivante : tout point de* Δ *possède un voisinage compact* V *sur lequel existe un module* $n+1$ *fois faiblement dérivable qui engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* $\Delta \cap$ V. *Alors le module* $\mathfrak{R}$, *associé au système cohérent, engendre* $\mathfrak{M}_x$ *en tout point* x *de* Δ, *et ce module* $\mathfrak{R}$ *est parfait.*

Remarque. — Le module $\mathfrak{P}$ associé au système cohérent a donc une *base finie*; et c'est *le seul module, sur Δ, qui engendre $\mathcal{M}_x$ en tout point x de Δ.*

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, il sera commode d'établir un lemme :

LEMME VII. — *Soit Δ un ensemble compact, et soit, sur Δ, un système cohérent de modules ponctuels $\mathcal{M}_x$. Il existe un voisinage ouvert* D *de Δ, et un système cohérent sur* D, *qui prolonge le système précédent.*

En effet, recouvrons Δ avec un nombre *fini* d'ensembles ouverts bornés V_i tels que, sur l'adhérence [21] $\overline{V}_i$ de chacun d'eux, existe une base finie $\mathcal{B}_i$ qui, en chaque point x de $\overline{V}_i \cap \Delta$, engendre le module $\mathcal{M}_x$ du système cohérent donné sur Δ. Montrons l'existence d'un voisinage ouvert D de Δ, tel que, pour chaque point x de D, les bases $\mathcal{B}_i$ relatives aux divers ensembles V_i qui contiennent x engendrent au point x le même module ponctuel; si $\mathcal{N}_x$ désigne ce module ponctuel, les $\mathcal{N}_x$ (où x parcourt D) constitueront un système cohérent dont l'existence établira le lemme.

Or, pour prouver l'existence de D, raisonnons par l'absurde. Si D n'existait pas, on pourrait trouver une suite de points $x^1, \ldots, x^k, \ldots$, ayant pour limite un point a de Δ, et tels par exemple que, pour tout k, x^k appartienne à la fois à V_1 et à V_2, les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ engendrant en x^k des modules différents. Alors a appartient à $\overline{V}_1$ et à $\overline{V}_2$; donc les fonctions de $\mathcal{B}_1$ et de $\mathcal{B}_2$ sont holomorphes au point a et y engendrent le même module $\mathcal{M}_a$; mais on sait (*voir* § IV, n° 10, et Appendice I) que, dans ces conditions, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ engendrent le même module en tout point suffisamment voisin de a. D'où la contradiction cherchée.

29. Ce lemme étant établi, nous voyons que, dans les hypothèses du théorème III à démontrer, nous pourrons supposer que le système cohérent des $\mathcal{M}_x$ est donné sur un polycylindre *ouvert* D contenant Δ, et que tout point a de D possède un voisinage compact V (contenu dans D) sur lequel existe un module $n+1$ fois dérivable qui engendre $\mathcal{M}_x$ en chaque point de V. Cela étant, nous établirons, par récurrence sur l'entier r ($0 \leqq r \leqq n$), une série de propositions intermédiaires que voici :

Proposition A_r. — Soit D un polycylindre ouvert de l'espace à n dimensions. Soit, sur D, un système cohérent de modules ponctuels $\mathcal{M}_x$ jouissant de la propriété suivante : tout point a de D possède un voisinage compact V (contenu

---

([21]) L'*adhérence*, ou *fermeture*, d'un ensemble se compose de la réunion de cet ensemble et de sa frontière.

dans D) sur lequel existe un module pur $\mathfrak{N}$, *r fois faiblement dérivable* ([22]), qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de V. Alors, pour tout polycylindre Δ *compact, simplement connexe*, contenu dans D, *et dont les $n-r$ dernières composantes sont ponctuelles*, il existe un voisinage U de Δ (U contenu dans D), et, sur U, un module $\mathfrak{L}$ de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de U.

Proposition B_r. — Mêmes hypothèses que pour la proposition A_r, sauf que le module $\mathfrak{N}$ relatif à chaque V est supposé $r+1$ *fois faiblement dérivable.* La conclusion est la suivante : Δ possède un voisinage compact W (contenu dans le voisinage U défini par la proposition A_r) tel que le module engendré sur W par le module $\mathfrak{L}$ (de la proposition A_r) soit *pur.*

Proposition B'_r. — Mêmes hypothèses que pour la proposition B_r. La conclusion est que Δ possède un voisinage compact W′ tel que le module engendré par $\mathfrak{L}$ sur W′ soit *parfait.*

Une fois ces propositions démontrées, la proposition B'_n entraînera évidemment le théorème III. Tout revient donc à prouver A_r, B_r et B'_r pour $0 \leqq r \leqq n$. Pour cela, montrons d'abord que *les propositions* A_r *et* B_r *entraînent la proposition* B'_r. En effet, dans les hypothèses de B'_r, la proposition A_r est applicable au polycylindre Δ (qui, par hypothèse, est compact, simplement connexe, et a ses $n-r$ dernières composantes *ponctuelles*); on trouve donc, sur un voisinage U de Δ, un module $\mathfrak{L}$ de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de U. On peut supposer que U est un polycylindre ouvert, et considérer, en chaque point de U, le module (ponctuel) *dérivé* du module $\mathfrak{L}$. Ces modules dérivés forment, sur U, un système cohérent de modules ponctuels qui remplit les conditions de la proposition A_r. Donc il existe un voisinage compact U_1 de Δ sur lequel le module $\mathfrak{L}$ *est faiblement dérivable*; W ayant la signification de la proposition B_r (appliquée au système cohérent des $\mathfrak{M}_x$), on voit que, sur l'intersection $W \cap U_1$, le module $\mathfrak{L}$ est *pur et faiblement dérivable*; d'après le lemme IV (§ VII, n° 22), il est *parfait.* Et ceci établit précisément la proposition B'_r.

30. Il suffira donc, pour chaque valeur de r, d'établir successivement les propositions A_r et B_r. Or, les propositions A_0 et B_0 sont triviales. Nous allons prouver que, pour tout entier r tel que $1 \leqq r \leqq n$, les propositions A_{r-1} et B'_{r-1} entraînent A_r; et que les propositions B_{r-1} et A_r entraînent B_r. Ceci suffira à établir le théorème III.

([22]) Pour $r=0$, il faut laisser tomber la condition « r fois dérivable ». Pour $r \geqq 2$, la condition « r fois faiblement dérivable », qui entraîne que le module est *dérivable*, entraîne que le module est pur (*cf.* lemme V, § VII, n° 23).

1° *Les propositions* A_{r-1} *et* B'_{r-1} *entraînent la proposition* A_r.

