Maurice Janet

# Sur les formules fondamentales de la théorie des groupes continus finis et de la méthode du repère mobile

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 59 (1942), p. 165-186
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__165_0>

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES

DE LA

# THÉORIE DES GROUPES CONTINUS FINIS

ET DE LA

# MÉTHODE DU REPÈRE MOBILE

PAR M. MAURICE JANET.

On sait que M. E. Cartan a développé la théorie des groupes continus finis, fondée par Lie, en montrant ses relations étroites avec la méthode, d'origine géométrique, du repère mobile; les formes de Pfaff qui interviennent $(\omega)$, $(\varpi)$ prennent le nom de composantes (relatives, absolues) de ce repère; les « formules de structure » prennent la place des « conditions d'intégrabilité », écrites par Darboux dans des cas particuliers.

Je voudrais donner quelques compléments de détail à cette étude, préciser analytiquement certains énoncés, et signaler une formule générale fort simple [1] qui permet de retrouver bien des résultats connus et dont les applications peuvent être nombreuses.

1. Soient

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_\rho) \equiv f_i(x, a) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \equiv \frac{D(x')}{D(x)} \neq 0$$

les formules définissant un groupe G de transformations $S_a[(x) \to (x')]$, à $\rho$ paramètres *essentiels* $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$. La transformation inverse, que nous notons

$$x_k = \overline{f}_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; a_1, a_2, \ldots, a_\rho),$$

[1] J'ai donné cette formule et quelques-unes de ses applications dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 17 mars 1941 (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, p. 424). Parmi ces applications, *ne figuraient* pas celles qui prennent place ici au n° 6 [formules (12), (13), (14) et (15)] et aux n$^{os}$ 10 et 11 [formules (16), (17) et suiv.].

est par hypothèse susceptible d'être écrite

$$x_k = f_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho),$$

les $\alpha$ dépendant uniquement des $a$; nous écrivons $S_\alpha = S_a^{-1}$.
La transformation

$$x''_i = f_i[f_1(x, a), f_2(x, a), \ldots, f_n(x, a); b_1, b_2, \ldots, b_\rho],$$

où les $b$ sont de nouvelles constantes arbitraires, est par hypothèse susceptible de s'écrire

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; c_1, c_2, \ldots, c_\rho),$$

où les $c$ dépendent uniquement des $a$ et des $b$

$$c_\lambda = \varphi_\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_\rho; b_1, b_2, \ldots, b_\rho) \equiv \varphi_\lambda(a; b);$$

nous écrivons $S_c = S_b S_a$.

Lorsque les $b$ prennent les valeurs $\alpha$, les $c$ prennent certaines valeurs, indépendantes des $a$, que nous appellerons $j_1, j_2, \ldots, j_\rho$ : $S_j$ est la transformation identique, ou unité.

L'égalité fondamentale

$$\text{(E)} \qquad f_i(x'; b) = f_i(x; c),$$

où les $x'_k$ sont considérés comme représentant $f_k(x, a)$, et les $c_\mu$ comme représentant $\varphi_\mu(a; b)$ est une *identité* en $x, a, b$.

La *dérivation* des deux membres par rapport à $a_\lambda$ donne la formule [1]

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x', b)\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, a) = \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, c)\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, b),$$

qui pour $(a) = (j)$ se réduit à

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, b)\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j) = \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, b)\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(j, b).$$

Cette identité en $x$, $b$ permet de faire, dans l'expression de la différentielle totale de $x'_i$,

$$dx'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)\,dx_k + \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, a)\,da_\mu$$

---

(1) $f_i(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_\rho)$ est une fonction de $n+\rho$ arguments, dont nous désignons les $n+\rho$ dérivées partielles du premier ordre par $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_\rho)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(u_1, u_2, \ldots, u_n; v_1, v_2, \ldots, v_\rho)(\lambda = 1, 2, \ldots, \rho)$. Convention analogue pour les $2\rho$ dérivées de $\varphi_\mu$ : $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}$ relativement aux $\rho$ premiers arguments, $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}$ par rapport aux $\rho$ suivants. D'autre part, il est entendu que si un même indice apparaît deux fois dans un terme monome, il y a lieu de faire la sommation par rapport à cet indice : cette sommation se fait ici de 1 à $n$ pour les lettres latines, de 1 à $\rho$ pour les lettres grecques.

une transformation simple et utile : si l'on pose, pour définir [1] les $\omega(l, u)$,

$$u_\mu = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(j, l)\, \omega_\lambda(l, u),$$

on obtient

$$(1) \qquad dx'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)\left[dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\, \omega_\lambda(a, da)\right]$$

et par suite, comme $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a) \right\| \neq 0$, le système d'équations aux différentielles totales auquel satisfont les $x$, $a$ lorsque les $x'$ restent constants, est

$$dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\, \omega_\lambda(a, da) = 0,$$

ou encore, en introduisant une fonction arbitraire $\mathcal{F}$ des $x$ et un symbole $\mathfrak{X}_\lambda$ de « transformation infinitésimale » pour désigner l'opérateur $\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\, \frac{\partial}{\partial x_k}$,

$$(\mathrm{C}) \qquad d\mathcal{F} + \mathfrak{X}_\lambda(\mathcal{F})\, \omega_\lambda(a, da) = 0.$$

De même, la dérivation des deux membres de (E) par rapport à $b_\lambda$ donne la formule

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', b) = \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, c)\, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(a, b),$$

qui pour $b = j$ se réduit à

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j) = \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, a)\, \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(a, j).$$

D'où en posant, pour définir [1] les $\varpi_\lambda(l, u)$

$$u_\mu = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(l, j)\, \varpi_\lambda(l, u),$$

la nouvelle expression de $dx'_i$

$$dx'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)\, dx_k + \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\, \varpi_\lambda(a, da).$$

---

(1) L'identité $a_\rho = \varphi(a, j)$ montre que $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, j)$ est égal à 1 ou à 0 suivant que $\lambda - \mu$ est ou non différent de zéro ; donc $\omega_\mu(j, u) = u_\mu$. D'une manière analogue $\varpi_\mu(j, u) = u_\mu$. Le déterminant $\left\| \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, b) \right\|$, égal, d'après ce qui précède, à 1 si $b = j$, est de toutes façons voisin de 1 si $b$ est voisin de $j$ ; remarque analogue pour $\left\| \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(a, b) \right\|$. Indépendamment de ces remarques, nous verrons plus loin (nº 12) la démonstration générale de l'indépendance des $c$ par rapport aux $a$, et de même des $c$ par rapport aux $b$.

Nous écrirons cette équation sous la forme

$$(2)\qquad dx'_i - \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\varpi_\lambda(a, da) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)\,dx_k.$$

Le système d'équations aux différentielles totales auquel satisfont les $x'$ lorsque les $x$ restent constants est

$$dx'_i - \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\varpi_\lambda(a, da) = 0$$

et s'écrit, en introduisant une fonction arbitraire $\mathcal{F}'$ des $x'$ et un symbole $\mathfrak{X}'_\lambda$ de « transformation infinitésimale »

$$\mathfrak{X}'_\lambda = \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\frac{\partial}{\partial x'_i},$$

sous la forme condensée

$$(\mathrm{L})\qquad d\mathcal{F}' - \mathfrak{X}'_\lambda(\mathcal{F}')\,\varpi_\lambda(a, da) = 0,$$

$\mathfrak{X}'$ n'est d'ailleurs autre que le symbole déduit de $\mathfrak{X}$ en accentuant les $x$.

