ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillations de relaxation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 61 (1944), p. 73-117
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__73_0>

EXEMPLES CONCRETS

D'ÉTUDE ASYMPTOTIQUE D'OSCILLATIONS

DE RELAXATION

PAR M. J. HAAG.

Introduction.

Dans un précédent Mémoire (¹), j'ai fait une étude asymptotique générale des oscillations de relaxation. Je me propose, dans le présent travail, d'appliquer les résultats obtenus à deux exemples concrets : le cas où *la courbe fondamentale se compose de segments rectilignes* et l'*exemple de M. van der Pol*. Procédant ensuite à l'intégration directe, je pourrai *contrôler numériquement* la valeur pratique des formules asymptotiques précédemment établies.

Dans un chapitre préliminaire, j'intégrerai l'*équation différentielle de raccordement dans le cas où l'ordre du point frontière est égal à* 2, ce qui est pour ainsi dire le cas général et, en particulier, celui de l'exemple de M. van der Pol.

Je renverrai fréquemment le lecteur à mon premier Mémoire et je conviens, dès maintenant, d'affecter de l'indice I les numéros d'équations ou de paragraphes se rapportant au dit Mémoire.

CHAPITRE I.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RACCORDEMENT POUR $r=2$.

1. *Intégrale générale.* — L'équation (39_{I}) s'écrit, en supposant $\sigma=\sigma'=\sigma''=1$, comme au n° 32_{I},

$$\frac{ds}{dZ}=s^2-Z. \tag{1}$$

Pour obtenir le cas du n° 36_{I}, il suffira de changer s en $-s$ et Z en $-$Z.

(¹) *Ann. Éc. Norm.*, (3), LX, fasc. 1, 2, 1943, p. 35 à 111.

J'ai étudié, il y a quelques années [1], l'intégrale générale de cette équation de Riccati, au moyen des *fonctions de Bessel*. Elle se présente sous la forme

$$(2)\qquad s=\frac{3x}{2Z}\,\frac{C\,J_{\frac{2}{3}}(x)-J_{-\frac{2}{3}}(x)}{C\,J_{-\frac{1}{3}}(x)+J_{\frac{1}{3}}(x)},\qquad Z^3=-\frac{9x^2}{4},$$

où C désigne la constante d'intégration et $J_n(x)$ la fonction de Bessel définie par

$$(3)\qquad J_n(x)=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^n E_n\left(\frac{x^2}{4}\right),$$

$$(4)\qquad E_n(t)=1+\sum_{h=1}^{\infty}\frac{(-t)^h}{h!\,(n+1)(n+2)\dots(n+h)}.$$

En tenant compte de (3), l'équation (2) s'écrit

$$s=\frac{3x}{2Z}\,\frac{\dfrac{3C}{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}E_{\frac{2}{3}}-\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{2}{3}}E_{-\frac{2}{3}}}{\dfrac{C}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}E_{-\frac{1}{3}}+\dfrac{3}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}E_{\frac{1}{3}}}.$$

Multiplions haut et bas par $\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$; il vient, en tenant compte de $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)=\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$,

$$(5)\qquad s=\frac{C\,F(Z)-F_1(Z)}{F_2(Z)-C\,F_3(Z)},$$

en posant

$$(6)\qquad F(Z)=A\,Z^2\,E_{\frac{2}{3}}(t),\qquad F_1(Z)=E_{-\frac{2}{3}}(t),\qquad F_2(Z)=Z\,E_{\frac{1}{3}}(t),\qquad F_3(Z)=2A\,E_{-\frac{1}{3}}(t);$$

avec

$$(7)\qquad t=-\frac{Z^3}{9}$$

et [2]

$$(8)\qquad A=\frac{3^{\frac{1}{6}}}{4\pi}\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{\pi}\times\sqrt[3]{96}}.$$

---

[1] *Bull. Sc. Math.*, avril 1938. Il suffit de changer Z en $-Z$ dans l'équation étudiée dans ce travail pour obtenir l'équation (1) ci-dessus. Signalons de plus que la formule (13) se simplifie en tenant compte de (12) et donne immédiatement la formule (2) ci-dessus.

[2] On passe de la première forme de A à la seconde en utilisant la formule

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{3}\right)=2^{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\,\Gamma\left(\frac{1}{6}\right),$$

qui se déduit elle-même du théorème de multiplication de Gauss.

Cette constante A se calcule facilement, en utilisant la formule

$$\log\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{5\pi}{21} + \log 6 + 0{,}03046632,$$

déduite d'un développement donné par Hoüel (1). On obtient ainsi

$$\log A = \bar{1}{,}8362359; \qquad A = 0{,}6858606.$$

2. *Fonctions de raccordement.* — La fonction de raccordement du n° 32_1 est obtenue pour $C = 1$; c'est la *solution exceptionnelle* (2) de l'équation (1).

Pour les grandes valeurs positives de Z, on a la formule asymptotique (3)

$$s = \frac{3u}{2Z}\frac{S_{n+1}(u)}{S_n(u)} \qquad \left(n = -\frac{1}{3},\ u = \frac{2}{3}Z\sqrt{Z}\right);$$

avec

$$S_n(u) = 1 + \sum_{k=1} \frac{b_{nk}}{u^k}, \qquad b_{nk} = \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)\ldots[4n^2-(2k-1)^2]}{8^k k!}.$$

J'ai indiqué (4) une méthode de calcul du rapport $\frac{S_{n+1}(u)}{S_n(u)}$ et calculé explicitement les cinq premiers termes du développement. Pour $n = -\frac{1}{3}$, on obtient

$$\frac{s}{\sqrt{Z}} = 1 + \frac{1}{6u} - \frac{5}{72u^2} + \frac{5}{72u^3} - \frac{1105}{81\times 128u^4} + \ldots. \tag{9}$$

En résolvant cette équation par rapport à Z, on trouve

$$\frac{Z}{s^2} = 1 - \frac{1}{2s^3} + \frac{1}{8s^6} - \frac{5}{32s^9} + \frac{11}{32s^{12}} + \ldots.$$

Cette formule est bien ce que donne la formule (84_1) pour $r = 2$.

De la formule (9), on déduit facilement le développement asymptotique

$$W \doteq s^2 - Z = \frac{1}{2\sqrt{Z}} - \frac{1}{4Z^2} + \frac{25}{64Z^3\sqrt{Z}} - \frac{15}{16Z^5} + \ldots. \tag{10}$$

La fonction de raccordement *à gauche* du point frontière (n° 36_1, cas II) est obtenue pour $C \neq 1$. De plus, nous changeons Z en $-Z$ et s en $-s$; de sorte que la formule (5) devient

$$s = \frac{C F(-Z) - F_1(-Z)}{C F_3(-Z) - F_2(-Z)}. \tag{11}$$

---

(1) *Recueil de formules et de tables numériques*, 3e édition, p. 60. Faire $x = \frac{1}{6}$ dans le développement et utiliser la formule $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) = 6\Gamma\left(\frac{7}{6}\right)$. Le développement converge très rapidement.

(2) *Loc. cit.*, n° 8.

(3) *Loc. cit.*, n° 9.

(4) *Loc. cit.*, n° 11.

La constante C est déterminée par la condition que s s'annule pour $Z = Z_0$, soit

$$C = \frac{F_1(-Z_0)}{F(-Z_0)}. \tag{12}$$

Quant à la limite H, elle est obtenue pour $s = \infty$; c'est la plus petite racine positive de l'équation

$$C F_3(-H) - F_2(-H) = 0. \tag{13}$$

3. *Calcul des fonctions* $F_i(Z)$. — J'ai calculé ces fonctions à partir des formules (6) et (4), pour les valeurs de Z comprises entre $+3$ et -3 et échelonnées de dixième en dixième. Pour les grandes valeurs positives de Z, F est asymptotique à F_1 et F_2 l'est à F_3, les quatre fonctions devenant très grandes. D'autre part, ces valeurs interviennent uniquement dans le cas $C = 1$. Il s'ensuit que la formule (11) se présente à la limite sous la forme indéterminée $\frac{\infty - \infty}{\infty - \infty}$. Il en résulte une *indétermination numérique* se traduisant par la disparition d'un grand nombre de chiffres significatifs dans les deux soustractions devant fournir le numérateur et le dénominateur. Pour que les chiffres restants soient en nombre suffisant, il faut pousser le calcul des fonctions F_i jusqu'à une approximation très supérieure à celle que l'on recherche pour s. C'est ainsi que, pour $Z = 3$, j'ai dû utiliser des tables de logarithmes à 7 décimales et calculer 9 ou 10 termes de la série (4). Au fur et à mesure que Z diminue, les calculs deviennent plus faciles. Ils deviendraient au contraire plus pénibles et rapidement inexécutables si l'on voulait calculer s pour $Z > 3$. Fort heureusement, les formules asymptotiques (9) ou (10) peuvent être utilisées pratiquement à partir de $Z = 3$.

Le tableau ci-dessous donne les résultats numériques obtenus :

Z.	F.	F_1.	F_2.	F_3.	s.	W.
3	25,54337	25,58939	15,64385	15,66932	1,807	0,265
2,9	21,27372	21,32796	13,30494	13,33541	1,780	0,269
2,8	17,75714	17,82089	11,35315	11,38951	1,753	0,274
2,7	14,85388	14,92855	9,72030	9,76357	1,726	0,278
2,6	12,45111	12,53827	8,35073	8,40208	1,698	0,282
2,5	10,45751	10,55893	7,19896	7,25973	1,669	0,286
2,4	8,79909	8,91670	6,22772	6,29942	1,640	0,291
2,3	7,41578	7,55168	5,40639	5,49075	1,611	0,296
2,2	6,25871	6,41521	4,70979	4,80875	1,581	0,301
2,1	5,28799	5,46748	4,11708	4,23280	1,551	0,306
2	4,47115	4,67627	3,61107	3,74601	1,520	0,311
1,9	3,78159	4,01510	3,17749	3,33434	1,489	0,316
1,8	3,19755	3,46231	2,80445	2,98618	1,457	0,322
1,7	2,70118	3,00007	2,48199	2,69186	1,424	0,328
1,6	2,2780	2,6140	2,20188	2,44351	1,391	0,335
1,5	1,9157	2,2919	1,95708	2,23429	1,357	0,342
1,4	1,6047	2,0239	1,74170	2,05867	1,322	0,349
1,3	1,3368	1,8018	1,55077	1,91192	1,287	0,357

Z.	F.	F_1.	F_2.	F_3.	s.	W.
1,2.....	1,1056	1,6186	1,38005	1,79009	1,251	0,366
1,1.....	0,9056	1,4688	1,22593	1,68977	1,214	0,375
1.......	0,7326	1,3474	1,08534	1,60807	1,176	0,384
0,9.....	0,5830	1,2505	0,95563	1,54248	1,137	0,394
0,8.....	0,4541	1,1743	0,83455	1,49079	1,097	0,405
0,7.....	0,3438	1,1160	0,72017	1,45104	1,057	0,417
0,6.....	0,25048	1,07265	0,61086	1,42146	1,015	0,429
0,5.....	0,17290	1,04188	0,50522	1,40042	0,971	0,442
0,4.....	0,11021	1,02139	0,40214	1,38638	0,926	0,457
0,3.....	0,06184	1,00901	0,30068	1,37790	0,879	0,473
0,2.....	0,02745	1,00267	0,20013	1,37356	0,831	0,491
0,1.....	0,00686	1,00033	0,10001	1,37195	0,781	0,510
0.......	0	1	0	1,37172	0,729	0,531
—0,1.....	0,00686	0,99967	—0,09999	1,3715	0,675	0,555
—0,2.....	0,02742	0,99733	—0,19987	1,3699	0,618	0,582
—0,3.....	0,06162	0,99101	—0,29932	1,3656	0,559	0,612
—0,4.....	0,10927	0,97873	—0,39787	1,3571	0,496	0,646
—0,5.....	0,17004	0,95855	—0,49480	1,3433	0,429	0,684
—0,6.....	0,24337	0,92865	—0,58925	1,3227	0,359	0,728
—0,7.....	0,3284	0,8873	—0,68015	1,2942	0,283	0,780
—0,8.....	0,4241	0,8329	—0,76628	1,2567	0,202	0,841
—0,9.....	0,5290	0,7639	—0,84626	1,2091	0,114	0,913
—1.......	0,6411	0,6803	—0,91862	1,1506	0,019	1,000
—1,1.....	0,7583	0,5804	—0,9818	1,0807	— 0,086	1,107
—1,2.....	0,8779	0,4644	—1,0342	0,9989	— 0,204	1,242
—1,3.....	0,9969	0,3324	—1,0742	0,9051	— 0,336	1,413
—1,4.....	1,1121	0,1855	—1,1002	0,7996	— 0,488	1,638
—1,5.....	1,2196	0,0250	—1,1108	0,6830	— 0,666	1,944
—1,6.....	1,3156	—0,1470	—1,1048	0,5561	— 0,881	2,376
—1,7.....	1,3962	—0,3275	—1,0811	0,4204	— 1,148	3,018
—1,8.....	1,4570	—0,5133	—1,0391	0,2775	— 1,497	4,041
—1,9.....	1,4948	—0,7001	—0,97838	0,1297	— 1,980	5,820
—2.......	1,5053	—0,8834	—0,89916	—0,0205	— 2,720	9,398
—2,1.....	1,4856	—1,0581	—0,80200	—0,1704	— 4,027	18,320
—2,2.....	1,4330	—1,2184	—0,68798	—0,3166	— 7,150	53,32
—2,3.....	1,3458	—1,3589	—0,55895	—0,4558	—26,22	689,8
—2,4.....	1,2233	—1,4736	—0,41709	—0,5846	+16,08	-
—2,5.....	1,067	—1,557	—0,2653	—0,699	-	-
—2,6.....	0,874	—1,605	—0,1069	—0,796	-	-
—2,7.....	0,652	—1,612	+0,0543	—0,872	-	-
—2,8.....	0,404	—1,574	0,2140	—0,926	-	-
—2,9.....	0,136	—1,491	0,3675	—0,954	-	-
—3.......	—0,146	—1,361	0,5106	—0,954	-	-

Les valeurs de s et W concernent le *cas exceptionnel* $C = 1$. Pour $Z = 3$ et 2,9, la formule asymptotique (10) donne exactement le même résultat que le calcul direct.

4. *Calcul numérique des fonctions de raccordement à gauche du point frontière.* — Une telle fonction est définie par la valeur de Z_0. J'ai donc commencé par calculer C en fonction de Z_0, au moyen de la formule (12) et des

valeurs numériques précédemment obtenues pour les fonctions F et F_1. Le tableau ci-dessous donne le résultat de ce calcul, fait à la règle et régularisé par une courbe. Les valeurs positives de Z_0 ont été seules envisagées, puisque Z_0 ne peut être négatif au départ du point frontière. Je donne en même temps les valeurs correspondantes de H, obtenues en construisant la courbe (13) :

Z_0.	C.	H.	Z_0.	C.	H.	Z_0.	C.	H.
0.....	0	1,988	0,7...	—0,525	2,170	1,4...	— 1,375	2,583
0,1...	—0,0729	1,992	0,8...	—0,610	2,218	1,5...	— 1,627	2,654
0,2...	—0,1460	2,005	0,9...	—0,700	2,272	1,6...	— 1,987	2,726
0,3...	—0,219	2,026	1.....	—0,798	2,330	1,7...	— 2,575	2,802
0,4...	—0,294	2,057	1,1...	—0,908	2,390	1,8...	— 3,74	2,878
0,5...	—0,369	2,087	1,2...	—1,035	2,453	1,9...	— 7,55	2,954
0,6...	—0,445	2,126	1,3...	—1,187	2,515	2.....	+43,8	3,032

Pour $C = 1$, on a

$$Z_0 = 1{,}01890 \qquad \text{et} \qquad H = 2{,}33810.$$

J'ai ensuite calculé, à la règle, les valeurs de s pour des valeurs de Z_0 échelonnées de $\frac{2}{10}$ en $\frac{2}{10}$. Je ne pense pas qu'il soit utile de présenter ici le résultat de ce calcul.