Considérons un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ qui satisfasse aux hypothèses de la proposition A_r. Soit donné un polycylindre Δ, compact et simplement connexe, dont les $n-r$ dernières composantes sont ponctuelles. Désignons par δ_r sa $r^{\text{ième}}$ composante, qui est un ensemble compact dans le plan de la variable x_r. A chaque point x_r de δ_r, associons le polycylindre $\Delta(x_r)$ dont la $r^{\text{ième}}$ composante est réduite au point x_r, et dont les autres composantes sont celles de Δ. Nous pouvons appliquer à $\Delta(x_r)$ les propositions A_r et B'_{r-1} ; il existe donc un voisinage $U(x_r)$ du polycylindre $\Delta(x_r)$ et, sur $U(x_r)$ (qu'on peut supposer être un polycylindre compact et simplement connexe), un module *parfait* qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en tout point x de $U(x_r)$. En vertu de la compacité de δ_r, on arrive au résultat suivant : il existe un nombre *fini* de polycylindres U_i, compacts et simplement connexes, qui tous ont mêmes composantes respectivement dans les plans de toutes les variables sauf de la variable x_r, et dont la réunion U est un voisinage de Δ; et, sur chaque U_i, il existe un module *parfait* $\mathfrak{T}_i$ qui, en chaque point x de U_i, engendre le module ponctuel $\mathfrak{M}_x$. Pour établir la proposition A_r, il reste à prouver qu'il existe, sur U, un module $\mathfrak{T}$ de base finie qui engendre, sur chaque U_i, le module $\mathfrak{T}_i$. Or, désignons par U'_i la réunion des U_j relatifs aux indices $j \leqq i$; on a pu choisir les U_i de manière que les U'_i soient *simplement connexes* ([23]). Alors, pour $i \geqq 1$, les intersections $U'_{i-1} \cap U_i$ sont simplement connexes. On va démontrer, par récurrence sur i, l'existence, sur U'_i, d'un module de base finie $\mathfrak{T}'_i$ qui, sur chacun des U_j tels que $j \leqq i$, engendre $\mathfrak{T}_j$. Pour $i=1$, il suffit de prendre $\mathfrak{T}'_1 = \mathfrak{T}_1$. Supposons l'existence de $\mathfrak{T}'_{i-1}$ démontrée; alors les modules de base finie $\mathfrak{T}'_{i-1}$ et $\mathfrak{T}_i$ engendrent, en chaque point de $U'_{i-1} \cap U_i$, le même module ponctuel, donc ($\mathfrak{T}_i$ étant *parfait*) ils engendrent le même module sur $U'_{i-1} \cap U_i$. Appliquons le lemme II (§ III, n° 9) : il existe sur la réunion $U'_{i-1} \cup U_i = U'_i$ un module de base finie $\mathfrak{T}'_i$, qui engendre $\mathfrak{T}'_{i-1}$ sur U'_{i-1} et $\mathfrak{T}_i$ sur U_i. C. Q. F. D.

2° *Les propositions* B_{r-1} *et* A_r *entraînent la proposition* B_r.

Considérons un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ qui satisfasse aux hypothèses de la proposition B_r. Soit donné un polycylindre Δ, compact et

---

([23]) Il suffit de prouver la proposition suivante : étant donné, dans un plan, un ensemble ouvert d et un ensemble δ, compact et *simplement connexe*, contenu dans d, et étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une suite finie d'ensembles u_i, compacts et simplement connexes, contenus dans d, de diamètre $< \varepsilon$, telle que d'une part leur réunion constitue un voisinage de δ, et que, d'autre part, pour tout i la réunion u'_i des u_j relatifs aux indices $j \leqq i$ soit *simplement connexe*. Voici, brièvement, comment on peut prouver l'existence d'une telle suite : on enferme δ dans un domaine polygonal ouvert δ', simplement connexe et contenu dans c [*cf.* le lemme I du Mémoire cité dans la note ([10])]; puis, par une homéomorphie effectuée sur l'adhérence δ', on se ramène au cas où δ' est un *carré*, que l'on décompose alors en carrés arbitrairement petits à l'aide d'un quadrillage; chacun des petits carrés étant affecté de deux indices (celui de la ligne et celui de la colonne auxquelles il appartient), on range les petits carrés (fermés) suivant l'ordre lexicographique.

simplement connexe, dont les $n-r$ dernières composantes sont ponctuelles. Appliquons la proposition A_r : il existe un polycylindre ouvert U contenant Δ, et, sur U, un module $\mathfrak{L}$ de base finie qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x de U. Ayant choisi une base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{L}$, considérons, en chaque point de U, le module dérivé de cette base; on obtient, sur U, un système cohérent de modules ponctuels qui satisfait aux hypothèses de la proposition A_r; en appliquant cette proposition à ce nouveau système, et au polycylindre Δ, on trouve l'existence d'un voisinage U′ de $\Delta'(U' \subset U)$ sur lequel existe un module $\mathfrak{L}'$ de base finie qui, en tout point de U′, engendre le module (ponctuel) dérivé de la base $\mathfrak{B}$. On peut supposer que U′ est un polycylindre ouvert.

La proposition B_{r-1} est applicable à la fois au module $\mathfrak{L}$ et au module $\mathfrak{L}'$ sur le polycylindre U′. Donc, en désignant par δ_r la $r^{\text{ième}}$ composante de Δ, et par $\Delta(x_r)$ (pour chaque point x_r de δ_r) le polycylindre dont la $r^{\text{ième}}$ composante se réduit au point x_r et dont les autres composantes sont les mêmes que celles de Δ, on trouve que $\Delta(x_r)$ possède un voisinage $W(x_r)$ (qu'on peut supposer être un polycylindre compact) tel que $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ engendrent, sur $W(x_r)$, des modules *purs*. De là, grâce à la compacité de δ_r, on conclut à l'existence d'un nombre fini de polycylindres compacts W_i, qui tous ont mêmes composantes respectivement dans les plans de toutes les variables sauf de la variable x_r, et dont la réunion W est un voisinage de Δ; et, sur chaque W_i, les modules engendrés par $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ sont *purs*.

Reste à montrer que le module engendré par $\mathfrak{L}$ sur W est *pur*. Soit f une fonction holomorphe sur un polycylindre compact Δ' contenu dans W, et telle que f appartienne, en chaque point x de Δ', au module $\mathfrak{L}_x$ engendré par $\mathfrak{L}$ en ce point; il faut montrer que, dans ces conditions, f appartient au module engendré par $\mathfrak{L}$ sur Δ'. Posons $W_i \cap \Delta' = W'_i$; désignons par W''_i la réunion des W'_j pour $j \leq i$. Nous allons montrer, par récurrence sur i, que, sur W''_i, la fonction f appartient au module engendré par $\mathfrak{L}$. Or, ceci est vrai pour $i=1$, parce que $W''_1 = W'_1$ est contenu dans W_1, et que le module engendré par $\mathfrak{L}$ sur W_1 est *pur*. Supposons la proposition démontrée pour W''_{i-1}, et démontrons-la pour W''_i : sur W''_{i-1}, on a ($f_1, \ldots, f_p$ désignant les fonctions de la base $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{L}$)

$$f = \sum_{k=1}^{p} a_k f_k \qquad (a_k \text{ holomorphes sur } W''_{i-1}),$$

et, sur W'_i,

$$f = \sum_{k=1}^{p} b_k f_k \qquad (b_k \text{ holomorphes sur } W'_i).$$

Sur l'intersection $W''_{i-1} \cap W'_i$, qui est contenue dans W_i, on a donc

$$\sum_{k=1}^{p} (a_k - b_k) f_k = 0.$$

Or, puisque $\mathcal{P}'$ engendre sur W_i un module pur, $\mathcal{P}'$ engendre, sur le polycylindre $W'_{i-1} \cap W'_i$, le module dérivé (sur ce polycylindre) de la base $\mathcal{B}$; on en conclut (en raisonnant comme pour le lemme V, § VII, n° 23) que f est combinaison linéaire des f_k à coefficients holomorphes sur la réunion $W''_{i-1} \cup W'_i = W''$.

C. Q. F. D.

La démonstration du théorème III est ainsi achevée.