*Remarquons* que, pour $a = j$, $\omega_\lambda(a, da)$ et $\varpi_\lambda(a, da)$ se réduisent à $da_\lambda$, et que les formules (1) et (2) deviennent toutes deux [1]

$$dx'_i = dx_i + \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x, j)\,da_\lambda.$$

2. Les formules $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$, où l'on considère les $c$ comme transformés des $a$, les paramètres étant les $b$, définissent *un groupe* de transformations $(a) \to (c)$ à $\rho$ paramètres $(b)$.

D'abord [2]

$$a_\mu = \overline{\overline{\varphi}}_\mu(c, b)$$

est susceptible de s'écrire $a_\mu = \varphi_\mu(c, \beta)$, puisque

$$S_\beta S_c = (S_\beta S_b) S_a = S_a.$$

Ensuite les formules

$$S_c = S_b S_a, \qquad S_{c'} = S_{b'} S_c$$

entraînent

$$S_{c'} = (S_{b'} S_b) S_a = S_{b''} S_a,$$

---

(1) Car l'identité $x_i \equiv f_i(x, j)$ montre que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, j)$ est égal à 1 ou 0 suivant que $i - k$ est égal ou non à zéro.

(2) Je désigne par $\overline{\overline{\varphi}}_\mu$ les fonctions provenant de la résolution des $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$ *par rapport aux lettres* $a$; j'aurai à employer plus loin une autre notation $\varphi^*$ pour les fonctions provenant de la résolution des mêmes équations *par rapport aux lettres* $b$.

les $b''$ se déduisant des $b$, $b'$ par la formule $S_{b''} = S_{b'} S_b$, identique à celle qui donne les $c$ à l'aide des $a$, $b$.

Écrivons, pour le groupe obtenu (premier groupe des paramètres) les formules qui correspondent à (1) et (2) du groupe primitif; en raison de la remarque qui vient d'être faite sur les $b''$, les $\omega$, $\varpi$ à faire intervenir sont justement celles qui ont été définies plus haut, et l'on aura

$$dc_\lambda = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\left[da_\mu + \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(a, j)\,\omega_\sigma(b, db)\right], \tag{3}$$

$$dc_\lambda - \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j)\,\varpi_\sigma(b, db) = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\,da_\mu. \tag{4}$$

D'une manière analogue, les formules $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$, où l'on considère les $c$ comme transformés des $b$, les paramètres étant les $a$, définissent un groupe de transformations $(b) \rightarrow (c)$ à $\rho$ paramètres $(a)$. D'abord, les formules résultant de la résolution des $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$ par rapport aux $b$, à savoir $b_\mu = \overline{\varphi}^{\star}_\mu(c, a)$, sont susceptibles de s'écrire

$$b_\mu = \varphi_\mu(\alpha, c), \qquad \text{puisque} \quad S_c S_\alpha = (S_b S_a) S_\alpha = S_b.$$

Ensuite les formules

$$S_c = S_b S_a, \qquad S_{c^\star} = S_c S_{a'}$$

entraînent

$$S_{c^\star} = S_b(S_a S_{a'}) = S_b S_{a''}$$

où les $a''$ se déduisent des $a$, $a'$ par la formule $S_{a''} = S_a S_{a'}$.

Écrivons pour le groupe obtenu (deuxième groupe des paramètres) les formules qui correspondent à (1), (2) du groupe G, d'où nous sommes partis. Remarquons que les paramètres $a''$, correspondant à la résultante des transformations correspondant aux paramètres $a$, $a'$, s'obtiennent par les formules

$$a''_\mu = \varphi_\mu(a', a) = \psi_\mu(a, a'),$$

où les $\varphi_\mu$ sont précisément les fonctions qui interviennent dans le groupe initial pour donner les $c$ en fonction des $a$ et des $b$. Les formes qui doivent tenir lieu des $\omega$, $\varpi$, sont ici $\overline{\omega}$, $\overline{\varpi}$ définies [1] par

$$\begin{aligned} u_\mu &= \frac{\partial \psi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, l)\,\overline{\omega}_\sigma(l, u), \\ &= \frac{\partial \psi_\mu}{\partial b_\sigma}(l, j)\,\overline{\varpi}_\sigma(l, u). \end{aligned}$$

---

(1) En indiquant les dérivations par rapport aux $\rho$ *premiers* arguments par les lettres $a$, aux $\rho$ *suivants* par les lettres $b$, cela aussi bien pour les $\psi$ que pour les $\varphi$.

Mais on a identiquement

$$\frac{\partial\psi_\mu}{\partial a_\sigma}(m, l) = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(l, m),$$

$$\frac{\partial\psi_\mu}{\partial b_\sigma}(m, l) = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(l, m).$$

Par suite,

$$u_\mu = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(l, j)\,\overline{\omega}_\sigma(l, u),$$

$$= \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, l)\,\overline{\varpi}_\sigma(l, u),$$

égalités qui, comparées à celles qui définissent $\varpi_\sigma$ et $\omega_\sigma$, montrent que

$$\overline{\omega}_\sigma(l, u) = \varpi_\sigma(l, u), \qquad \overline{\varpi}_\sigma(l, u) = \omega_\sigma(l, u).$$

Les formules cherchées sont donc

$$(5) \qquad dc_\lambda = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b)\left[db_\mu + \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, b)\,\varpi_\sigma(a, da)\right],$$

$$(6) \qquad dc_\lambda - \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c)\,\omega_\sigma(a, da) = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b)\,db_\mu.$$

3. Les formules (1), (2) sont évidemment équivalentes : ce sont deux formes que l'on peut donner aux équations qui se déduisent de

$$x'_i = f_i(x, a)$$

*par différentiation totale*. On a donc l'identité

$$(7) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\varpi_\lambda(a, da) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)\left[\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\,\omega_\lambda(a, da)\right].$$

C'est ce qu'on exprime en disant [1] que la transformation infinitésimale dont le symbole est

$$(\mathrm{T}_1) \qquad \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\,\omega_\lambda(a, da)\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_k}$$

est la transformée de celle dont le symbole est

$$(\mathrm{T}_2) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x, j)\,\varpi_\lambda(a, da)\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i}$$

par la transformation $\mathrm{S}_a^{-1}$.

On peut d'ailleurs écrire l'identité (7) sous une forme condensée en multipliant les deux membres par $\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial x'_i}$ et en remplaçant $\frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial x'_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)$ par $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_k}$

$$\mathfrak{X}'_\lambda(\mathcal{F}')\,\varpi_\lambda(a, da) = \mathfrak{X}_\lambda(\mathcal{F})\,\omega_\lambda(a, da).$$

---

[1] *Voir* sur ce point E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*, p. 78.

On voit que la transformation infinitésimale dont le symbole est $T_2$ est la transformée de celle dont le symbole est $T_1$ par la transformation $S_a$.

Remarquons ici qu'il ne peut exister $\rho$ constantes $h$ non toutes nulles telles que

$$h_\lambda \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour tout $x'$. En raison de l'identité (vue au n° 1)

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j) = \frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, a)\frac{\partial \varphi_\iota}{\partial b_\lambda}(a, j),$$

cela entrainerait l'existence de $\rho$ fonctions $\psi$ des $a$, non toutes identiquement nulles $\left(\text{à savoir } \psi_\mu(a) = h_\lambda \frac{\partial \varphi_\iota}{\partial b_\lambda}(a, j)\right)$, telles que

$$\psi_\mu(a)\frac{\partial f_i}{\partial a_\mu}(x, a) = 0,$$

mais alors les $f_i$ pourraient s'exprimer à l'aide des $x$ et de $\rho - 1$ quantités A, fonctions uniquement des $a$, solutions de l'équation

$$\psi_\mu(a)\frac{\partial A}{\partial a_\mu} = 0,$$

ce qui est impossible, puisque les paramètres du groupe $S_a$ sont supposés réduits au nombre moindre.

