

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUELINE FERRAND

Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 59 (1942), p. 43-74

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__43_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1942, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE
DE
LA REPRÉSENTATION CONFORME

AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE

PAR M^{lle} JACQUELINE FERRAND.



Introduction.

Il ne saurait être question ici de faire un historique complet de la théorie de la représentation conforme, qui a vu le jour dans les travaux de Riemann, Poincaré, Schwarz, Kœbe, Hilbert, pour ne citer que les plus illustres. Nous voudrions seulement montrer l'intérêt qu'ont suscité, au cours de ces dernières années, les questions dont nous allons nous occuper. Il s'agira uniquement ici de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe Δ décrit par la variable $\zeta = \xi + i\eta$ sur l'intérieur du cercle $C : |z| < 1$ [ou sur le demi-plan droit : $x > 0$] décrit par la variable $z = x + iy$, et du comportement de la fonction représentative $\zeta = f(z)$ au voisinage de la circonférence $K : |z| = 1$ [ou de l'axe $y'y : x = 0$]. Les premiers résultats dans cette voie, lorsque la frontière Γ de Δ n'est pas un arc analytique, sont dus à Painlevé (1891), Korn, Lichtenstein.

Dans un Mémoire paru en 1913, M. Carathéodory *[1], précédé, il est vrai, par MM. Schmidt, Schönflies, Study, renouvelait la théorie en introduisant la notion de « bout premier » (Primende) élargissant celle de point-frontière pour un domaine qui n'est pas limité par un arc de Jordan; il y a alors correspondance biunivoque entre les points a de la circonférence K [ou de l'axe $y'y$] et les bouts premiers E de la frontière Γ de Δ , un bout premier $E(a)$ étant défini au fond par ses voisinages topologiques, images des voisinages de a dans C . Quelques années plus tard M. E. Lindelöf *[1] précisait les résultats de M. Carathéodory, montrant, entre autres, que l'ensemble des points « prin-

cupaux » d'un bout premier $E(a)$ coïncidait avec l'ensemble des limites de la fonction $f(z)$ lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation. Peu après paraissait un important Mémoire de M. Montel * [1] sur la représentation conforme : Tandis que la méthode ingénieuse, mais assez longue de M. Lindelöf devait conduire plus tard à la théorie moderne de la mesure conforme, systématisée par MM. Carleman, Nevanlinna et Ostrowski, celle de M. Montel, grâce à la notion de famille normale qu'il venait d'introduire, se révélait plus simple pour l'étude des propriétés angulaires de la fonction $f(z)$ et surtout permettait une démonstration élégante et directe du théorème d'existence de la représentation.

Jusqu'à ce moment-là les résultats obtenus étaient surtout qualitatifs. Le problème fondamental qui se posait alors était le comportement de la dérivée $f'(z)$, et tout d'abord les conditions d'existence d'une limite de $f'(z)$ (dérivée angulaire) coïncidant, comme l'a montré M. Valiron ⁽¹⁾, avec la limite du rapport $\frac{f(z) - \alpha}{z - a}$ [si $f(z) \rightarrow \alpha$ lorsque $z \rightarrow a$ angulairement]. Les travaux de M. Julia ⁽²⁾ et de M. Denjoy ⁽³⁾, sur les fonctions holomorphes dans C satisfaisant à $|f(z)| \leq 1$, ont conduit simultanément MM. Valiron ⁽⁴⁾ et Carathéodory ⁽⁴⁾ au théorème suivant : *il suffit pour l'existence d'une dérivée angulaire au point $z = a$ correspondant à $\zeta = \alpha$ que la frontière Γ de Δ soit comprise entre deux cercles tangents en α* . Dans un autre article ⁽⁵⁾, M. Valiron montrait qu'on pouvait remplacer les deux cercles par des courbes Γ_1, Γ_2 ayant au point α un contact d'ordre nul, résultat dépassant celui de MM. Bessonoff et Lavrentieff ⁽⁶⁾ utilisant des courbes ayant un contact d'ordre quelconque, mais positif. Tous ces critères, comme celui pourtant plus large de M. Wolff ⁽⁷⁾, étaient déjà contenus dans celui de M. Ahlfors * [1], conséquence de deux inégalités d'une signification très profonde qui donnaient en outre, pour la première fois, des conditions nécessaires rejoignant à peu près les conditions suffisantes pour des domaines à frontière suffisamment régulière.