31. Nous allons maintenant étendre le théorème III au cas d'un polycylindre *ouvert*.

Théorème III *bis*. — *Soit* D *un polycylindre ouvert et simplement connexe de l'espace à n dimensions. Soit, sur* D, *un système cohérent de modules ponctuels* $\mathcal{M}_x$ *jouissant de la propriété suivante : tout point de* D *possède un voisinage compact* V (*contenu dans* D) *sur lequel existe un module* $n+1$ *fois faiblement dérivable qui engendre* $\mathcal{M}_x$ *en tout point* x *de* V. *Alors le module* $\mathcal{P}$, *associé au système cohérent, engendre* $\mathcal{M}_x$ *en tout point* x *de* D, *et ce module* $\mathcal{P}$ *est parfait.*

Remarque. — Contrairement à ce qui a lieu pour un polycylindre *compact* et simplement connexe (cas du théorème III), il n'est pas certain ici que $\mathcal{P}$ ait une base finie; il n'est pas certain non plus que $\mathcal{P}$ soit le seul module, sur D, qui engendre $\mathcal{M}_x$ en tout point x de D. Du moins, je n'ai pu parvenir à le démontrer.

Pour déduire le théorème III *bis* du théorème III, nous établirons un lemme :

Lemme VIII. — *Soit* D *un polycylindre ouvert, réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts* Δ_i. *Si un système cohérent de modules ponctuels* $\mathcal{M}_x$, *sur* D, *peut, sur chaque* Δ_i, *être engendré par un module pur* (module pur qui est nécessairement le module associé, sur Δ_i, au système cohérent), *alors le module* $\mathcal{P}$ *associé, sur* D, *au système cohérent, engendre* $\mathcal{M}_x$ *en tout point* x *de* D.

Démontrons d'abord que si une fonction f, holomorphe en un point a de D, appartient au module ponctuel $\mathcal{M}_a$, il existe un voisinage de a sur lequel f peut être uniformément approchée par les fonctions du module $\mathcal{P}$. Soit en effet i un entier tel que $a \in \Delta_i$. Soit $\mathcal{P}_i$ un module pur, sur Δ_i, qui engendre $\mathcal{M}_x$ en tout point x de Δ_i. Alors f est combinaison linéaire de fonctions de $\mathcal{P}_i$ à coefficients holomorphes sur un voisinage compact V de a. Sur V, ces coefficients peuvent être uniformément approchés par des fonctions holomorphes dans D; donc f, sur V, peut être uniformément approchée par des fonctions de $\mathcal{P}_i$. Mais toute fonction de $\mathcal{P}_i$ peut être, sur Δ_i, arbitrairement approchée par une fonction de $\mathcal{P}_{i+1}$, comme le montre un raisonnement analogue; et l'on peut poursuivre indéfiniment, de sorte que l'on peut trouver une suite de fonctions

$$f, \quad f_i, \quad f_{i+1}, \quad f_{i+2}, \quad \ldots \quad (f_{i+k} \in \mathcal{P}_{i+k})$$

telles que

$$|f_i - f| \leqq \varepsilon_i \quad \text{sur V},$$
$$|f_{i+1} - f_i| \leqq \varepsilon_{i+1} \quad \text{sur } \Delta_i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|f_{i+k+1} - f_{i+k}| \leqq \varepsilon_{i+k+1} \quad \text{sur } \Delta_{i+k}.$$

Si la série $\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \ldots$ est convergente et de somme ε, la suite des f_{i+k} converge, en tout point de D, vers une fonction g, *holomorphe sur* D (puisque la convergence est uniforme au voisinage de chaque point de D), et l'on a, sur V,

$$|f - g| \leqq \varepsilon.$$

D'autre part, en chaque point x de D, les f_{i+k} appartiennent à $\mathfrak{M}_x$, donc g appartient à $\mathfrak{M}_x$ ([17]) en tout point x; autrement dit, g appartient au module $\mathfrak{L}$.

Prouvons maintenant le lemme VIII. Soit $\mathfrak{L}_a$ le module engendré par $\mathfrak{L}$ au point a. Nous voulons montrer que $\mathfrak{L}_a = \mathfrak{M}_a$. On a évidemment $\mathfrak{L}_a \subset \mathfrak{M}_a$. Soit f une fonction de $\mathfrak{M}_a$; montrons que f appartient à $\mathfrak{L}_a$: il existe, on vient de le voir, un voisinage compact V de a sur lequel f est limite uniforme de fonctions de $\mathfrak{L}_a$; donc f appartient au module ponctuel $\mathfrak{L}_a$. C. Q. F. D.

Ce lemme étant établi, le théorème III *bis* se démontre immédiatement en considérant le polycylindre D, ouvert et simplement connexe, comme réunion d'une suite croissante de polycylindres compacts et simplement connexes, auxquels on applique le théorème III.

32. Tirons maintenant quelques conséquences faciles des théorèmes III et III *bis*. Tout d'abord :

Corollaire du théorème III. — *Soit Δ un polycylindre compact et simplement connexe de l'espace à n dimensions. Si un module $\mathfrak{M}$, sur Δ, jouit de la propriété que tout point de Δ possède un voisinage compact* V *sur lequel existe un module $n+1$ fois faiblement dérivable qui, en chaque point x de $\Delta \cap$ V, engendre le même module que $\mathfrak{M}$, alors le module $\mathfrak{M}$ est parfait; en particulier, $\mathfrak{M}$ possède une base finie.*

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème III au système cohérent engendré par $\mathfrak{M}$.

Théorème IV. — *Soit* D *un polycylindre simplement connexe (compact ou ouvert) de l'espace à n dimensions. Soit, sur* D, *un système cohérent d'idéaux ponctuels $\mathcal{I}_x$ jouissant de la propriété suivante : en chaque point x de* D, *l'idéal $\mathcal{I}_x$ possède une base de p fonctions et sa variété est à $n - p$ dimensions (p est un entier indépendant du point x). Alors l'idéal $\mathcal{J}$, associé au système cohérent, engendre $\mathcal{I}_x$ en tout point x de* D, *et cet idéal est parfait. En outre : sur tout polycylindre compact Δ contenu dans* D, *l'idéal $\mathcal{J}_\Delta$ est dérivable, et son module dérivé est parfait; l'idéal $\mathcal{J}_\Delta$ est même indéfiniment dérivable.*

Pour prouver la première partie de ce théorème, on observe que, d'après le lemme VI (§ VIII, n° 27), les conditions d'application des théorèmes III et III *bis* sont remplies. Pour prouver la seconde partie, on considère sur Δ, le système cohérent des modules dérivés (ponctuels) d'une base de l'idéal $\mathfrak{J}_\Delta$, système qui, lui aussi (d'après le lemme VI), remplit les conditions du théorème III. C. Q. F. D.

Pour terminer, on peut combiner les conclusions du théorème IV et celles du théorème I : celui-ci est en effet applicable à l'idéal $\mathfrak{J}$ du théorème IV. En particulier :

Soit un polycylindre D *et un système cohérent d'idéaux ponctuels* $\mathfrak{I}_x$ *satisfaisant aux conditions du théorème* IV; *soit* φ *une fonction holomorphe sur la variété du système cohérent* (c'est-à-dire holomorphe au voisinage de chaque point x de D en lequel l'idéal $\mathfrak{I}_x$ n'est pas l'idéal-unité). *Alors il existe une fonction f holomorphe sur* D, *et égale à* φ *en tout point de la variété du système cohérent.*

X. — Applications du théorème fondamental.

33. Soit, dans l'espace de r variables complexes $x_1, \ldots, x_r$, un ensemble *ouvert* A. On sait que, si A est un « domaine d'holomorphie » [24], A est « convexe par rapport à la famille des fonctions holomorphes dans A » [*voir* le Mémoire cité en [24]], d'où résulte le fait suivant : A est réunion d'une suite croissante d'ensembles *compacts* B_i, dont chacun peut être défini par un nombre *fini* d'inégalités

$$|f_k(x)| \leqq 1,$$

les f_k étant holomorphes dans A. Nous nous proposons d'étudier les ensembles de ce type, que nous appellerons *domaines polyédraux*. Ils ont été considérés en premier lieu par A. Weil (*Math. Ann.*, 111, 1935, p. 178-182; *voir* aussi *Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1034). Ainsi un domaine polyédral B est défini d'abord par la donnée d'un ensemble ouvert A, ensuite par celle d'un nombre fini s de fonctions *holomorphes dans* A, telles que l'ensemble B des points de A satisfaisant au système d'inégalités

$$|f_k(x)| \leqq 1$$

soit *compact*; il existe alors un nombre ρ assez grand pour que B soit contenu dans le polycylindre

$$|x_j| \leqq \rho \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

[24] *Voir* H. Cartan et P. Thullen, *Math. Annalen*, 106, 1932, pp. 617-647. En gros, un domaine d'holomorphie est un ensemble ouvert A dans lequel existe une fonction holomorphe qui n'est susceptible d'aucun prolongement analytique au delà de A.