L'égalité qui définit le groupe $x'_i = f_i(x, a)$ pouvant s'écrire aussi $x_i = f_i(x', \alpha)$, l'identité (1) s'écrit aussi

$$(1') \qquad dx_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x', \alpha)\left[dx'_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\omega_\lambda(\alpha, d\alpha)\right],$$

d'où, en substituant ces expressions dans (2),

$$dx'_i - \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\varpi_\lambda(a, da) = \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x, a)\frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x', \alpha)\left[dx'_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\omega_\lambda(\alpha, d\alpha)\right].$$

Mais $\frac{\partial f_i}{\partial x_l}(x, a)\frac{\partial f_l}{\partial x_k}(x', \alpha)$ est égal à 1 ou à 0 suivant que $k$ est égal ou non à $i$; donc

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\left[\varpi_\lambda(a, da) + \omega_\lambda(\alpha, d\alpha)\right] = 0,$$

et d'après la remarque faite quelques lignes plus haut sur les constantes $h$,

$$(8) \qquad \varpi_\lambda(a, da) + \omega_\lambda(\alpha, d\alpha) = 0.$$

De même, bien entendu,

$$\varpi_\lambda(\alpha, d\alpha) + \omega_\lambda(a, da) = 0.$$

4. Les formules (3), (4), (5), (6) ne sont elles-mêmes que différentes

formes que l'on peut donner aux équations qui se déduisent de

$$c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$$

par différentiation totale. On aperçoit donc les identités

$$\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\,da_\mu = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, b)\varpi_\sigma(a, da) = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c)\,\omega_\sigma(a, da),$$
$$\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b)\,db_\mu = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(a, j)\,\omega_\sigma(b, db) = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j)\varpi_\sigma(b, db)$$

qui peuvent se démontrer directement grâce aux suivantes

$$(\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, a) = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c),\\ &\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(b, j) = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j),\\ &\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(a, j) = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, b).\end{aligned}\right.$$

On trouve ces identités elles-mêmes (aux notations près) :

1° En dérivant les deux membres de l'identité $\varphi_\lambda(c, b') = \varphi_\lambda(a, b'')$ [où $c_\mu$ et $b_\mu$ représentent $\varphi_\mu(a, b)$ et $\varphi_\mu(b, b')$] par rapport à $a_\sigma$, puis en y faisant $a = j$.

2° En dérivant les deux membres de l'identité $\varphi_\lambda(a', c) = \varphi_\lambda(a'', b)$ [où $c_\mu$ et $a''_\mu$ représentent $\varphi_\mu(a, b)$ et $\varphi_\mu(a', a)$] par rapport à $b_\sigma$, puis en y faisant $b = j$.

3° En dérivant les deux membres de l'identité $\varphi_\lambda(c, b') = \varphi_\lambda(a, b'')$ [où $c_\mu$ et $b''_\mu$ représentent $\varphi_\mu(a, b)$ et $\varphi_\mu(b, b')$] par rapport à $b_\sigma$, puis en y faisant $b = j$.

Il est clair maintenant qu'une forme des équations en question [équations déduites de $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$ par différentiation totale] doit être particulièrement mise en évidence; c'est celle où, à la fois, les $da$ sont remplacés par leurs expressions en $\omega(a, da)$, et les $db$ par leurs expressions en $\varpi(b, db)$.

On obtient la formule fondamentale

$$(9)\qquad \boxed{dc_\lambda = \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c)\,\omega_\sigma(a, da) + \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j)\,\varpi_\sigma(b, db),}$$

qui se réduit d'ailleurs, lorsque soit les $b$, soit les $a$ se réduisent *identiquement* aux $j$, à la formule même de définition soit des $\omega$, soit des $\varpi$.

5. Les équations (1) et (2) mettaient en évidence les transformations infinitésimales du groupe G donné

$$x_\lambda = \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\frac{\partial}{\partial x_k} \qquad \lambda = 1, 2, \ldots, \rho,$$

entre lesquelles, comme on l'a vu (n° 3), il n'y a pas de relation linéaire à coefficients constants.

Les équations (3) et (4) mettent de même en évidence les transformations infinitésimales du premier groupe des paramètres, les équations (5) et (6) du second, à savoir respectivement

$$\mathcal{A}_\sigma = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(a, j)\frac{\partial}{\partial a_\mu},$$
$$\mathcal{B}_\sigma = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, b)\frac{\partial}{\partial b_\mu}.$$

D'une manière plus précise, nous définirons les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des $2n$ variables $l$, $v$ par les formules :

$$\mathcal{A}_\sigma(l, v) = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(l, j)\, v_\mu,$$
$$\mathcal{B}_\sigma(l, v) = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, l)\, v_\mu,$$

de sorte que l'on aura (¹) identiquement en $u$, $v$

$$\omega_\sigma(l, u)\mathcal{B}_\sigma(l, v) = u_\mu v_\mu = \varpi_\sigma(l, u)\mathcal{A}_\sigma(l, v).$$

D'ailleurs, ce que nous avons dit sur le déterminant des coefficients des formes linéaires en $u$ que nous désignons par $\omega$, ces formes ne sont liées par aucune relation linéaire à coefficients fonctions des $l$; il en est donc de même pour les $\mathcal{B}$. Remarque analogue pour les $\varpi$ et les $\mathcal{A}$.

En utilisant les notations précises indiquées et en introduisant une fonction arbitraire $\mathcal{F}$ des $c$, on pourra écrire la formule fondamentale (9) sous la forme condensée

$$d\mathcal{F} = \mathcal{B}_\sigma\left(c, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}\right)\omega_\sigma(a, da) + \mathcal{A}_\sigma\left(c, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial c}\right)\varpi_\sigma(b, db), \tag{9'}$$

ou encore en introduisant les notations suivantes, qui font intervenir des indéterminées $v_\lambda$

$$v_\lambda\, dc_\lambda = d^c,$$
$$\mathcal{B}_\sigma(c, v)\omega_\sigma(a, da) = \mathcal{B}^c\omega(a),$$
$$\mathcal{A}_\sigma(c, v)\varpi_\sigma(b, db) = \mathcal{A}^c\varpi(b)$$

sous la forme suivante

$$d^c = \mathcal{B}^c\omega(a) + \mathcal{A}^c\varpi(b). \tag{9''}$$

Les équations de définition des $\omega$ et des $\varpi$ montrent d'ailleurs que

$$d^c = \mathcal{B}^c\omega(c) = \mathcal{A}^c\varpi(c),$$

---

(¹) *Cf.* E. CARTAN, *Th. des gr. et géom. diff. p. méth. du rep. mob.*, p. 94 et 95.

