

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN CHAZY

Sur une équation différentielle du premier ordre et du second degré

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 61 (1944), p. 45-71

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1944_3_61__45_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1944, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

DU PREMIER ORDRE ET DU SECOND DEGRÉ

PAR M. JEAN CHAZY.

Soit l'équation différentielle

$$(1) [ax + by + S_2(x, y)] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2[a_1x + b_1y + S_2(x, y)] \frac{dy}{dx} + a_2x + b_2y + S_2(x, y) = 0,$$

où a, b, a_1, b_1, a_2, b_2 désignent six constantes, et où nous représentons, selon une notation générale, par $S_n(x, y)$ une fonction des deux variables x et y holomorphe pour le système de valeurs $x = 0, y = 0$, et dont le développement en série entière en x et y ne comprend pas de terme de degré inférieur à n . Les équations de cette forme, en particulier l'équation des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic, ont été étudiées (1) par Cayley, Darboux, Émile Picard, M. Dulac.

Considérant comme eux les seules valeurs réelles des coefficients et des variables x, y , je veux ici distinguer les différents cas généraux, c'est-à-dire ne comportant pas de condition d'égalité entre les coefficients, que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation (1) au voisinage du point singulier $x = 0, y = 0$, et je donne des exemples de ces différents cas. J'apporte notamment, au moyen d'une forme réduite de l'équation, une démonstration plus simple des résultats établis par Émile Picard, et je montre que deux figures tracées par Darboux et concernant la forme des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic, ont en fait une portée beaucoup plus générale.

Solutions holomorphes. — D'abord l'équation (1) admet en général une ou plusieurs solutions $y(x)$ holomorphes et nulles pour $x = 0$.

(1) CAYLEY, *Philosophical Magazine*, vol. 26, 1863, p. 441-452; DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, 1896, p. 448-465; ÉMILE PICARD, *Traité d'Analyse*, t. 3, 1928, p. 223-234; DULAC, *Comptes rendus*, t. 132, 1901, p. 1169. Voir aussi *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, article de P. PAINLEVÉ, t. II, vol. 3, fasc., 1, p. 48.

En effet cherchons les courbes intégrales qui aboutissent au point $x = 0$, $y = 0$, soit O , et qui ont en O une tangente; le coefficient angulaire t d'une telle tangente est la limite à la fois du quotient $\frac{y}{x}$ et de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ quand x et y tendent vers zéro, et par suite satisfait à l'équation algébrique du troisième degré

$$(2) \quad (a + bt)t^2 + 2(a_1 + b_1t)t + a_2 + b_2t = 0.$$

L'équation (2) dans le domaine réel a une ou trois racines; par une rotation des axes de coordonnées annulons cette racine ou l'une de ces trois racines, de sorte que l'équation différentielle conserve la forme (1), mais le coefficient de x , a_2 , y est nul. Si nous faisons alors le changement de variable $y = tx$, nous obtenons entre les variables x et t l'équation transformée

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{-a_1 - b_1t + xS(x, t) \pm \sqrt{(a_1 + b_1t)^2 - (a + bt)b_2t + xS(x, t)}}{a + bt + xS(x, t)} - t,$$

où nous représentons encore d'une façon générale par $S(x, t)$ une fonction des deux variables x et t holomorphe pour le système de valeurs $x = 0$, $t = 0$. Le dernier numérateur a pour ce système de valeurs deux déterminations, l'une égale à $-2a_1$, l'autre nulle: si le coefficient a_1 est différent de zéro, l'équation correspondant à la première détermination n'a pas d'autre solution, où x et t tendent à la fois vers zéro, que la solution $x = 0$.

L'équation correspondant à la seconde détermination se réduit à

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{-a_1 - b_1t + (a_1 + b_1t) \left[1 - \frac{(a + bt)b_2t}{2(a_1 + b_1t)^2} \right] + \dots}{a + bt} - t = -\left(\frac{b_2}{2a_1} + 1 \right) t + \dots,$$

si nous n'écrivons pas d'une part le produit de la variable x par une fonction de x et t holomorphe pour les valeurs $x = 0$, $t = 0$, et d'autre part le produit du carré t^2 par une fonction de t holomorphe pour $t = 0$. Par conséquent, pourvu que la quantité $\frac{b_2}{2a_1} + 1$ ne soit pas un nombre entier négatif, l'équation obtenue admet, selon le résultat classique de Briot et Bouquet, une solution $t(x)$ holomorphe et nulle pour $x = 0$, et par suite l'équation (1) admet une solution $y(x)$ holomorphe pour $x = 0$ et correspondant à une courbe intégrale tangente en O à l'axe Ox . Il résulte que l'équation différentielle (1) admet en général une ou trois solutions holomorphes et nulles pour $x = 0$.

Simplification de l'équation. — Complétant le calcul qui précède, nous étudierons bientôt les solutions de l'équation (1) voisines de la solution holomorphe $y(x)$, c'est-à-dire les courbes intégrales tangentes au point singulier O à la courbe représentant cette solution holomorphe. En vue d'une telle étude,

servons-nous de l'existence de la solution $y(x)$ pour simplifier l'équation : si nous faisons le changement de variable défini par la notation

$$[y, y(x) + y],$$

l'équation transformée est encore de la forme (1), mais admet la solution particulière $y = 0$. Ou encore nous pouvons supposer inversement que l'équation (1) admet la solution $x = 0$, c'est-à-dire que la courbe $x = 0$ est une courbe intégrale.

Ainsi dans l'équation (1) le facteur du carré $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ doit être le produit de la variable x et d'une fonction de x et y holomorphe, et d'ailleurs différente de zéro, pour $x = 0$, $y = 0$, fonction qui, par une division, peut être réduite à l'unité. Le coefficient important est alors, dans le facteur de $\frac{dy}{dx}$, le coefficient de y , que nous désignerons par α . En ajoutant à la variable y un terme linéaire en x convenable, nous pouvons encore dans le même facteur, pourvu que α soit différent de -1 , annuler le terme du premier degré en x . Par suite, changeant la notation des termes du premier degré, nous considérerons désormais l'équation

$$(3) \quad x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2[\alpha y + S_2(x, y)] \frac{dy}{dx} + \beta x + \gamma y + S_2(x, y) = 0$$

ou

$$(4) \quad x \frac{dy}{dx} = -\alpha y - S_2(x, y) \pm \sqrt{[\alpha y + S_2(x, y)]^2 - x[\beta x + \gamma y + S_2(x, y)]}.$$

Malgré cette transformation, et pour simplifier les figures, nous tracerons systématiquement les courbes intégrales en y considérant les variables transformées x et y comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires dans le plan xOy . Ainsi la solution particulière $x = 0$ est représentée par l'axe Oy .

Solutions voisines des solutions holomorphes. — Étudions les solutions de l'équation (3) correspondant à des courbes intégrales tangentes en O à l'axe Oy . Introduisons comme variable, au lieu du quotient $\frac{y}{x}$, qui est très grand dans les solutions considérées, l'inverse $\frac{x}{y}$: posons $x = uy$, et étudions, quand u tend vers zéro, les solutions $y(u)$ de l'équation transformée de l'équation (4) entre les variables u et y . Il suffira d'ailleurs de supposer les variables x , y , u positives; les résultats obtenus dans le premier quadrant du plan xOy s'étendent immédiatement aux trois autres quadrants.

Par un calcul analogue au calcul antérieur, nous obtenons d'abord

$$y \frac{du}{dy} = \frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = \frac{-\alpha y - S_2(x, y) \pm \sqrt{[\alpha y + S_2(x, y)]^2 - x[\beta x + \gamma y + S_2(x, y)]}}{\beta x + \gamma y + S_2(x, y)} - u.$$

Si l'on prend la détermination du numérateur qui s'annule avec x , la dernière fraction peut s'écrire successivement

$$\frac{\alpha y + S_2(x, y)}{\beta x + \gamma y + S_2(x, y)} \left[-1 + \sqrt{1 - \frac{x|\beta x + \gamma y + S_2(x, y)|}{[\alpha y + S_2(x, y)]^2}} \right] = -\frac{x}{2[\alpha y + S_2(x, y)]} + \dots$$

Au total nous pouvons mettre l'équation entre les deux variables u et y sous la forme

$$(5) \quad u \frac{dy}{du} = y[n - 1 + S_1(u, y)],$$

en introduisant la quantité ⁽¹⁾

$$n = \frac{1}{2\alpha + 1},$$

qui sera commode dans des formules ultérieures, et en désignant selon la notation définie plus haut par $S_1(u, y)$ une fonction des deux variables u et y holomorphe et nulle pour le système de valeurs $u = 0, y = 0$.