Suivant une idée de A. Weil et K. Oka, le domaine polyédral B est isomorphe à une variété (à r dimensions) d'un polycylindre compact de l'espace à $r+s$ dimensions. En effet, dans l'espace des $n=r+s$ variables x_j et y_k ($1 \leqq j \leqq r$; $1 \leqq k \leqq s$), considérons le lieu V du point de coordonnées

$$x_1, \ldots, x_r, y_1=f_1(x), \ldots, y_s=f_s(x)$$

lorsque le point $x=(x_1, \ldots, x_r)$ décrit B; c'est une variété analytique complexe à r dimensions dans le polycylindre compact Δ

$$|x_j| \leqq \rho, \qquad |y_k| \leqq 1.$$

Au voisinage d'un point de V, les s fonctions

$$y_k - f_k(x)$$

engendrent un idéal (ponctuel); ces idéaux forment évidemment, *au voisinage de* V, un système cohérent; complétons-le en un système cohérent *sur le polycylindre* D, en attachant l'idéal-unité à chaque point de D non situé sur V. Les conditions du théorème IV (§ IX, n° 32) sont évidemment remplies. On obtient alors le résultat fondamental suivant :

La variété V *est l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions* $\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ *holomorphes sur le polycylindre* Δ. *En outre, toute fonction holomorphe sur* Δ *et qui s'annule sur* V, *est combinaison linéaire des* φ_α *à coefficients holomorphes sur* Δ.

Ce n'est pas tout. Soit $g(x)$ une fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_r$ sur le domaine polyédral B; g définit, au voisinage de la variété V du polycylindre Δ, une fonction holomorphe. Donc, d'après les résultats de la fin du paragraphe IX (n° 32), *il existe une fonction* $\gamma(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$, *holomorphe sur* Δ, *et égale à* g *sur* V; *autrement dit, une fonction* $\gamma(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$ *telle que l'on ait identiquement*

$$\gamma[x_1, \ldots, x_r, f_1(x), \ldots, f_s(x)] = g(x_1, \ldots, x_r)$$

sur le domaine polyédral B.

Sur le polycylindre Δ, la fonction γ est développable en série entière : donc, *sur* B, *toute fonction holomorphe* g *est limite uniforme de polynomes en* $x_1, \ldots, x_r, f_1(x), \ldots, f_s(x)$ ([25]). Il en résulte que *toute fonction holomorphe sur* B *est limite uniforme de fonctions holomorphes sur* A.

([25]) Ce résultat avait été obtenu par A. Weil (*Comptes rendus*, 194, 1932, p. 1034) dans le cas où les f_k sont des *polynomes* ou des *fractions rationnelles;* il avait été ensuite étendu au cas général par K. Oka [deuxième des Mémoires cités dans la note ([4])], mais par une tout autre voie que la nôtre.

34. Nous sommes aussi en mesure de résoudre un problème posé par A. Weil. Ce dernier a donné (*loc. cit.*) une formule intégrale qui exprime, en tout point intérieur à un domaine polyédral B, la valeur d'une fonction g holomorphe sur B, à l'aide d'intégrales étendues aux « arêtes » à r dimensions (réelles) du domaine polyédral; ces intégrales font intervenir seulement les valeurs de g sur ces arêtes. Mais, pour ce faire, Weil devait admettre l'existence de certaines identités qu'il ne pouvait établir que dans certains cas particuliers. Ainsi qu'il me l'a communiqué dans une lettre de décembre 1940, le problème peut, en toute généralité, se formuler ainsi : désignons par S_k la « face » du domaine polyédral B définie par

$$|f_k(x)| = 1, \qquad |f_j(x)| \leqq 1 \qquad \text{pour } j \neq k;$$

soient $h_\beta(x)$ des fonctions (en nombre *fini* quelconque) holomorphes sur B, et *sans zéro commun sur la frontière de* B; il s'agit de montrer que, pour chaque face S_k, il existe des fonctions $\lambda_\beta(x)$ *holomorphes sur cette face* et telles que l'on ait identiquement

$$\sum_\beta \lambda_\beta h_\beta = 1.$$

Or voici comment nous pouvons démontrer l'existence de telles fonctions λ_β. Faisons la démonstration pour la face S_1. Il existe, on l'a vu, des fonctions $H_\beta(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r)$ holomorphes sur le polycylindre Δ, et qui, sur la variété V définie par $y_k = f_k(x)$, se réduisent respectivement aux fonctions $h_\beta(x)$. La variété V étant, comme on l'a vu plus haut, définie par des équations

$$\varphi_\alpha(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) = 0,$$

on voit que, sur le polycylindre compact Δ',

$$|x_j| \leqq \rho, \qquad |y_1| = 1, \qquad |y_k| \leqq 1 \qquad \text{pour } k \geqq 2,$$

les fonctions φ_α et H_β n'ont aucun zéro commun; d'après le corollaire du théorème II (§ VI, n° 20), il existe des fonctions μ_α et Λ_β holomorphes sur Δ', et telles que l'on ait

$$\sum_\alpha \mu_\alpha \varphi_\alpha + \sum_\beta \Lambda_\beta H_\beta = 1$$

identiquement sur Δ'. Si dans cette identité on remplace les y_k par $f_k(x)$, les φ_α donnent *zéro*, les H_β se réduisent aux h_β, et les Λ_β se réduisent à des fonctions λ_β holomorphes sur S_1; d'où l'identité, sur S_1,

$$\sum_\beta \lambda_\beta h_\beta = 1.$$

C. Q. F. D.

XI. — Principaux problèmes restant à résoudre.

35. Nous signalerons seulement deux des problèmes essentiels à résoudre.

Premier problème. — *Les modules dérivés (ponctuels) d'un système fini quelconque de fonctions holomorphes forment-ils un système cohérent?* On peut voir facilement qu'il suffirait de résoudre ce problème dans le cas où les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ sont à valeurs complexes (c'est-à-dire de dimension $q = 1$). Et l'on voit aussi qu'il suffirait de résoudre le problème suivant : *$\mathfrak{I}$ désignant un idéal de base finie, et f une fonction holomorphe (à valeurs complexes), considérons, en chaque point x, l'idéal $\mathfrak{J}_x$ des fonctions qui appartiennent à $\mathfrak{I}_x$ et sont divisibles par f; ces idéaux forment-ils un système cohérent?* Autrement dit, si a désigne un point particulier, une base finie de $\mathfrak{J}_a$ engendre-t-elle $\mathfrak{J}_x$ en tous les points x suffisamment voisins de a?

Si ce problème pouvait être résolu, des déductions que nous n'exposerons pas ici montrent que le théorème III du paragraphe XI s'étendrait à tous les systèmes cohérents de modules ponctuels, sans exception. D'une façon précise, les trois énoncés suivants seraient vrais :

« Tout système cohérent de modules ponctuels, sur un polycylindre compact et simplement connexe, est engendré par le module associé à ce système » (Solution du problème I du § IV).