(9″) peut donc s'écrire encore sous l'une ou l'autre des formes

$$\mathcal{B}^c[\omega(c) - \omega(a)] = \mathcal{A}^c \varpi(b),$$
$$\mathcal{A}^c[\varpi(c) - \varpi(b)] = \mathcal{B}^c \omega(a).$$

Si donc on établit entre les $a$ et $c$ une correspondance telle que les $b$ restent constants, les expressions $\omega_\sigma(c, dc) - \omega_\sigma(a, da)$ sont liées par les relations homogènes distinctes

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, c)[\omega_\sigma(c, dc) - \omega_\sigma(a, da)] = 0,$$

et sont par suite identiquement nulles : autrement dit les $\omega$ restent *invariantes* par le *premier groupe des paramètres*.

De même si l'on établit entre les $b$ et $c$ une correspondance telle que les $a$ restent constants, les expressions $\varpi_\sigma(c, dc) - \varpi_\sigma(b, db)$ sont liées par les relations homogènes distinctes

$$\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\sigma}(c, j)[\varpi_\sigma(c, dc) - \varpi_\sigma(b, db)] = 0,$$

et sont par suite identiquement nulles : les $\varpi$ restent invariantes par le deuxième groupe des paramètres.

Mais la formule $S_c = S_b S_a$ peut s'écrire aussi (grâce à l'introduction des paramètres $\alpha$, $\beta$ des transformations $S_a^{-1} = S_\alpha$, $S_b^{-1} = S_\beta$) sous les formes :

$$S_b = S_c S_\alpha, \qquad S_a = S_\beta S_c,$$

et (9″) devient

$$d^b = \mathcal{B}^b \omega(\alpha) + \mathcal{A}^b \varpi(c),$$
$$d^a = \mathcal{B}^a \omega(c) + \mathcal{A}^a \varpi(\beta),$$

autrement dit, d'après une remarque faite plus haut [n° 3, formule (8)]

$$d^b = -\mathcal{B}^b \varpi(a) + \mathcal{A}^b \varpi(c), \tag{10}$$
$$d^a = \mathcal{B}^a \omega(c) - \mathcal{A}^a \omega(b), \tag{11}$$

ou encore

$$\mathcal{B}^b[\omega(b) + \varpi(a)] = \mathcal{A}^b \varpi(c), \tag{10′}$$
$$\mathcal{A}^b[\varpi(c) - \varpi(b)] = \mathcal{B}^b \varpi(a), \tag{10″}$$
$$\mathcal{B}^a[\omega(c) - \omega(a)] = \mathcal{A}^a \omega(b), \tag{11′}$$
$$\mathcal{A}^a[\varpi(a) + \omega(b)] = \mathcal{B}^a \omega(c). \tag{11″}$$

Les formules (11′) et (10″) mettent de nouveau en évidence l'invariance des $\omega$ par le premier groupe des paramètres, des $\varpi$ par le second.

Les formules (10′) et (11′) mettent en évidence le fait suivant : pour que $S_c$

soit une transformation fixe, il faut et il suffit que l'on ait les égalités

$$\omega_\mu(b, db) + \varpi_\mu(a, da) = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \rho).$$

6. Comme on l'a remarqué plus haut, les identités $a_\mu = \varphi_\mu(a, j)$, $b_\mu = \varphi_\mu(j, b)$ montrent immédiatement que $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, j)$ est égal à 1 ou à 0 suivant que $\mu$ est ou non égal à $\lambda$, et qu'il en est de même de $\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(j, b)$; et, par suite, que

$$\omega_\mu(j, u) \equiv u_\mu \equiv \varpi_\mu(j, u).$$

Il en résulte immédiatement

$$\mathcal{A}_\mu(j, v) \equiv v_\mu \equiv \mathcal{B}_\mu(j, v).$$

Voyons maintenant les formes simples que prennent (11), (10), (9) lorsqu'on y suppose respectivement que *les valeurs initiales* des $a$, des $b$, des $c$ sont les valeurs $j$ correspondant à la transformation identique.

En supposant *les valeurs initiales des a* égales aux $j$, (11) devient

$$da_\mu = \omega_\mu(c, dc) - \omega_\mu(b, db),$$

ou encore

$$da_\mu = \omega_\mu[b, d(c - b)]$$

qui, *si les b restent constants*, devient

$$da_\mu = \omega_\mu(b, dc). \tag{12}$$

C'est cette égalité (12) que M. E. Cartan a exprimée en termes rapides dans le premier article qu'il a consacré à la Théorie du repère mobile ([1]) en disant que les paramètres de $S_\xi^{-1} S_{\xi+d\xi}$ sont $j_\mu + \omega_\mu(\xi, d\xi)$. Avec les notations actuelles la transformation $S_b^{-1} S_c = S_a$, *où les b sont fixes et où les c varient à partir des valeurs b,* a pour paramètres *des nombres a qui varient à partir des valeurs j, et les différentielles correspondantes $da_\mu$ ont pour valeurs $\omega_\mu(b, dc)$.*

Si l'on suppose dans l'égalité (10) que les $b$ prennent pour valeurs initiales les $j$, on obtient

$$db_\mu = \varpi_\mu(c, dc) - \varpi_\mu(a, da),$$

et, par suite,

$$db_\mu = \varpi_\mu[a, d(c - a)],$$

qui, *si les a restent constants*, devient

$$db_\mu = \varpi_\mu(a, dc). \tag{13}$$

---

([1]) *La structure des groupes de transformations continus et la théorie du trièdre mobile* (*Bull. Sc. math.*, t. 45, 1910, p. 253). Dans cet article, la convention utilisée pour représenter le produit de deux transformations est l'inverse de celle que M. Cartan a adoptée ensuite et que nous adoptons ici.

égalité que M. E. Cartan exprimait brièvement en disant que les paramètres de $S_{\xi+d\xi}S_{\xi}^{-1}$ sont $j_p + \varpi_\mu(\xi, d\xi)$. Plus explicitement la transformation $S_c S_a^{-1} = S_b$, où les $a$ sont fixes et où les $c$ varient à partir des valeurs $a$, a pour paramètres des nombres $b$ qui varient à partir des valeurs $j$, et dont les différentielles $db_\mu$ ont pour valeurs $\varpi_\mu(a, dc)$.

Si maintenant on suppose que *les valeurs initiales* des $c$, dans (9), sont égales aux $j$, on obtiendra (suivant que l'on préfère introduire pour les valeurs initiales des paramètres $a$, $b$, les notations $a$, $\alpha$ ou $\beta$, $b$), l'une ou l'autre des formules

$$dc_\mu = \omega_\mu(a, da) + \varpi_\mu(\alpha, db),$$
$$dc_\mu = \omega_\mu(\beta, da) + \varpi_\mu(b, db),$$

que l'on peut regarder comme généralisant la formule (8). Mais si les $b$ sont constants, $dc_\mu$ se réduit à $\omega_\mu(a, da)$; si les $a$ le sont, $dc_\mu$ se réduit à $\varpi_\mu(b, db)$; d'où une nouvelle interprétation des formes de Pfaff $\omega$, $\varpi$ : les $b$ restant fixes, les $\omega(a, da)$ sont les expressions des différentielles des $c$ lorsque les valeurs initiales des $c$ sont égales aux $j$; mais d'après leur expression immédiate

$$dc_\mu = \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, b)\, da_\lambda + \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(a, b)\, db_\lambda,$$

ces différentielles se réduisent alors à

$$\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, \alpha)\, da_\lambda.$$

*On a donc*

(14) $$\omega_\mu(a, da) \equiv \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\lambda}(a, \alpha)\, da_\lambda.$$

*De même*

(15) $$\varpi_\mu(b, db) \equiv \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\lambda}(\beta, b)\, db_\lambda.$$

7. Les équations aux différentielles totales le plus utilisées par Lie pour définir le groupe G sont obtenues [*voir* n° 1 (L)] en considérant les $x$ comme constants et par suite en égalant à zéro les seconds membres des (2). Celles qu'utilise surtout M. E. Cartan dans la méthode du repère mobile sont obtenues [n° 1 (C)] en considérant les $x'$ comme constants et par suite en égalant à zéro les premiers membres des (1).