L'équation (5) admet bien entendu les deux solutions $u = 0, y = 0$, et, pour étudier les autres solutions $y(u)$ quand la variable u tend vers zéro, nous sommes conduits à distinguer plusieurs cas suivant la valeur du coefficient $n - 1$.

Faisceau de courbes intégrales tangentes : disposition T. — Considérons d'abord le premier cas où le coefficient $n - 1$ est positif, c'est-à-dire où le coefficient α de l'équation (3) est compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro. Dans ce cas le point $u = 0, y = 0$ du plan où l'on représente les deux variables u et y , est un nœud de l'équation (5) : cette équation admet une infinité de solutions $y(u)$ dépendant d'une constante arbitraire, nulles avec u , d'ordre $n - 1$ en u , et qu'on peut représenter par un développement de la forme ⁽²⁾

$$y = C u^{n-1} S(u, C u^{n-1}),$$

où C désigne une constante arbitraire positive, et S , rappelons-le, une fonction des deux variables u et $C u^{n-1}$ holomorphe pour le système des valeurs nulles de ces deux variables. A ces solutions correspondent une infinité de solutions $y(x)$ de l'équation (3), et de courbes intégrales de cette équation tangentes en O à l'axe Oy , et sur lesquelles

$$x = uy = C u^n S(u, C u^{n-1})$$

est d'ordre n en u ; par élimination de la variable u, y est en x d'ordre $\frac{n-1}{n} = -2\alpha$.

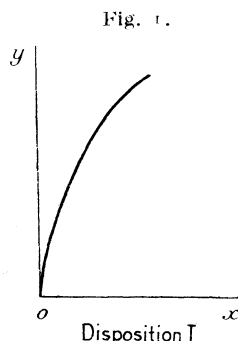
⁽¹⁾ La quantité n est identique au coefficient A considéré par Darboux (*loc. cit.*, p. 454).

⁽²⁾ On sait que cette représentation peut être en défaut quand le coefficient positif $n - 1$ est un nombre entier ou l'inverse d'un nombre entier, mais nous écartons ici les cas d'exception, car ils comportent des conditions d'égalité entre les coefficients de l'équation différentielle.

Ainsi, dans le cas considéré, sur la figure schématique comme avec la signification réelle des variables x et y , les courbes intégrales de l'équation (3) le long desquelles le quotient $\frac{x}{y}$ tend vers zéro, forment de la façon la plus simple un faisceau tangent au point O à la courbe intégrale particulière Oy ou $x = 0$ (fig. 1). Ce premier cas, et cette disposition de figure que nous appellerons la disposition T, sont caractérisés par l'une des deux conditions

$$-\frac{1}{2} < z < 0, \quad n > 1.$$

Si au contraire le coefficient $n - 1$ de l'équation (5) est négatif, le point $u = 0$, $y = 0$ est, dans le plan où l'on représente les deux variables u et y , non plus un nœud, mais un col de cette équation. Dans ce cas nous pouvons énoncer des résultats en quelque sorte complémentaires de ceux qui précèdent, concernant



l'existence des solutions $y(u)$ de l'équation (5) et l'allure des solutions $y(x)$ correspondantes.

En effet, quand le point $u = 0$, $y = 0$ est un col de l'équation (5), cette équation n'admet pas d'autre solution où les variables u et y tendent simultanément vers zéro que les deux solutions particulières $u = 0$, $y = 0$. Toute courbe intégrale représentant une autre solution $y(u)$ et passant au voisinage du col considéré, a, par rapport aux deux courbes représentant ces deux solutions particulières, une allure analogue à l'allure d'une branche d'hyperbole par rapport à ses deux asymptotes. D'une façon plus précise, on peut définir⁽¹⁾ les solutions $y(u)$ au voisinage du col, et dans un angle où le quotient $\frac{y}{u}$ est compris entre deux quantités positives fixes, en égalant à une constante une intégrale de l'équation (5) équivalente au produit yu^{1-n} , où l'exposant $1 - n$ est positif. Substituant l'expression $u = \frac{x}{y}$, on voit que dans le plan xOy les

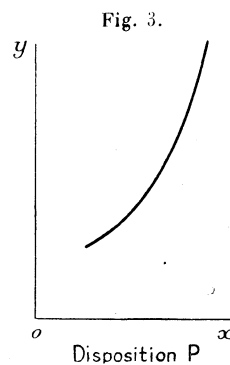
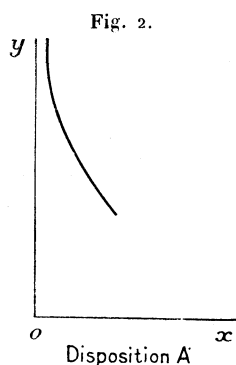
⁽¹⁾ Voir notamment *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. II, vol. 3, fasc. 1, article de P. PAINLEVÉ, p. 41.

courbes représentant les solutions correspondantes de l'équation (2) ont deux allures différentes selon que le coefficient n de l'équation (5), déjà supposé inférieur à 1, est positif ou négatif.

Courbes intégrales d'allure asymptotique : disposition A. — Considérons le deuxième cas où le coefficient n est positif, donc compris entre zéro et 1, où, par suite, le coefficient α de l'équation (3) est positif aussi. Dans ce cas les solutions $y(x)$ de l'équation (3) ont une allure analogue à l'allure que nous venons de mettre en évidence des solutions $y(u)$ dans le plan correspondant. Au voisinage du point singulier $x=0$, $y=0$, et dans une région où le quotient $\frac{y^2}{x}$ est compris entre deux quantités positives fixes, les solutions $y(x)$ peuvent être définies par une intégrale de l'équation (3) équivalente au produit $x^{1-n}y^n$, où les deux exposants $1-n$ et n sont positifs : de sorte que y est en x de l'ordre négatif $-\frac{1-n}{n} = -2\alpha$.

Ainsi, dans ce deuxième cas, et dans un certain voisinage du point singulier O , les courbes intégrales de l'équation (3) sur lesquelles le quotient $\frac{x}{y}$ tend vers zéro, ont l'allure de courbes asymptotes à la courbe intégrale particulière Oy (fig. 2). Le deuxième cas, et la disposition de figure obtenue, que nous appellerons la disposition A, sont caractérisés par l'une des deux conditions

$$\alpha > 0, \quad 0 < n < 1.$$



Courbes intégrales d'allure parabolique : disposition P. — Considérons enfin le troisième cas où le coefficient n de l'équation (5) est négatif, où, par suite, le coefficient α de l'équation (3) est inférieur à $-\frac{1}{2}$. Comme dans le cas précédent, les solutions $y(u)$ de l'équation (5) peuvent être définies par une intégrale équivalente au produit yu^{1-n} , au voisinage du point $u=0$, $y=0$, et dans un angle où le quotient $\frac{y}{u}$ est compris entre deux quantités positives fixes. Par suite, par substitution de l'expression de u , les solutions $y(x)$ de l'équation (3)

peuvent être définies, au voisinage du point singulier $x = 0, y = 0$ et dans une région où le quotient $\frac{y^2}{x}$ est compris entre deux quantités positives fixes, par une intégrale équivalente au quotient $\frac{x^{1-n}}{y^{-n}}$, où les deux exposants $1-n$ et $-n$ sont positifs : de sorte que, comme dans la disposition T, y est en x de l'ordre positif $\frac{1-n}{-n} = -2\alpha$.

Donc, dans ce troisième cas, et dans un certain voisinage du point singulier O, les courbes intégrales sur lesquelles le quotient $\frac{x}{y}$ tend vers zéro et autres que l'axe Oy, ont l'allure de branches paraboliques admettant pour direction asymptotique la direction Oy (fig. 3). Le troisième cas, et la disposition de figure correspondante, que nous appellerons la disposition P, sont caractérisés par l'une des deux inégalités

$$\alpha < -\frac{1}{2}, \quad n < 0.$$

Courbes d'allure asymptotique ou parabolique au voisinage du point singulier.
— Insistons sur la signification des résultats énoncés dans les dispositions de figures A et P. S'il s'agissait de courbes asymptotes à l'axe Oy ou de branches paraboliques de direction asymptotique Oy au sens ordinaire des deux mots, il y aurait évidemment contradiction, puisque d'autre part les courbes obtenues doivent être situées dans une région où le quotient $\frac{y^2}{x}$ est compris entre deux quantités fixes : mais ces courbes ne sont pas des courbes infinies, et donnent une représentation valable seulement au voisinage du point singulier O.