5. *Calcul des intégrales des* n^{os} 52_1 *et* 53_1. — J'ai commencé par calculer l'intégrale

$$\varphi = \int_0^s \frac{ds}{W^2} = \int_{-1{,}0189}^{Z} \frac{dZ}{W},$$

jusqu'à $Z = 3$, par la méthode des trapèzes. J'ai ensuite calculé les valeurs de e^{φ}.

Pour évaluer les intégrales M_i et n_i, j'ai dû partager l'intervalle d'intégration en deux parties, séparées par $Z = 3$. Les valeurs R_i et r_i desdites intégrales pour les grandes valeurs de s ont été calculées par des formules asymptotiques obtenues par la méthode de la note (D_1). On a, pour s très grand,

$$\frac{1}{W^2} = s^2\left(4 + \frac{2}{s^3} - \frac{7}{4s^6} + \frac{31}{4s^9} + \ldots\right).$$

D'où, avec les notations de la note (D),

$$\alpha = 3, \qquad a = 4, \qquad k = 2, \qquad a_2 = -\frac{7}{4}, \qquad a_3 = \frac{31}{4};$$

$$g_0 = -c_0, \qquad g_1 = -c_1 - \frac{m}{4}c_0, \qquad g_2 = -c_2 + \frac{3-m}{4}c_1 + \frac{m(5-m)c_0}{16},$$

$$g_3 = -c_3 + \frac{6-m}{4}c_2 + \frac{(m-3)(8-m)}{16}c_1 - \frac{7}{64}mc_0 + \frac{m(m-5)(8-m)}{64}c_0.$$

Pour R_1, on a

$$g(s) = sW = \frac{1}{2} - \frac{1}{8s^3} + \frac{5}{32s^6} - \frac{11}{32s^9} + \ldots.$$

Donc

$$m = 0, \qquad c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_1 = -\frac{1}{8}, \qquad c_2 = \frac{5}{32}, \qquad c_3 = -\frac{11}{32}.$$

Des formules ci-dessus, on déduit g_0, g_1, g_2, g_3 et l'on a le développement asymptotique

$$R_1 e^{\varphi} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{8s^3} - \frac{1}{4s^6} + \frac{49}{64s^9} + \ldots$$

On calcule de même

$$R_2 e^{\varphi} = \frac{3}{4} - \frac{3}{8s^3} + \frac{51}{64s^6} + \frac{123}{128s^9} + \ldots$$

$$R_3 e^{\varphi} = -\frac{3}{32s^5} + \frac{69}{128s^8} + \ldots$$

$$R_4 e^{\varphi} = \frac{3s}{4} - \frac{3}{16s^2} + \frac{69}{64s^5} - \frac{105}{64s^8} + \ldots,$$

$$R_5 e^{\varphi} = -\frac{9s}{8} + \frac{9}{16s^2} - \frac{9}{4s^5} - \frac{63}{128s^8} + \ldots,$$

$$R_6 e^{\varphi} = -s + \frac{1}{4s^2} - \frac{11}{16s^5} + \frac{73}{32s^8} + \ldots.$$

Pour les intégrales r_i, un calcul direct donne

$$r_1 = -\frac{1}{24s^3} + \frac{5}{192s^9} - \frac{11}{288s^{12}} + \ldots,$$

$$r_2 = -\frac{1}{8s^2} + \frac{1}{16s^5} - \frac{11}{128s^8} + \ldots,$$

$$r_3 = \frac{1}{16s^2} - \frac{1}{20s^5} + \frac{49}{512s^8} + \ldots,$$

$$r_4 = -\frac{3}{16s^2} + \frac{51}{320s^5} + \frac{123}{1024s^8} + \ldots,$$

Ces formules m'ont permis de calculer les R_i et r_i pour $Z = 3$. J'ai ensuite calculé les fonctions M_1 et M_2 par la méthode des trapèzes pour les valeurs de Z comprises entre 3 et $Z_0 = -1{,}0189$ et échelonnées de dixième en dixième; parce qu'elles sont nécessaires pour le calcul de M_3, M_4, M_5. Les valeurs des intégrales M_i et n_i de $Z = 3$ à Z_0 ont été calculées par la méthode de Simpson et complétées par les R_i et r_i donnés par les formules ci-dessus. Voici les résultats :

$$M_1^0 = -0{,}280; \qquad M_2^0 = 0{,}279; \qquad M_3^0 = -0{,}0440; \qquad M_4^0 = 0{,}347;$$

$$M_5^0 = -0{,}367; \qquad M_6^0 = 0{,}259;$$

$$n_1 = 0{,}653; \qquad n_2 = -0{,}521; \qquad n_3 = 0{,}160; \qquad n_4 = -0{,}417.$$

En se reportant aux formules (132_1) [1] et (134_1), on obtient la *déviation*

---

[1] Dans la formule (132), lire $-$ et $-$ au lieu de $+$ et $+$.

au point frontière par la formule

(14) $$D_F = A_0\theta^2\left[1{,}01890 + \theta\left(\frac{0{,}280}{a} - 0{,}279\,b_0\right) + \theta^2\left(\frac{0{,}044}{a^2} - 0{,}347\,\frac{b_0}{a} + 0{,}367\,b_0^2 - 0{,}259\,b_1\right) + \ldots\right].$$

De même, la formule (136_1) (¹) devient

(15) $$J = \frac{A_0}{2a^2}\theta^3(\log\theta - 1{,}306 + 2A_0 a N_1) - \frac{A_0}{a^3}\theta^4(0{,}361 + 0{,}417\,ab_0) + \ldots.$$

6. *Calcul des intégrales des nos* 59_1 *et* 60_1. — Il faut d'abord calculer la fonction

$$\varphi = \int_\infty^s \frac{ds}{W^2} = \int_H^Z \frac{dZ}{W}.$$

Ce calcul a été fait par la méthode des trapèzes et pour des valeurs de Z échelonnées de dixième en dixième. J'ai ensuite calculé par la méthode des trapèzes les fonctions

$$I_1(Z) = \int_{Z_0}^Z se^\varphi\,dZ, \qquad I_2(Z) = \int_{Z_0}^Z \frac{s^3 e^\varphi}{W}\,dZ.$$

L'intégrale n_1 peut s'écrire

(16) $$n_1 = I_1(Z_1) + \int_{Z_1}^H \left(se^\varphi - \frac{W}{s}\right)dZ - \log s_1,$$

Z_1 étant arbitrairement choisi entre Z_0 et H et s_1 désignant la valeur correspondante de s. J'ai fait le calcul pour trois valeurs de Z_1 en progression arithmétique de raison 0,2 et choisies de telle manière que le second terme puisse être calculé par la méthode de Simpson. En outre, *un* est compris entre la plus petite et la plus grande des valeurs de s_1. Les résultats diffèrent très peu et j'ai adopté une valeur moyenne. J'ai ensuite régularisé en construisant la courbe (Z_0, n_1). Les écarts introduits par cette régularisation ont été très faibles, leur moyenne correspondant à une erreur relative de $\frac{1}{500}$ environ. L'intégrale n_2 peut s'écrire

(17) $$n_2 = I_2(Z_1) + \int_{Z_1}^H \left(\frac{s^3 e^\varphi}{W} - \frac{W}{s}\right)dZ - \log s_1.$$

La différence entre les seconds termes des formules (16) et (17) est

$$\int_{Z_1}^H se^\varphi \frac{Z}{W}\,dZ.$$

J'ai calculé cette dernière intégrale pour les mêmes valeurs de Z_1 que précé-

---

(¹) Dans cette formule, lire $2A_0 a N_1$ au lieu de N_1.

demment; puis, j'ai régularisé graphiquement les valeurs obtenues pour n_2; l'écart moyen est à peu près de $\frac{3}{1000}$ en valeur relative.

On a ensuite

$$n_3 = \frac{e^{-\varphi_0}}{2Z_0} - n_{13}.$$

Les intégrales n_4, n_5, n_6 ont été calculées par la méthode de Simpson et ont donné des courbes régulières.

Les intégrales n_7, n_8, n_9 ont été calculées également par la méthode de Simpson; mais la fonction sous le signe $\int$ variant très rapidement au voisinage de $Z = H$, j'ai dû arrêter chaque intégrale un peu avant H, en calculant le reste par les développements ci-dessous :

$$R_7 = -\frac{\log s + n_1 + 0,5}{2s^2} + \frac{\log s + n_1}{2s^4} + \ldots,$$

$$R_8 = -\frac{2H}{s} - \frac{18\log s + 12n_1 + 6n_2 - 1}{12s^2} + \ldots,$$

$$R_9 = \frac{3H}{s} + \frac{6\log s + 6n_2 - 5}{6s^2} + \ldots.$$

L'intégrale n_{10} a été calculée comme n_1 et n_2. Les intégrales n_{11}, n_{12}, n_{13} ont été calculées par la méthode de Simpson. Elles ont toutes été régularisées graphiquement et les écarts moyens sont tous de l'ordre de quelques millièmes en valeur relative.

Quant aux valeurs de $K = e^{\varphi_0}$, elles se déduisent des valeurs de la fonction e^{φ}.

Le tableau ci-dessous donne le résultat de ces calculs :

Z_0	0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1.	1,2.	1,4.	1,6.	1,8.	2.
$-1000\,n_1$	226	234	250	274	304	337	370	404	438	472	500
$-1000\,n_2$	718	727	746	773	802	835	867	898	930	962	994
$-1000\,n_3$	∞	15,04	3,75	1,483	0,787	0,477	0,314	0,220	0,160	0,123	0,094
$1000\,n_4$	381	373	357	335	309	284	261	242	223	208	199
$1000\,n_5$	191	188	179	166	154	142	131	120	112	104	97.
$-100\,n_6$	313	316	320	326	333	342	353	363	375	386	398
$-1000\,n_7$	171	169	162	153	143	135	126	118	110	103	97
$-100\,n_8$	348	350	354	360	368	377	385	394	403	414	430
$-100\,n_9$	404	407	413	421	430	439	450	462	476	491	505
$-1000\,n_{10}$	93	106	137	177	221	265	308	350	390	429	463
$1000\,n_{11}$	192	190	180	168	156	144	132	122	113	105	98
$100\,n_{12}$	316	318	323	329	337	347	357	367	377	388	400
$1000\,n_{13}$	953	744	607	505	431	374	330	294	266	240	222
$1000\,K$	0	159	287	419	513	588	648	694	733	765	791

Les intégrales n_i correspondant à $C = 1$ ont été calculées de la même manière; voici leurs valeurs écrites dans l'ordre des indices; le dernier nombre est K :

$$-0,339;\quad -0,838;\quad 0,454;\quad 0,281;\quad 0,141;\quad -3,43;\quad -0,134;$$
$$-3,77;\quad -4,39;\quad -0,269;\quad 0,142;\quad 3,47;\quad 0,369;\quad 0,595.$$

Les points correspondants se placent très bien sur les courbes représentatives.

Signalons enfin que la constante K définie par la formule (111_1) n'est autre que $2n_{10}$ dans le cas $z_0=0$; elle vaut donc $-0,186$, et la constante k définie par (112_1) et qui intervient dans la section VI du chapitre V a pour valeur $0,830$.

CHAPITRE II.

COURBE FONDAMENTALE COMPOSÉE DE SEGMENTS DE DROITE.

7. *Étude directe du mouvement.* — La force visqueuse (résistante ou motrice) est proportionnelle à la vitesse. Par conséquent, la détermination du mouvement est élémentaire. Nous supposerons dorénavant que les unités ont été choisies de telle manière que $\omega=1$. Comme dans le précédent Mémoire, nous nous bornerons à étudier le mouvement sur la partie positive de Ox et en nous dirigeant toujours vers l'origine. Nous devrons donc faire croître ou décroître le temps t, suivant que le mouvement considéré se rapportera à l'arc inférieur ou à l'arc supérieur du cycle.

Supposons que la pente de (Γ) soit $\frac{2}{k}$. L'équation (1_1) devient

$$k\varepsilon x''+2x'+k\varepsilon x=0.$$

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$(18)\qquad \begin{cases} r= \dfrac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2k^2}}{k\varepsilon}=-\dfrac{\varepsilon k}{2}\left(1+\dfrac{\varepsilon^2k^2}{4}+\ldots\right), \\ r'=\dfrac{1}{r}=\dfrac{-1-\sqrt{1-\varepsilon^2k^2}}{k\varepsilon}=-\dfrac{2}{\varepsilon k}\left(1-\dfrac{\varepsilon^2k^2}{4}-\dfrac{\varepsilon^4k^4}{16}+\ldots\right).\end{cases}$$

Pour ε infiniment petit, elles sont respectivement de l'ordre de ε et de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Soient x_0 et v_0 l'abscisse et la vitesse initiales. On a

$$(19)\qquad x=Ce^{rt}+C'e^{r't},$$

avec

$$(20)\qquad C=\frac{x_0r'-v_0}{r'-r}=\frac{x_0-rv_0}{1-r^2},\qquad C'=\frac{v_0-rx_0}{r'-r}=r\frac{v_0-rx_0}{1-r^2}.$$

La vitesse est

$$(21)\qquad v=rCe^{rt}+r'C'e^{r't}.$$

8. *Arc inférieur.* — Nous *partons du point terminal* au temps zéro, avec une vitesse nulle. Dans les formules précédentes, nous devons donc faire $v_0=0$; puis faire croître t à partir de zéro. Enfin, k est positif; donc, r et r' sont négatifs.

La formule (21) s'écrit

$$v=rC(e^{rt}-e^{r't})$$

et montre que $|v| < -rC$. *La vitesse reste infiniment petite* de l'ordre de ε. Le chemin parcouru ne peut être fini qu'au bout d'un temps infiniment grand de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. Mais alors la formule (19) s'écrit, *avec une erreur exponentielle*,

$$(22) \qquad x = Ce^{r't}, \qquad t = r' \log \frac{x}{C} = r'\left[\log \frac{x}{x_0} + \log(1 - r^2)\right].$$

De même, (21) se réduit à

$$(23) \qquad v = rx.$$

9. Supposons maintenant que, pour $x < a < x_0$, *la force visqueuse devienne motrice*. Prenons l'origine des temps au début de cette nouvelle phase. Nous pouvons toujours utiliser les formules du n° 7, en y remplaçant x_0 par a et v_0 par la valeur déduite de (23). Cette fois, k est négatif; r et r' sont positifs.

Si rt n'est pas infiniment petit, $r't$ est infiniment grand; x est asymptotique à $C'e^{r't}$. Or, $C' < 0$; donc, x serait infiniment grand négatif et sortirait de l'intervalle dans lequel les formules sont applicables. Dès lors, nous devons supposer rt infiniment petit. Dans ce cas, Ce^{rt} est infiniment voisin de a et l'on a asymptotiquement

$$(24) \qquad e^{r't} = \frac{x - a}{C'}, \qquad v = r'(x - a).$$

Comme $C' = O(\varepsilon^2)$, on voit que $t = O(-\varepsilon \log \varepsilon)$ et $v = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ [1]. Ceci est applicable jusqu'au moment où $x = 0$, si la force visqueuse garde la même expression.

10. Supposons maintenant que *la force visqueuse redevienne résistante* à partir d'une certaine valeur de x, que nous appellerons de nouveau x_0 et jusqu'à une certaine valeur positive x_1. Prenons comme nouvelle origine des temps le début de cette nouvelle phase. Nous appliquons encore les formules du n° 7, mais avec $k > 0$, $r < 0$, $r' < 0$. Comme $v_0 = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$, rv_0 a une limite finie pour $\varepsilon = 0$; il s'ensuit que C a aussi une limite finie, que nous appelons a.