De même les équations aux différentielles totales définissant le premier groupe des paramètres s'obtiennent : soit ($L_1$) en considérant les $a$ comme constants, soit ($C_1$) en considérant les $c$ comme constants. Celles qui définissent le second s'obtiennent : ($L_2$) en considérant les $b$ comme constants, ou ($C_2$) en considérant les $c$ comme constants.

Elles s'écrivent donc

$$(\mathrm{L}_1)\quad d^c - \mathcal{A}^c\varpi(b) = 0, \qquad (\mathrm{L}_2)\quad d^c - \mathcal{B}^c\omega(a) = 0;$$
$$(\mathrm{C}_1)\quad d^a + \mathcal{A}^a\omega(b) = 0, \qquad (\mathrm{C}_2)\quad d^b + \mathcal{B}^b\varpi(a) = 0.$$

Ces systèmes s'écrivent encore

$$(\mathrm{L}_1)\quad \varpi_\mu(c) - \varpi_\mu(b) = 0, \qquad (\mathrm{L}_2)\quad \omega_\mu(c) - \omega_\mu(a) = 0;$$
$$(\mathrm{C}_1)\quad \varpi_\mu(a) + \omega_\mu(b) = 0, \qquad (\mathrm{C}_2)\quad \omega_\mu(b) + \varpi_\mu(a) = 0.$$

Ainsi le système de Lie du premier groupe des paramètres [groupe qui entraîne l'invariance des $\omega$ : $\omega_\mu(c) - \omega_\mu(a) = 0$] s'écrit sous forme *symétrique* relativement aux différentielles des $c$ et des $b$

$$\varpi_\mu(c) - \varpi_\mu(b) = 0.$$

Le système de Lie du second groupe des paramètres [groupe qui entraîne l'invariance des $\varpi$ : $\varpi_\mu(c) - \varpi_\mu(b) = 0$] s'écrit sous forme *symétrique* relativement aux différentielles des $c$ et des $a$

$$\omega_\mu(c) - \omega_\mu(a) = 0.$$

Les systèmes de Cartan des deux groupes de paramètres sont identiques

$$\omega_\mu(b) + \varpi_\mu(a) = 0.$$

8. Avant d'aller plus loin, il n'est peut-être pas inutile d'appliquer ce qui précède à un exemple très simple : celui du groupe linéaire à une variable

$$x' = a_1 x + a_2 \quad (a_1 \neq 0), \qquad x = \frac{1}{a_1}x' - \frac{a_2}{a_1}.$$

Ainsi,

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{a_2}{a_1} \qquad (j_1 = 1, \quad j_2 = 0),$$
$$c_1 = b_1 a_1, \qquad c_2 = b_1 a_2 + b_2,$$

d'où l'on tire, par différentiation totale,

$$dc_1 = b_1\,da_1 + a_1\,db_1$$
$$dc_2 = b_1\,da_2 + a_2\,db_1 + db_2.$$

La formule fondamentale s'obtient en remplaçant les $da_\lambda$ par les $\omega_\lambda(a, da)$ et dans leurs coefficients les $a$, $b$ par $j$, $c$ respectivement; les $db_\lambda$ par $\varpi_\lambda(b, db)$ et dans leurs coefficients les $a$, $b$ par $c$, $j$ respectivement.

D'où

$$dc_1 = c_1\,\omega_1(a, da) + c_1\,\varpi_1(b, db),$$
$$dc_2 = c_1\,\omega_2(a, da) + c_2\,\varpi_1(b, db) + \varpi_2(b, db),$$

formules qui se réduisent pour les $b$ égaux constamment aux $j$, ou pour les $a$

égaux constamment aux $j$ à

$$da_1 = a_1\omega_1(a, da), \qquad db_1 = b_1\varpi_1(b, db),$$
$$da_2 = a_1\omega_2(a, da), \qquad db_2 = b_2\varpi_1(b, db) + \varpi_2(b, db).$$

On pourrait, par résolution, tirer de ces formules les expressions explicites des $\omega(a, da)$, $\varpi(a, da)$. Mais cette résolution est superflue d'après la dernière remarque du n° 6 ; il suffit, dans les expressions immédiates des $dc$, d'utiliser chacune des parties, celle en $da_1$, $da_2$, celle en $db_1$, $db_2$ et de remplacer dans l'une les $b$ par les $\alpha$, dans l'autre les $a$ par les $\beta$, puis les $\alpha$, $\beta$ par leurs expressions en $a$, $b$. On obtient ainsi

$$\omega_1(a, da) = \alpha_1 da_1 = \frac{da_1}{a_1},$$
$$\omega_2(a, da) = \alpha_1 da_2 = \frac{da_2}{a_1},$$
$$\varpi_1(b, db) = \beta_1 db_1 = \frac{db_1}{b_1},$$
$$\varpi_2(b, db) = \beta_2 db_1 + db_2 = -\frac{b_2}{b_1} db_1 + db_2.$$

Les $da$ étant obtenus comme il a été indiqué plus haut, remplaçons-les par leurs expressions dans l'égalité tirée par différentiation totale de celle qui définissait le groupe.

$$dx' = a_1 dx + x\, da_1 + da_2.$$

Nous obtenons

$$dx' = a_1 dx + x a_1 \omega_1(a, da) + a_1\omega_2(a, da) = a_1[dx + x\omega_1(a, da) + \omega_2(a, da)],$$

qui est l'équation (1).

Les $da$ étant obtenus en $\varpi(a, da)$ comme il a été indiqué pour les $db$ en fonction des $\varpi(b, db)$, on obtient

$$\begin{aligned} dx' &= a_1 dx + x a_1 \varpi_1(a, da) + a_2\varpi_1(a, da) + \varpi_2(a, da) \\ &= a_1 dx + x'\varpi_1(a, da) + \varpi_2(a, da), \end{aligned}$$

ou encore

$$dx' - x'\varpi_1(a, da) - \varpi_2(a, da) = a_1\, dx.$$

L'une ou l'autre de ces équations donne les transformations infinitésimales du groupe proposé

$$X_1 = x\frac{d}{dx},$$
$$X_2 = \frac{d}{dx}.$$

On lit aisément les transformations infinitésimales du premier groupe des paramètres sur les formules qui donnent les $db$ en fonction des $\varpi$

$$\mathcal{A}_1\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \xi_1 \frac{\partial}{\partial\xi_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial\xi_2},$$
$$\mathcal{A}_2\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial}{\partial\xi_2},$$

et celles du second sur les formules qui donnent les $da$ en fonction des $\omega\,(a, da)$

$$\mathcal{B}_1\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \xi_1 \frac{\partial}{\partial\xi_1},$$
$$\mathcal{B}_2\left(\xi, \frac{\partial}{\partial\xi}\right) = \xi_1 \frac{\partial}{\partial\xi_2}.$$