Il est facile d'indiquer un exemple analogue tiré de l'étude des courbes tracées sur une surface au voisinage d'un point. Soient sur un tore un point à courbures opposées M, et la section découpée par un plan parallèle au plan tangent en M et voisin de ce plan tangent : cette section se compose, au voisinage du point M, de deux branches de courbes asymptotes aux deux droites projections des directions asymptotiques du tore en M, c'est-à-dire de deux branches de courbes de même allure au voisinage du point M que les deux branches de l'une des deux hyperboles constituant l'indicatrice des courbures en M; mais nécessairement ces deux branches de section sont, comme la surface du tore, tout entières à distance finie.

Ajoutons que, quand l'équation du troisième degré (2) a ses trois racines réelles, l'étude précédente s'applique successivement aux solutions voisines des trois solutions holomorphes de l'équation (1), et aux solutions complémentaires représentées par des courbes d'allure asymptotique ou parabolique au voisinage du point O; cette étude entraîne alors pour l'équation (3), dans chacun des quatre quadrants, les conséquences suivantes. Soit Oy, la tangente à la courbe représentant l'une des deux solutions holomorphes autres que la solution $x = 0$; il existe, soit un faisceau de courbes intégrales tangentes en O

à Oy_1 , soit des courbes intégrales asymptotes dans un certain voisinage du point O à la droite Oy_1 , soit des courbes intégrales d'allure parabolique dans un certain voisinage du point O et admettant pour direction asymptotique la droite Oy_1 . Nous désignerons encore les trois dispositions de figure correspondantes par *disposition T*, *disposition A*, *disposition P*.

Équation réduite. — Il est à prévoir d'après les résultats qui précèdent, et toute la suite va confirmer cette prévision, que l'allure des courbes intégrales des équations (1) et (3) au voisinage de l'origine O dépend seulement en première approximation des termes du premier degré en x et y , c'est-à-dire dans l'équation (3) des trois coefficients α , β , γ . Ou encore on met cette allure en évidence, du moins en valeur principale selon le mot de Darboux, en réduisant les deux équations aux termes du premier degré en x et y , c'est-à-dire l'équation (3) à l'équation

$$(6) \quad x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2\alpha y \frac{dy}{dx} + \beta x + \gamma y = 0 :$$

une telle réduction revient évidemment à remplacer dans l'équation (1) ou (3) x et y par εx et εy , ε désignant un paramètre arbitraire, à diviser par ε et à faire ensuite $\varepsilon = 0$ dans l'équation obtenue. On peut justifier encore autrement la représentation ainsi réduite des courbes intégrales au voisinage du point O : comme nous l'avons indiqué sur un exemple, cette représentation est analogue à la représentation qu'en un point d'une surface l'indicatrice des courbures donne de la section de cette surface par un plan parallèle au plan tangent et voisin.

Il suffira par conséquent, pour obtenir les différents cas que peuvent présenter les courbes intégrales de l'équation (3) au voisinage du point O , de prendre comme exemples des équations de la forme (6). Il résulte de la formation de l'équation (6) que celle-ci est une équation homogène du premier ordre entre les variables x et y . D'ailleurs, résolue par rapport à y , cette équation exprime y par le produit de la variable x et d'une fonction de la dérivée $\frac{dy}{dx} = y'$, soit

$$y = -x \frac{y'^2 + \beta}{2\alpha y' + \gamma};$$

donc l'équation (6) est aussi une équation de Lagrange homogène. Ainsi nous possédons deux méthodes simples pour ramener l'intégration de l'équation (6) à une quadrature.

On peut remarquer, dans le cas où l'équation (3) se réduit à l'équation homogène (6), que la restriction concernant sur les courbes intégrales d'allure asymptotique ou parabolique le quotient $\frac{y}{x}$ ou $\frac{y^2}{x}$ tombe : en effet l'équation

transformée (5), où par homogénéité la fonction $S_1(u, y)$ ne dépend que de la variable u , devient

$$\frac{dy}{y} = (n-1) \frac{du}{u} + \frac{S_1(u)}{u} du,$$

et par intégration

$$\log y = \log u^{n-1} + S_1(u) + \log C \quad \text{et} \quad yu^{1-n} = Ce^{S_1(u)},$$

la nouvelle expression $S_1(u)$ désignant comme toujours une fonction de u holomorphe et nulle pour $u=0$, et C désignant une constante positive arbitraire; donc l'équation (5) admet une intégrale équivalente au produit yu^{1-n} quand u tend vers zéro, mais ceci dans une direction quelconque autour du point $u=0, y=0$. D'ailleurs les courbes intégrales représentant les solutions $y(x)$ sont homothétiques par rapport à l'origine O , et l'allure de l'une d'elles au voisinage du point O est identique à l'allure d'une autre à l'infini.

Les discriminants δ et Δ . — Nous serons amenés pour diriger la discussion, à considérer les signes des discriminants de deux trinomes du second degré, dont les coefficients sont formés avec les coefficients α, β, γ des termes linéaires de l'équation (3), coefficients qui figurent déjà dans l'équation réduite (6).

D'une part considérons dans le plan xOy le lieu des points x, y auxquels l'équation différentielle (3) fait correspondre deux valeurs confondues de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire annulons le discriminant du trinome (3), qui figure multiplié par $-\frac{1}{4}$ sous le radical de l'équation (4) : nous obtenons une courbe, soit K , ayant à l'origine un point isolé ou un point double à tangentes distinctes, d'équation

$$x(\beta x + \gamma y) - \alpha^2 y^2 = 0,$$

selon que le discriminant

$$\delta = -4\alpha^2\beta - \gamma^2$$

est positif ou négatif. Dans le premier cas, $\delta > 0$, deux courbes intégrales passent en un point quelconque au voisinage du point O , sauf peut être en O lui-même, et ces courbes n'ont pas d'autre point singulier que le point O . Dans le second cas, $\delta < 0$, la courbe K divise le voisinage du point O en quatre angles : les courbes intégrales existent seulement dans deux de ces quatre angles, opposés par le sommet, et, selon une proposition classique, les deux branches de la courbe K sont en général des lieux de points de rebroussement de ces courbes intégrales.

D'autre part l'équation aux coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales aboutissant à l'origine, qui était l'équation du troisième degré (2) pour l'équation différentielle (1), s'abaisse au deuxième degré avec les notations

de l'équation (3), devient

$$(7) \quad t^2 + 2\alpha t^2 + \beta + \gamma t = 0,$$

et a pour discriminant

$$\Delta = 4(2\alpha + 1)\beta - \gamma^2.$$

Selon que le discriminant Δ est positif ou négatif, les courbes intégrales aboutissant au point O avec une tangente déterminée sont ainsi : l'axe Oy et éventuellement un faisceau de courbes tangentes; ou l'axe Oy et deux courbes représentant les deux autres solutions holomorphes, et éventuellement un, deux ou trois faisceaux de courbes tangentes à ces trois premières (1).

Entre les discriminants δ et Δ , tous deux linéaires en β et γ^2 , il y a des relations simples, notamment la relation

$$(8) \quad (2\alpha + 1)\delta + \alpha^2 \Delta + (\alpha + 1)^2 \gamma^2 = 0,$$

d'où résulte que l'une au moins des deux quantités $(2\alpha + 1)\delta$ et Δ est négative.

Plus loin nous supposerons successivement le premier discriminant δ positif, puis négatif, et aussi le second discriminant Δ positif, puis négatif, ce qui nous donnera quatre cas à distinguer.

Résultats démontrés par Émile Picard. — Ayant obtenu antérieurement les courbes intégrales de l'équation (3) qui aboutissent au point singulier O avec une tangente, nous allons démontrer qu'il n'existe pas d'autres courbes intégrales de la même équation qui tendent vers le point O ou qui s'approchent arbitrairement du point O : la proposition a été démontrée par Émile Picard à partir de l'équation (1); nous donnons ici à partir de l'équation (3) une démonstration plus simple.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas que nous avons défini, où le discriminant δ est positif. Et considérons une courbe intégrale de l'équation (3), autre que l'axe Ox, soit la courbe C; suivons cette courbe dans un certain sens où elle ne quitte pas le voisinage du point O, et étudions d'abord la variation de l'abscisse x . En écrivant l'équation (3) sous la forme

$$(9) \quad x + 2[\alpha y + S_2(x, y)] \frac{dx}{dy} + [\beta x + \gamma y + S_2(x, y)] \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0,$$

nous remarquons que la dérivée $\frac{dx}{dy}$ ne peut s'annuler sur la courbe C que si la variable x s'annule aussi, c'est-à-dire en un point de l'axe Oy. D'ailleurs en un tel point l'équation (9) donne deux valeurs de la dérivée $\frac{dx}{dy}$, dont l'une est nulle et détermine comme courbe intégrale l'axe Oy lui-même, et dont l'autre

(1) Nous verrons qu'en fait il peut exister, non pas trois, mais au plus deux de ces faisceaux.

est différente de zéro, sauf peut-être si y est nul aussi. Donc le long de la courbe C la dérivée $\frac{dx}{dy}$ ne peut s'annuler, sur la figure schématique *la tangente ne peut être parallèle à Oy : sauf peut-être au point O* , comme il arrive évidemment dans la disposition de figure T pour les courbes du faisceau tangent en O à l'axe Oy . Il résulte que sur une courbe intégrale suivie dans un sens constant *l'abscisse x varie dans un sens constant*, au moins jusqu'au point O ; cette courbe ne peut couper plus d'une fois l'axe Oy , ni non plus les deux courbes représentant éventuellement les deux autres solutions holomorphes. Notamment une courbe intégrale ne peut former un cycle du point O , ni s'enrouler autour de O en forme de spirale.