Si rt n'est pas infiniment petit, $r't$ est infiniment grand négatif et l'on peut écrire (22), avec une erreur exponentielle. Comme C est infiniment voisin de a, ceci n'est possible que si $a > x_1$.

Si $a < x_1$, nous devons supposer rt infiniment petit et nous avons asymptotiquement (24), jusqu'au moment où $x = x_1$. On voit que $t = O(\varepsilon)$ et $v = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

---

[1] Il peut sembler paradoxal, au premier abord, que le chemin parcouru soit fini, alors que $vt = O(-\log \varepsilon)$. Mais il ne faut pas oublier que l'on part avec une vitesse infiniment petite, et c'est ce départ qui introduit le facteur $\log \varepsilon$ dans la valeur asymptotique de t. Pour aller de x à x', il faut un temps asymptotique à $\varepsilon \log \frac{x - a}{x' - a} = O(\varepsilon)$.

Si $a > x_1$, on a encore asymptotiquement (24) tant que $t = O(\varepsilon)$. Mais, dès que $t = O(\varepsilon^{1-\alpha})$, si petit que soit le nombre positif α, $r't = O(\varepsilon^{-\alpha})$ et l'on a (22), à une erreur exponentielle près.

A partir de $x = x_1$, la force visqueuse redevient motrice ([1]), et ainsi de suite jusqu'à $x = 0$.

11. *Arc supérieur.* — Revenons au n° 8; mais faisons décroître t à partir de zéro.

Si $r't$ est infiniment grand, x est asymptotique à $C'e^{r't} < 0$. Donc, $r't$ doit rester fini. Mais alors rt est infiniment petit et l'on a asymptotiquement les formules (24), en y remplaçant a par x_0. Donc, $t = O(\varepsilon \log \varepsilon)$ et $v = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse du n° 9. Comme au n° 10, C et C′ ont des limites finies pour $\varepsilon = 0$. La seconde est positive; mais la première peut être positive ou négative.

Si $\lim C > 0$, la vitesse devient infiniment petite pour $t = O(\varepsilon^{1-\alpha})$, $0 < \alpha < 1$; en même temps, x est infiniment voisin de C. Dans ce cas, l'arc supérieur du cycle comprendrait au moins un arc de seconde espèce. Comme dans le premier Mémoire, nous rejetons cette hypothèse. Dès lors, supposons $\lim C < 0$.

Si la force visqueuse garde la même expression jusqu'à $x = 0$, l'origine est atteinte au temps

$$t = \frac{1}{r' - r} \log \frac{-C}{C'} = O(\varepsilon).$$

Pendant tout le mouvement, on a asymptotiquement

$$x = C + C'e^{r't}, \qquad v = r'(x - C); \tag{25}$$

la vitesse vaut $O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Si la force visqueuse redevient résistante, comme au n° 10, r et r' redeviennent négatifs; de plus, les constantes C et C′ sont finies et respectivement positive et négative. Si rt n'est pas infiniment petit, $r't$ est infiniment grand positif; x est asymptotique à $C'e^{r't} < 0$. Donc, rt doit rester infiniment petit et l'on a encore (25).

Par la suite, la force visqueuse redevient motrice et tout se passe comme précédemment.

En définitive, *pendant tout le parcours de l'arc supérieur, la vitesse est infiniment grande de l'ordre de* $\frac{1}{\varepsilon}$, sauf au voisinage du point terminal.

12. On retrouve bien, qualitativement, les propriétés générales des oscillations de relaxation, décrites dans le premier Mémoire. De plus, cet exemple

---

([1]) Nous laissons de côté le cas où la courbe fondamentale comprendrait deux segments consécutifs ayant des pentes de même signe. Ce cas ne présenterait d'ailleurs aucune difficulté.

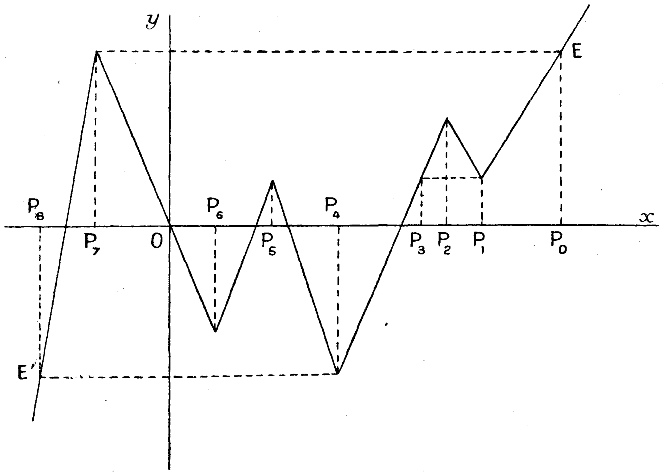
concret permet de *comprendre clairement les raisons de ce phénomène mécanique*, qui peut se résumer comme il suit :

Supposons par exemple que la courbe fondamentale ait la forme ci-dessous (*fig.* 1).

Partons du point terminal de droite; autrement dit, P est en P_0 avec une vitesse nulle. Il est rappelé vers O par la force élastique. Mais, comme il est freiné par une force visqueuse qui deviendrait très grande si la vitesse atteignait une valeur finie, cette vitesse ne peut que rester très petite. Le point P arrive ainsi très lentement dans la position P_1.

Puis, la force visqueuse devient brusquement motrice et agit dans le même sens que la force élastique. La vitesse, qui est encore très petite, se met à

Fig. 1.



augmenter plus vite que si la force élastique agissait seule. En un temps très court, elle devient assez grande pour que la force visqueuse soit très grande et, sous l'action de cette puissante force motrice, la vitesse devient rapidement très grande.

En P_2 commence un nouveau freinage. Comme la vitesse acquise est très grande, ce freinage est extrêmement énergique et la vitesse baisse rapidement. Si le freinage dure sur un assez long parcours (cas de la figure), la perte de vitesse est suffisante pour que la vitesse devienne très petite, sans pouvoir toutefois s'annuler, à cause de la force élastique. Ceci arrive dans le voisinage du point P_3 par exemple. A partir de ce point et jusqu'en P_4, la vitesse demeure très petite, comme sur le segment P_0P_1.

En P_4, la force visqueuse redevient motrice et la vitesse redevient rapidement très grande, comme à partir de P_1. En P_5, nouveau freinage énergique, qui dure jusqu'en P_6. Mais cette fois, le frein n'ayant pas agi assez longtemps, la vitesse reste très grande et, à partir de P_6, se remet à augmenter. Le point P parvient ainsi en O.

A partir de O, la force élastique est résistante. Mais la force visqueuse continuant à être motrice, la vitesse reste très grande. En P_7, nouveau freinage énergique; ce freinage durant assez longtemps, la vitesse devient très petite dans le voisinage de P_8 et comme, cette fois, la force élastique est résistante, la vitesse s'annule rigoureusement en P_8.

Le point P revient vers la droite, avec une vitesse qui reste très petite jusqu'en P_7; puis devient très grande et le demeure jusqu'au voisinage de P_0, en dépit des coups de frein reçus sur les parcours P_6P_5 et P_4P_2. Par contre, le freinage, commencé en P_1, est assez persistant pour annuler rigoureusement la vitesse en P_0. Le cycle est alors terminé.

13. *Vérification des développements asymptotiques.* — Nous allons maintenant voir ce que deviennent les formules asymptotiques établies dans le premier Mémoire et nous vérifierons qu'elles sont identiques à celles qu'on peut déduire du calcul direct ci-dessus.

Commençons par l'arc inférieur.

14. *Premier arc de seconde espèce.* — Nous avons $\lambda' = \frac{2}{k}$; d'où (n^o 52_1)

$$R_1 = \frac{xk}{2}, \qquad R_2 = \frac{xk^3}{8}.$$

Portant dans (79_1) :

$$u = \frac{kx}{2}\varepsilon^2\left(1 + \frac{k^2\varepsilon^2}{4} + \ldots\right). \tag{26}$$

Les formules du n^o 53_1 nous donnent ensuite

$$J_1 = \frac{k}{2}\log\frac{x}{x_0}, \qquad J_2 = \frac{k^3}{8}\left(\log\frac{x}{x_0} + \frac{1}{2}\right).$$

La formule (26_1) s'écrit d'autre part

$$\varepsilon t = \frac{2}{k}\log\frac{x_0}{x} + \frac{u}{x} + \varepsilon^2 J_1 + \varepsilon^4 J_2 + \ldots$$

et devient, en tenant compte des formules ci-dessus,

$$k\varepsilon t = 2\log\frac{x_0}{x} + \frac{\varepsilon^2 k^2}{2}\left(1 + \log\frac{x}{x_0}\right) + \frac{\varepsilon^4 k^4}{8}\left(\frac{3}{2} + \log\frac{x}{x_0}\right) + \ldots. \tag{27}$$

Voyons maintenant le *calcul direct*. La formule (22) nous donne d'abord

$$t = r'\log\frac{x}{x_0} - r - \frac{r^3}{2} + \ldots.$$

En utilisant (18), on retrouve bien (27).

Les formules (2_1) et (23) nous donnent maintenant

$$u = \lambda - y = -\varepsilon v = -\varepsilon rx.$$

En tenant compte de (18), on retrouve (26).

15. *Arc de première espèce.* — Nous avons $A_0 = -\frac{2}{k}\cdot$ Puis

$$\lambda = b + A_0 \xi;$$

d'où $B = 0$, $b_n = 0$ et, d'après (122_1), $\alpha_n = \frac{1}{a}\cdot$ La fonction $X = \frac{\lambda - b}{A_0}$ (n° 55_1) se réduit à $X = \xi$. Les formules (124_1), (126_1) et (127_1) donnent ensuite

$$P = \frac{\xi}{a}, \qquad P_1 = -\frac{\xi}{a^2}, \qquad P_2 = 0.$$

Portant dans (141_1), il vient

$$(28) \qquad \begin{cases} D_{00} = Z_0 + \log \frac{\xi}{\theta m} - \frac{\xi}{a}, \qquad D_{01} = \frac{Z_0}{m}, \\ D_{10} = \frac{m}{\xi} - \frac{2m+1}{ma} - \frac{\xi}{a^2} + \left(\frac{m}{a} + \frac{1}{\xi}\right)\log\frac{\xi}{\theta m} + \frac{1}{2a}\left(\log\frac{\xi}{\theta m}\right)^2. \end{cases}$$

La déviation est alors donnée par la formule (114_1), qui devient

$$(29) \qquad D = -\frac{2\theta}{k}(D_{00} + \theta D_{10} + \zeta D_{01} + \ldots).$$

Nous avons ensuite, par (129_1) (¹) et (131_1),

$$Q = Q_1 = Q_2 = 0;$$

d'où (n° 58_1) :

$$(30) \qquad T_{00} = \log\frac{\xi}{\theta m}, \qquad T_{01} = -\frac{1}{m}, \qquad T_{10} = \frac{a+\xi}{a\xi}\log\frac{\xi}{\theta m} + \frac{m}{\xi} - \frac{2m+1}{ma}.$$

Le temps est alors donné par la formule (115_1), qui devient

$$(31) \qquad \varepsilon t = -\frac{2\theta}{ak}(T_{00} + \theta T_{10} + \zeta T_{01} + \ldots).$$

16. Voyons maintenant ce que donne le *calcul direct*.

Nous devons d'abord résoudre l'équation (19) par rapport à t. A cet effet, posons

$$(32) \qquad e^{rt} = 1 + z, \qquad \log\frac{C(1+z) - x}{-C'} = u.$$

L'équation devient

$$(33) \qquad z = e^{r^2 u} - 1 = F(\varepsilon, z).$$

(¹) Dans cette formule, lire ξ au lieu de ζ.

Considérons z comme une variable complexe et ε comme une variable réelle et positive. Si ε tend vers zéro, C tend vers a. On peut donc choisir ε_0 assez petit pour que $\varepsilon < \varepsilon_0$ entraîne

$$|C - a| < \rho < a - x.$$

Soit maintenant R compris entre zéro et $\frac{a - x - \rho}{a + \rho}$. Si $|z| \leqq R$, on a

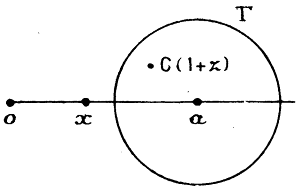
$$|Cz| < R(a + \rho) < a - x - \rho;$$

d'où

$$|C(1 + z) - a| \leqq |Cz| + |C - a| < R(a + \rho) + \rho < a - x.$$

Le point $C(1 + z)$ reste donc intérieur à un cercle Γ, de centre a et auquel le point x est extérieur. On en conclut que u est fonction holomorphe de z pour $|z| < R$. Il en est donc de même de $F(\varepsilon, z)$.

Fig. 2.



Cherchons une limite supérieure m de $|F|$, pour $|z| = R$. On démontre facilement ([1]) que si $|z| < r$, on a

$$|e^z - 1| < \sqrt{2}\, r e^r.$$

Donc, si u' est une limite supérieure de $|u|$, on peut prendre

$$m = \sqrt{2}\, r^2 u' e^{r^2 u'}.$$

D'autre part, $\log[C(1 + z) - x]$ a un module borné supérieurement par un nombre fixe, d'après ce qui précède. Enfin (n° 9), $\log(-C') = O(-\log\varepsilon)$. Donc, $u' = O(-\log\varepsilon)$ et $m = O(-\varepsilon^2 \log\varepsilon)$. Si ε_0 a été choisi assez petit, on a $m < R$ et l'on peut appliquer la *formule de Lagrange* à l'équation (33).

([1]) Soit $z = x + iy$ et $\rho = |e^z - 1|$. On a

$$\rho^2 = (e^x - 1)^2 + 4 e^x \sin^2 \frac{y}{2} < (e^x - 1)^2 + y^2 e^x < (e^x - 1)^2 + r^2 e^r.$$

Or, si $-r < x < r$, $e^x - 1$ est compris entre $e^r - 1$ et $e^{-r} - 1$. Comme $1 - e^{-r} < e^r - 1$, on a

$$|e^x - 1| < e^r - 1.$$

Mais $e^r - 1 < r e^r$, car la fonction $e^r - 1 - r e^r$ a une dérivée négative et s'annule pour $r = 0$. On peut donc écrire

$$\rho^2 < r^2 e^{2r} + r^2 e^r < 2 r^2 e^{2r}.$$

Si $H(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z| \leqq R$, la valeur que prend cette fonction quand on y remplace z par la racine de (33) est

$$H(z) = H(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [H'(z) F^n(\varepsilon, z)]_{z=0}. \tag{34}$$

Si l'on arrête cette série au terme de rang n, le reste R_n a un module borné supérieurement par [1] $M\left(\frac{m}{R}\right)^n \frac{m + Rm'}{R - m}$, où M et m' désignent respectivement des limites supérieures de $|H(z)|$ et de $\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|$ pour $|z| = R$. Or,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = e^{r^3 u} \frac{r^2 C}{C(1+z) - x}.$$

On en conclut que $m' = O(\varepsilon^2)$. Donc,

$$|R_n| < O(-\varepsilon^2 \log \varepsilon)^{n+1}.$$

Nous pouvons ensuite développer chacun des termes conservés dans (34) jusqu'à l'ordre de ε^{2n} inclus. *Nous obtenons ainsi un développement asymptotique de* $H(z)$.

17. Appliquons ceci à $rt = \log(1+z)$, en prenant $R < 1$ et $n = 2$. Nous avons

$$rt = F(\varepsilon, 0) + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{F^2(\varepsilon, z)}{1+z}\right]_{z=0} + \ldots,$$

soit

$$rt = e^{r^2 u_0} - 1 + \frac{1}{2}(e^{r^2 u_0} - 1)\left(1 - e^{r^2 u_0} + 2\frac{r^2 C}{C - x} e^{r^2 u_0}\right) + \ldots$$

en posant

$$u_0 = \log \frac{C - x}{-C'}.$$

Puis,

$$t = r u_0 \left(1 + \frac{r^2 C}{C - x}\right) + \ldots$$

ou, en utilisant (18) et remplaçant C par a,

$$t = -\frac{\varepsilon k u_0}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon^2 k^2}{4} \frac{2a - x}{a - x}\right) + \ldots \tag{35}$$

Calculons v. On peut écrire

$$v = C(r - r')(1+z) + r'x = (x - C)r' + Cr + Cz(r - r'). \tag{36}$$

(1) Cela résulte facilement de la démonstration d'Hermite (*Cf.* GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, p. 129).