« Deux modules (sur un polycylindre Δ compact et simplement connexe) qui engendrent en chaque point de Δ des modules identiques, sont identiques » (Solution du problème II du § IV).

« Tout module, sur un polycylindre compact et simplement connexe, a une base finie. »

Deuxième problème. — *Soit* V *une variété analytique au voisinage d'un point a, $\mathfrak{I}_a$ l'idéal de cette variété au point a* (c'est-à-dire l'idéal des fonctions, holomorphes au point a, qui s'annulent identiquement sur V dans un voisinage de a). *Une base finie de $\mathfrak{I}_a$ engendre-t-elle, en tout point x de* V *suffisamment voisin de a, l'idéal $\mathfrak{I}_x$ de la variété* V *au point x?*

Si ce problème pouvait être résolu par l'affirmative, ainsi que le « premier problème », l'énoncé suivant serait exact : « Toute variété analytique (au sens du § I) sur un polycylindre Δ compact et simplement connexe, peut être obtenue comme l'ensemble des zéros communs à un nombre fini de fonctions *holomorphes sur* Δ ». Ce résultat n'a été démontré ici que dans le cas particulier des variétés analytiques considérées au paragraphe X.

XII'. — Extension aux domaines d'holomorphie, des résultats démontrés pour les polycylindres.

36. Tous les résultats des paragraphes V à IX inclus peuvent s'étendre à des domaines plus généraux que les polycylindres : tout ce qui a été démontré pour les polycylindres *compacts* (qu'on ait dû ou non les supposer simplement connexes) vaut pour tous les *domaines polyédraux* (définis au paragraphe X, n° 33); tout ce qui a été démontré pour les polycylindres *ouverts* (qu'on ait dû ou non les supposer simplement connexes) vaut pour tous les *domaines d'holomorphie,* au moins lorsqu'ils sont univalents (c'est-à-dire lorsqu'un point de l'espace n'est jamais recouvert par deux points distincts du domaine). La possibilité de cette extension repose sur les trois lemmes suivants :

Lemme A. — *Soit* B *un domaine polyédral de l'espace de* n *variables* $x_1, \ldots, x_n$; *soient* δ' *et* δ'' *deux polycylindres compacts ayant respectivement mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une, et soient* B' *et* B'' *les intersections respectives de* B *avec* δ' *et* δ''. *Alors toute fonction holomorphe sur l'intersection* $B' \cap B''$ *peut se mettre sous la forme de la différence entre une fonction holomorphe sur* B' *et une fonction holomorphe sur* B''.

Démonstration. — D'après le paragraphe X, B peut être assimilé à une variété V à n dimensions d'un polycylindre Δ

$$|x_i| \leqq \rho, \qquad |y_\alpha| \leqq 1 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, p).$$

Si, aux équations de ce polycylindre, on rajoute celles de δ'

$$x_i \in \delta'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient un polycylindre compact Δ' contenu dans Δ; de même, δ'' définit un polycylindre compact Δ'' contenu dans Δ; et Δ' et Δ'' ont mêmes composantes dans les plans de toutes les variables sauf une. Si f est une fonction holomorphe sur le domaine polyédral $B' \cap B''$, il existe une fonction

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$$

holomorphe sur $\Delta' \cap \Delta''$, dont la trace sur $V \cap \Delta' \cap \Delta''$ n'est autre que f (ceci a été démontré au paragraphe X). D'après un théorème classique (qui résulte immédiatement de la formule de Cauchy), φ est la différence entre une fonction φ' holomorphe sur Δ' et une fonction φ'' holomorphe sur Δ''. Les traces f' et f'' de ces fonctions sur $V \cap \Delta'$ et $V \cap \Delta''$ respectivement sont holomorphes sur B' et B'' respectivement, et leur différence, sur $B' \cap B''$, est f; ce qui démontre le lemme.

Lemme B. — *Les notations du lemme* A *étant conservées, supposons en outre que l'intersection* $\delta' \cap \delta''$ *soit simplement connexe. Si deux modules de bases finies* *(à un même nombre q de dimensions)* m' *sur* B', *et* m'' *sur* B'', *engendrent le même module sur* $B' \cap B''$, *alors il existe sur la réunion* $B' \cup B''$ *un module m de base finie qui engendre* m' *sur* B' *et* m'' *sur* B''.

Ce lemme, qui généralise le lemme II (§ IV), sauf qu'ici on ne peut plus préciser le nombre de fonctions que l'on peut donner à la base de m, s'y ramène de la façon suivante. Considérons, sur Δ' (mêmes notations que pour la démonstration du lemme A), le module $\mathfrak{M}'$ des fonctions dont la trace sur $V \cap \Delta'$ appartient au module m'; et, sur Δ'' le module $\mathfrak{M}''$ des fonctions dont la trace sur $V \cap \Delta''$ appartient à m''. Les modules $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ engendrent, sur $\Delta' \cap \Delta''$ (qui est simplement connexe), le même module, savoir celui des fonctions dont la trace sur $V \cap \Delta' \cap \Delta''$ appartient au module engendré par m' (ou par m'') sur $B' \cap B''$. De plus $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}''$ ont des bases finies (parce que l'idéal des fonctions qui s'annulent sur V a une base finie, d'après le paragraphe X). Le lemme II prouve alors l'existence, sur la réunion $\Delta' \cup \Delta''$, d'un module $\mathfrak{M}$ de base finie, qui engendre $\mathfrak{M}'$ sur Δ' et $\mathfrak{M}''$ sur Δ''. Les fonctions de cette base ont pour traces, sur V, des fonctions holomorphes sur $B' \cup B''$, et ces fonctions engendrent m' sur B', et m'' sur B''. C. Q. F. D.

LEMME C. — *Soit* D *un ensemble ouvert de l'espace* $(x_1, \ldots, x_n)$ *qui soit « domaine d'holomorphie »; on sait que* D *est réunion d'une suite croissante d'ensembles compacts* B_i, *dont chacun est un « domaine polyédral » défini par des inégalités en nombre fini*

$$|f_k(x)| \leqq 1 \qquad (f_k \text{ holomorphes dans D}).$$

Dans ces conditions, toute fonction holomorphe sur un B_i *peut être uniformément approchée par des fonctions holomorphes dans* D.

En effet, on a démontré au paragraphe 10 que toute fonction holomorphe sur B_i est limite uniforme de polynomes en $x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_p(x)$, les f_k désignant les fonctions qui servent précisément à définir B_i.

37. Une fois ces trois lemmes établis, tout le texte des paragraphes V à IX inclus peut se transposer, à condition de remplacer partout « polycylindre compact » par « domaine polyédral », et « polycylindre ouvert » par « domaine d'holomorphie ». Par exemple, les définitions de module *parfait* et de module *pur* sont à modifier en conséquence. On obtiendra ainsi notamment :

L'extension du théorème I (§ V) aux modules *purs* sur un domaine polyédral, ou sur un domaine d'holomorphie.

L'extension du théorème II (§ VI) aux idéaux (sur un domaine polyédral ou sur un domaine d'holomorphie) qui possèdent une base de p fonctions et dont la variété est à $n-p$ dimensions; en particulier, *si des fonctions* f_i *en nombre fini, holomorphes dans un domaine d'holomorphie* D, *n'ont aucun zéro commun* *dans* D, *il existe une identité*

$$\sum_i a_i f_i = 1,$$

à coefficients a_i *holomorphes dans* D.