Supposant encore le discriminant δ positif, étudions le long de la courbe C la variation de la direction du rayon vecteur issu du point O . Si nous introduisons les variables $\text{arc tang } \frac{y}{x}$ et $t = \frac{y}{x}$, les dérivées de ces variables par rapport à l'abscisse x sont données par les équations.

$$\frac{d}{dx} \text{arc tang } \frac{y}{x} = \frac{1}{1+t^2} \frac{dt}{dx},$$

$$x \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{y}{x} = \frac{-xy - S_2(x, y) \pm \sqrt{[\alpha y + S_2(x, y)]^2 - x[\beta x + \gamma y + S_2(x, y)]}}{x} - \frac{y}{x};$$

d'où nous tirons en fonction de t et de x une expression de la forme

$$x \frac{dt}{dx} = -xt + xS(x|t) \pm \sqrt{x^2 t^2 - \beta - \gamma t + xS(x|t)} - t,$$

si nous désignons d'une façon générale par $S(x|t)$ une fonction de x holomorphe pour $x=0$, et dont les coefficients du développement en série entière en x dépendent de la variable t . D'où encore

$$(10) \quad x \frac{dt}{dx} = f(t) + xS(x|t),$$

si nous posons

$$f(t) = -(x+1)t \pm \sqrt{x^2 t^2 - \beta - \gamma t};$$

il est à remarquer, et il est d'ailleurs facile de prévoir, que l'équation

$$f(t) = 0$$

est équivalente à l'équation (7)

$$(2x+1)t^2 + \gamma t + \beta = 0,$$

c'est-à-dire à l'équation du second degré qui donne les coefficients des tangentes aux courbes intégrales aboutissant à l'origine O .

Il résulte de l'expression (10) que, quand la variable x est petite, la dérivée $\frac{dt}{dx}$ ne peut s'annuler que si la fonction algébrique $f(t)$ est petite aussi.

Quand le discriminant Δ est positif, $f(t)$ ne peut pas s'annuler ni devenir arbitrairement petit. Donc, si le voisinage considéré du point O est assez petit, la dérivée $\frac{dt}{dx}$ a un signe constant le long de la courbe C , la fonction arc tang $\frac{y}{x}$ varie dans un sens constant, et, puisque cette fonction est bornée selon le résultat qui vient d'être énoncé, elle tend vers une limite finie quand x tend lui-même vers une limite finie, et par suite y tend aussi vers une limite finie. Si le point limite ainsi obtenu dans le plan xOy n'est pas le point singulier O , la courbe C peut être prolongée au delà, à moins qu'elle ne sorte du voisinage défini du point O . Si le point limite est le point O , la courbe C y aboutit avec une tangente, nécessairement située sur l'axe Oy , et appartient nécessairement au faisceau obtenu antérieurement dans la disposition de figure T.

Quand le discriminant Δ est négatif, la dérivée $\frac{dt}{dx}$ ne peut s'annuler sur la courbe C que si t est voisin de l'une, soit t_1 , des deux racines de l'équation (7). Or, pour étudier les courbes intégrales de l'équation (3) sur lesquelles, au voisinage du point O , le quotient $\frac{y}{x}$ est voisin de la racine t_1 , et parmi lesquelles figure la courbe C_1 représentant la solution holomorphe correspondante, on peut opérer le changement de variable qui transforme la courbe C , en l'axe Oy et l'équation (3) en une nouvelle équation de même forme. Il résulte alors de l'étude antérieure que les courbes intégrales de cette nouvelle équation sur lesquelles le nouveau quotient $\frac{y}{x}$, qui est équivalent à l'ancien quand x et y tendent vers zéro, est très grand, présentent l'une des trois dispositions de figure T, A, P définies plus haut. Par suite, ou bien la courbe C considérée quitte le voisinage du point singulier O , ou bien elle coïncide avec la courbe C_1 , ou bien, dans la disposition de figure T, la courbe C aboutit au point O tangentiellement à la courbe C_1 .

Considérons enfin le second cas où le discriminant δ est négatif, et où au voisinage du point O les courbes intégrales de l'équation (3) ont des points de rebroussement sur les branches de la courbe K , et suivons de même une courbe intégrale C dans un sens constant. Selon la proposition classique, sur les deux arcs de la courbe C issus de l'un de ces points de rebroussement, les signes à prendre devant le radical de l'équation (4) sont opposés. Il résulte que ces deux arcs ne peuvent couper tous deux l'axe Oy : car en l'un des points d'intersection le signe du radical serait tel que l'expression (4) du produit $x \frac{dy}{dx}$ ne s'annulerait pas avec x , et par suite en ce point la courbe intégrale correspondante serait l'axe Oy , et non la courbe C . Par suite, dans ce second cas, les variations de l'abscisse x et de la direction du rayon vecteur peuvent changer de sens, mais une fois seulement, et, à ce changement près, les résultats précédents subsistent.

En définitive, si l'on suit *une courbe intégrale de l'équation (3)* dans un certain sens, et en passant éventuellement par un point de rebroussement, ou bien cette courbe quitte le voisinage du point O, ou bien elle *aboutit au point O avec une tangente, qui est l'axe Oy ou qui a pour coefficient angulaire l'une des deux racines de l'équation (7)*. Ainsi il n'y a pas d'autre courbe intégrale de l'équation (3) tendant vers le point O ou s'approchant arbitrairement du point O que l'axe Oy et éventuellement un faisceau de courbes tangentes, et en outre pour $\Delta < 0$, les deux courbes représentant les deux autres solutions holomorphes, et éventuellement un ou deux faisceaux de courbes tangentes à ces deux-là.

δ positif. — Dans l'étude des courbes intégrales de l'équation (3) au voisinage du point O, nous allons supposer en premier lieu que la courbe K, dont l'équation est formée en annulant le discriminant du trinôme du second degré (3) en $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire en annulant l'expression figurant sous le radical de l'équation (4), présente à l'origine O un point isolé. Il résulte que les courbes intégrales étudiées n'ont pas de points de rebroussement au voisinage du point O, et il résulte aussi que, dans ce voisinage, l'équation (4) se décompose en deux équations distinctes, dont les courbes intégrales peuvent être tracées séparément, sans passage de l'une à l'autre équation si le point x, y dans le plan xOy ne s'éloigne pas du point O. Nous aurons ainsi, dans un premier cas, selon la notation antérieure,

$$\delta = 4\alpha^2\beta - \gamma^2 > 0,$$

ce qui entraîne nécessairement que le coefficient β est négatif. δ étant positif, nous supposerons successivement le discriminant Δ positif, puis négatif.

Lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic. — Indiquons de suite que l'équation différentielle des lignes de courbure d'une surface au voisinage d'un ombilic rentre précisément dans le premier cas ainsi défini.

En effet, si dans l'espace on prend l'ombilic considéré pour origine de coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , et le plan tangent correspondant pour plan xOy , l'équation de la surface, soit S, au voisinage de cet ombilic est de la forme

$$(11) \quad z = k(x^2 + y^2) + hx^3 + 3ax^2y + 3bxy^2 + cy^3 + S_3(x, y) :$$

k, h, a, b, c sont cinq constantes, et $S_3(x, y)$, suivant la notation définie plus haut, désigne une fonction de x et y holomorphe pour le système de valeurs $x = 0, y = 0$, et dont le développement en série entière en x et y ne comprend pas de terme de degré inférieur à 3. Il résulte que l'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan tangent xOy est au

voisinage de l'ombilic O de la forme

$$(12) \quad [ax + by + S_2(x, y)] \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \\ + [(h - b)x + (a - c)y + S_3(x, y)] \frac{dy}{dx} - ax - by + S_2(x, y) = 0,$$

c'est-à-dire de la forme (1). En outre, si l'on considère le discriminant du trinôme en $\frac{dy}{dx}$ formé par le premier membre, le développement de ce discriminant en série entière en x et y commence par un terme de degré 2 qui est la somme de deux carrés précédés du signe — :

$$-4(ax + by)^2 - [(h - b)x + (a - c)y]^2;$$

donc la courbe K correspondante admet en général l'ombilic O comme point double isolé, selon le cas qui vient d'être défini.