Calculons donc le développement de z

$$z = \mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_0 e^{r^2 u_0} \frac{r^2 \mathrm{C}}{\mathrm{C}-x} + \ldots = r^2 u_0 \left(1 + \frac{r^2 u_0}{2} + \frac{r^2 a}{a-x} \right) + \ldots .$$

Portant dans (36), on obtient

$$v = (x-\mathrm{C}) r' + \mathrm{C} r + \mathrm{C} r u_0 \left(-1 - \frac{r^2 u_0}{2} - \frac{r^2 a}{a-x} + r^2 \right) + \ldots$$

ou, en utilisant (18) et négligeant les termes d'ordre > 4,

$$(37) \qquad k\varepsilon v = 2(\mathrm{C}-x) + \frac{\varepsilon^2 k^2}{2}(x - 2\mathrm{C} + \mathrm{C} u_0) + \frac{\varepsilon^4 k^4}{8}\left(x - 2a + \frac{a^2 u_0}{a-x} + \frac{a u_0^2}{2} \right) + \ldots .$$

Or, la formule (2_1) nous donne

$$\mathrm{D} = b - \lambda - \varepsilon v = \frac{2(a-x)}{k} - \varepsilon v.$$

D'où

$$(38) \quad k\mathrm{D} = 2(a-\mathrm{C}) + \frac{\varepsilon^2 k^2}{2}(-x + 2\mathrm{C} - \mathrm{C} u_0) + \frac{\varepsilon^4 k^4}{8}\left(-x + 2a + \frac{a^2 u_0}{x-a} - \frac{a u_0^2}{2} \right) + \ldots .$$

18. Il nous reste à calculer C et u_0 en fonction des données utilisées au n° 15. D'après (28_1), on a

$$z = -\frac{2\mathrm{D}}{a k \varepsilon^2}, \qquad z_0 = \frac{2 v_0}{a k \varepsilon} = \mathrm{Z}_0 + \zeta;$$

d'où

$$v_0 = \frac{a k \varepsilon}{2}(\mathrm{Z}_0 + \zeta).$$

Portant dans (20), il vient

$$\mathrm{C} = \frac{a}{1-r^2}\left[1 - \frac{r k \varepsilon}{2}(\mathrm{Z}_0 + \zeta) \right].$$

D'autre part, on a, d'après (38_1),

$$(39) \qquad \theta = \frac{a}{4} \varepsilon^2 k^2.$$

Moyennant quoi on peut écrire, d'après (18),

$$\frac{r k \varepsilon}{2} = -\frac{\theta}{a}\left(1 + \frac{\theta}{a} + \ldots \right), \qquad r^2 = \frac{\theta}{a}\left(1 + 2\frac{\theta}{a} + \ldots \right).$$

Dès lors, on a, au sixième ordre près,

$$\mathrm{C} = a + \theta\left(m + \frac{2m+1}{a}\theta + \zeta \right) + \ldots .$$

On a ensuite, au quatrième ordre près,

$$u_0 = \log \frac{\mathrm{C} - a + \xi}{\mathrm{C} - a} = \log \frac{\xi + \theta m}{\left(m + \frac{2m+1}{a}\theta + \zeta \right)} = \log \frac{\xi}{\theta m} + \frac{\theta m}{\xi} - \frac{2m+1}{ma}\theta - \frac{\zeta}{m} + \ldots .$$

Portant dans (38) et (35) et tenant compte de (39), on vérifie facilement *l'exactitude des formules* (28) *à* (31).

19. *Arc de première espèce ayant un point frontière à gauche.* — C'est le cas examiné au n° 10.

Aux n^{os} 65_{I} à 67_{I}, nous avons calculé la déviation et le temps correspondant au point frontière de gauche. Comme on l'a vu, les formules sont très compliquées et nous ne les expliciterons pas.

On peut retrouver directement ces formules en posant

$$e^{rt} = 1 - \alpha z, \qquad \alpha = a - C, \qquad u = \log \frac{C'}{\alpha(1 + Cz)}, \qquad \varphi(z) = z - \frac{r^2 u}{\alpha},$$
$$H(z) = \frac{1 - e^{-r^2 u} - r^2 u}{\alpha}$$

et résolvant l'équation

$$\varphi(z) = H(z)$$

par la méthode des approximations successives, au moyen de la suite définie par

$$\varphi(z_n) = H(z_{n-1}), \qquad z_0 = -\frac{k}{k_1 a_1},$$

k_1 et a_1 se rapportant au point frontière de droite. On peut démontrer que cette suite est uniformément convergente, si ε est assez petit. La rapidité de la convergence est celle d'une progression géométrique dont la raison est de l'ordre de $\frac{-\varepsilon^2}{\log \varepsilon}$. Nous ne ferons pas les calculs, qui sont compliqués.

Par contre, on peut remarquer que les calculs sont plus simples, si l'on cherche *la déviation et le temps au delà du point frontière de gauche*, puisqu'on peut appliquer les formules (22) et (23). En revenant au cas général, il doit être possible d'établir des formules asymptotiques donnant cette déviation et ce temps, et ces formules sont vraisemblablement plus simples que celles des n^{os} 65_{I} à 67_{I}. Mais, en raison du faible intérêt pratique de ce cas particulier, nous n'examinerons pas plus profondément cette question, qui paraît difficile.

20. *Arc supérieur.* — Voyons d'abord ce que donnent les formules des n^{os} 50_{I} et 51_{I}. On a

$$A_0 = \frac{2}{k}, \qquad \theta = \frac{a}{4} \varepsilon^2 k^2.$$

Tant que la pente de (Γ) *est* A_0, on a

$$\lambda = b - A_0 \xi, \qquad X = \xi.$$

Les fonctions P, P_1, P_2, Q, Q_1, Q_2 ont la même expression qu'au n° 15. Les formules (123_1), (125_1), (128_1) et (130_1) donnent ensuite

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} D_1 &= \log\frac{\xi}{\theta} - \frac{\xi}{a}, & D_2 &= \frac{1+\log\frac{\xi}{\theta}}{\xi} + \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\log^2\frac{\xi}{\theta} + \log\frac{\xi}{\theta} - 3 - \frac{\xi}{a}\right), \\ aT_1 &= \log\frac{\xi}{\theta}, & aT_2 &= \frac{1+\log\frac{\xi}{\theta}}{\xi} + \frac{1}{a}\left(\log\frac{\xi}{\theta} - 3\right). \end{aligned}\right.$$

Et l'on a enfin

$$(41)\qquad D = A_0\theta(D_1 + \theta D_2 + \ldots), \qquad \varepsilon t = A_0\theta(T_1 + \theta T_2 + \ldots).$$

Lorsque la pente de (Γ) *change*, l'expression de X devient une fonction linéaire de ξ. On peut encore calculer les six fonctions $P, P_1, \ldots, Q_2$, par des intégrations élémentaires, mais fastidieuses. Nous nous contenterons d'expliciter les calculs sur l'exemple concret du n° 22. Pour l'instant, bornons-nous à contrôler les formules (40) et (41) par le *calcul direct.*

21. Les résultats obtenus aux n^{os} 16 et 17 s'appliquent sans modification et l'on peut, en particulier, utiliser les formules (35) et (37), en changeant seulement les signes de D et t. Mais, on a cette fois

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{1-r^2} = a(1 + r^2 + r^4 + \ldots) = a + \theta\left(1 + 3\frac{\theta}{a} + \ldots\right), \\ C' &= a - C = -\theta\left(1 + 3\frac{\theta}{a} + \ldots\right); \\ u_0 &= \log\frac{\xi + \theta + \ldots}{\theta\left(1 + 3\frac{\theta}{a} + \ldots\right)} = \log\frac{\xi}{\theta} + \frac{\theta}{\xi} - \frac{3\theta}{a} + \ldots. \end{aligned}$$

En portant dans (35) et (37) et laissant tomber les termes d'ordre > 4, on retrouve bien les formules (41) et (40).

22. *Exemple concret.* — Prenons la courbe fondamentale ci-contre (*fig.* 3).

Écrivons d'abord les formules asymptotiques. Les formules (26) et (27) deviennent

$$\begin{aligned} u &= x\varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 + \ldots), \\ \varepsilon t &= \log\frac{3}{x} + \varepsilon^2\left(1 + \log\frac{x}{3}\right) + \varepsilon^4\left(\frac{3}{2} + \log\frac{x}{3}\right) + \ldots \end{aligned}$$

En particulier, pour $x = 1$, on a

$$(42)\qquad u_1 = \varepsilon^2(1 + \varepsilon^2 + \ldots),$$

$$(43)\qquad \varepsilon t_1 = \log 3 + \varepsilon^2(1 - \log 3) + \varepsilon^4(1{,}5 - \log 3) + \ldots.$$

On a ensuite (n° 18)

$$Z_0 + \zeta = \frac{u_1}{\varepsilon^2} = 1 + \varepsilon^2 + \ldots.$$

Donc,

$$Z_0 = 1, \qquad \zeta = \varepsilon^2 + \ldots, \qquad m = Z_0 + 1 = 2.$$

Puis, d'après (39), $\theta = \varepsilon^2$.

Les formules (28) deviennent

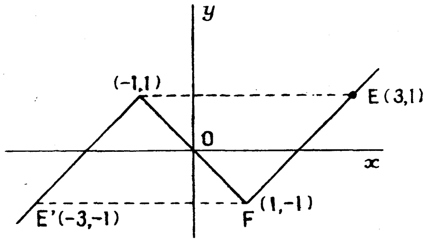
$$D_{00} = 1 - \xi + \log \frac{\xi}{2\varepsilon^2}, \qquad D_{01} = \frac{1}{2},$$

$$D_{10} = \frac{2}{\xi} - \frac{5}{2} - \xi + \left(2 + \frac{1}{\xi}\right) \log \frac{\xi}{2\varepsilon^2} + \frac{1}{2} \log^2 \frac{\xi}{2\varepsilon^2}.$$

En particulier, pour $\xi = 1$,

$$D_{00} = -\log(2\varepsilon^2); \qquad D_{01} = 0,5; \qquad D_{10} = -1,5 - 3\log(2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\log^2(2\varepsilon^2).$$

Fig. 3.



En portant dans (29), on a la *déviation au sommet inférieur*

$$D_{S'} = -\varepsilon^2 \log(2\varepsilon^2) + \varepsilon^4 \left[-1 - 3\log(2\varepsilon^2) + \frac{1}{2}\log^2(2\varepsilon^2)\right] + \ldots. \tag{44}$$

Les formules (30) deviennent

$$T_{00} = \log \frac{\xi}{2\varepsilon^2}, \qquad T_{01} = -\frac{1}{2}, \qquad T_{10} = \frac{1+\xi}{\xi} \log \frac{\xi}{2\varepsilon^2} + \frac{2}{\xi} - \frac{5}{2}.$$

En y faisant $\xi = 1$ et portant dans (31), on obtient le *temps de parcours* t_2 *de l'arc de première espèce*

$$t_2 = -\varepsilon \log(2\varepsilon^2) - \varepsilon^3[1 + 2\log(2\varepsilon^2)] + \ldots. \tag{45}$$

23. Occupons-nous maintenant de *l'arc supérieur*. Commençons par calculer les valeurs des six fonctions P, P_1, ..., Q_2 pour $x = 0$.

Pour $x = 1$, on a (nº 15)

$$P = \frac{2}{3}, \qquad P_1 = -\frac{2}{9}, \qquad P_2 = Q = Q_1 = Q_2 = 0.$$

Pour $0 < x < 1$, on a $\lambda = -x$; d'où $X = 1 - \lambda = 1 + x = 4 - \xi$. Nous avons d'abord, entre 2 et $\xi > 2$:

$$P = \frac{2}{3} + \int_2^{\xi} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{3-\xi}{3(4-\xi)}\right] d\xi = 2\,\frac{2 - \log 2}{3} - \frac{\xi}{3} + \log\xi - \frac{1}{3}\log(4-\xi).$$

Pour $\xi = 3$,

$$\mathrm{P} = \frac{1 - 2\log 2}{3} + \log 3.$$

On a maintenant

$$\mathrm{P}_1 = -\frac{2}{9} + \int_2^3 \left\{ \frac{(3-\xi)[4 - 2\log 2 - \xi - \log(4-\xi)]}{9(4-\xi)^2} + \frac{\log\xi}{\xi^2} - \frac{1+\log\xi}{3\xi} \right\} d\xi$$

ou, par un calcul facile,

$$\mathrm{P}_1 = \frac{1 + 7\log 2 - \log^2 2}{9} - \frac{2}{3}\log 3 - \frac{1}{6}\log^2 3.$$

Puis

$$\mathrm{P}_2 = \int_2^3 \left[\frac{3-\xi}{3(4-\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{3\xi} \right] d\xi = \frac{\log 3 - 1}{3};$$

$$\mathrm{Q} = \int_2^3 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{4-\xi} \right) d\xi = \log 3 - 2\log 2;$$

$$\mathrm{Q}_1 = \int_2^3 \left[\frac{4 - 2\log 2 - \xi - \log(4-\xi)}{3(4-\xi)^2} + \frac{\log\xi}{\xi^2} - \frac{1}{3\xi} \right] d\xi = \log 2 - \frac{2}{3}\log 3;$$

$$\mathrm{Q}_2 = \int_2^3 \left[\frac{1}{(4-\xi)^2} - \frac{1}{\xi^2} \right] d\xi = \frac{1}{3}.$$

On a maintenant, par les formules (123_1), (125_1), (128_1) et (130_1), où l'on doit faire $\theta = 3\varepsilon^2$, $\xi = 3$, $s = \frac{1}{\varepsilon^2}$:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} 3\mathrm{D}_1 &= -6\log\varepsilon - 3\mathrm{P} = 2\log 2 - 1 - 3\log 3 - 6\log\varepsilon, \\ 9\mathrm{D}_2 &= -6 - 12\log\varepsilon + 6\log^2\varepsilon + 9\mathrm{P}_1 + 9\mathrm{P}_2(\log 3 + 2\log 2), \\ 9\mathrm{D}_2 &= -5 + 7\log 2 - \log^2 2 - 9\log 3 + 1{,}5\log^2 3 + 6\log\varepsilon(\log 3 - 3) + 6\log^2\varepsilon, \\ 3\mathrm{T}_1 &= 2\log 2 - \log 3 - 2\log\varepsilon, \\ 9\mathrm{T}_2 &= -2 - 4\log\varepsilon + 3\mathrm{Q}_1 + 3\mathrm{Q}_2(\log 3 + 2\log\varepsilon), \\ 9\mathrm{T}_2 &= -2 + 3\log 2 - \log 3 - 2\log\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

En faisant $\mathrm{A}_0 = 1$ et $\theta = 3\varepsilon^2$ dans (41), on obtient la *déviation au sommet supérieur* et le *temps de parcours de l'arc supérieur :*

$$\mathrm{D}_s = 3\mathrm{D}_1\varepsilon^2 + 9\mathrm{D}_2\varepsilon^4 + \ldots,$$
$$t_s = 3\mathrm{T}_1\varepsilon + 9\mathrm{T}_2\varepsilon^3 + \ldots.$$

24. Voyons maintenant ce que donne le *calcul direct*.

Les valeurs de r et r' sont opposées dans les deux phases du mouvement. Celles qui se rapportent à la deuxième phase sont positives et valent

$$r = \varepsilon(1 + \varepsilon^2 + \ldots), \qquad r' = \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varepsilon^2 - \varepsilon^4 + \ldots).$$