Pendant que MM. Wolff, Visser, Warschawski, Van der Corput continuaient à travailler dans cette direction sans améliorer sensiblement les critères de M. Ahlfors (voir à ce sujet l'étude intéressante de M. B. Grootenboer * [1]), M. Ostrowski * [1] engageait la théorie dans une voie nouvelle en dissociant la semi-conformité (Winkelproportionalität) de la conformité de la représentation (existence d'une dérivée angulaire), et donnant, pour la semi-conformité, une

(1) G. VALIRON, *Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 53, 1929, p. 70-77.

(2) G. JULIA, *Acta Mathematica*, t. 42, 1920, p. 349-355.

(3) A. DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 188, 1929, p. 139 et 1084.

(4) C. CARATHÉODORY, *Sitz. Ber. der Akad.*, zu Berlin, 1929, p. 39-54.

(5) G. VALIRON, *Bull. Sc. math.*, 2^e série, t. 56, 1932, p. 208-212.

(6) P. BESSONOFF et M. LAVRENTIEFF, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 58, 1930, p. 175-198.

(7) J. WOLFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 191, 1930, p. 921.

condition géométrique nécessaire et suffisante. Dans cette étude les notions de « mesure conforme », de « noyau » et de « plis » se révélèrent efficaces. Ce sont ces méthodes que nous avons essayé d'étendre (Chap. III et IV).

Restait le problème global du comportement de $f(z)$ sur la frontière. On connaissait déjà quelques résultats de M. Weniainoff (1), mais qui, fondés sur la notion de courbe rectifiable, ne pouvaient s'appliquer qu'à des domaines assez particuliers. Il revient à M. Denjoy [1, 2, 3] d'avoir montré, tout récemment, que, dans le cas le plus général, en négligeant sur la circonférence K un ensemble de points a de mesure linéaire nulle, on a en tout autre point, lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation, $f'(z) = o\left[\frac{1}{\sqrt{z-a}}\right]$, d'où résulte que $f(z)$ a une limite unique α . M. Wolff (2) reprenait immédiatement ces résultats pour en simplifier la démonstration, et ce sont ces travaux qui nous ont servi de point de départ dans les Chapitres I et II.

C'est en effet par ce dernier problème, à cause de la simplicité des méthodes et des résultats, que nous commençons cet exposé. Nous avons pu donner du théorème de M. Denjoy un énoncé valable quelle que soit la façon dont le point z s'approche de la circonférence, une démonstration nécessitant le minimum d'hypothèses sur la fonction $f(z)$ et plusieurs sortes de généralisations : tous ces résultats se rattachent très simplement, par l'intermédiaire d'un lemme de MM. Cartan et Ahlfors, à la limitation de l'aire décrite par le point représentatif $\zeta = f(z)$, cette aire pouvant être affectée d'un coefficient de densité variable. Ils ne sont donc pas limités aux fonctions univalentes, et nous avons tenu à leur conserver toute leur généralité. Aussi le premier chapitre est-il consacré aux fonctions holomorphes définies dans le cercle $C : |z| < 1$, ou, si l'on préfère, dans une couronne circulaire $r_0 \leq |z| < 1$, puisque nous nous intéressons uniquement à ce qui se passe au voisinage de la circonférence $K : |z| = 1$.

Dans la suite, pour plus de commodité, la fonction $f(z)$ est supposée définie dans le demi-plan droit $D : x > 0$, ou seulement dans la bande $x_0 \leq x > 0$.