Il est possible évidemment de simplifier le développement (11) de la cote z par une rotation des axes Ox et Oy , notamment d'annuler dans ce développement le coefficient a ou b , mais on peut faire la remarque suivante en appliquant à l'équation (12) les résultats antérieurs. D'après ces résultats, en un ombilic d'une surface passent en général une ou trois lignes de courbure définies par des relations holomorphes entre les coordonnées x et y , et dont les coefficients angulaires sont donnés par une équation algébrique du troisième degré, soit

$$(a + bt)t^2 + [h - b + (a - c)t]t - a - bt = 0.$$

Par suite, si, par une rotation des axes autour de l'ombilic O, l'axe Oy est rendu tangent à cette ligne, ou à l'une de ces trois lignes de courbure, l'équation du troisième degré correspondante admet la racine $t = \infty$, c'est-à-dire que le coefficient b est nul, et réciproquement. D'où une relation simple : si l'axe Oy est tangent à une ligne de courbure aboutissant à l'ombilic O, l'équation (11) de la surface S ne comporte pas de terme en xy^2 , et réciproquement.

Si notamment la surface S est symétrique par rapport au plan zOy , la relation précédente se trouve vérifiée : d'une part la section correspondante est une ligne de courbure de la surface, et d'autre part le développement de la cote z en série entière en x et y comprend seulement des puissances paires de x . Dans ce cas l'équation réduite de l'équation (12), où b et h sont nuls, est l'équation

$$xy'^2 + \left(1 - \frac{c}{a}\right)yy' - x = 0,$$

c'est-à-dire correspond dans l'équation (6) aux valeurs des coefficients $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $2\alpha = 1 - \frac{c}{a}$. Nous prendrons comme exemples plusieurs équations de la dernière forme obtenue.

δ positif, Δ positif. — Le discriminant δ étant supposé positif, considérons d'abord le premier cas où le discriminant

$$\Delta = 4(2\alpha + 1)\beta - \gamma^2$$

est positif aussi : dans ce cas il ne peut exister pour les courbes intégrales de l'équation (3) de direction de tangente en O ni de direction asymptotique au voisinage du point O autre que la direction Oy. En outre, il résulte des deux inégalités $\delta > 0$, $\Delta > 0$ et de la relation (8)

$$(2\alpha + 1)\delta + \alpha^2\Delta + (\alpha + 1)^2\gamma^2 = 0$$

que la quantité $2\alpha + 1$ est nécessairement négative : donc les courbes intégrales de l'équation (3) ont la disposition P définie dans l'étude antérieure, c'est-à-dire ont, dans un certain voisinage du point O, l'allure de branches paraboliques admettant la direction asymptotique Oy.

Lignes de courbure d'une surface du deuxième degré au voisinage d'un ombilic. — Nous pouvons prendre comme exemple les projections sur le plan tangent xOy des lignes de courbure d'une surface S admettant le point O comme ombilic, quand la surface S est une surface du deuxième degré.

En effet les droites isotropes du plan tangent xOy , définies dans ce plan par l'équation

$$x^2 + y^2 = 0,$$

doivent être situées sur la surface ; par conséquent dans le développement (11) de la cote z les polynômes homogènes des degrés successifs doivent être tous divisibles par le facteur $x^2 + y^2$. Si la surface du deuxième degré admet comme plan de symétrie le plan zOy , dans le polynôme de degré 3 les coefficients h et b sont nuls, et l'on a, d'après la condition précédente, $c = 3a$: ce polynôme se réduit à $3ay(x^2 + y^2)$. Par suite l'équation réduite correspond à la valeur $2\alpha = 1 - \frac{c}{a} = -2$, soit

$$(13) \quad xy^2 - 2y^3 - x = 0,$$

aux valeurs $\delta = 4$, $\Delta = 4$, toutes deux positives, des deux discriminants, et enfin à l'ordre $-2\alpha = 2$ de y en x sur les branches paraboliques des courbes intégrales.

Effectivement l'équation (13) admet la solution générale

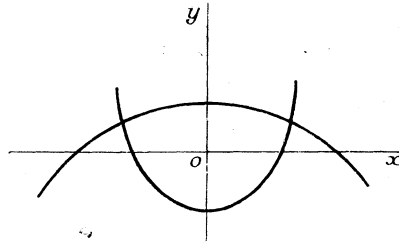
$$(14) \quad y = \frac{x^2 - C^2}{2C},$$

où C désigne une constante arbitraire, et qui est représentée (1), pour C positif et pour C négatif, par les deux familles de paraboles de foyer O et

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. 4, 1896, p. 456.

d'axe Oy (fig. 4). Ces deux familles de paraboles, selon l'approximation définie plus haut, sont les projections sur le plan tangent xOy des lignes de courbure de la surface S au voisinage de l'ombilic O : ces projections approchées sont orthogonales comme les lignes de courbure elles-mêmes. Il résulte notamment, *résultat classique*, qu'aucune autre ligne de courbure de la surface du second degré n'aboutit à l'ombilic que la section principale passant en ce point.

Fig. 4.



δ positif, Δ négatif. — Le discriminant δ étant de même supposé positif, considérons le second cas où le discriminant Δ est négatif, c'est-à-dire où l'équation (7) donnant les coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales de l'équation (3) qui aboutissent à l'origine O ,

$$(2\alpha + 1)t^2 + \gamma t + \beta = 0,$$

a, en outre de la racine $t = \infty$, deux racines réelles et distinctes, soient t_1 et t_2 . A la racine t_1 correspondent une solution holomorphe $y_1(x)$ représentée par une courbe C_1 , tangente à la droite $y = t_1 x$, et des courbes intégrales qui peuvent présenter l'une ou l'autre des trois dispositions de figure définies plus haut.

Reprenons les formules d'un calcul qui précède, soient

$$\frac{y}{x} = t, \quad x \frac{dt}{dx} = f(t) + xS(x|t),$$

si l'on pose

$$f(t) = -(\alpha + 1)t \pm \sqrt{\alpha^2 t^2 - \beta - \gamma t},$$

et si l'on désigne par $S(x|t)$ une fonction de x holomorphe pour $x = 0$ et dont les coefficients du développement en série entière en x dépendent de la variable t : l'équation algébrique

$$f(t) = 0$$

a les mêmes racines t_1 et t_2 que l'équation (7). Par comparaison avec la notation antérieure, désignons ici par $\frac{1}{n_1 - 1}$ le coefficient de $t - t_1$ dans le développement de la fonction $f(t)$ en série entière en $t - t_1$. La position du nombre n_1 par rapport aux deux nombres zéro et 1 détermine, comme précédemment la position du nombre n , l'une ou l'autre des trois dispositions de figure :

pour $n_1 > 1$, la disposition T où existent des solutions de l'équation (3) voisines de la solution $y_1(x)$, et représentées par un faisceau tangent à la droite $y = t_1 x$; pour $0 < n_1 < 1$, la disposition A où existent des courbes intégrales asymptotes à la droite $y = t_1 x$ dans un certain voisinage du point O; enfin, pour $n_1 < 0$, la disposition P où existent dans un certain voisinage O des courbes intégrales d'allure parabolique ayant pour direction asymptotique la droite $y = t_1 x$.

Le coefficient $\frac{1}{n_1 - 1}$ admet les expressions

$$\frac{1}{n_1 - 1} = f'(t_1) = -\alpha - 1 + \frac{\alpha^2 t_1 - \frac{\gamma}{2}}{\pm \sqrt{\alpha^2 t_1^2 - \beta - \gamma t_1}} = -\alpha - 1 + \frac{\alpha^2 t_1 - \frac{\gamma}{2}}{(\alpha + 1)t_1},$$

où devant le radical le signe est le même que dans l'expression de $f(t)$, d'où

$$n_1 = \frac{\alpha t_1 + \frac{\gamma}{2}}{(2\alpha + 1)t_1 + \frac{\gamma}{2}} \quad \text{et} \quad n_2 = \frac{\alpha t_2 + \frac{\gamma}{2}}{(2\alpha + 1)t_2 + \frac{\gamma}{2}}$$

pour le coefficient n_2 correspondant de même à la racine t_2 .