On vérifie que la formule fondamentale se réduit à la suivante (où $\mathcal{F}$ désigne une fonction arbitraire des $c$)

$$\begin{aligned} d\mathcal{F} = {} & \mathcal{B}_1\left(c, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right)\omega_1(a, da) + \mathcal{B}_2\left(c, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right)\omega_2(a, da) \\ & + \mathcal{A}_1\left(c, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right)\varpi_1(b, db) + \mathcal{A}_2\left(c, \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial c}\right)\varpi_2(b, db). \end{aligned}$$

L'identité (7) s'écrit ici

$$x'\varpi_1(a, da) + \varpi_2(a, da) = a_1[x\omega_1(a, da) + \omega_2(a, da)],$$

d'où

$$\begin{aligned} \varpi_1(a, da) &= \omega_1(a, da), \\ \varpi_2(a, da) &= -a_2\omega_1(a, da) + a_1\omega_2(a, da); \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \omega_1(a, da) &= \varpi_1(a, da), \\ \omega_2(a, da) &= \frac{a_2}{a_1}\varpi_1(a, da) + \frac{1}{a_1}\varpi_2(a, da). \end{aligned}$$

On vérifiera aussi l'identité (8) en calculant les $\omega(\alpha, d\alpha)$ et constatant que l'on obtient bien les $\varpi(a, da)$ changés de signe.

Le premier groupe des paramètres (celui qui correspond au passage des $a$ aux $c$ et entraîne l'invariance des $\omega$) est défini par des formules, symétriques par rapport aux $c$, $b$

$$(\mathrm{L}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dc_1}{c_1} &= \frac{db_1}{b_1}, \\ -\frac{c_2}{c_1}dc_1 + dc_2 &= -\frac{b_2}{b_1}db_1 + db_2 \end{aligned} \right.$$

ou encore par les formules

$$(\mathrm{C}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{da_1}{a_1} + \frac{db_1}{b_1} &= 0, \\ -\frac{a_2}{a_1}da_1 + da_2 + \frac{db_2}{b_1} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le second groupe des paramètres (celui qui correspond au passage des $b$ aux $c$ et entraîne l'invariance des $\varpi$) est défini par des formules symétriques par rapport aux $c$, $a$

$$(\mathrm{L}_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dc_1}{c_1} &= \frac{da_1}{a_1}, \\ \frac{dc_2}{c_1} &= \frac{da_2}{a_1}, \end{aligned} \right.$$

ou encore par les formules $(\mathrm{C}_2)$ identiques aux $(\mathrm{C}_1)$.

9. Indiquons encore ici un autre exemple à cause de son importance fondamentale : celui du groupe des déplacements dans l'espace. Cet exemple montrera comment, sans qu'il y ait lieu de spécifier les (six) paramètres indépendants choisis, les (six) formes de Pfaff indépendantes $\omega$ et les (six) formes indépendantes $\varpi$ peuvent apparaître d'elles-mêmes. Des formules ([1])

$$x' = x_0 + \alpha x + \alpha_1 y + \alpha_2 z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où $x_0, y_0, z_0$ sont des constantes quelconques et $\alpha, \beta, \gamma; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle direct, on tire (par exemple par différentiation, multiplication par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et addition, puis résolution) les *identités* suivantes que l'on peut d'ailleurs vérifier directement

$$dx' = \alpha(dx + \omega_1 - \omega_6 y + \omega_5 z) + \alpha_1(dy + \omega_2 - \omega_4 z + \omega_6 x) + \alpha_2(dz + \omega_3 - \omega_5 x + \omega_4 y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où

$$\omega_1 = \alpha\, dx_0 + \beta\, dy_0 + \gamma\, dz_0, \qquad \ldots,$$
$$\omega_4 = \alpha_2 d\alpha_1 + \beta_2 d\beta_1 + \gamma_2 d\gamma_1, \qquad \ldots.$$

De même, en différentiant les formules

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) = x,$$

multipliant par $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, et ajoutant, on fait apparaître les formes $\varpi$ et l'on trouve les *identités*

$$dx' - \varpi_1 + \varpi_6 y' - \varpi_5 z' = \alpha\, dx + \alpha_1\, dy + \alpha_2\, dz,$$
$$dy' - \varpi_2 + \varpi_4 z' - \varpi_6 x' = \beta\, dx + \beta_1\, dy + \beta_2\, dz,$$
$$dz' - \varpi_3 + \varpi_5 x' - \varpi_4 y' = \gamma\, dx + \gamma_1\, dy + \gamma_2\, dz,$$

avec

$$\varpi_1 = dx_0 + (\alpha\, d\beta + \alpha_1 d\beta_1 + \alpha_2 d\beta_2) y_0 + (\alpha\, d\gamma + \alpha_1 d\gamma_1 + \alpha_2 d\gamma_2) z_0, \qquad \ldots,$$
$$\varpi_4 = \beta\, d\gamma + \beta_1 d\gamma_1 + \beta_2 d\gamma_2, \qquad \ldots.$$

---

([1]) Pour abréger, nous évitons d'écrire les formules qui se déduisent aisément, par permutation circulaire, de celles que nous écrivons : $\omega_2$, $\omega_3$ se déduisent de $\omega_1$ ; de même, $\omega_5$, $\omega_6$ de $\omega_4$, etc.

10. Pour déterminer entièrement les valeurs numériques des paramètres d'un groupe, il peut se faire qu'il suffise de se donner le transformé d'*un* point connu : c'est ce qui arrive notamment lorsque le groupe considéré est le groupe des paramètres (soit le premier, soit le second) d'un autre groupe. S'il suffit de se donner les transformés de $p$ points, ces $p$ transformés sont dits constituer un *repère mobile* pour le groupe. Si les paramètres de la transformation correspondante sont $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, autrement dit si la transformation est $S_a$, nous désignerons le repère par la lettre $R_a$.

De même que nous appelons $x'$ le transformé de $x$ par $S_a$, nous appellerons $X'$ le transformé du même point $x$ par $S_A$ :

$$x' = S_a x; \qquad X' = S_A x.$$

De sorte que

$$X' = S_A S_a^{-1} x'.$$

Supposons les $a$ fixes, et les A variables à partir des $a$, les différentielles des paramètres de la transformation $S_A S_a^{-1}$ sont, comme nous l'avons vu au n° 6, $\varpi_\mu(a, dA)$. La dernière formule du n° 1 donne alors immédiatement

$$dX'_i = dx'_i + \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\,\varpi_\lambda(a, dA). \tag{16}$$

Il est d'ailleurs aisé de retrouver cette formule comme simple application de la formule (2). Appliquée à $S_A$, cette formule (2) donne

$$dX'_i - \frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(X', j)\,\varpi_\lambda(A, dA) = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, A)\,dx_k.$$

Appliquée à $S_a$, où les $a$ sont *fixes*,

$$dx'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, a)\,dx_k,$$

d'où, en retranchant membre à membre et supposant les valeurs initiales des A égales aux $a$, la formule qui vient d'être indiquée. Ainsi les $\varpi_\lambda(a, dA)$ interviennent ici comme égales aux différentielles des paramètres pour la transformation, voisine de la transformation identique, $S_A S_a^{-1}$ ; c'est ce qui conduit à appeler l'expression

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_\lambda}(x', j)\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x'_i}\varpi_\lambda(a, da),$$

symbole de la transformation infinitésimale $S_{a+da} S_a^{-1}$.

Les $\varpi_\lambda(a, dA)$ sont appelées « composantes absolues » du déplacement du repère $R_A$ pour $A = a$.