Le deuxième chapitre contient plus particulièrement les applications à la représentation conforme des théorèmes démontrés au premier. L'univalence de la fonction $f(z)$ permet en effet, par application du théorème de Kœbe, de les préciser en les simplifiant. On verra comment la seule notion d'aire décrite permet de démontrer, outre la limitation globale de la dérivée trouvée par M. Denjoy, des propriétés purement topologiques de la représentation, en particulier sur l'accessibilité, et de retrouver les résultats locaux de MM. Carathéodory et Lindelöf en introduisant un point de vue métrique plus précis. La méthode suivie permet d'étudier l'ensemble limite des valeurs

(1) WENIAMINOFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 180, 1925, p. 114 et 902.

(2) J. WOLFF, *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 158.

de $f(z)$ lorsque z tend vers un point $a = it$ de l'axe $y'y$ dans un domaine intérieur à D limité par une courbe de forme donnée, et de préciser la rareté des points a pour lesquels cet ensemble ne se réduit pas à un point α . Nous généralisons ainsi un résultat de M. Wolff relatif au cas où cette courbe est un cercle tangent à $y'y$. Nous terminons en discutant la signification géométrique des résultats obtenus.

Les troisième et quatrième chapitres procèdent d'un point de vue assez différent. Nous nous plaçons cette fois au voisinage d'un point accessible α donné de la frontière Γ de Δ , que nous envoyons à l'infini ainsi que son correspondant a par deux transformations homographiques sur les variables ζ et z . Nous cherchons d'abord (Chap. III) des conditions géométriques suffisantes pour que $f(z)$ ait pour limite unique $\alpha = \infty$ lorsque z tend vers $a = \infty$ sur une courbe ayant à l'infini avec l'axe $y'y$ un contact d'ordre donné. Cette étude ne nous semble pas avoir été faite jusqu'ici. Elle nous a été suggérée par les travaux de M. Denjoy ⁽¹⁾ sur l'itération des fonctions analytiques dans un domaine Δ , dont les valeurs tombent dans Δ . Mais, avant de l'exposer, nous rappelons les définitions et les méthodes de M. Ostrowski dont nous avons besoin, en particulier la mesure conforme; nous les appliquons à la démonstration d'un lemme fort simple qui donne une limitation inattendue de l'argument de z lorsque $\zeta \rightarrow \infty$ dans un angle d'approximation intérieur à Δ ; nous donnons enfin une nouvelle démonstration, basée sur les méthodes de M. Montel, du théorème de M. Ostrowski sur la semi-conformité.

Au Chapitre IV, nous commençons par rappeler les résultats de M. Ahlfors; puis nous montrons comment les propriétés de $f(z)$ trouvées au Chapitre II permettent de représenter la fonction $\log \frac{f(z)}{z}$ par une intégrale de Poisson. Nous abordons alors le problème des conditions géométriques que doit remplir Δ pour que la fonction $f(z)$ possède une dérivée angulaire à l'infini : $c = \lim_{z \rightarrow \infty, |\text{Arg } z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon} \frac{f(z)}{z}$.

Les résultats de M. Ostrowski sur la semi-conformité nous suggèrent l'idée que, pour la conformité aussi, les conditions se partagent en deux groupes : d'une part la frontière Γ de Δ ne doit pas pénétrer trop profondément dans le demi-plan droit ($\xi > 0$); d'autre part Γ doit posséder une double infinité de points ζ, ζ' , s'étendant à l'infini dans les deux directions de l'axe imaginaire $\xi = 0$, assez voisins de cet axe et suffisamment denses sur Γ . Aussi nous étudions d'abord les deux cas particuliers :

I. Δ est contenu dans le demi-plan $\xi > 0$: seules interviendront les conditions du premier groupe.

(1) A. DENJOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 182, 1926, p. 42.