On déduit de ces deux expressions les relations simples

$$n_1 + n_2 = \frac{2\alpha}{2\alpha + 1}, \quad n_1 n_2 = -\frac{\delta}{(2\alpha + 1)\Delta},$$

que nous écrirons sous les formes symétriques

$$(15) \quad n + n_1 + n_2 = 1$$

et

$$(16) \quad n n_1 n_2 = -\frac{\delta}{(2\alpha + 1)^2 \Delta}.$$

On remarque d'ailleurs que la première de ces relations se déduit immédiatement de la relation

$$\frac{1}{f'(t_1)} + \frac{1}{f'(t_2)} + 1 + \frac{1}{2\alpha + 1} = 0,$$

qui exprime que sur la surface de Riemann correspondante les résidus des pôles de la fonction algébrique

$$\frac{1}{f(t)} = \frac{1}{-(\alpha + 1)t \pm \sqrt{\alpha^2 t^2 - \beta - \gamma t}}$$

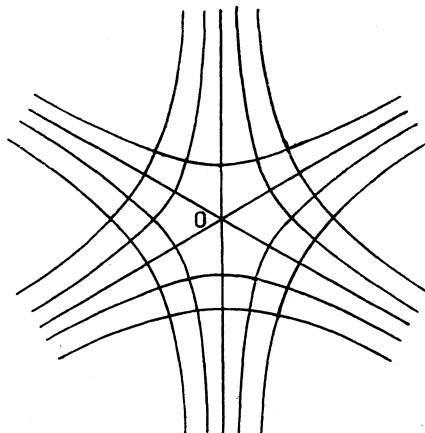
ont une somme nulle.

Il résulte de la relation (16) que les trois familles de courbes intégrales de l'équation (3) correspondant aux trois valeurs $t = \infty$, $t = t_1$, $t = t_2$ ne peuvent présenter toutes les combinaisons des dispositions T, A, P qu'on peut imaginer *a priori*. En effet, δ étant positif et Δ négatif, le produit $n n_1 n_2$ est positif, d'où deux cas seulement : ou bien les nombres n , n_1 , n_2 sont tous trois positifs, ou

bien l'un. soit n , est positif, et n_1 et n_2 sont négatifs. En outre, dans le premier cas, n , n_1 , n_2 sont aussi tous trois inférieurs à 1, d'après la relation (15), et d'ailleurs α est positif; et dans le second cas, n est supérieur à 1 d'après la même relation, et α compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro.

δ positif, Δ négatif, α positif. — En premier lieu, si les nombres n , n_1 , n_2 sont tous trois positifs et inférieurs à 1, ou encore si α est positif, les trois directions $t = \infty$, $t = t_1$, $t = t_2$ correspondent à des familles de courbes de la disposition A. Ainsi il existe trois courbes intégrales représentant des solutions holomorphes et passant au point O, la droite Oy et deux courbes, soient C_1 et C_2 , tangentes aux deux droites $y = t_1 x$, $y = t_2 x$; dans un certain voisinage et

Fig. 5.



de part et d'autre du point O, et aussi de part et d'autre de chacune de ces courbes, il existe une famille de courbes intégrales qui sont asymptotes à la droite Oy ou à la tangente $y = t_1 x$, $y = t_2 x$. Au total la configuration obtenue est représentée ci-dessus (fig. 5) par reproduction (1) d'une figure de Darboux, où les deux courbes C_1 et C_2 sont les deux droites faisant avec Oy des angles de 60° .

Nous prendrons comme exemple pour différentes valeurs du coefficient α l'équation

$$(17) \quad xy'^2 + 2\alpha yy' - x = 0.$$

qui correspond aux valeurs $\beta = -1$, $\gamma = 0$ des coefficients de l'équation (5), et aux valeurs des deux discriminants

$$\delta = 4\alpha^2, \quad \Delta = -4(2\alpha + 1) = -\frac{4}{n},$$

(1) *Loc. cit.*, p. 455, fig. 92.

puisqu'on a

$$n = \frac{1}{2\alpha + 1}.$$

Rappelons que nous avons obtenu déjà une équation de la forme (17) pour déterminer les lignes de courbure au voisinage d'un ombilic sur une surface symétrique par rapport à un plan passant par cet ombilic; nous avons obtenu notamment l'équation (13) correspondant à la valeur $\alpha = -1$ et au cas où la surface considérée est du deuxième degré.

La solution générale de l'équation (17) est pour α ou n quelconque donnée par les formules

$$(18) \quad y = \frac{x}{\alpha} \frac{1 - y'^2}{2y'}, \quad x = \frac{Cy'}{(y'^2 - n)^{\frac{n-1}{2}}}, \quad \text{avec } n = \frac{1}{2\alpha + 1},$$

C désignant une constante arbitraire positive ou négative. Dans la seconde des formules (18), et plus loin dans les formules analogues où C désignera de même une constante arbitraire positive ou négative, il suffit par homothétie de donner à la constante C une valeur particulière positive. D'ailleurs nous avons vu que d'une façon générale, quand le discriminant δ est positif, les solutions de l'équation (3) se séparent en deux familles distinctes, ne comportant pas de passage continu de l'une à l'autre, et correspondant l'une au signe +, l'autre au signe - placé devant le radical de l'équation (4) : dans le cas particulier de l'équation (17), et plus généralement de l'équation réduite et homogène (6), ces deux familles se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport à l'origine O.

Dans l'équation (17), le discriminant δ est positif; Δ , qui était positif pour $\alpha = -1$, $n = -1$ dans l'équation (13), est négatif pour n positif. Nous aurons un exemple des équations correspondant aux inégalités $\delta > 0$, $\Delta < 0$, en prenant $\alpha = 1$, $n = \frac{1}{3}$, et cet exemple rentrera dans le premier des deux cas définis précédemment, puisque n est compris entre zéro et 1. D'où l'équation

$$xy'^2 + 2xy' - x = 0;$$

la solution générale (15) devient

$$y = x \frac{1 - y'^2}{2y'}, \quad x = \frac{Cy'}{\left(y'^2 - \frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

et, si l'on fait

$$(19) \quad y' = \operatorname{tang} \varphi \quad \text{et} \quad \left(C, \frac{2C}{3^{\frac{2}{3}}}\right),$$

$$x = \frac{C \sin 2\varphi}{(\cos 3\varphi)^{\frac{2}{3}}}, \quad y = \frac{C \cos 2\varphi}{(\cos 3\varphi)^{\frac{2}{3}}}.$$

La courbe obtenue est la symétrique par rapport à la première bissectrice de la courbe représentée avec les coordonnées polaires r, θ correspondant aux coordonnées cartésiennes x, y , par l'équation simple

$$r = \frac{C}{\left(\cos \frac{3\theta}{2}\right)^{\frac{2}{3}}},$$

à partir de laquelle les méthodes de construction élémentaires donnent la figure 5.

δ positif, Δ négatif, $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. — Les discriminants δ et Δ étant de même respectivement positif et négatif, considérons le second cas défini plus haut, où le nombre n est positif et d'ailleurs supérieur à 1, donc α compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro, et où les nombres n_1 et n_2 sont négatifs. Alors les courbes intégrales correspondant à la direction $t = \infty$ ont la disposition T, et les courbes correspondant aux directions t_1 et t_2 ont la disposition P. Au total il existe dans chacun des quatre quadrants du plan xOy un faisceau de courbes intégrales tangentes à la courbe particulière $x = 0$; et de plus, en outre des deux courbes C_1 et C_2 , représentant les deux autres solutions holomorphes et tangentes aux deux droites $y = t_1 x, y = t_2 x$, il existe, dans un certain voisinage et de part et d'autre du point O, et aussi de part et d'autre de chacune des courbes C_1 et C_2 , des courbes intégrales d'allure parabolique admettant comme directions asymptotiques les directions t_1 et t_2 . La configuration obtenue (fig. 6) est encore une configuration représentée (1) par Darboux, quand les deux courbes C_1 et C_2 sont les deux droites $y = \pm x\sqrt{3}$.