Au départ du point terminal, nous avons

$$x = \mathrm{C}(e^{-rt} - r^2 e^{-r't}), \qquad \mathrm{C} = \frac{3}{1 - r^2}.$$

Calculons le temps t_1 et la vitesse v_1 pour $x=1$. A cet effet, nous pouvons appliquer la méthode exposée aux nos 16 et 17. La formule (35) nous donne d'abord

$$t_1 = -\varepsilon u_0\left(1+\frac{5}{2}\varepsilon^2+\dots\right)$$

avec

$$u_0 = \log\frac{C-1}{C-3} = \log\frac{2}{3r^2}+\frac{r^2}{2}+\dots = \log\frac{2}{3\varepsilon^2}-\frac{3}{2}\varepsilon^2+\dots.$$

D'où

$$-t_1 = \varepsilon(\log 2-\log 3-2\log\varepsilon)+\frac{\varepsilon^3}{2}(5\log 2-5\log 3-10\log\varepsilon-3)+\dots.$$

La formule (37) nous donne ensuite, en changeant les signes de r et r',

$$\begin{aligned}-rv_1 &= 1-C+Cr^2-Cr^2u_0\left(1+\frac{r^2}{2}+\frac{r^2u_0}{2}\right)+\dots\\ &= -2-3r^2u_0\left(1+\frac{3}{2}r^2+\frac{r^2u_0}{2}\right)+\dots\end{aligned}$$

ou, en posant provisoirement $\alpha=\log\frac{2}{3r^2}$,

$$rv_1 = 2+3r^2\alpha+\frac{3r^4}{2}(3\alpha+\alpha^2+1)\dots.$$

A partir de $x=1$, nous avons la formule (19), avec

$$C=\frac{1-rv_1}{1-r^2},\qquad C'=\frac{rv_1-r^2}{1-r^2}.$$

Le temps t_2 correspondant à $x=0$ est donné par

$$e^{(r'-r)t_2} = -\frac{C}{C'} = \frac{rv_1-1}{rv_1-r^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}t_2 &= \frac{r}{1-r^2}\log\frac{rv_1-1}{rv_1-r^2} = r(1+r^2)\log\frac{1+3r^2\alpha\dots}{2+r^2(3\alpha-1)+\dots}\\ &= -r\log 2+r^3\left(-\log 2+\frac{1+3\alpha}{2}\right)+\dots;\\ -t_2 &= \varepsilon\log 2-\varepsilon^3\left(\frac{1-\log 2-3\log 3}{2}-3\log\varepsilon\right)+\dots.\end{aligned}$$

Le *temps de parcours total de l'arc supérieur* est

$$(47)\qquad -t_1-t_2 = \varepsilon(2\log 2-\log 3-2\log\varepsilon)+\varepsilon^3(-2+3\log 2-\log 3-2\log\varepsilon)+\dots.$$

Il est *entièrement conforme* à ce qu'on a obtenu au n° 22.

25. La vitesse pour $x=0$ est

$$v_2 = Ce^{r't_2}(r-r') = r'(rv_1-1)e^{rt_2} = r'(rv_1-1)\left(1+rt_2+\frac{r^2t_2^2}{2}+\dots\right),$$

$$v_2 = r'\left[1+3r^2\alpha+\frac{3}{2}r^4(1+3\alpha+\alpha^2)\right]\left[1-r^2\log 2+r^4\left(\frac{1+3\alpha}{2}-\log 2+\frac{1}{2}\log^2 2\right)\right]+\dots.$$

En remplaçant r par son développement et α par $\log 2 - \log 3 - 2\log\varepsilon - 2\varepsilon^2$, la *déviation au sommet supérieur* $D_S = \varepsilon v_2 - 1$ nous est donnée finalement par

$$D_S = \varepsilon^2(2\log 2 - 3\log 3 - 1 - 6\log\varepsilon) + \varepsilon^4\Big(-5 + 7\log 2 - 9\log 3 - \log^2 2 + \frac{3}{2}\log^2 3 - 18\log\varepsilon + 6\log 3\log\varepsilon + 6\log^2\varepsilon\Big) + \ldots, \tag{48}$$

ce qui est *entièrement d'accord* avec les formules du n° 22.

26. *Calcul de l'amplitude et de la période de l'oscillation périodique.* — Appliquons d'abord la formule (158_1). Nous avons (n° 68_1)

$$F(a) = 3D_1, \qquad F'(a) = -2\log\varepsilon - 1,$$

car l'intégrale I est nulle, puisque $B = b_0 = 0$. Puis $G(a) = 9D_2$. La formule (158_1) devient, en remarquant que $D_S = D_{S'}$ par suite de la symétrie de la courbe fondamentale

$$z = D_{S'} - D_S + \varepsilon^2(1 + 2\log\varepsilon)(D_{S'} - 3\varepsilon^2 D_1) + \ldots \tag{49}$$

ou, en tenant compte de (44), (46) et (48),

$$z = \varepsilon^2\Big(1 + 3\log\frac{3}{2} + 4\log\varepsilon\Big) + \varepsilon^4(5 - 13\log 2 + 12\log 3 + 1{,}5\log^2 2 - 1{,}5\log^2 3 + 18\log\varepsilon - 4\log 2\log\varepsilon + 4\log^2\varepsilon) + \ldots. \tag{50}$$

Les formules (160_1) nous donnent maintenant

$$\varepsilon f'(a) = \frac{1+\varepsilon^2}{3} + \ldots, \qquad \varepsilon f''(a) = -\frac{1}{9}.$$

Portant dans (161_1), on a

$$T = T_0 + z\,\frac{1+\varepsilon^2}{3\varepsilon} - \frac{z^2}{18\varepsilon} + \ldots. \tag{51}$$

En tenant compte de (43), (45) et (47), on trouve d'autre part

$$T_0 = \frac{\log 3}{\varepsilon} + \varepsilon(1 + \log 2 - 2\log 3 - 4\log\varepsilon) + \varepsilon^3\Big(-\frac{3}{2} + \log 2 - 2\log 3 - 6\log\varepsilon\Big)\ldots.$$

Portant dans les formules ci-dessus, il vient, tous calculs faits,

$$T = \frac{\log 3}{\varepsilon} + \varepsilon\Big(\frac{4 - 10\log\varepsilon}{3} - \log 3\Big) + \varepsilon^3\Big(\frac{4}{9} - 4\log 2 + 3\log 3 - \log 3\log 6 - \frac{2}{9}\log\varepsilon - \frac{2}{3}\log 6\log\varepsilon - \frac{2}{9}\log^2\varepsilon\Big) + \ldots. \tag{52}$$

27. *Comparaisons numériques.* — Nous allons maintenant comparer les résultats numériques donnés par les formules asymptotiques et par le calcul direct, pour les valeurs suivantes de ε :

$$0{,}2; \quad 0{,}1; \quad 0{,}05; \quad 0{,}02.$$

Le temps t_1 correspondant à $x=1$ est obtenu en résolvant l'équation (19) pour $x=1$. A cet effet, posons $e^{r't}=u$. L'équation devient

$$u+\frac{C'}{C}u^{\frac{r'}{r}}=\frac{1}{C}, \tag{53}$$

laquelle se résout par substitutions successives et par la méthode de Newton. On a ensuite

$$v_1=r'+Cu(r-r'), \qquad t_1=r'\log u.$$

Rappelons que

$$C=\frac{3}{1-r^2}, \qquad C'=\frac{-3r^2}{1-r^2}, \qquad C(r-r')=-\frac{3}{r}.$$

Le temps t_2, correspondant au passage de $x=1$ à $x=0$, est ensuite donné par (n° 24)

$$t_2=\frac{r}{1-r^2}\log\frac{rv_1-1}{rv_1-r^2}=\frac{1}{r'-r}\log\frac{v_1-r'}{v_1-r}.$$

La vitesse correspondant à $x=0$ est (n° 25)

$$v_2=r'(rv_1-1)e^{rt_2}=(v_1-r')e^{rt_2}.$$

On a ensuite

$$D_S=\varepsilon v_2-1, \qquad D_{S'}=-1-\varepsilon v_2.$$

Bien entendu, t_1, v_1, t_2, v_2 doivent être calculés séparément pour l'arc supérieur et pour l'arc inférieur.

Voici les résultats que nous ont donnés ces calculs :

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
D_S exact	0,31840	0,114243	0,038161	0,0082460
D_S asymp	0,31020	0,113997	0,038158	0,0082455
Erreur	0,00820	0,000246	0,000003	0,0000005
Erreur relative	0,026	0,0022	0,00008	0,00006
$D_{S'}$ exact	0,11972	0,041049	0,013431	0,0028597
$D_{S'}$ asymp	0,11665	0,040959	0,013427	0,0028597
Erreur	0,00307	0,000090	0,000004	»
Erreur relative	0,026	0,0024	0,0003	»
t_S exact	0,73877	0,493281	0,314600	0,162285
t_S asymp	0,71891	0,492871	0,314579	0,162289
Erreur	0,01986	0,000410	0,000021	−0,000004
Erreur relative	0,027	0,00083	0,000067	−0,000025
$t_{S'}$ exact	5,4774	10,976	21,968	54,930
$t_{S'}$ asymp	5,4765	10,9766	21,9674	54,9305
Erreur	0,0009	»	»	»
Erreur relative	0,00016	»	»	»
Temps total exact	6,2162	11,469	22,283	55,092
Temps total asymp	6,1954	11,469	22,281	55,093
Erreur	0,0208	»	»	»
Erreur relative	0,0034	»	»	»

Comme on le voit, *la vérification est excellente*.

28. Les formules (49) et (51) donnent, dans l'ordre ci-dessus,

z	$-0,180$	$-0,0706$	$-0,0244$	$-0,00537$
$T - T_0$	$-0,362$	$-0,241$	$-0,164$	$-0,089$
T	$5,833$	$11,228$	$22,117$	$55,004$

On peut contrôler ces derniers résultats de la manière suivante :

D'après les formules (20), les accroissements de C et C' correspondant à l'accroissement z de x_0 sont

$$\Delta C = \frac{z}{1 - r^2}, \qquad \Delta C' = \frac{-r^2 z}{1 - r^2}.$$

En différentiant l'équation (19) pour $x = 1$, on a

$$v_1 \Delta t_1 + \frac{z}{1 - r^2}(e^{rt_1} - r^2 e^{r't_1}) = 0;$$

d'où

$$\Delta t_1 = \frac{z(r^2 e^{r't_1} - e^{rt_1})}{(1 - r^2)v_1} = -\frac{z}{3v_1}, \tag{54}$$

en tenant compte des formules du n° 27.

On a ensuite

$$\Delta v_1 = x_1'' \Delta t_1 + \frac{zr}{1 - r^2}(e^{rt_1} - e^{r't_1}) = x_1'' \Delta t_1 + \frac{zv_1}{3}.$$

Or, de l'équation différentielle du n° 7, on tire, en faisant $x = 1$ et $k = 2$

$$x_1'' = -1 - \frac{v_1}{\varepsilon}.$$

Donc

$$\Delta v_1 = -\Delta t_1\left(1 + \frac{v_1}{\varepsilon}\right) + \frac{zv_1}{3} = \frac{z}{3}\left(v_1 + \frac{1}{v_1} + \frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{55}$$

On a maintenant (n° 24)

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta v_1}{r' - r}\left(\frac{1}{v_1 - r'} - \frac{1}{v_1 - r}\right) = \frac{\Delta v_1}{(v_1 - r)(v_1 - r')}. \tag{56}$$

Puis (n° 25)

$$\frac{\Delta v_2}{v_2} = \frac{\Delta v_1}{v_1 - r'} + r\,\Delta t_2. \tag{57}$$

Enfin

$$\Delta D_S = \varepsilon\,\Delta v_2, \qquad \Delta D_{S'} = -\varepsilon\,\Delta v_2.$$

D'où l'on déduit les nouvelles valeurs de D_S et $D_{S'}$, qui doivent être égales, si l'on a bien affaire au cycle.

Enfin, en ajoutant les Δt_1 et Δt_2 correspondant aux arcs supérieur et inférieur, on obtient l'accroissement ΔT de la demi-période.

Voici les résultats numériques, transcrits toujours dans le même ordre :

Δt_1 (sup.).........	0,0052	0,00111	0,0002	0,000018
Δt_1 (inf.)..........	$-$0,288	$-$0,2325	$-$0,1626	$-$0,0895
Δv_1 (sup.).........	$-$0,9978	$-$0,733	$-$0,495	$-$0,269
Δt_2 (sup.)..........	$-$0,0131	$-$0,00311	$-$0,000585	$-$0,0000532
Δv_2 (sup.)..........	$-$0,993	$-$0,732	$-$0,494	$-$0,269
ΔDs...............	$-$0,1996	$-$0,0732	$-$0,0247	$-$0,00538
ΔT................	$-$0,2959	$-$0,2345	$-$0,1630	$-$0,0896

Pour l'arc inférieur, Δv_1, Δt_2 et Δv_2, donc $\Delta D_{S'}$ sont inférieurs à l'approximation des calculs, conformément au principe de l'accumulation des trajectoires (n° 15_1).

Voici maintenant les valeurs de $D_S - D_{S'}$, calculées au moyen des résultats du n° 27 :

Ds — Ds'.................	0,19355	0,07304	0,02473	0,005386

Leurs différences avec les valeurs de $-\Delta D_{S'}$ sont donc

0,0060 ; 0,0002

et inférieures à l'approximation des calculs.

Voici de même les valeurs de $T - T_0$ et leurs différences avec ΔT :

$T - T_0$...............	$-$0,362	$-$0,241	$-$0,164	$-$0,089
Erreurs...............	0,066	0,006	0,001	»
Erreurs relatives.......	0,0113	0,0005	0,00005	$<$ 0,00002

Comme on le voit, *la précision de nos formules asymptotiques est excellente.*

CHAPITRE III.

EXEMPLE DE M. VAN DER POL.

29. *Calcul des formules asymptotiques.* — Dans cet exemple, on a

$$\lambda = -x + \frac{x^3}{3}. \tag{58}$$

Le *point frontière* F de première espèce, correspondant au minimum de λ, a pour coordonnées $\left(1, -\frac{2}{3}\right)$. Le *point terminal* E a pour coordonnées $\left(2, \frac{2}{3}\right)$.