II. Δ contient le demi-plan $\xi > 0$: seules interviendront les conditions du deuxième groupe.

Dans le premier cas nous trouvons des conditions suffisantes moins restrictives que celles de M. Ahlfors, même élargies par M. Grootenboer; elles rejoignent les conditions nécessaires établies dans un cas particulier par M. Ahlfors.

Dans le deuxième cas nous avons réussi à montrer que l'existence d'une double infinité de points ζ_n, ζ'_n , convenablement répartis sur Γ , et tels que la ligne brisée qui les joint limite un domaine satisfaisant aux conditions de M. Ahlfors était suffisante, le reste de la frontière n'étant soumis à aucune condition. Quelques exemples montrent le progrès ainsi réalisé. Nous montrons pour des domaines assez généraux que l'existence de ces suites est nécessaire, sauf peut-être la condition de régularité dans la répartition.

On obtient des conditions suffisantes pour un domaine Δ général en lui imposant de contenir un domaine du type I et d'être contenu dans un domaine du type II. Nous remarquons que ces conditions entraînent plus que l'existence d'une dérivée angulaire : si elles sont réalisées, la fonction $\log \left| \frac{f(x)}{x} \right|$ est à variation totale bornée pour $1 \leq x \leq \infty$.

Les principaux résultats de cette étude ont fait l'objet de Notes aux *Comptes rendus* (9 juin 1941, 10 novembre 1941, 10 janvier 1942, 9 février 1942). En outre une cinquième Note, assez distincte, contient des applications à l'itération (23 juin 1941).

Je dois remercier très spécialement M. Denjoy qui m'a suggéré le sujet de cette étude et n'a cessé de m'encourager. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude. J'adresse ma respectueuse et profonde reconnaissance à M. Montel qui a bien voulu présenter mes Notes et accueillir ce Mémoire dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*. M. Valiron m'a constamment témoigné une active sympathie; je l'en remercie bien vivement. Enfin je rappellerai ce que je dois à M. Wolff qui, malgré les difficultés de correspondance, m'a tenue au courant de ses plus récents travaux.

N. B. — Pour éviter les répétitions, les références désignées par une * se rapportent à la liste suivante :

- L. AHLFORS [1], *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen (Acta Soc. Sc. Fennicæ, Nova series A, I, n° 9, 1930, p. 1-40)*.
- C. CARATHÉODORY [1], *Ueber die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete (Math. Annalen, t. 63, 1913, p. 323-370)*.
- A. DENJOY [1], *C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 1071.
 [2], *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 15.
 [3], *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 115.
- B. GROOTENBOER [1], *Sur la représentation conforme des domaines simplement connexes au voisinage des frontières (Bull. Soc. Math. de France, t. 61, 1933, p. 128-140)*.

- E. LINDELÖF [1], *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme* (*Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. 46, n° 4, 1915, p. 1-35).
- P. MONTEL [1], *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7^e série, t. 3, 1917, p. 1-54).
[2], *Leçons sur les fonctions univalentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1933.
- R. NEVANLINNA [1], *Eindeutige analytische Funktionen*, Berlin, Julius Springer, 1936.
- A. OSTROWSKI [1], *Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung* (*Prace Math. Fiz.*, t. 44, Varsovie, 1936, p. 371-471).
- J. WOLFF [1], *Inégatités remplies par les fonctions univalentes* (*Proceedings de l'Académie d'Amsterdam*, t. 44, n° 8, 1941).

CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES FONCTIONS HOLOMORPHES

DANS UNE COURONNE.

Théorème fondamental.