Pour obtenir cette configuration, faisons dans l'équation (17) $\alpha = -\frac{1}{3}$, d'où $n = 3, \delta > 0, \Delta < 0$, et l'équation

$$(20) \quad xy'^2 - \frac{2}{3}yy' - x = 0.$$

La solution générale (18) devient

$$y = -3x \frac{1 - y'^2}{2y'}, \quad x = \frac{Cy'}{(y'^2 - 3)^2},$$

et, si l'on fait

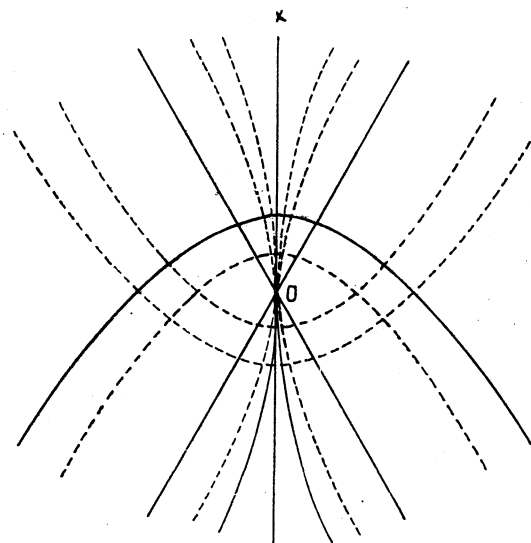
$$(21) \quad \begin{aligned} y' &= -\operatorname{tang} \varphi, & \text{et} & \quad (C, -8C), \\ x &= \frac{C \sin^2 2\varphi}{\sin^2 3\varphi}, & y &= \frac{3C \sin^2 2\varphi \cos 2\varphi}{\sin^2 3\varphi}. \end{aligned}$$

Quand le paramètre φ croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$, le point x, y décrit sur la figure 6 et à

(1) *Loc. cit.*, p. 455, fig. 91.

droite de Oy , les deux branches paraboliques tracées en traits pleins, l'une joignant le sommet au point à l'infini de la droite $y = -x\sqrt{3}$, l'autre joignant ce point à l'infini à l'origine O . Une symétrie par rapport à l'axe Oy , puis une symétrie par rapport au point O donnent l'une des deux courbes intégrales tracées sur la figure 6 et correspondant à deux valeurs opposées de la constante C .

Fig. 6.



Indiquons, en rapprochant ces résultats et un résultat antérieur, l'exemple d'une surface à un ombilic de laquelle aboutissent une infinité de lignes de courbure, savoir la surface du troisième degré

$$z = k(x^2 + y^2) + 3ax^2y + cy^3,$$

k , a , c désignant trois constantes telles que la quantité $2\alpha = 1 - \frac{c}{a}$ soit comprise entre -1 et zéro, soit la surface

$$z = k(x^2 + y^2) + 2x^2y + y^3.$$

δ négatif. — Considérons maintenant le second cas où le discriminant δ est négatif, c'est-à-dire où la courbe K , dont l'équation est formée en annulant le discriminant de l'équation (3) en $\frac{dy}{dx}$, possède à l'origine O un point double à tangentes réelles et distinctes, et où par suite les courbes intégrales présentent en général des points de rebroussement au voisinage du point O . Comme plus haut nous supposons successivement le discriminant Δ positif, puis négatif.

δ négatif, Δ positif. — Soient d'abord δ négatif et Δ positif. Alors il n'y a pas pour les courbes intégrales de l'équation (3) d'autre direction de

tangente à l'origine ni d'autre direction asymptotique au voisinage du point O que la direction Oy , qui nécessairement est située dans les deux angles où l'équation (3) en $\frac{dy}{dx}$ a ses racines réelles. En outre, il résulte des deux inégalités $\delta < 0$, $\Delta > 0$ et de la relation (8)

$$(2\alpha + 1)\delta + \alpha^2\Delta + (\alpha + 1)^2\gamma^2 = 0$$

que le facteur $2\alpha + 1$ est positif : donc, au voisinage du point O, les courbes intégrales correspondant à la valeur $t = \infty$ présentent la disposition A si α est positif, et la disposition T si α est compris entre $-\frac{1}{2}$ et zéro.

Nous donnerons un exemple de chacun des deux cas à partir de l'équation

$$(22) \quad xy'^2 + 2\alpha yy' + x = 0,$$

qui se déduit de l'équation (17) par la transformation (x, ix) , et qui correspond aux valeurs des deux discriminants

$$\delta = -4\alpha^2, \quad \Delta = 4(2\alpha + 1) = \frac{4}{n}.$$

La solution générale de l'équation (22) est donnée par les formules

$$(23) \quad y = -\frac{x}{\alpha} \frac{1 + y'^2}{2y'}, \quad x = \frac{C y'}{(y'^2 + n)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \text{avec } n = \frac{1}{2\alpha + 1},$$

C désignant une constante arbitraire positive ou négative.

Intégrales singulières et enveloppes. — Si d'abord nous faisons dans l'équation (22) $\alpha = -1$, $n = -1$, nous obtenons l'équation

$$(24) \quad xy'^2 - 2yy' + x = 0,$$

transformée de l'équation réduite (13) qui a déterminé les lignes de courbure d'une surface du second degré au voisinage d'un ombilic. La nouvelle solution générale, qui se déduit de la solution (14) de l'équation (13) par la transformation $(x, C; ix, -C)$,

$$y = \frac{x^2 + C^2}{2C},$$

représente les paraboles de directrice Ox et d'axe Oy (*fig. 7*).

L'équation (24) peut s'écrire

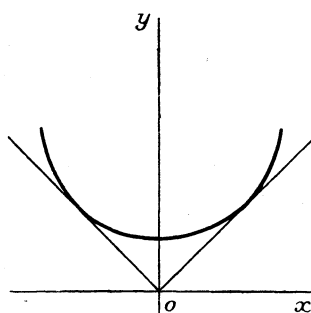
$$xy' - y = \pm \sqrt{y^2 - x^2},$$

et la courbe K, lieu des points où cette équation a une racine double en y' , se compose des deux bissectrices du plan xOy

$$y^2 - x^2 = 0,$$

mais ces deux bissectrices sont ici des courbes intégrales, constituant avec la solution $x = 0$ les trois solutions holomorphes. Aussi sont-elles, selon une circonstance classique, non pas un lieu de points de rebroussement, mais des intégrales singulières et l'enveloppe des courbes représentant la solution générale.

Fig. 7.



δ négatif, Δ positif, α positif. — Pour réaliser les deux cas définis plus haut, nous donnerons successivement au coefficient α dans l'équation (22) les valeurs $\alpha = 1$, $\alpha = -\frac{1}{3}$, que nous avons considérées dans l'équation (17).

Soient $\alpha = 1$, $n = \frac{1}{3}$, et l'équation

$$(25) \quad xy'^2 + 2yy' + x = 0.$$

La solution générale est exprimée en fonction du paramètre y' par les formules (23), mais nous pouvons par le changement de variables $(x, \nu; ix, i\nu)$ déduire des formules (19) une expression de cette solution, soit

$$(26) \quad x = \frac{C \operatorname{sh} 2\nu}{(\operatorname{ch} 3\nu)^{\frac{2}{3}}}, \quad y = \frac{C \operatorname{ch} 2\nu}{(\operatorname{ch} 3\nu)^{\frac{2}{3}}};$$

la courbe correspondante, quand la constante C est positive, et quand le paramètre ν prend les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, est l'arc A'SA de la figure 8. Nous obtenons une autre expression de la solution générale de l'équation (25) en faisant, dans les formules (26), le changement de variable $(\nu, \nu + \frac{i\pi}{2})$, soit

$$(27) \quad x = \frac{C \operatorname{sh} 2\nu}{(\operatorname{sh} 3\nu)^{\frac{2}{3}}}, \quad y = \frac{C \operatorname{ch} 2\nu}{(\operatorname{sh} 3\nu)^{\frac{2}{3}}},$$

et en donnant aussi au nouveau paramètre ν les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$; pour la même valeur de C et I désignant le point à l'infini sur Oy , la courbe correspondante se compose de deux arcs symétriques A'I, IA de la figure 8.

La courbe intégrale totale pour une valeur donnée de la constante C présente deux points de rebroussement en A et A' sur les deux bissectrices

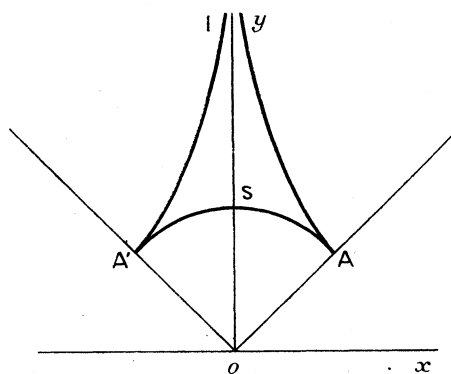
$$y^2 - x^2 = 0;$$

et en effet l'équation (25) peut s'écrire

$$(28) \quad xy' + y = \pm \sqrt{y^2 - x^2},$$

et les deux bissectrices constituent la courbe K , lieu des points où cette équation a une racine double en y' . En faisant varier la constante C dans les formules (26) et (27), ou par une homothétie de rapport arbitraire de la figure 8, on obtient successivement toutes les courbes intégrales de l'équation (25); ces courbes forment un faisceau asymptote à la droite Oy , selon la disposition A .