L'extension du théorème III (théorème fondamental, § IX) : si B est un domaine polyédral de l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$, et si l'on a, sur B, un système cohérent de modules ponctuels $\mathfrak{M}_x$ qui, au voisinage de tout point, puisse être engendré par un module $n+1$ fois faiblement dérivable, il existe, sur B, *un module et un seul* qui engendre $\mathfrak{M}_x$ en chaque point x, et ce module a une *base finie*. Extension analogue du théorème III *bis*.

L'extension du théorème IV : si D est un domaine d'holomorphie, et si l'on a, sur D, un système cohérent d'idéaux ponctuels $\mathfrak{I}_x$ dont chacun possède une base de p fonctions et a une variété à $n-p$ dimensions, alors l'idéal associé au système cohérent engendre $\mathfrak{I}_x$ en chaque point x de D, et cet idéal est parfait, etc. En outre, toute fonction f holomorphe sur la variété V du système cohérent est égale, sur V, à la trace d'une fonction holomorphe sur D.

38. Pour terminer, faisons une remarque au sujet du problème de Cousin, qui consiste (*voir* l'Introduction, § I), étant donné dans D un système cohérent de *fonctions* f_x (c'est-à-dire une « donnée de Cousin »), à trouver une fonction unique f, holomorphe sur D, telle que, en chaque point x de D, le quotient $\frac{f}{f_x}$ soit holomorphe et $\neq 0$. Comme on l'a rappelé, ce problème n'admet pas de solution lorsque D est un polycylindre dont deux composantes au moins ne sont pas simplement connexes. Mais nos résultats généraux s'appliquent néanmoins à ce cas, et au cas plus général où D est un domaine d'holomorphie quelconque : il existe donc un *idéal* sur D (de base *finie* si D est un domaine polyédral) qui, en chaque point x de D, engendre l'idéal de base f_x; ce qui arrive, c'est simplement que cet idéal n'a pas nécessairement une base formée d'une fonction *unique*. Par conséquent, une variété à $n-1$ dimensions, dans un domaine d'holomorphie D, même lorsqu'elle ne peut pas être définie comme l'ensemble des zéros d'*une* fonction holomorphe sur D, peut toujours être définie comme l'ensemble des zéros communs à une famille de fonctions holomorphes sur D (cette famille étant *finie* lorsque D est un domaine polyédral).

APPENDICE I.

Idéaux et modules ponctuels.

1. Il est classique que tout idéal ponctuel a une base finie, d'où l'on déduit facilement que tout module ponctuel a une base finie. Je vais démontrer à nouveau ce résultat en le complétant; au cours de ce travail, j'ai eu besoin, en

effet, de résultats plus précis que je n'ai pas trouvés dans la littérature existante; je crois donc utile d'en donner ici la démonstration.

THÉORÈME α. — *Soit, en un point a de l'espace à n dimensions complexes, un nombre fini de modules ponctuels* $\mathcal{M}_j$ (à un nombre quelconque de dimensions, non nécessairement le même pour les différents $\mathcal{M}_j$). *Il existe, pour chaque* $\mathcal{M}_j$, *une base finie* $\mathcal{B}_j$; *en outre, on peut choisir les axes de coordonnées* ([26]) *de telle manière qu'il existe une famille* $\mathcal{F}$ *de polycylindres compacts constituant un système fondamental de voisinages* ([27]) *de a, et jouissant de la propriété suivante :* $\mathcal{M}_j$ *désignant l'un quelconque des modules donnés, et* W *l'un quelconque des voisinages de la famille* $\mathcal{F}$, *il existe une constante positive k telle que si une fonction f est holomorphe sur* W, *de valeur absolue* ([28]) $\leqq 1$ *sur* W, *et appartient au module* $\mathcal{M}_j$ *au point a, une telle f puisse se mettre (sur* W) *sous la forme d'une combinaison linéaire des fonctions de* $\mathcal{B}_j$, *les coefficients de cette combinaison étant holomorphes sur* W *et de valeurs absolues* $\leqq k$ *sur* W.

D'une façon précise, nous désignerons sous le nom de « théorème α_n » le théorème précédent relatif à l'espace à n dimensions. Un cas particulier du théorème α_n est celui que l'on obtient en supposant que, dans l'énoncé, les modules $\mathcal{M}_j$ sont tous à une dimension, c'est-à-dire sont des *idéaux* $\mathcal{I}_j$; nous désignerons sous le nom de théorème α'_n l'énoncé (plus faible) ainsi obtenu. Or il nous suffit de démontrer le théorème α'_n, car ce dernier entraîne à son tour le théorème α_n : en effet, si $\mathcal{M}$ est un module à q dimensions, on peut lui associer les q idéaux suivants :

l'idéal $\mathcal{I}_1$ des premières composantes des fonctions de $\mathcal{M}$;
l'idéal $\mathcal{I}_2$ des deuxièmes composantes de celles des fonctions de $\mathcal{M}$ dont la première composante est nulle;
. . . .
l'idéal $\mathcal{I}_q$ des dernières composantes de celles des fonctions de $\mathcal{M}$ dont les $q-1$ premières composantes sont nulles.

Si l'on opère ainsi pour chacun des modules du théorème α_n, on est amené à considérer une famille finie d'idéaux; et l'on vérifie aussitôt que le théorème α'_n, appliqué à ces idéaux, entraîne le théorème α_n pour les modules donnés.

([26]) C'est-à-dire effectuer, sur les coordonnées existantes, une substitution linéaire à coefficients constants, de déterminant non nul.

([27]) Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles constitue un *système fondamental de voisinages* de a, si chaque ensemble de $\mathcal{F}$ est un voisinage de a, et si tout voisinage de a contient au moins un ensemble de la famille $\mathcal{F}$.

([28]) Nous appelons *valeur absolue* d'une fonction f (à q dimensions) de composantes $f_1, \ldots, f_q$, la plus grande des valeurs absolues $|f_1|, \ldots, |f_q|$.

2. Cela dit, nous prouverons le théorème α'_n *par récurrence sur l'entier* n. Il est trivial pour $n=0$ (idéaux dans le corps des constantes complexes). Reste à montrer, pour chaque $n \geqq 1$, que, *si le théorème* α'_{n-1} *est vrai* (*et par suite aussi le théorème* α_{n-1}), *le théorème* α'_n *est vrai.*

Cherchons donc à démontrer le théorème α'_n. On peut se borner au cas où les idéaux $\mathcal{I}_j$ considérés sont tous différents de l'idéal-zéro. Le point a étant pris pour origine, choisissons le premier axe de coordonnées de manière que chacun des idéaux $\mathcal{I}_j$ possède une fonction g_j qui ne s'annule pas identiquement pour $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ (x_1 voisin de zéro). Dans ces conditions, il est classique ([29]) que chaque g_j est « équivalente » à un « polynome distingué »; rappelons qu'on appelle *polynome distingué* (au point a pris pour origine) un polynome en x_1 (éventuellement une constante) dont le coefficient du terme de degré le plus élevé est égal à 1, tous les autres coefficients étant holomorphes en $x_2, \ldots, x_n$ au voisinage de l'origine, et nuls à l'origine; et rappelons aussi que deux fonctions holomorphes au point a sont dites *équivalentes* si elles engendrent le même idéal en ce point. Ainsi, moyennant un choix convenable du premier axe de coordonnées, on peut supposer que chacun des idéaux $\mathcal{I}_j$ contient un polynome distingué en x_1, polynome que nous désignerons à nouveau par g_j; soit ρ_j son degré.