$X'$ désignant toujours le transformé de $x$ par $S_A$, désignons par X le point dont $X'$ est le transformé par $S_a$

$$X' = S_A x; \qquad X' = S_a X.$$

De sorte que

$$X = S_a^{-1} S_A x.$$

Supposons ici encore les $a$ fixes et les A variables à partir des $a$, les différentielles des paramètres de la transformation $S_a^{-1} S_A$ sont, comme nous l'avons vu au n° 6, $\omega_\mu(a, dA)$. La dernière formule du n° 1 donne alors immédiatement

$$(17) \qquad dX_k = dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\,\omega_\lambda(a, dA).$$

La formule (1) appliquée à $S_A$ donne d'ailleurs

$$dX'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, A)\left[dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\,\omega_\lambda(A, dA)\right].$$

Appliquée à $S_a$ *supposée fixe*, elle s'écrit simplement

$$dX'_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(X, a)\,dX_k.$$

Si maintenant on suppose que les valeurs initiales des A sont les $a$ et si l'on retranche ces formules membre à membre, en remarquant de plus que le déterminant $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \right\|$ n'est pas nul [1], on retrouve la formule en question.

Les $\omega_\lambda(a, dA)$ intervenant ici comme égales aux différentielles des paramètres de la transformation, voisine de la transformation identique, $S_a^{-1} S_A$, il sera naturel d'appeler l'expression

$$\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}(x, j)\,\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_k}\,\omega_\lambda(a, da),$$

symbole de la transformation infinitésimale $S_a^{-1} S_{a+da}$.

$x$ et X se déduisent respectivement de $x'$ et $X'$ par *la même transformation*, à savoir $S_a^{-1}$; elles sont appelées coordonnées *relatives* du point dont $x'$, $X'$ sont les coordonnées *absolues;* les $\omega_\lambda(a, dA)$ prennent le nom de *composantes relatives* du déplacement du repère $R_A$ pour $a$.

L'exemple indiqué au n° 9 fait comprendre ces dénominations.

11. La formule fondamentale

$$dc_\lambda = \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(j, c)\,\omega_\mu(a, da) + \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(c, j)\,\varpi_\mu(b, db)$$

permet enfin d'obtenir immédiatement les *équations de structure* de M. E. Cartan.

---

[1] Pour le système de valeurs $x$, $a$.

En utilisant les notions de dérivée extérieure et de produit extérieur [1]

$$\omega'(x, dx, \delta x) = \frac{\partial X_k}{\partial x_i}(dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\, dx_k) \qquad \text{si} \quad \omega(x, dx) = X_i dx_i,$$

$$[\omega\,\varpi] = X_i Y_k (dx_i\,\delta x_k - \delta x_i\,dx_k), \qquad \text{si} \quad \omega(x, dx) = X_i dx_i, \qquad \text{et} \quad \varpi(x, dx) = Y_i dx_i,$$

et la formule relative à une forme de Pfaff $\omega$ et une fonction $m$ quelconque des variables $x$

$$(m\,\omega)' = [dm\,\omega] + m\,\omega',$$

et remarquant que la dérivée extérieure de $dc_\lambda$ est nulle, on obtient

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(j, c)\,\omega'_\mu(a, da) + \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(c, j)\,\varpi'_\mu(b, db)\\ &\quad + \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\sigma}(j, c)\,[dc_\sigma\,\omega_\mu(a, da)] + \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial b_\mu\,\partial a_\sigma}(c, j)\,[dc_\sigma\,\varpi_\mu(b, db)] = 0,\end{aligned}$$

et par suite, en remplaçant les $dc_\sigma$ par leurs expressions mêmes tirées de la formule fondamentale,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(j, c)\,\omega'_\mu(a, da) + \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(c, j)\,\varpi'_\mu(b, db)\\ &\quad + \left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial a_\tau}(j, c)\,\omega_\tau + \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial b_\tau}(c, j)\,\varpi_\tau\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\sigma}(j, c)\,\varpi_\mu + \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial b_\mu\,\partial a_\sigma}(c, j)\,\varpi_\mu\right) = 0,\end{aligned}$$

où l'on a écrit brièvement $\omega$, $\varpi$ pour désigner respectivement $\omega(a, da)$, $\varpi(b, db)$.

En donnant aux $b$ ou aux $a$ respectivement des valeurs *constantes* arbitraires, on voit apparaître les formules (valables quels que soient les $a$, $c$ d'une part, les $b$, $c$ de l'autre)

$$(18) \qquad \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(j, c)\,\omega'_\mu(a, da) + \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial a_\tau}(j, c)\,\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\sigma}(j, c)\,\omega_\tau(a, da)\,\omega_\mu(a, da) = 0,$$

$$(19) \qquad \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\mu}(c, j)\,\varpi'_\mu(b, db) + \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial b_\tau}(c, j)\,\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial b_\mu\,\partial a_\sigma}(c, j)\,\varpi_\tau(b, db)\,\varpi_\mu(b, db) = 0.$$

En comparant ces deux formules particulières à la formule générale d'où nous les avons déduites, nous en concluons, en supposant $c_\lambda = \varphi_\lambda(a, b)$,

$$(20) \qquad \left[\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial a_\tau}(j, c)\,\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial b_\mu\,\partial a_\sigma}(c, j) - \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial b_\mu}(c, j)\,\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\tau\,\partial b_\sigma}(j, c)\right]\omega_\tau\,\varpi_\mu = 0.$$

Les formules (18), (19) s'écrivent d'ailleurs si $c = j$

$$\omega'_\lambda(a, da) + \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\tau}(j, j)\,\omega_\tau(a, da)\,\omega_\mu(a, da) = 0,$$

$$\varpi'_\lambda(b, db) + \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial b_\mu\,\partial a_\tau}(j, j)\,\varpi_\tau(b, db)\,\varpi_\mu(b, db) = 0,$$

---

[1] *Voir*, par exemple, E. CARTAN, *loc., cit.*, p. 182 et suiv.

ou en posant

$$\frac{\partial^2 \varphi_\lambda}{\partial a_\tau\, db_\mu}(j, j) = C_{\tau\mu\lambda},$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega'_\lambda &= \quad C_{\tau\mu\lambda}[\omega_\tau\, \omega_\mu], \\ \varpi'_\lambda &= -C_{\tau\mu\lambda}[\varpi_\tau\, \varpi_\mu]. \end{aligned}}$$

Portons dans (18) la valeur trouvée pour $\omega'$, et dans (19) la valeur trouvée pour $\varpi'$. Les coefficients de $\omega_\tau\omega_\mu$, $\varpi_\tau\varpi_\mu$ respectivement dans les expressions trouvées sont

$$(21) \qquad -\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma}(j, c)\frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial a_\mu\,\partial b_\tau}(j, j) + \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial a_\tau}(j, c)\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\sigma}(j, c),$$

$$(22) \qquad -\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial b_\sigma}(c, j)\frac{\partial^2\varphi_\sigma}{\partial b_\mu\,\partial a_\tau}(j, j) + \frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial b_\tau}(c, j)\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial b_\mu\,\partial a_\sigma}(c, j).$$

Il est aisé de vérifier que les deux relations ainsi trouvées se réduisent ainsi que (20) à des identités : il suffit pour cela de se servir des relations qu'on déduit par dérivations des identités (I) du n° 4.