Fig. 8.



Faisons plusieurs remarques. L'arc $A'SA$ satisfait à l'équation (28) où le radical est précédé du signe $+$, et les arcs $A'I$, IA satisfont à la même équation où le radical est précédé du signe $-$. C'est là une circonstance générale quand le discriminant δ est négatif, et que les courbes intégrales de l'équation (3) présentent des points de rebroussement au voisinage du point O : nécessairement ces courbes se décomposent en arcs sur lesquels le radical de l'équation (4) est précédé du signe $+$ pour les uns, du signe $-$ pour les autres; et les points de séparation de ces arcs sont les points de rebroussement, dont le lieu est la courbe K .

Remarque sur une représentation paramétrique. — Quand, dans la solution générale (23), les variables x et y sont exprimées en fonction de la dérivée y' , cette dérivée, bien entendu, prend seulement des valeurs réelles : au contraire, dans la représentation obtenue, on passe au point A de l'un à l'autre des arcs de rebroussement par un prolongement analytique où le paramètre représentatif prend des valeurs imaginaires. En effet, les formules (27) résultent des formules (26) par le changement de variable $(\varphi, \varphi + \frac{i\pi}{2})$, et l'on passe de

l'arc SA, sur lequel dans les formules (26) v est supposé réel et tend vers $-\infty$, à l'arc AI en supposant qu'au point ∞ du plan complexe la variable v quitte l'axe des quantités réelles et décrive en sens inverse la parallèle à cet axe d'ordonnée $\frac{\pi}{2}$.

Donnons un exemple analogue et plus simple. Si dans les expressions

$$x = \cos t, \quad y = \sin t$$

on remplace t par $t + \pi$, on obtient, pour les valeurs réelles du paramètre t , la même circonférence, mais deux représentations différentes de cette circonférence. Au contraire les expressions

$$x = \operatorname{ch} t, \quad y = \operatorname{sh} t,$$

où t est un paramètre réel, représentent une branche d'une hyperbole : soit H cette hyperbole; si dans les mêmes expressions on remplace t par $t + i\pi$, elles deviennent

$$x = -\operatorname{ch} t, \quad y = -\operatorname{sh} t,$$

et représentent pour t réel encore la seconde branche de l'hyperbole H. Ces deux branches d'hyperbole sont le prolongement analytique l'une de l'autre, mais dans le passage de l'une à l'autre le paramètre t prend nécessairement des valeurs imaginaires.

Bien entendu, les deux branches de l'hyperbole H peuvent être représentées en fonction d'un paramètre qui ne prend que des valeurs réelles, par exemple en coordonnées polaires ayant pour pôle un foyer et, au moyen de l'équation polaire de l'hyperbole, en fonction de l'angle polaire qui varie dans un intervalle réel de 2π . Mais rappelons que la même circonstance peut se rencontrer quand la variable indépendante, qu'est ici le paramètre de représentation, est donnée *a priori*, notamment est le temps en Mécanique. Ainsi Poincaré a proposé ⁽¹⁾ de prolonger analytiquement l'étude d'un mouvement au delà de la valeur infinie du temps, afin d'étendre la notion de stabilité à la Poisson; mais j'ai montré ⁽²⁾ qu'en fait dans un tel prolongement, dans les problèmes des deux corps et des trois corps, le temps prend nécessairement, comme le paramètre v considéré ici, des valeurs imaginaires.

δ négatif, Δ positif, $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$. — Dans l'équation (22) faisons maintenant $\alpha = -\frac{1}{3}$, $n = 3$: cette équation devient

$$(29) \quad xy'^2 - \frac{2}{3} yy'' + x = 0.$$

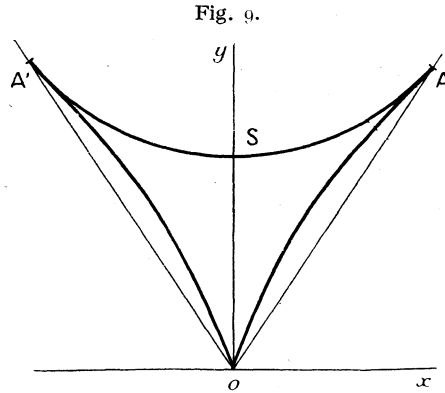
(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. 3, p. 168-174.

(2) *Annales de l'École Normale*, t. 39, 1922, p. 52-59.

A partir de la solution générale (21) de l'équation (20), par le changement de variables $(x, v; ix, iv)$, nous déduisons une expression de la solution générale de l'équation (29)

$$(30) \quad x = \frac{C \operatorname{sh}^2 2v}{\operatorname{sh}^2 3v}, \quad y = \frac{3C \operatorname{sh}^2 2v \operatorname{ch} 2v}{\operatorname{sh}^2 3v};$$

la courbe correspondante, pour C positif et quand le paramètre réel v varie de $-\infty$ à $+\infty$, est l'arc $A'SA$ de la figure 9. Des formules (30), par le chan-



gement de variable $(v, v + \frac{i\pi}{2})$, nous déduisons une seconde expression de la solution générale de l'équation (29)

$$x = \frac{C \operatorname{sh}^2 2v}{\operatorname{sh}^2 3v}, \quad y = \frac{3C \operatorname{sh}^2 2v \operatorname{ch} 2v}{\operatorname{ch}^2 3v},$$

qui correspond aux deux arcs symétriques $A'O$, OA de la figure 9 quand le nouveau paramètre v prend les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Quand la constante C varie, ou par homothétie, on obtient toutes les courbes intégrales de l'équation (29), qui forment un faisceau tangent en O à l'axe Oy selon la disposition T.

δ négatif, Δ négatif. — Supposons encore que le discriminant δ soit négatif, et que les courbes intégrales de l'équation (3) aient des points de rebroussement au voisinage du point O . Mais supposons que le discriminant Δ soit négatif aussi, c'est-à-dire que l'équation du second degré (7) ait deux racines réelles et distinctes, t_1 et t_2 , et que les courbes intégrales admettent comme directions de tangentes au point O ou comme directions asymptotiques au voisinage du point O , les trois directions $t = \infty$, $t = t_1$, $t = t_2$, situées nécessairement dans les deux angles où l'équation (3) en $\frac{dy}{dx}$ a ses racines réelles.

Alors le produit des trois nombres correspondants n, n_1, n_2 est négatif d'après la relation (16)

$$n n_1 n_2 = \frac{\delta}{(2\alpha + 1)^2 \Delta},$$

et d'ailleurs la somme $n + n_1 + n_2$ est égale à 1 d'après la relation (15). Donc, parmi les trois nombres n, n_1, n_2 , l'un et un seul, soit n , est négatif, et les courbes intégrales correspondant à la direction $t = \infty$ ont la disposition P, c'est-à-dire sont, dans un certain voisinage du point O, des courbes paraboliques de direction asymptotique Oy. Les deux autres nombres, n_1 et n_2 , sont positifs, mais ils peuvent séparément être supérieurs à 1, ou inférieurs à 1, et par suite les courbes intégrales correspondantes peuvent séparément être tangentes en O aux droites $y = t_1 x, y = t_2 x$, selon la disposition T, ou, dans un certain voisinage du point O, être asymptotes à ces deux droites, selon la disposition A.

Au total trois cas sont ainsi possibles, que nous pouvons caractériser par les trois symboles TTP, AAP, TAP. Nous nous bornerons à indiquer une équation simple correspondant à chacun des trois cas

$$\begin{aligned} \text{(TTP)} \quad & xy'^2 - \frac{4}{3} yy' + x = 0, \\ \text{(AAP)} \quad & xy'^2 - 4 yy' + x = 0, \\ \text{(TAP)} \quad & xy'^2 - \frac{yy'}{3} + y - \frac{2x}{3} = 0. \end{aligned}$$

Terminons par une remarque. L'équation différentielle du premier ordre en x et y et du second degré en $\frac{dy}{dx}$, dont l'étude étend le plus immédiatement l'étude des équations du premier degré en $\frac{dy}{dx}$, et notamment dans le domaine réel la théorie des nœuds et des cols, comporte évidemment comme cas de dégénérescence l'équation qu'on obtient en multipliant les deux équations

$$x \frac{dy}{dx} - ny = 0, \quad x \frac{dy}{dx} - py = 0,$$

soit

$$x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - (n+p)xy \frac{dy}{dx} + npy^2 = 0,$$

n et p désignant deux constantes. Remarquons que l'équation ainsi obtenue ne rentre pas parmi les équations de la forme (1) que nous venons de considérer dans ce Mémoire, et qui, par suite, constituent, par rapport aux équations du premier degré, une classe nouvelle.