1. Nous commencerons par rappeler un lemme important dont l'idée primitive se trouve dans les travaux de MM. Boutroux, A. Bloch et H. Cartan, auquel M. Ahlfors a donné la forme simple et très générale que voici ⁽¹⁾ :

LEMME. — *Étant donnés : a. dans le plan complexe un ensemble borné mesurable E, et une fonction d'ensemble complètement additive ou charge $\mu(e)$ définie sur tout sous-ensemble mesurable e de E, et bornée [$\mu(E) < \infty$].*

b. Une fonction $h(R)$ continue croissante définie pour $0 \leq R \leq \infty$, telle que

$$h(0) = 0, \quad h(\infty) > 1;$$

en désignant par $\mu(R, a)$ la charge portée par la partie de E contenue dans le cercle de centre $z = a$, de rayon R, on a, pour tout $R > 0$,

$$\mu(R, a) \leq h(R) \times \mu(E),$$

en tout point a du plan, excepté au plus sur un ensemble A de points a pouvant être recouvert par une suite de cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ de rayons $R_1, R_2, \dots, R_n, \dots$ tels que

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(R_n) < 6.$$

2. Prenons maintenant une fonction $h(R)$ ne satisfaisant plus nécessairement à la condition $h(\infty) > 1$. Soit ε un nombre quelconque tel que

⁽¹⁾ L. AHLFORS, *Ein Satz von H. Cartan und seine Anwendung auf die Theorie der meromorphen Funktionen* (*Soc. sc. fennicæ Comment. Phys. math.*, 5, n° 16, 1931). Voir également le livre de R. NEVANLINNA, * [1], p. 136.

$0 < \varepsilon < h(\infty)$. On aura l'inégalité

$$\mu(R, a) < \frac{1}{\varepsilon} \mu(E) \times h(R),$$

excepté au plus pour un ensemble de points a pouvant être recouvert par une suite de cercles dont les rayons vérifient $\sum_{n=1}^{\infty} h(R_n) < 6\varepsilon$.

Si nous faisons tendre ε vers zéro nous obtenons le

COROLLAIRE. — *En tout point a du plan excepté au plus sur un ensemble A de h -mesure extérieure nulle ⁽¹⁾ (nous conviendrons de dire : sur une h -plénitude), le rapport $\frac{\mu(R, a)}{\mu(E) \times h(R)}$ est borné, quel que soit R , par un nombre qui dépendra en général du point a .*

Pour plus de commodité, nous remplacerons la condition $h(o) = 0$ par $h(o) \geq 0$; le corollaire reste valable dans le cas $h(o) > 0$, si l'on convient alors que tout ensemble de h -mesure nulle est vide : nous ne faisons que traduire le fait évident qu'en tout point a le rapport $\frac{\mu(R, a)}{\mu(E)}$ est borné (et même inférieur à 1).

3. Nous appliquerons ce corollaire à l'étude des fonctions holomorphes dans la couronne circulaire $C(r_0 \leq |z| < 1)$. La fonction additive d'ensemble la plus simple que l'on puisse associer à $f(z)$ et à un ensemble e quadratiquement mesurable est l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit e [chaque valeur ζ de $f(z)$ étant comptée autant de fois qu'elle est prise par $f(z)$ en des points de e distincts ou confondus]. Plus généralement, désignant par $S(r)$ l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la couronne $C_r(r_0 \leq |z| \leq r < 1)$, nous supposons qu'on connaît une fonction $\varphi(r)$ positive et mesurable telle que l'intégrale

$$(1) \quad \int_{r_0}^{\rho} \varphi(r) dS(r) = \int_{r_0}^{\rho} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|^2 \varphi(r) r dr d\theta$$

reste bornée par un nombre fixe M lorsque $\rho \rightarrow 1$. (Comme c'est une fonction croissante de ρ , il en résulte qu'elle a une limite.)

Alors, à chaque ensemble e quadratiquement mesurable contenu dans la couronne fermée $C_1(r_0 \leq |z| \leq 1)$, nous attachons la charge représentée par l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes

$$\mu(e) = \int_{r_0}^1 \varphi(r) ds(r) = \iint_e |f'(re^{i\theta})|^2 \varphi(r) d\omega,$$

⁽¹⁾ La mesure extérieure d'un ensemble A dérivant de la fonction $h(R)$, au sens de M. Hausdorff (*Math. Annalen*, t. 79, 1919, p. 157) est la borne inférieure de $\sum_n h(R_n)$ pour tous les systèmes finis ou dénombrables de cercles $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, recouvrant l'ensemble A .