30. *Arc supérieur.* — En posant $x = 2 - \xi$, l'équation (58) devient

$$\lambda = \frac{2}{3} - 3\xi\left(1 - \frac{2}{3}\xi + \frac{\xi^2}{9}\right).$$

Donc (nº 7_1)

$$a = 2, \qquad A_0 = 3, \qquad B = -\frac{2}{3} + \frac{\xi}{9}, \qquad b_0 = -\frac{2}{3}, \qquad b_1 = \frac{1}{9}.$$

D'où (nº 24_1)

$$\theta = \frac{2}{9}\varepsilon^2.$$

Puis (nº 50_1)

$$\alpha_0 = -\frac{1}{6}, \qquad \alpha_1 = -\frac{5}{6}, \qquad \alpha_2 = -\frac{3}{2}; \qquad X = \frac{\xi}{9}(\xi - 3)^2;$$

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{\xi} \frac{2\xi - 3}{(\xi - 3)^2}\, d\xi = \log\frac{3 - \xi}{3} - \frac{\xi}{2(\xi - 3)}.$$

Pour simplifier l'écriture, posons $\xi - 3 = u$ et $-\frac{u}{3} = v$; on a

$$P = \log v - \frac{\xi}{2u}.$$

Les formules (126_1), (127_1), (129_1) et (131_1) donnent ensuite, tous calculs faits,

$$\begin{aligned}
P_1 = {} & -\frac{5}{12}\log^2 v + \left(-\frac{1}{\xi} + \frac{5}{6}\log\xi - \frac{13}{36} - \frac{3}{2u} + \frac{3}{4u^2} + \frac{3}{2u^3}\right)\log v \\
& + \left(\frac{19}{36} + \frac{3}{2u} - \frac{3}{4u^2} - \frac{3}{2u^3}\right)\log\xi - \frac{349}{432} - \frac{25}{12u} + \frac{7}{8u^2} - \frac{1}{u^3} - \frac{27}{16u^4}, \\
P_2 = {} & -\frac{5}{6}\log v - \frac{19}{36} - \frac{3}{2u} + \frac{3}{4u^2} + \frac{3}{2u^3}, \\
Q = {} & \log v + \frac{\xi}{u}, \\
Q_1 = {} & -\frac{2}{3}\log^2 v + \left(-\frac{1}{\xi} + \frac{4}{3}\log\xi - \frac{23}{18} - \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} - \frac{3}{u^3}\right)\log v \\
& + \left(\frac{13}{9} + \frac{3}{u} - \frac{3}{u^2} + \frac{3}{u^3}\right)\log\xi - \frac{515}{216} - \frac{29}{6u} + \frac{11}{4u^2} - \frac{5}{2u^3} + \frac{27}{8u^4}, \\
Q_2 = {} & -\frac{3}{4}\log v - \frac{13}{9} - \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} - \frac{3}{u^3}.
\end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on a

$$P = 1 - \log 3, \qquad P_1 = -\frac{5}{12}\log^2 3 - \frac{5}{6}\log 2 \log 3 + \frac{\log 3 - 2\log 2}{9} + \frac{79}{54},$$

$$P_2 = \frac{2}{9} + \frac{5}{6}\log 3; \qquad Q = -2 - \log 3,$$

$$Q_1 = -\frac{2}{3}\log^2 3 - \frac{4}{3}\log 2 \log 3 - \frac{65\log 3 + 68\log 2}{9} + \frac{254}{27},$$

$$Q_2 = \frac{68}{9} + \frac{4}{3}\log 3.$$

Les formules (123_1), (125_1), (128_1) et (130_1) nous donnent maintenant, pour $x=0$,

$$D_1 = 3\log 3 - 1 - 2\log\varepsilon = 2{,}29584 - 2\log\varepsilon,$$

$$D_2 = \frac{241}{54} + \frac{\log 3}{3} - \frac{15}{4}\log^2 3 - \frac{2}{9}\log\varepsilon + 5\log 3\log\varepsilon - \frac{5}{3}\log^2\varepsilon,$$

$$D_2 = 0{,}3031 + 5{,}2708\log\varepsilon - \frac{5}{3}\log^2\varepsilon,$$

$$T_1 = 1 + \frac{3}{2}\log 3 - \log\varepsilon = 2{,}64792 - \log\varepsilon,$$

$$T_2 = \frac{335}{54} - \frac{65}{6}\log 3 - 3\log^2 3 + \frac{65}{9}\log\varepsilon + 4\log 3\log\varepsilon - \frac{4}{3}\log^2\varepsilon,$$

$$T_2 = -9{,}3187 + 11{,}617\log\varepsilon - \frac{4}{3}\log^2\varepsilon.$$

On a enfin

$$D_S = \frac{2}{3}D_1\varepsilon^2 + \frac{4}{27}D_2\varepsilon^4 + \ldots, \tag{59}$$

$$t_S = \frac{2}{3}T_1\varepsilon + \frac{4}{27}T_2\varepsilon^3 + \ldots. \tag{60}$$

31. *Arc de seconde espèce.* — Nous posons cette fois $x = 1 + \xi$; d'où

$$\lambda = -\frac{2}{3} + \xi^2\left(1 + \frac{\xi}{3}\right).$$

Donc, pour le point F, on a

$$a = 1, \qquad b = -\frac{2}{3}, \qquad r = 2, \qquad A_0 = 1, \qquad B = \frac{1}{3}, \qquad b_0 = \frac{1}{3}, \qquad b_1 = 0.$$

La formule (14) devient

$$D_F = 1{,}01890\,\theta^2 + 0{,}187\,\theta^3 - 0{,}031\,\theta^4 + \ldots. \tag{61}$$

L'intégrale N_1 de la formule (15) vaut (n° 53_1)

$$N_1 = \int_2^1 \left[\frac{1}{x(x^2-1)} - \frac{1}{2(x-1)}\right]dx = \frac{3\log 2 - \log 3}{2} = 0{,}4904.$$

Nous avons alors

$$J = \theta^3\left(\frac{\log\theta}{2} - 0{,}163\right) - 0{,}5\,\theta^4 + \ldots.$$

La formule (38_1) nous donne, d'autre part,

$$\theta = \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \tag{62}$$

Le *temps de parcours de l'arc total* est enfin donné par (26_1) :

$$\varepsilon t = -\int_2^1 \frac{x^2-1}{x}dx + D + J = \frac{3}{2} - \log 2 + D + J,$$

soit, en tenant compte des formules précédentes,

$$(63)\qquad \varepsilon t_F = 0{,}806853 + 1{,}01890\,\theta^2 + \theta^3\left(\frac{\log\varepsilon}{3} + 0{,}024\right) - 0{,}531\,\theta^4 + \ldots.$$

32. *Arc de première espèce.* — Nous avons d'abord, en tenant compte de (61),

$$z_0 = \frac{D_0}{\theta^2} = 1{,}01890 + 0{,}187\,\theta - 0{,}031\,\theta^2 + \ldots;$$

d'où

$$Z_0 = 1{,}01890, \qquad \zeta = \theta(0{,}187 - 0{,}031\,\theta + \ldots).$$

La formule (114_1) devient, en négligeant les puissances de θ supérieures à la quatrième,

$$(64)\qquad D = \theta^2 D_{00} + \theta^3(D_{10} + 0{,}187\,D_{01}) + \theta^4(-0{,}031\,D_{01} + D_{20} + 0{,}187\,D_{11} + 0{,}035\,D_{02}) + \ldots.$$

Appliquons maintenant les formules du n° 59_1. En changeant ξ en $-\xi$, B devient $-\frac{1}{3}$; donc

$$b_0 = -\frac{1}{3}, \qquad b_1 = 0, \qquad \alpha_0 = \frac{2}{3}.$$

Au n° 4, nous avons vu que $H = 2{,}33810$ et, au n° 6, nous avons donné les valeurs des intégrales n_i. Enfin, on a, pour $\xi = 1$,

$$P_5 = \int_0^1 \left[3\,\frac{1-\xi}{\xi^2(3-\xi)} - \frac{1}{\xi^2} + \frac{2}{3\xi}\right] d\xi = \frac{2}{3}\log\frac{2}{3}.$$

D'où

$$D_{00} = 2{,}33810; \qquad D_{10} = \frac{4}{9}\log\varepsilon - 1{,}210; \qquad D_{01} = 0{,}595;$$
$$D_{20} = 0{,}635; \qquad D_{11} = 0{,}1112; \qquad D_{02} = 0{,}1607.$$

Portant dans (64), on a enfin

$$(65)\qquad D_{S'} = 2{,}33810\,\theta^2 - \theta^3\left(1{,}099 - \frac{4}{9}\log\varepsilon\right) + 0{,}643\,\theta^4 + \ldots.$$

33. En opérant sur εt comme sur D, on obtient une formule analogue à (64), les D_{ij} étant simplement remplacés par les T_{ij}. Appliquons maintenant les formules du n° 60_1. On a d'abord

$$Q_4 = \int_0^1 \left[\frac{3}{\xi^2(3-\xi)} - \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{3\xi}\right] d\xi = \frac{1}{3}\log\frac{3}{2}.$$

Puis

$$T_{00} = 1{,}31920; \qquad T_{10} = -\frac{2}{9}\log\varepsilon - 1{,}074; \qquad T_{01} = -0{,}405;$$
$$T_{20} = -0{,}380; \qquad T_{11} = -0{,}1083; \qquad T_{02} = 0{,}1607.$$

D'où

$$\varepsilon t_{S'} = 1,31920\,\theta^2 - \theta^3\left(1,150 + \frac{2}{9}\log\varepsilon\right) - 0,382\,\theta^4 + \ldots.$$

34. Voici les résultats numériques donnés par ces diverses formules pour $\varepsilon = 0,2$; $0,1$; $0,05$; $0,02$:

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
D_S	0,14410	0,045700	0,013784	0,00269755
t_S	0,53033	0,32364	0,187083	0,0873767
D_F	0,12623	0,049096	0,0192252	0,0056053
t_F	4,3726	8,3955	16,4298	40,5809
t'_F	0,45706	0,38715	0,32302	0,25019
$D_{S'}$	0,20968	0,08868	0,037209	0,0115769
$t_{S'}$	0,5869	0,54026	0,45919	0,35191

Le temps t'_F est le temps t_F diminué du terme principal $\dfrac{-1}{\varepsilon}\displaystyle\int \frac{d\lambda}{x}$.

35. *Calcul direct de l'arc supérieur; méthode des arcs successifs.* — Partant du point (x, y), donnons à x l'accroissement négatif $-h$ et cherchons l'accroissement k que subit y. On pourrait le calculer par la formule de Taylor. Il est un peu plus simple, en vue des calculs numériques, de procéder comme il suit.

Intégrons l'équation (5_1) par rapport à x entre x et $x - h$:

$$k^2 + 2ky + \varepsilon^2 h(h - 2x) = 2\int_y^{y+k} \lambda\, dy. \tag{67}$$

Dans le second membre, remplaçons λ par la moyenne arithmétique λ_m de ses valeurs pour x et $x - h$. Notre second membre devient $2k\lambda_m$. L'équation (67) est alors une équation de second degré en k, dont nous prenons la racine positive. En posant $A = y - \lambda_m$, on a, avec une *erreur de l'ordre de* h^3,

$$k = -A + \sqrt{A^2 + \varepsilon^2 h(2x - h)} = \frac{\varepsilon^2 h(2x - h)}{A + \sqrt{}}. \tag{68}$$

Posons

$$\alpha = \frac{\varepsilon^2 h(x_0 + x_1)}{2A},$$

x_0 et x_1 désignant les abscisses des deux extrémités de l'arc. En développant par la série du binome, on a, avec la même approximation,

$$k = \alpha - \frac{\alpha^2}{2A}. \tag{69}$$

Calculons maintenant la *partie principale de l'erreur* Δk imputable à la formule (68). Différentions (67) :

$$y\,\Delta k = \lambda_m\,\Delta k + \int_y^{y+k} (\lambda - \lambda_m)\, dy.$$

Prenons la diminution t de x à partir du début de l'arc pour variable d'intégration; il vient, en ne gardant que les termes en h^3,

$$\Lambda\,\Delta k = \int_0^h \left(-\lambda' t + \frac{\lambda''}{2} t^2 + \frac{\lambda' h}{2} - \frac{\lambda''}{4} h^2\right)(y' - y'' t)\,dt = \frac{\lambda' y'' - y' \lambda''}{12} h^3$$

ou, en tenant compte de (5_1),

$$(70)\qquad \Delta k = -\frac{y' h^3}{12\Lambda}\left(\frac{x^2+1}{x} + \lambda' \frac{y' - \lambda'}{\Lambda}\right)$$

ou encore, en négligeant le quatrième ordre en h,

$$(71)\qquad \Delta k = \frac{k}{12\Lambda}\left(h^2 \frac{x^2+1}{x} + \Delta\lambda \frac{k - \Delta\lambda}{\Lambda}\right).$$

Cette dernière formule permet de calculer pratiquement Δk. En ajoutant à (68), on obtient k avec une *erreur du quatrième ordre*. On peut alors prendre des arcs assez grands. Mais l'expérience m'a montré qu'on allait plus vite en prenant des arcs plus petits, calculés par des formules plus simples. Je m'en suis donc tenu à la formule (69), en m'imposant la condition que l'erreur Δk soit inférieure à $2\varepsilon^2 . 10^{-4}$. Cette règle *détermine le fractionnement de la trajectoire*.

A cet effet, utilisons la formule (70), en remarquant que, pour les valeurs de ε précédemment adoptées et *si l'on n'est pas très près du point terminal*, on peut négliger y' devant λ' et remplacer Λ par

$$\frac{2}{3} - \lambda = \frac{(x+1)^2(2-x)}{3}.$$

Moyennant quoi la formule (70) devient

$$-\Delta k = \frac{\varepsilon^2 h^3}{12\Lambda^3}\left[x\lambda'^2 - \Lambda(x^2+1)\right].$$

Comme le crochet s'annule pour une certaine valeur de x, j'ai changé le signe du second terme, pour éviter d'être conduit à prendre des arcs trop grands et j'ai obtenu la condition

$$\left(\frac{10h}{2-x}\right)^3 < \frac{2}{15}\,\frac{(x+1)^4}{1 + x(x-1)^2}$$

ou, en remarquant que la racine cubique de $\frac{2}{15}$ vaut à peu près 0,5,

$$h < \frac{(2-x)(x+1)}{20}\sqrt[3]{\frac{x+1}{1+x(x-1)^2}} = \varphi(x).$$

Cela m'a conduit à fractionner par dixièmes entre $x = 0$ et $x = 1$ et $x = 1,4$; puis à prendre les valeurs suivantes pour abscisses des points séparateurs :

1,48; 1,56; 1,62; 1,68; 1,73; 1,77; 1,80; 1,83; 1,86; 1,88; 1,90.

Pour $x > 1,9$, il faut, dans la formule (70), remplacer A par $y - \lambda$ et non par $\frac{2}{3} - \lambda$. En remplaçant x par 2, λ' par 3 et y' par $-\frac{2\varepsilon^2}{A}$, on a approximativement [1]

$$-\Delta k = \frac{3}{2}\varepsilon^2\left(\frac{h}{A}\right)^3;$$

ce qui donne la condition

$$h < \frac{A}{20}.$$

Bien entendu, le fractionnement ne peut plus être arrêté à l'avance, car il dépend de ε. Au surplus, *notre méthode de calcul ne convient plus au départ du point terminal.*

36. *Départ du point terminal.* — Utilisons la méthode du n° 19_1. L'équation (29_1) s'écrit, dans le cas présent,

$$\frac{ds}{dz} = \frac{z + s + \theta s^2\left(-\frac{2}{3} + \frac{\theta s}{9}\right)}{1 - \frac{\theta s}{2}}.$$

Au lieu de calculer z en fonction de s, calculons s en fonction de z. Posons $s = ue^z$; l'équation devient

$$(72) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{ze^{-z} - \frac{\theta u^2}{6}e^z + \frac{\theta^2 u^3}{9}e^{2z}}{1 - \frac{\theta u}{2}e^z} = f(z, u, \theta).$$

Appliquons à cette équation la méthode de la Note (A), en prenant

$$\psi(z) = \sigma k z e^{-z}, \qquad \sigma = \pm 1, \qquad \sigma z > 0;$$

k désignant un facteur positif indéterminé. Supposons $|\theta| < R$ et imposons la condition

$$(73) \qquad \frac{R\psi}{2}e^z = \frac{Rkz\sigma}{2} < k' < 1.$$

Nous avons

$$|I| < \frac{1}{1 - k'}\int_0^z e^{-z}\left(z + \sigma\frac{Rk^2}{6}z^2 + \frac{R^2k^3}{9}z^3\right)dz.$$

Or, on a l'identité

$$\int_0^z e^{-z}(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n)\,dz = e^{-z}\left[\sum_{p=0}^{n} p!\,a_p\varphi_p(z)\right],$$

---

[1] On suppose A assez grand pour que $\frac{2\varepsilon^2}{A}$ soit négligeable devant 3, mais assez petit pour que $\frac{5}{2}$ soit négligeable devant $\frac{9}{A}$.

en posant (¹)

$$\varphi_p(z) = e^z - \sum_{i=0}^{p} \frac{z^i}{i!}.$$

Dès lors, l'inégalité (4) de la Note (A) est vérifiée si l'on

$$(74) \qquad \varphi_1 + \sigma \frac{Rk^2}{3} \varphi_2 + \frac{2R^2k^3}{3} \varphi_3 < \sigma k(1-k')z.$$

Un calcul analogue montre que l'inégalité (7_A) est entraînée par

$$(75) \qquad \frac{R^2k^2}{12}\varphi_1 + \sigma R\left(1+\frac{2k}{3}\right)\varphi_2 + 2R^2k^2\varphi_3 + \frac{8}{3}\sigma R^3k^3\varphi_4 < \sigma h(1-k')^2 z.$$

Pour $|\theta| < R$, la fonction s peut être développée suivant les puissances de θ, si l'on peut déterminer k, $k' < 1$ et $h < 1$ vérifiant (73), (74) et (75).