3. Admettons pour un instant le lemme suivant : *Soit* g *un polynome distingué en* x_1, *de degré* ρ, *et soient* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *des nombres* > 0 *tels que :* 1° *les coefficients de* g *soient holomorphes sur le polycylindre* δ

$$(\delta) \qquad |x_2| \leqq r_2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqq r_n;$$

2° *lorsque le point* $(x_2, \ldots, x_n)$ *appartient à* δ, *les racines* (*en* x_1) *du polynome* g *soient toutes de valeur absolue* $< r_1$. *Alors il existe un nombre positif* h *jouissant de la propriété suivante : si une fonction* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *est holomorphe sur le polycylindre* Δ

$$(\Delta) \qquad |x_1| \leqq r_1, \quad |x_2| \leqq r_2, \quad \ldots, \quad |x_n| \leqq r_n$$

et y satisfait à $|f| \leqq 1$, *elle satisfait, sur* Δ, *à une identité*

$$f = \lambda g + Q,$$

λ *étant holomorphe et de valeur absolue* $\leqq h$ *sur* Δ, *et* Q *étant un polynome en* x_1, *de degré* $\rho - 1$, *dont tous les coefficients sont holomorphes et de valeur absolue* $\leqq h$ *sur* δ.

Ce lemme étant provisoirement admis, démontrons le théorème α'_n. Pour chaque idéal $\mathcal{I}_j$, considérons l'ensemble $\mathfrak{M}_j$ de ceux des polynomes en x_1, de

---

([29]) *Voir* par exemple Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, II, 1.

degré $\rho - 1$, à coefficients holomorphes en $x_2, \ldots, x_n$ à l'origine, qui appartiennent à $\mathcal{I}_j$. L'ensemble $\mathfrak{M}_j$ est évidemment un module (à ρ dimensions) sur l'anneau des fonctions holomorphes des $n-1$ variables $x_2, \ldots, x_n$. Appliquons aux modules $\mathfrak{M}_j$ le théorème α_{n-1} : on obtient une base finie $\mathcal{C}_j$ pour chaque $\mathfrak{M}_j$, et un choix des coordonnées dans l'espace $(x_2, \ldots, x_n)$ tel qu'il existe une famille $\mathcal{G}$ de polycylindres compacts (de ce dernier espace) pour lesquels l'énoncé du théorème α_{n-1} est valable. Désignons alors par $\mathcal{B}_j$ l'ensemble formé des fonctions de $\mathcal{C}_j$ et de la fonction g_j; $\mathcal{B}_j$ est évidemment une base finie de $\mathcal{I}_j$. En outre, considérons, dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où les axes de coordonnées sont maintenant choisis, la famille $\mathcal{F}$ des polycylindres compacts de la forme

$$|x_1| \leqq r_1, \qquad (x_2, \ldots, x_n) \in \delta,$$

où δ désigne un polycylindre de la famille $\mathcal{G}$, tel que, lorsque $(x_2, \ldots, x_n) \in \delta$, les zéros de chacun des polynomes g_j satisfassent tous à $|x_1| < r_1$. Le lemme ci-dessus prouve immédiatement que l'énoncé du théorème α'_n est valable pour les bases finies $\mathcal{B}_j$ et la famille $\mathcal{F}$.

4. Il reste donc seulement à démontrer le lemme. Nous utiliserons pour cela l'intégrale de Cauchy. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{g(\xi, x_2, \ldots, x_n)} \frac{d\xi}{\xi - x_1}$$

est indépendante de r (r assez voisin de r_1 et $> r_1$); elle représente une fonction $\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ holomorphe sur Δ (notations du lemme). D'autre part, définissons

$$Q = f - \lambda g;$$

on a

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{g(\xi, x_2, \ldots, x_n)} \frac{g(\xi, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\xi - x_1} d\xi;$$

or

$$\frac{g(\xi, x_2, \ldots, x_n) - g(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\xi - x_1} = \sum_{p=0}^{\rho-1} (x_1)^p u_p(\xi, x_2, \ldots, x_n),$$

les u_p étant des polynomes en ξ, à coefficients holomorphes sur δ. D'où, en intégrant,

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p=0}^{\rho-1} (x_1)^p v_p(x_2, \ldots, x_n),$$

avec

$$v_p(x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} \frac{f(\xi, x_2, \ldots, x_n)}{g(\xi, x_2, \ldots, x_n)} u_p(\xi, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi.$$

Supposons $|f| \leqq 1$ sur Δ; alors $|v_p|$ reste, sur δ, inférieur à un nombre fixe (c'est-à-dire à un nombre qui dépend de g, mais ne dépend pas de f); donc $|\lambda g| = |f - Q|$ reste, sur Δ, inférieur à un nombre fixe. D'autre part, pour

$$|x_1| = r_1, \qquad (x_2, \ldots, x_n) \in \delta,$$

$|g|$ reste supérieur à un nombre positif fixe; donc $|\lambda|$ est majoré par un nombre fixe h; et cette majoration de $|\lambda|$ est encore valable sur Δ tout entier, puisque la valeur absolue d'une fonction de x_1, holomorphe pour $|x_1| \leqq r_1$, atteint sa borne supérieure pour $|x_1| = r_1$. Le lemme est ainsi démontré; et la démonstration du théorème α est achevée.

5. Premier corollaire. — *Soit $\mathcal{M}$ un module (à q dimensions) au point a. Si une fonction g (à q dimensions), holomorphe sur un voisinage* V *de a, est, sur* V, *limite uniforme de fonctions (holomorphes sur* V) *qui appartiennent à $\mathcal{M}$ au point a, la fonction g appartient à $\mathcal{M}$ au point a.*

En effet, l'hypothèse entraîne que g est limite d'une suite de fonctions g_p holomorphes sur V, telles que l'on ait, sur V,

$$|g_{p+1} - g_p| \leqq 2^{-p},$$

chaque g_p appartenant au module $\mathcal{M}$. D'après le théorème α, on a des identités

$$g_{p+1} - g_p = \sum_j a_{pj} f_j$$

(les f_j constituant une base finie de $\mathcal{M}$, indépendante de l'indice p), les coefficients a_{pj} étant holomorphes sur un certain voisinage compact W contenu dans V, et satisfaisant, sur W, aux inégalités $|a_{pj}| \leqq k.2^{-p}$ (k nombre positif fixe). Il en résulte que, pour chaque j, la série $\sum_p a_{pj}$ converge uniformément sur W; sa somme a_j est holomorphe à l'intérieur de W (et en particulier au point a); et l'on a, au voisinage de a,

$$g - g_1 = \sum_j a_j f_j,$$

ce qui prouve que g appartient au module $\mathcal{M}$.

Deuxième corollaire. — *Si deux modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ (au même nombre de dimensions) sur un voisinage* V *de a, engendrent, au point a, des modules $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$ identiques, ils engendrent, sur tout ensemble* E *suffisamment voisin de a (et, en particulier, sur tout ensemble ponctuel suffisamment voisin de a), des madules $\mathcal{M}_E$ et $\mathcal{N}_E$ identiques.*

En effet, appliquons le théorème α aux deux modules ponctuels $\mathcal{M}_a$ et $\mathcal{N}_a$. Soit W un voisinage de la famille $\mathcal{F}$ de ce théorème, voisinage assez petit pour être contenu dans V. Le module $\mathcal{M}_W$ engendré par $\mathcal{M}$ sur W n'est autre que le module de toutes les fonctions qui appartiennent à $\mathcal{M}_a$ et sont holomorphes sur W; de même, le module $\mathcal{N}_W$ n'est autre que le module de toutes les fonctions qui appartiennent à $\mathcal{N}_a$ et sont holomorphes sur W. Puisque $\mathcal{M}_a = \mathcal{N}_a$, il s'ensuit que $\mathcal{M}_W = \mathcal{N}_W$; on a donc $\mathcal{M}_E = \mathcal{N}_E$ pour tout ensemble E contenu dans W.