$s(r)$ étant l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la portion de e située dans C_r , et $d\omega$ l'élément d'aire du plan z . Sur tout ensemble e' extérieur à la couronne C_1 , nous prendrons $\mu(e') = 0$.

LEMME. — D'après notre corollaire : en tout point a de la circonférence $K(|z|=1)$, excepté au plus sur un ensemble de h -mesure nulle, le rapport $\frac{\mu(R, a)}{h(R)}$ est borné par un nombre $m(a)$.

Ceci n'aura évidemment d'intérêt que si la totalité de K n'est pas de h -mesure nulle : donc, puisque K a la dimension 1, si $\frac{h(R)}{R}$ reste borné inférieurement lorsque $R \rightarrow 0$.

4. Soient alors : $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ une suite quelconque de points de la couronne C' telle que $r_n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et $a = e^{i\theta_0}$ un point non exceptionnel de K . Dès que $r_n > \frac{2r_0+1}{3}$ la fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle γ_n de centre z_n , de rayon $\frac{1-r_n}{2}$ et, d'après un théorème de M. Bieberbach (voir P. MONTEL * [2], p. 98), l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit γ_n est

$$S(z_n) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-r_n}{2} \right)^{2p} \frac{p}{(p!)^2} |f^{(p)}(z_n)|^2.$$

Nous supposons que, dans γ_n , [pour $\frac{1-r_n}{2} \leq 1-r \leq \frac{3}{2}(1-r_n)$], le rapport $\frac{\varphi(r)}{\varphi(r_n)}$ reste borné inférieurement par un nombre $k > 0$ indépendant de r_n . [Remarquons que lorsque $r \rightarrow 1$, $\varphi(r)$ peut, selon les cas, tendre vers zéro, ou $+\infty$, ou n'avoir aucune limite.] La charge portée par γ_n est alors supérieure à $k\varphi(r_n)S(z_n)$. D'autre part γ_n est contenu dans le cercle de centre a , de rayon $R = \frac{3}{2}|z_n - a|$.

Supposons la croissance de $h(R)$ assez régulière pour que le rapport $\frac{h\left(\frac{3R}{2}\right)}{h(R)}$ reste borné supérieurement par un nombre k_1 lorsque $R \rightarrow 0$. D'après le lemme, la charge portée par γ_n est inférieure à

$$\mu\left(\frac{3}{2}|z_n - a|, a\right) < m(a) \times k_1 h(|z_n - a|),$$

d'où

$$(2) \quad k\varphi(r_n)S(z_n) < m(a)k_1 h(|z_n - a|).$$

Mais si l'intégrale (1) est bornée, il est possible de trouver une fonction $\varphi_1(r)$ telle que l'intégrale $\int_{r_0}^r \varphi_1(r) dS(r)$ soit aussi bornée, et que $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)} \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 1$.

En effet, nous pouvons toujours supposer, en supprimant au besoin une partie des éléments de la suite z_n , que $1 - r_{n+1} < \frac{1 - r_n}{3}$. Alors le cercle γ_n est tout entier contenu dans la couronne $\frac{3r_{n-1}-1}{2} \leq r \leq \frac{3r_{n+1}-1}{2}$.

Posons $u_n = \int_{\frac{3r_{n-1}-1}{2}}^{\frac{3r_{n+1}-1}{2}} \varphi(r) dS(r)$.

La série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est convergente en même temps que l'intégrale (1). Il est possible de trouver une série $\sum v_n$ convergente telle que $v_n = \frac{u_n}{\varepsilon_n}$, et que la suite ε_n tende vers zéro en décroissant. Il suffit de prendre $v_n = \sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}$, R_n désignant le reste de la série $\sum u_i$ lorsqu'on s'arrête au terme u_n , soit $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$. La suite R_n tend vers zéro en décroissant, donc aussi ε_n . En effet,

$$v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} = \frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}}, \quad \text{d'où } \varepsilon_n = \sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}.$$

Dans chaque intervalle $\frac{3r_{n-1}-1}{2} \leq r < \frac{3r_{n+1}-1}{2}$ nous prendrons $\varphi_1(r) = \frac{\varphi(r)}{\varepsilon_n}$.