Dérivons les deux membres de la première par rapport à $b_\tau$

$$\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\tau}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, a) = \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma\,\partial b_\mu}(j, c)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\tau}(a, b),$$

et pour $b = j$

$$\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial b_\tau}(a, j)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, a) = \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma\,\partial b_\mu}(j, a)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial b_\tau}(a, j),$$

le coefficient de $\omega_\tau\varpi_\mu$ dans (20) est donc identiquement nul; on arrive au même résultat en dérivant les deux membres de la deuxième identité (I) par rapport à $a_\tau$ et en y faisant $a = j$.

Dérivons les deux membres de la première identité (I) par rapport à $a_\tau$

$$\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial a_\tau}(a, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\sigma}(j, a) + \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(a, b)\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial a_\sigma\,\partial b_\tau}(j, a) = \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma\,\partial b_\mu}(j, c)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\tau}(a, b),$$

et pour $a = j$

$$\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma\,\partial a_\tau}(j, b) + \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial a_\mu}(j, b)\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial a_\sigma\,\partial b_\tau}(j, j) = \frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\sigma\,\partial b_\mu}(j, b)\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial a_\tau}(j, b),$$

de sorte que l'expression (21) est identique à $\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\mu\,\partial a_\tau}(j, c)$. Dans l'expression (18) transformée à l'aide des $\omega'$, le coefficient de $\omega_\mu\omega_\tau$ sera de même $\frac{\partial^2\varphi_\lambda}{\partial a_\tau\,\partial a_\mu}(j, c)$, c'est-à-dire le même; les monomes symboliques disparaîtront complètement.

Dans l'expression (19) transformée à l'aide des $\varpi'$, on verra de même que les coefficients de $\varpi_\tau\varpi_\mu$ et de $\varpi_\mu\varpi_\tau$ sont les mêmes et que les monomes symboliques disparaîtront complètement [il suffira cette fois de dériver la première identité (I) par rapport à $b_\tau$ et d'y faire $b = j$].

L'application au groupe linéaire $x' = a_1 x + a_2$ est immédiate

$$\varphi_1(a, b) = b_1 a_1,$$
$$\varphi_2(a, b) = b_1 a_2 + b_2.$$

Les constantes de structure apparaissent ici comme les dérivées secondes des $\varphi$ prises par rapport à des $a$ et des $b$ d'indices différents. Est donc seule différente de zéro la constante $C_{212} = 1$. Ainsi

$$\omega'_1 = 0, \qquad \varpi'_1 = 0,$$
$$\omega'_2 = \omega_2 \omega_1, \qquad \varpi'_2 = -\varpi_2 \varpi_1.$$

C'est bien ce qu'on vérifie en utilisant les règles du calcul symbolique.

12. Je voudrais, pour terminer, faire quelques remarques générales sur l'indépendance des $c$ en tant que fonctions des $a$, ou en tant que fonctions des $b$. Le résultat apparaîtra comme cas particulier de résultats plus généraux relatifs à des *familles* de transformations, et non plus seulement des *groupes*. Les seules transformations que nous considérions

$$\text{(S)} \qquad x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

sont à déterminant fonctionnel non identiquement nul $\frac{D(f)}{D(x)} \neq 0$; elles sont réversibles, et la formule précédente est considérée comme équivalente à $x_i = \bar{f}_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$.

Nous utiliserons de même le symbole $\bar{g}$ pour indiquer les fonctions résultant de la résolution d'un système $T \,|\, x'_i = g_i(x)$; $\frac{D(g)}{D(x)} \neq 0$.

Soient des transformations formant une famille S dépendant de paramètres $a$, et d'autre part des transformations formant une famille T dépendant de paramètres $b$. La transformation résultante (S d'abord, T ensuite) que nous désignons par TS peut être considérée comme dépendant des paramètres $a$, $b$. Nous allons d'abord supposer *soit* qu'on peut la considérer *comme dépendant des* $a$ et *d'autres paramètres en nombre* $\lambda$ *au plus*, *soit* qu'on peut la considérer *comme dépendant des* $b$, et d'*autres paramètres en nombre* $\lambda$ *au plus*. Nous en déduirons, suivant le cas, que le nombre des paramètres essentiels de T, ou de S, est $\lambda$ au plus.

La première hypothèse se traduit par l'identité en $x$, $a$, $b$

$$g_i[f(x, a), b] = \Phi_i(x, a, h_1, h_2, \ldots, h_\lambda),$$

où les $h$ désignent des fonctions des $a$, $b$. D'où l'identité en $x'$, $a$, $b$

$$g_i(x', b) = \Phi_i[\bar{f}(x', a), a, h_1, h_2, \ldots, h_\lambda].$$

Mais, si l'on donne aux $a$ un système de valeurs numériques arbitrairement choisies, cette égalité montre que la fonction $g$ dépend de $\lambda$ paramètres essentiels au plus.

La seconde hypothèse se traduit par l'identité en $x$, $a$, $b$

$$g_i[f(x, a), b] = \Psi_i(x, b, k_1, k_2, \ldots, k_\lambda),$$

où les $k$ désignent des fonctions des $a$, $b$. D'où l'identité en $x$, $a$, $b$

$$f_i(x, a) = \overline{g}_i[\Psi(x, b, k_1, \ldots, k_\lambda), b].$$

Si l'on donne aux $b$ des valeurs numériques arbitrairement choisies, cette identité montre que $f_i$ dépend de $\lambda$ paramètres au plus. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Soient maintenant deux familles, S et T, l'une comme l'autre à $r$ paramètres *essentiels;* TS dépend essentiellement au plus de $2r$ paramètres. Supposons qu'elle ne dépende que de $r$ paramètres $c$ (fonctions des $a$ et des $b$). Si le déterminant des $c$ par rapport aux $a$ était identiquement nul, il y aurait entre les $c$ une relation indépendante des $a$, et l'un des $c$ au moins s'exprimerait en fonction des autres $c$ et des $b$. Le second résultat démontré prouve que S ne contiendrait que $r - 1$ paramètres essentiels au plus, ce qui n'est pas. De même si le déterminant des $c$ par rapport aux $b$ était identiquement nul, l'un des $c$ au moins s'exprimerait en fonction des autres $c$ et des $a$, T ne contiendrait que $r - 1$ paramètres essentiels au plus. Ainsi, dans l'hypothèse faite (à savoir : TS ne dépend que de $r$ paramètres), ces paramètres, considérés comme fonctions des $a$, sont indépendants; considérés comme fonctions des $b$, ils sont indépendants.

C'est ainsi que, $f$, $g$, $h$ étant des fonctions données, la transformation S : $f(x') + g(x) = a$, composée avec la transformation T : $h(x'') + f(x') = b$, conduit à la transformation TS : $h(x'') - g(x) = b - a$, qui ne dépend que d'un paramètre $c = b - a$, dont les dérivées par rapport à $a$ et à $b$ sont différentes de zéro.

On peut supposer en particulier que S et T fassent partie d'une même famille; nous les appellerons $S_a$, $S_b$; par exemple

$$(S_a) \qquad f(x') + f(x) = a,$$

$$(S_b) \qquad f(x'') + f(x') = b,$$

$$(S_b S_a) \qquad f(x'') - f(x) = b - a.$$

Comme cas plus particulier encore, on pourra supposer que la famille unique d'où sont extraites $S_a$, $S_b$ constitue *un groupe*. Nous venons de voir que si les $r$ paramètres sont essentiels, les déterminants fonctionnels des $c$ par rapport aux $a$ (et ceux des $c$ par rapport aux $b$) sont différents de zéro.