Si l'on se donne R et k, il est possible de trouver k' et h satisfaisant à ces inégalités, pourvu que (74) et (75) soient vérifiées pour $k' = \frac{Rkz\sigma}{2}$ et $h = 1$; ce qui donne, en posant $Rk = p$ et ordonnant par rapport à k,

$$(76) \qquad k(\sigma z - A) > \varphi_1, \qquad k(\sigma z - B) > \sigma p \varphi_2,$$

avec

$$(77) \qquad \begin{cases} A = p\left(\sigma \dfrac{\varphi_2}{3} + \dfrac{z^2}{2}\right) + \dfrac{2}{3}\varphi_3 p^2, \\ B = p\left(\dfrac{2}{3}\sigma\varphi_2 + z^2\right) + p^2\left(\dfrac{\varphi_1}{12} + 2\varphi_3 - \sigma\dfrac{z^3}{4}\right) + \dfrac{8}{3}\sigma\varphi_4 p^3. \end{cases}$$

On obtient une infinité de valeurs possibles pour R en choisissant arbitrairement p tel que $\sigma z >$ A et B et prenant k au moins égal à la plus grande des deux fractions $\frac{\varphi_1}{\sigma z - A}$ et $\frac{\sigma p \varphi_2}{\sigma z - B}$. Reste à voir quelle est la solution la plus avantageuse.

Supposons qu'on pousse le développement de s jusqu'au terme en θ^n. L'erreur commise a un module inférieur à

$$E_s = \frac{\psi(z)}{1-\dfrac{\theta}{R}} \frac{\theta^{n+1}}{R^{n+1}} = \sigma z e^{-z} \frac{k^{n+2}}{p^{n+1}\left(1-\theta\dfrac{k}{p}\right)} \theta^{n+1}.$$

L'erreur sur ξ a un module inférieur à θE_s. Enfin, si l'on appelle m la valeur absolue de la pente de la trajectoire, l'erreur sur y a un module inférieur à $E_y = m\theta E_s$. Or,

$$\frac{dy}{d\xi} = A_0 \frac{dz}{ds} = \frac{3}{e^z - 1}$$

(¹) Signalons l'identité $\varphi'_p(z) = \varphi_{p-1}(z)$; d'où résultent les inégalités $\sigma\varphi_{2n} > 0$, $\varphi_{2n+1} > 0$, quel que soit z.

approximativement, si θ est assez petit. Comme $e^z - 1$ a le signe de z, donc de σ, on a

$$E_y = \frac{3 z e^{-z}}{e^z - 1} \frac{k^{n+2}}{p^{n+1}\left(1 - \theta \frac{k}{p}\right)} \theta^{n+2}. \tag{78}$$

Pour des valeurs données de z et θ, il faut donc chercher à rendre minïmum le dernier facteur ou, si $\theta \frac{k}{p}$ est petit vis-à-vis de l'unité, la fonction $P = \frac{k^{n+2}}{p^{n+1}}$. D'abord, p étant donné, on doit choisir k le plus petit possible, donc égal à la plus grande des fractions $\frac{\varphi_1}{\sigma z - A}$ et $\frac{\sigma p \varphi_2}{\sigma z - B}$.

37. Supposons maintenant $z > 0$, ce qui est le cas pour l'arc supérieur. On a $\sigma = +1$.

Quand p est petit, c'est la première des deux fractions ci-dessus qui convient et le calcul numérique montre qu'il en est de même dans la presque totalité de l'intervalle pour lequel A et B sont $< z$. Dès lors, nous prenons $k = \frac{\varphi_1}{z - A}$ et nous annulons ensuite la dérivée de P, ce qui nous donne l'équation

$$(n+2) p \frac{dA}{dp} - (n+1)(z - A) = 0.$$

Pratiquement, nous prenons $n = 2$, comme on le verra plus loin. L'équation ci-dessus devient, tous calculs faits et en posant, pour simplifier l'écriture, $A = ap + bp^2$,

$$11 bp^2 + 7ap - 3z = 0. \tag{79}$$

La racine positive de cette équation est la valeur *optimum* de p. On en déduit

$$k = \frac{11 \varphi_1}{4(2z - ap)}.$$

En portant dans (78), on a *la meilleure limitation de l'erreur sur y*. On doit toutefois prendre la précaution de vérifier que, pour la valeur de p ainsi calculée, on a bien

$$\frac{\varphi_1}{z - A} > \frac{p \varphi_2}{z - B}.$$

38. *Lorsque z est grand*, on peut simplifier les calculs, moyennant quelques approximations. On peut d'abord remplacer tous les φ_i par e^z. L'équation (79) se réduit à

$$22 p^2 + 7p - 9 z e^{-z} = 0.$$

D'où l'on tire approximativement

$$p = \frac{9}{7} z e^{-z}.$$

Puis, $k = \frac{7e^z}{4z}$ et ([1])

$$P = \frac{k^4}{p^3} = 4,44\left(\frac{e^z}{z}\right)^7. \tag{80}$$

39. Imposons-nous, comme au n° 35, la condition $E_p < 2\varepsilon^2 . 10^{-4}$. Elle est remplie si l'on a

$$\frac{ze^{-z}}{e^z - 1} \frac{P}{1 - \frac{2k}{9p}\varepsilon^2} < 273 . 10^{-4}\varepsilon^{-6}. \tag{81}$$

Elle est vérifiée pour les valeurs suivantes de z :

ε	0,2	0,1	0,05	0,02
z	2	2,8	4	5,6
p	0,276	0,157	0,0709	0,0231
k	3,74	7,68	21,15	81,1
Premier membre de (81)	447	11100	$9,2.10^5$	$3,91.10^8$
Second membre	427	27300	$17,5.10^5$	$4,27.10^8$

40. Calculons maintenant les *trois premiers termes du développement*

$$s = s_0 + \theta s_1 + \theta^2 s_2 + \ldots.$$

En substituant dans l'équation du n° 36 et développant le second membre suivant les puissances de θ, puis identifiant, on obtient

$$s'_0 = s_0 + z, \qquad s'_1 = s_1 + \frac{zs_0}{2} - \frac{s_0^2}{6}, \qquad s'_2 = s_2 + \frac{zs_1}{2} - \frac{s_0 s_1}{3} + \frac{z}{4}s_0^2 + \frac{s_0^3}{36};$$

de plus, tous les s_i doivent s'annuler avec z. Un calcul élémentaire donne

$$s_0 = e^z - 1 - z, \qquad s_1 = -\frac{e^{2z}}{6} + \frac{e^z}{12}(-26 + 4z + 5z^2) + \frac{14 + 13z + 4z^2}{6},$$

$$s_2 = \frac{e^{3z}}{24} + \frac{e^{2z}}{36}(14 + 7z - 5z^2) + e^z\left(\frac{305}{24} - \frac{17}{12}z - \frac{11}{8}z^2 - \frac{2}{27}z^3 + \frac{25}{288}z^4\right)$$
$$- \frac{1}{36}(473 + 446z + 172z^2 + 28z^3).$$

Pour les valeurs précédentes de z, on trouve

z	2.	2,8.	4.	5,6.
s_0	4,389058	12,64465	49,59816	263,8264
s_1	1,465	2	−156,7	−8693
s_2	3,8	68,4	3580	622000

([1]) La valeur asymptotique de $\frac{p\varphi_2}{2 - B}$ est 9; elle est bien inférieure à la valeur précédente de k.

On en déduit les valeurs suivantes de $\xi = \theta s$, sous lesquelles on a écrit les valeurs de x et de $y = \frac{2}{3} + 3\theta z$:

ε	0,2.	0,1.	0,05	0,02.
ξ	0,0391323	0,0281099	0,0275068	0,0233830
x	1,9608677	1,9718901	1,9724932	1,9766170
y	0,72	0,685333	0,673333	0,668160

41. Les points ci-dessus calculés ont servi de points de départ pour la méthode des arcs successifs. La première valeur de h a été évaluée en utilisant la formule (70) pour le calcul de Δk; la valeur de A étant obtenue par la formule $A = \frac{\varepsilon^2 x}{-y'}$. On a d'ailleurs $-y' = 3\frac{dz}{ds}$; comme une grande précision n'est pas nécessaire, on peut se contenter de remplacer $\frac{dz}{ds}$ par la première approximation $\frac{1}{e^z - 1}$, ce qui donne

$-y'$	0,470	0,194	0,0559	0,01114
A	0,167	0,102	0,0881	0,0709
h	0,0083	0,0052	0,0045	0,0037

Les abscisses choisies pour la fin du premier arc sont les suivantes :

x	1,95	1,966	1,968	1,973

Les points de séparation des arcs suivants ont été déterminés en utilisant la règle donnée à la fin du n° 35. Le nombre total des arcs calculés est de 31, 34, 35 et 36, pour les quatre valeurs de ε.

Rappelons que la répercussion de l'erreur commise sur chaque point va en s'atténuant quand on se rapproche de Oy (n° 6_1).

Cette méthode de calcul m'a donné les valeurs suivantes pour la *déviation* D_S *au sommet supérieur :*

D_S	0,14430	0,045694	0,013784	0,00269755

42. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours de chaque arc est donné, *au troisième ordre près*, par la formule

$$\varepsilon\Delta t = \frac{2k}{x_0 + x_1}.$$

Pour l'arc commençant au point terminal, nous prenons la formule

$$\varepsilon t = \int_0^z \frac{3\theta\, dz}{2 - \theta s} = \frac{3\theta}{2}\int_0^z \left(1 + \frac{\theta s}{2} + \frac{\theta^2 s^2}{4} + \ldots\right) dz$$
$$= \frac{3\theta}{2}\int_0^z \left[1 + \frac{\theta}{2}s_0 + \frac{\theta^2}{4}(2s_1 + s_0^2) + \ldots\right] dz.$$

En remplaçant s_0 et s_1 par les expressions du n° 40, on trouve, tous calculs faits ([1]),

$$\varepsilon t = \frac{3\theta}{2} z + \frac{3}{4}\theta^2\left(e^z - 1 - z - \frac{z^2}{2}\right) + \frac{\theta^3}{16}\left[-e^{2z} + e^z(-20 - 18z + 5z^2) + 21 + 34z + 19z^2 + \frac{14}{3}z^3\right] + \ldots$$

En remplaçant z par ses différentes valeurs, on obtient

t	0,13433	0,093665	0,066916	0,037405

En ajoutant les valeurs déduites du calcul par arcs, on obtient le *temps de parcours total de l'arc supérieur*

t_S	0,53610	0,32403	0,187218	0,087381

43. *Arc de seconde espèce; départ du point terminal.* — Au départ du point terminal, nous appliquons la méthode des n^{os} 36 à 40. Mais, cette fois, $z < 0$, $\sigma = -1$.

La valeur *optimum* de p se détermine comme au n° 37. Pour z très grand, on a asymptotiquement

$$pz = -0,561; \qquad k = 1,69\frac{z+1}{z}; \qquad P = 46,2\frac{(z+1)^4}{-z}.$$

L'inégalité (81) est vérifiée pour les valeurs suivantes de z :

ε	0,2	0,1	0,05	0,02
z	-2	$-3,3$	-5	-8
p	0,349	0,200	0,1262	0,070
k	0,975	1,210	1,365	
Premier membre de (81)	364	24800	$1,29.10^6$	$3,30.10^8$
Second membre	427	27300	$1,75.10^6$	$4,27.10^8$

En portant dans les formules du n° 40, on trouve les valeurs ci-après de s_0, s_1, s_2; d'où résultent les valeurs de ξ, x, y et $u = \lambda - y$:

s_0	1,1363353	2,336882	4,006738	7,000335
s_1	0,5058	2,4899	8,2110	27,674
s_2	0,368	4,271	27,46	178,1
ξ	0,01013213	0,00520542	0,00222850	0,000622471
x	1,98986787	1,99479458	1,99777150	1,999377529
y	0,6133333	0,6446667	0,6583333	0,6622667
u	0,0231418	0,00643787	0,00165775	0,000266695

44. Il est intéressant maintenant de comparer ces valeurs de u avec celles que donne la formule asymptotique (23_1). En posant

(82) $$u = \varepsilon^2 R_1 + \varepsilon^4 R_2 + \varepsilon^6 R_3 + \ldots$$

([1]) On peut pousser le développement jusqu'au terme en θ^4. Mais il est négligeable par rapport à l'approximation du calcul par arcs, ainsi que je l'ai vérifié numériquement.

on trouve

$$R_1 = \frac{x}{\lambda'}, \qquad \lambda' = x^2 - 1;$$

$$R_2 = \frac{\lambda' - x\lambda''}{\lambda'^4} = -\frac{x(x^2+1)}{\lambda'^4};$$

$$R_3 = x\frac{x^2(5\lambda''^2 - \lambda'\lambda''') - 7x\lambda'\lambda'' + 2\lambda'^2}{\lambda'^7} = 2x\frac{3x^4 + 6x^2 + 1}{\lambda'^7}.$$

Ceci donne les valeurs suivantes de u :

u asymp..................	0,0269	0,006683	0,001672	0,00026678o
Différences..............	0,0038	0,000235	0,000014	0,000000085

La concordance avec les valeurs résultant du calcul direct est médiocre, pour les plus grandes valeurs de ε. Mais ceci tient à ce que l'on est *trop près du point terminal*. Nous avons vu (n° 14_1) que la formule asymtotique n'est applicable qu'à une distance de ce point d'un ordre < 2 par rapport à ε. Autrement dit, ξ devrait être quelque peu supérieur à ε^2, ce qui n'est précisément pas le cas, surtout pour $\varepsilon = 0,2$ et $0,1$.

On pourrait évidemment augmenter ξ en adoptant de plus grandes valeurs pour ε. Mais on ne pourrait pas répondre de l'approximation du calcul direct.

45. *Suite de l'arc.* — Partant des points ci-dessus calculés, nous appliquons la méthode du n° 35. La première valeur de h se calcule comme au n° 41, au moyen de la formule (70), dans laquelle on remplace y' par $\frac{\varepsilon^2 x}{u}$ et A par $-u$. On trouve

h......... 0,0022 0,00098 0,00045 0,00020.

Quand on est *assez éloigné des points frontière* pour que la formule asymptotique (23_1) soit applicable, la formule (70) prend la forme très simple

$$\Delta k = \frac{x^2+2}{3\lambda'}h^3. \tag{82}$$

Le minimum de cette quantité est $\frac{2}{3}h^3$. Si l'on s'impose toujours la condition $\Delta k < 2\varepsilon^2 . 10^{-4}$, on trouve que h devrait être au plus égal aux valeurs ci-dessous :

0,0229; 0,0144; 0,00909; 0,00493.

En admettant qu'on puisse adopter ces valeurs de $x = 2$ à $x = 1$, les nombres d'arcs à calculer seraient 44, 70, 110 et 203. En réalité, ils seraient encore augmentés par la diminution nécessaire de h au voisinage des points frontière. On voit que les singularités analytiques présentées par l'équation différentielle le long d'un arc de seconde espèce se retrouvent dans le calcul numérique, qui est *beaucoup plus pénible que sur les arcs de première espèce*.