A l'intérieur de γ_n , $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)}$ reste constant, donc

$$\frac{\varphi_1(r)}{\varphi_1(r_n)} = \frac{\varphi(r)}{\varphi(r_n)} \geq k,$$

et $\varphi_1(r)$ satisfait aux mêmes conditions que $\varphi(r)$.

THÉORÈME. — *En appliquant l'inégalité (2) à $\varphi_1(r)$, on voit qu'en tout point a de K excepté au plus sur un ensemble de h -mesure nulle,*

$$\frac{\varphi(r_n) S(z_n)}{h(|z_n - a|)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty,$$

ou en utilisant les notations de Landau

$$(3) \quad S(z) = o \left[\frac{h(|z - a|)}{\varphi(r)} \right], \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1$$

[ceci sans même supposer que z tende vers a] en posant

$$r = |z|; \quad S(z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1-r}{2} \right)^{2p} \frac{p}{(p!)^2} |f^{(p)}(z)|^2.$$

Remarquons que si $\varphi(r) = 1$, on peut prendre pour γ_n le cercle de centre z_n ,

de rayon $1 - r_n$ (au lieu de $\frac{1 - r_n}{2}$), et (3) reste exact avec

$$S(z) = \sum_{p=1}^{\infty} (1-r)^{2p} \frac{p}{(p!)^2} |f^{(p)}(z)|^2,$$

ce qui donne un résultat un peu plus précis.

La formule (3) nous donne immédiatement une limitation des dérivées de $f(z)$

$$(4) \quad f^{(p)}(z) = o \left[\frac{\sqrt{h(|z-a|)}}{(1-r)^p \sqrt{\varphi(r)}} \right].$$

Il suffirait d'ailleurs de connaître la limitation de la dérivée première pour pouvoir en déduire toutes les autres au moyen de l'intégrale de Cauchy. Mais la formule (3) a l'avantage de fournir une limitation simultanée de toutes les dérivées.

5. *Exemples.* — a. Prenons $h(R) = 1$; on voit que

$$(1-r)f'(z)\sqrt{\varphi(r)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1.$$

En particulier si l'on peut prendre $\varphi(r) = 1$, c'est-à-dire si l'aire *décrite* par $f(z)$ est bornée,

$$(1-r)f'(z) \rightarrow 0.$$

Il est à remarquer que dans l'hypothèse beaucoup moins restrictive où l'aire $\Sigma(r)$ *couverte* par $f(z)$ lorsque z décrit C_r [chaque valeur ζ de $f(z)$ étant comptée une seule fois] reste bornée lorsque $r \rightarrow 1$, la seule application du théorème de M. A. Bloch (*voir* P. MONTEL *^[2], p. 110) montre déjà que $(1-r)|f'(z)|$ reste borné lorsque $r \rightarrow 1$.

b. Prenons $h(R) = R$. En tout point a d'une plénitude de K (l'ensemble exceptionnel étant de mesure linéaire nulle) on aura

$$f'(z) = o \left[\frac{\sqrt{|z-a|}}{(1-r)\sqrt{\varphi(r)}} \right].$$

Cette limitation, établie par M. Denjoy pour $\varphi(r) = 1$, d'abord *^[1] quand z tend vers a dans un angle d'approximation, puis *^[3] quand z tend vers a sur un chemin ayant avec K un contact d'ordre maximum inférieur à 1, a été généralisée par M. Dufresnoy (1) pour les fonctions $\varphi(r) = (1-r)^{1-\delta}$ ($0 < \delta < 1$). M. Wolff *^[1], en se limitant à $\varphi(r) = 1$, l'a étendue au cas où z tend vers a sur une courbe convexe dans la direction Oa et de forme donnée. La méthode que nous avons employée permet de s'affranchir de toute hypothèse sur la manière

(1) J. DUFRESNOY, *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 393.

dont z s'approche de K puisqu'il n'est même pas nécessaire de supposer que z tende vers a .