APPENDICE II.

Variétés analytiques irréductibles.

1. Nous nous bornerons à considérer des *variétés analytiques dans un ensemble ouvert.* Conformément à la définition donnée au paragraphe 1, un ensemble E de points d'un ensemble ouvert D (de l'espace à n dimensions complexes) est une *variété analytique dans* D si tout point de D possède un voisinage $V (V \subset D)$ tel que l'intersection $E \cap V$ se compose des zéros communs à un nombre fini de fonctions holomorphes sur V. Cette définition équivaut à la suivante : l'ensemble E est une variété analytique dans D si E est *fermé* dans D, et si, au voisinage de chaque point a de E, l'ensemble E peut être défini par un nombre fini d'équations $f_k = 0$ (f_k holomorphes au voisinage de a).

Nous dirons qu'une variété E, analytique dans D, est *réductible dans* D, s'il existe deux variétés E_1 et E_2, analytiques dans D, toutes deux distinctes de E, et dont la réunion soit E. Dans le cas contraire, E est dite *irréductible dans* D. Nous nous proposons d'établir rapidement les deux résultats suivants :

Théorème β. — *Toute variété analytique dans* D (*ouvert*) *est réunion d'une famille finie ou dénombrable de variétés analytiques irréductibles dans* D.

Théorème γ. — *Si une fonction holomorphe f dans* D (*ouvert*) *s'annule identiquement sur* E *au voisinage d'un point de* E, *et si* E *est une variété analytique irréductible dans* D, *f s'annule identiquement sur* E.

2. Avant d'aborder les démonstrations, il importe de ne pas confondre la notion *d'irréductibilité dans* D avec celle *d'irréductibilité en un point.* Une variété E analytique dans D est dite *réductible en un point a* de E si a possède un voisinage ouvert V tel qu'il existe deux variétés F_1 et F_2, *analytiques dans* V, contenant toutes deux le point a, dont la réunion soit $E \cap V$ et dont les traces, sur tout voisinage de a, soient toutes deux différentes de la trace de E. Dans le cas contraire, E est dite *irréductible au point a.* On peut relier la notion d'irréductibilité en un point, à celle d'idéal ponctuel. En effet, une variété analytique E définit, en un point a de E, l'idéal $\mathcal{J}$ de toutes les fonctions

(holomorphes en a) qui s'annulent identiquement sur E dans un voisinage (si petit soit-il) du point a. Pour que E soit irréductible au point a, il faut et il suffit que l'idéal $\mathcal{I}$ soit *premier;* dans le cas général, $\mathcal{I}$ est intersection finie d'idéaux premiers, et E est (au voisinage de a) réunion d'un nombre fini de variétés analytiques irréductibles en a. Ces résultats sont classiques ([9]). Il est aussi classique que l'on peut définir la *dimension* d'une variété irréductible en un point; c'est un nombre entier.

3. Ceci étant rappelé, nous allons montrer comment l'on peut, à toute variété analytique E dans D, associer un *espace topologique* (abstrait) $\mathcal{E}$. Pour définir $\mathcal{E}$, il faut d'abord dire quels en seront les *points* : un « point » α de l'espace $\mathcal{E}$ à définir, c'est par définition l'ensemble d'un point a de E (point a qui s'appellera le *support* du « point » α) et d'une composante irréductible de la variété E au point a. A chaque point α faisons correspondre son support a : on définit une application φ de $\mathcal{E}$ sur E; un point de E est, en général, le support d'un seul point de $\mathcal{E}$, mais il y a exception pour les points « singuliers » de E, qui sont support d'un nombre *fini* de points de $\mathcal{E}$. Reste à définir une topologie sur l'ensemble $\mathcal{E}$: nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{A}$ de « points » de $\mathcal{E}$ est *ouvert* si, quel que soit α de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ contient tous les points β dont le support b est suffisamment voisin du support a de α et appartient à la composante irréductible (au point a) attachée à α. Avec cette topologie, l'application φ de $\mathcal{E}$ sur E, définie plus haut, est *continue*.

On peut alors voir facilement : *pour que la variété analytique* E *soit irréductible dans* D, *il faut et il suffit que l'espace topologique* $\mathcal{E}$ *soit connexe*.

Donnons simplement des indications rapides sur la démonstration : si E est *réductible* dans D, E est réunion de E_1 et E_2 (analytiques dans D, toutes deux différentes de E); soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des « points » de $\mathcal{E}$ dont le support et la composante irréductible appartiennent à E_1. L'ensemble $\mathcal{E}_1$ est différent de $\mathcal{E}$; il est à la fois ouvert et fermé dans $\mathcal{E}$; $\mathcal{E}$ n'est donc pas connexe. Inversement, si $\mathcal{E}$ n'est pas connexe, E est réductible; en effet, si $\mathcal{E}$ est réunion de deux sous-ensembles non vides et ouverts $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, les images E_1 et E_2 de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ par l'application φ, sont deux variétés analytiques dont l'existence prouve la réductibilité de E.

4. Cela posé, si E est une variété analytique dans D, les composantes connexes de l'espace $\mathcal{E}$ associé à E fournissent des variétés analytiques irréductibles dont E est la réunion. Pour achever de démontrer le théorème β, il suffit de montrer que *les composantes connexes de* $\mathcal{E}$ *forment une famille finie ou dénombrable*. Or ceci est une conséquence immédiate du fait que $\mathcal{E}$ *est réunion dénombrable de sous-ensembles ouverts connexes*.

Reste à prouver le théorème γ. D'une façon plus précise : *si une fonction* f, *holomorphe dans* D, *s'annule identiquement, au voisinage d'un point* a *de* E, *sur* *une composante irréductible de* E *en* a, *et si* E *est irréductible dans* D, *alors* f *s'annule en tout point de* E. Voici quelques indications succinctes sur la démonstration : f définit une fonction g sur l'espace $\mathcal{E}$, à savoir celle qui, en tout point α de $\mathcal{E}$, est égale à $f[\varphi(\alpha)]$. Si E est irréductible dans D, $\mathcal{E}$ est connexe : si f s'annule identiquement, au voisinage d'un point a de E, sur une composante irréductible de E en a, g s'annule sur tout un sous-ensemble ouvert de $\mathcal{E}$. Or, l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ au voisinage desquels g s'annule identiquement est *fermé*, comme on s'en assure aisément; donc, si $\mathcal{E}$ est connexe, g s'annule sur $\mathcal{E}$ tout entier. C. Q. F. D.

INDEX TERMINOLOGIQUE.

I. Donnée de Cousin.
Polycylindre; polycylindre compact.
Variété analytique complexe à $n-1$ dimensions.
Variété analytique complexe quelconque.

II. Idéal de fonctions holomorphes.
Fonction holomorphe *sur* E; idéal *sur* E.
Idéal ponctuel.
Base d'un idéal.
Idéal engendré sur E′ par un idéal sur E.
Fonction à q dimensions; module à q dimensions.
Module sur E, module ponctuel, base d'un module, module engendré, etc.

IV. Système cohérent d'idéaux (ou de modules) ponctuels.
Module associé à un système cohérent.
Module associé à un module.

V. Module parfait.
Module pur.

VII. Module dérivé (d'un système) en un point.
Système faiblement dérivable sur un polycylindre compact.
Système dérivable sur un polycylindre compact.
Module dérivé (d'un système dérivable).

VIII. Module faiblement dérivable, module dérivable.
Modules équivalents.
Module dérivé (d'un module dérivable).
Module r fois dérivable, $r+1$ fois faiblement dérivable.

X. Domaine d'holomorphie.
Domaine polyédral.