Dans ces conditions, j'ai adopté la marche suivante. J'ai fait complètement le calcul par arcs pour $\varepsilon = 0,2$. J'ai dû calculer 59 arcs, la valeur de h allant de

0,003 au début à 0,02 à la fin. Voici, à titre de renseignement, quelques valeurs de u et les valeurs correspondantes obtenues par la série asymptotique :

x	1,989868.	1,95.	1,90.	1,8.	1,7.
u	0,023142	0,027562	0,028826	0,031691	0,035236
u_{as}	0,0269	0,027602	0,028835	0,031700	0,035258
x	1,6	1,5.	1,4.	1,3.	
u	0,039726	0,045556	0,053318	0,063890	
u_{as}	0,039813	0,045994	0,05633	0,09485	

Comme le prévoit la théorie (nos 14_1 et 16_1), la série asymptotique cesse d'être valable au voisinage des points frontière. Elle donne une bonne approximation entre $x = 1,9$ et $x = 1,7$.

Pour $\varepsilon = 0,1$ et $0,05$, j'ai fait le calcul par arcs au début et à la fin et utilisé la série asymptotique dans la partie centrale. Pour $\varepsilon = 0,02$, j'ai fait le calcul par arcs à la fin seulement, la formule (23_1) étant suffisamment exacte à partir du point calculé au n° 44.

La question se pose toutefois de savoir comment doit être délimitée la région dans laquelle on peut utiliser la série asymptotique. Au départ du point terminal, il suffit de poursuivre le calcul par arcs jusqu'au moment où la valeur de u se raccorde suffisamment avec la valeur asymptotique. Je me suis arrêté aux valeurs suivantes de x, au-dessous desquelles sont inscrites les deux valeurs de u :

ε	0,1.	0,05.
x	1,98.	1,9968.
u direct	0,006766	0,0016702
u asymptotique..........	0,006767	8,0016703

Mais quand on approche de $x = 1$, où faut-il reprendre le calcul par arcs? Je me suis imposé la condition que le dernier terme $\varepsilon^6 R_3$ utilisé dans la formule asymptotique soit inférieur à $2\varepsilon^2 . 10^{-3}$; j'ai obtenu les valeurs suivantes de x : $1,9$; $1,50$; $1,35$; $1,2$. Le rapport du dernier terme calculé au précédent prend alors les valeurs : $0,060$; $0,093$; $0,070$ et $0,061$. On peut donc espérer que le premier terme négligé est de l'ordre du dixième du dernier terme calculé, donc $< 2\varepsilon^2 . 10^{-4}$.

46. En ce qui concerne la conduite du calcul de chaque arc, il est *préférable de calculer directement u au lieu de y*, parce que son accroissement est plus petit. On a $\Delta u = \Delta\lambda - \Delta y$. D'autre part $A = y - \lambda_m$ étant négatif, on doit remplacer la formule (68) par

$$\Delta y = -A - \sqrt{A^2 + \varepsilon^2 h(2x - h)}.$$

Donc,

$$u = \frac{\Delta\lambda}{2} - u + \sqrt{\left(u - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2 + 2u\,\Delta\lambda + \varepsilon^2 h(2x - h)}.$$

Posons

$$\alpha = 2u - \Delta\lambda, \qquad \beta = 2u\,\Delta\lambda + \varepsilon^2 h(x_0 + x_1).$$

Nous pouvons écrire

$$k = \Delta u = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\beta^2}{\alpha^3} + \ldots \tag{83}$$

ou

$$k = \frac{2\beta}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}. \tag{84}$$

La formule (71) s'écrit d'autre part

$$\Delta k = -\frac{\varepsilon^2 h}{12 u^2}\left[h^2(x^2+1) + x\,\Delta\lambda\,\frac{\Delta u}{u}\right].$$

Elle se prête aisément au calcul numérique et permet de faire sur chaque arc la correction de la partie principale de l'erreur. J'ai opéré ainsi pour $\varepsilon = 0{,}05$ et $0{,}02$, afin de diminuer le nombre des arcs. Dans chacun de ces cas, j'ai utilisé, bien entendu, la formule (84) et non la formule (83).

Observons enfin que l'erreur sur chaque arc n'a qu'une très faible répercussion sur les arcs suivants, en vertu du principe de l'accumulation des trajectoires (n^o 15_1). J'ai eu l'occasion de le vérifier expérimentalement, en rectifiant quelques erreurs accidentelles, découvertes tardivement. J'ai constaté qu'au bout de deux ou trois arcs la valeur de u corrigée rejoignait la valeur erronée précédemment obtenue.

Voici les valeurs obtenues pour la *déviation au point frontière :*

D_F ....,	0,126136	0,049080	0,0192324	0,0056053.

46. *Calcul du temps.* — Employons la formule (27_1), en laissant tomber le terme principal $-\int \frac{d\lambda}{x}$. Le temps de parcours de l'arc total est donné par

$$\varepsilon t = u_F + J, \qquad J = \int_2^1 \frac{u}{x^2}\,dx. \tag{85}$$

Pour calculer l'intégrale J, nous la partageons en trois parties, correspondant aux trois méthodes de calcul de la trajectoire.

La première J_1 correspond à l'arc issu du point terminal. Elle s'écrit

$$J_1 = \int_2^x \frac{\lambda - \frac{2}{3}}{x^2}\,dx + \frac{3}{4}\theta^2 \int_0^z \frac{z\,ds}{\left(1 - \frac{\theta s}{2}\right)^2}.$$

Le premier terme vaut

$$\frac{x^2-4}{6} - \log\frac{x}{2} + \frac{2-x}{3x} = \frac{3}{8}\zeta^2 + \frac{\zeta^3}{12} + \ldots.$$

La seconde intégrale s'écrit (n^o 36), en laissant tomber les termes en θ^2 :

$$\int_0^z z\left[z + s_0 + \theta\left(s_1 + \frac{5}{6}s_0^2 + \frac{3}{2}zs_0\right) + \ldots\right]dz.$$

En remplaçant s_0 et s_1 par les valeurs trouvées au n° 40, un calcul élémentaire donne $a + b\theta$, en posant

$$a = e^z(z-1) + 1 - \frac{z^2}{2},$$

$$b = \frac{e^{2z}}{6}(2z-1) + \frac{e^z}{12}(36 - 36z + 3z^2 + 5z^3) - \frac{17}{6} + \frac{19}{12}z^2 + \frac{7}{9}z^3.$$

D'où

$$J_1 = \frac{3}{8}\xi^2 + \frac{\xi^3}{12} + \frac{3}{4}\theta^2(a + b\theta) + \ldots.$$

Dans les coefficients a et b, z doit être remplacé par les valeurs adoptées au n° 43. Quant à ξ, on doit le remplacer par les valeurs trouvées au n° 43. On trouve ainsi les valeurs numériques ci-dessous :

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
J_1	$-0,0000446$	$-0,0^5676$	$-0,0^6814$	$-0,0^7385$.

47. L'intégrale J_2 correspondant au calcul par arcs successifs a été évaluée par la méthode de Simpson, sauf pour les arcs, en très petit nombre, pour lesquels h changeait d'un arc au suivant et pour lesquels j'ai employé la méthode des trapèzes. Voici les résultats numériques :

J_2	$-0,032776$	$-0,0086357$	$-0,00239378$	$-0,000416682$.

48. Enfin, l'intégrale J_3 correspondant au calcul par la série asymptotique s'écrit

$$J_3 = \varepsilon^2 S_1 + \varepsilon^4 S_2 + \varepsilon^6 S_3 + \ldots,$$

avec

$$S_1 = \int \frac{R_1}{x^2}\,dx = \int \frac{d\lambda'}{2\lambda'(\lambda'+1)} = \frac{1}{2}(\log\lambda' - 2\log x),$$

$$S_2 = \int \frac{R_2}{x^2}\,dx = -\int \frac{\lambda'+2}{2(\lambda'+1)\lambda'^4}\,d\lambda' = S_1 + \frac{1}{2\lambda'} - \frac{1}{4\lambda'^2} + \frac{1}{3\lambda'^3},$$

$$S_3 = \int \frac{R_3}{x^2}\,dx = \int \frac{3\lambda'^2 + 12\lambda' + 10}{(\lambda'+1)\lambda'^7}\,d\lambda' = 2S_2 - \frac{1}{3\lambda' 3} - \frac{1}{4\lambda'^4} - \frac{2}{5\lambda'^5} - \frac{5}{3\lambda'^6}.$$

Bien entendu, ces intégrales doivent être prises entre les bornes qui conviennent. Voici leurs valeurs numériques, ainsi que celles de J, εt et t :

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
J_3	0	$-0,001455$	$-0,0006313$	$-0,000179029$
J	$-0,032821$	$-0,010098$	$-0,0030259$	$-0,000595750$
εt	0,093315	0,038982	0,0162065	0,0050095
t	0,46658	0,38982	0,324130	0,250480

49. *Arc de première espèce.* — Il se calcule entièrement par la méthode du n° 35. Pour $\varepsilon = 0,2$ et $0,1$, j'ai employé la formule (69), sans faire la correction (71); le nombre des arcs a été 23 et 22. Dans les deux autres cas,

j'ai utilisé la formule (68) et fait la correction (71); le nombre des arcs a été 21 et 27.

Pour le calcul du temps, j'ai appliqué la méthode exposée au début du n° 42, pour $\varepsilon = 0,2$ et $0,1$. Dans les deux autres cas, j'ai utilisé la formule

$$t = -\varepsilon \int \frac{dx}{u},$$

en évaluant cette intégrale par la méthode de Simpson, afin que l'erreur soit, par rapport à h, du même ordre que l'erreur commise dans le calcul de y.

Voici les résultats :

$D_{S'}$	0,20818	0,08846	0,037232	0,0115786
$t_{S'}$	0,62125	0,54530	0,460613	0,352238

50. *Contrôle des formules asymptotiques.* — Le tableau ci-dessous rapproche les résultats numériques donnés par les deux méthodes de calcul, les lettres accentuées se rapportant au calcul par les formules asymptotiques. Au-dessous, sont indiquées les erreurs absolues et les erreurs relatives. Le temps t_F ne comprend pas le terme principal (*cf.* n° 34). Par contre, j'ai donné les valeurs T et T′ du *temps total*, avec les erreurs correspondantes.

ε	0,2.	0,1.	0,05.	0,02.
D_S	0,14430	0,045694	0,013784	0,00269755
D'_S	0,14410	0,045700	0,013784	0,00269755
Er. abs	0,00020	−0,000006	0	0
Er. rel	0,0014	−0,00017	0	0
t_S	0,5361	0,32403	0,18722	0,087381
t'_S	0,5303	0,32364	0,18708	0,087377
Er. abs	0,0058	0,00039	0,00014	0,000004
Er. rel	0,011	0,0012	0,00075	0,00005
D_F	0,12614	0,049080	0,019232	0,0056053
D'_F	0,12623	0,049096	0,019225	0,0056053
Er. abs	−0,00009	−0,000016	0,000007	0
Er. rel	−0,0007	−0,00033	0,0004	0
t_F	0,4666	0,38982	0,32413	0,25048
t'_F	0,4571	0,38715	0,32302	0,25019
Er. abs	0,0095	0,00267	0,00111	0,00029
Er. rel	0,02	0,007	0,0034	0,0012
$D_{S'}$	0,20818	0,08846	0,037232	0,0115786
$D'_{S'}$	0,20968	0,08868	0,037209	0,0115769
Er. abs	−0,0015	−0,00022	+0,000023	0,0000017
Er. rel	−0,007	−0,0025	0,00062	0,00015
$t_{S'}$	0,6213	0,5453	0,46061	0,35224
$t'_{S'}$	0,5869	0,5403	0,45919	0,35191
Er. abs	0,0344	0,0050	0,00142	0,00033
Er. rel	0,055	0,0092	0,0031	0,00094
T	5,9966	9,6547	17,4018	41,2710
T′	5,9469	9,6466	17,3991	41,2703
Er. abs	0,0497	0,0081	0,0027	0,0007
Er. rel	0,0083	0,00084	0,00016	0,000017

On voit que l'accord est *excellent pour l'arc supérieur* (1) mais *moins bon pour l'arc inférieur*. Ceci n'est pas surprenant, puisque les formules asymptotiques donnant la déviation comportent une erreur du sixième ordre en ε dans le premier cas et seulement d'ordre $\frac{10}{3}$ dans le second cas; de même, celles qui donnent t comporte une erreur d'ordre 5 ou $\frac{8}{3}$ suivant le cas.

Enfin, l'accord est toujours *moins bon pour le temps que pour la déviation;* cela s'explique également, puisque l'erreur est d'un ordre infinitésimal moindre. Toutefois si l'on envisage le *temps total*, l'approximation redevient *excellente*.

Bien entendu, je ne garantis pas la parfaite exactitude de tous ces calculs numériques. Ils contiennent très vraisemblablement des erreurs accidentelles. Mais, dans leur ensemble, les résultats obtenus montrent que *nos formules asymptotiques donnent une approximation très satisfaisante*.

51. *Calcul de l'amplitude et de la période de l'oscillation périodique.* — Supposons toujours la courbe (Γ) symétrique par rapport à l'origine. Dans les formules (159_1), nous devons remplacer D_S par $D_{S'}$ et il vient

$$z = D_{S'} - \frac{2}{3} D_1 \varepsilon^2 - \frac{2}{3} D_{S'}^2,$$

D_1 et $D_{S'}$ étant donnés par les formules du n° 30. Pour les quatre valeurs de ε, on trouve les valeurs suivantes de z :

$$0,03331; \quad 0,03743; \quad 0,02247; \quad 0,008789.$$

Les formules (161_1) et (160_1) donnent

$$T - T_0 = \frac{3z}{2\varepsilon} + \frac{5z^2}{8\varepsilon};$$

d'où les valeurs numériques suivantes (2) :

$$0,2533; \quad 0,5703; \quad 0,6805; \quad 0,6616.$$

52. Pour faire la *vérification directe*, il nous faut calculer l'accroissement Δy subi par y quand l'abscisse a du point terminal augmente de z. Considérant y comme une fonction des deux variables indépendantes x et a, nous avons

$$\Delta y = z\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + \dots$$

---

(1) La coïncidence parfaite dans les cas $\varepsilon = 0,05$ et $0,02$ doit être regardée comme fortuite, car je ne réponds pas de la dernière décimale dans le calcul direct.

(2) On peut penser *a priori* que z et $T - T_0$ devraient décroître avec ε. En réalité, si l'on calcule les dérivées de ces deux fonctions par rapport à $\theta = \varepsilon^{\frac{2}{3}}$, on trouve les valeurs suivantes : $-0,498$; $0,076$; $0,214$; $0,198$ et $-4,95$; $-2,81$; $-1,01$; $+1,49$. On en déduit, par interpolation graphique, que z et $T - T_0$ *passent par un maximum*, atteint approximativement pour $\varepsilon = 0,116$ et $\varepsilon = 0,032$; ce qui est bien d'accord avec les valeurs numériques obtenues.

et nous devons calculer la valeur du second membre pour $x = 0$. En l'ajoutant à D_S, nous devons retrouver $D_{S'}$; donc, on doit avoir

$$\Delta y = D_{S'} - D_S.$$

Le second membre est connu à l'ordre $\frac{10}{3}$ près en ε. Nous devons donc calculer Δy avec la même approximation. Comme z est d'ordre $\frac{4}{3}$, nous devons pousser le développement ci-dessus jusqu'au terme en z^2 inclus.

On peut, théoriquement, calculer chacun de ses coefficients par l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, donc par des quadratures portant exclusivement sur des fonctions connues et susceptibles d'être évaluées numériquement, en utilisant les résultats antérieurs. Mais c'est assez compliqué et je n'ai pas poursuivi ce calcul. On pourrait aussi recommencer le calcul numérique de la nouvelle trajectoire, en partant du point terminal d'abscisse $2 + z$; mais je n'ai pas voulu davantage entreprendre ce calcul et me suis contenté des vérifications dont le résultat à été donné au n° 50.