Courbes restant rectifiables dans la transformation $\zeta = f(z)$.

6. De ces limitations de $|f'(z)|$ nous pouvons déduire des limitations de la longueur de la courbe décrite par le point $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit un arc de Jordan rectifiable donné L aboutissant en a . En particulier :

a. Si la fonction $\varphi(r)$ peut être choisie de manière que

$$\int_0^{1-r_0} \sqrt{\frac{h(R)}{\varphi(1-R)}} \frac{dR}{R} < \infty$$

pour tout point a de K excepté au plus sur un ensemble de h -mesure nulle, la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit dans C' un arc de Jordan L_1 rectifiable atteignant K en a sous une incidence aiguë, est finie; $f(z)$ a donc une limite finie α lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation $\left[\left| \text{Arg} \left(1 - \frac{z}{a} \right) \right| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$ et la longueur de l'arc $\widehat{\zeta_1 \alpha}$ décrit par $f(z)$ lorsque z décrit l'arc $\widehat{z_1 a}$ de L_1 est égale à

$$\circ \left[\int_0^{1-\rho} \sqrt{\frac{h(R)}{\varphi(1-R)}} \frac{dR}{R} \right] \quad (\rho = |z_1|).$$

b. Plus généralement si

$$\int_0^{1-r_0} \sqrt{\frac{h(R)}{\varphi[1-\psi(R)]}} \frac{dR}{R} < \infty,$$

pour une h -plénitude de points a de K , la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la courbe $L_\psi[1 - |z| = \psi(|z - a|)]$, est finie, et $f(z)$ tend vers une limite unique finie α lorsque z tend vers a dans le domaine Δ_ψ limité par L_ψ .

7. Nous allons maintenant indiquer une autre méthode qui permet l'étude directe des courbes L de C_1 restant rectifiables dans la transformation $\zeta = f(z)$. Nous fixerons à l'avance la *forme* des courbes L , ce qui nous permettra de mieux préciser l'ensemble des courbes exceptionnelles de forme donnée.

Soit tout d'abord $L(r)$ la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z| = r$. En appliquant à $L^2(r)$ l'inégalité de Schwarz, on a

$$\begin{aligned} L^2(r) &= \left[\int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})| r d\theta \right]^2 \leq 2\pi r \int_0^{2\pi} |f'(r e^{i\theta})|^2 r d\theta, \\ (5) \quad \int_{r_0}^1 L^2(r) \varphi(r) \frac{dr}{r} &\leq \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) |f'(r e^{i\theta})|^2 r dr d\theta \leq M. \end{aligned}$$

Soit $H(r)$ une fonction positive, continue, non décroissante quelconque dans l'intervalle $r_0 \leq r < 1$ telle que

$$\int_{r_0}^{\rho} H(r) dr \rightarrow +\infty, \quad \text{lorsque } \rho \rightarrow 1.$$

On peut dire que les valeurs de r pour lesquelles $L^2(r) \varphi(r) > \varepsilon H(r)$ forment un ensemble exceptionnel e_ε très rare au voisinage de $r=1$. Précisons cette expression : quels que soient ε et ε' , on peut trouver un nombre η assez petit pour que

$$\int_{1-\eta}^1 L^2(r) \varphi(r) dr < \varepsilon \varepsilon'.$$

L'ensemble e_ε est mesurable (puisque la fonction $\varphi(r)$ est mesurable) et si l'on désigne par $e_{\varepsilon, \eta}$ la portion de e_ε comprise dans l'intervalle $1 - \eta \leq r \leq 1$,

$$\int_{e_{\varepsilon, \eta}} H(r) dr < \varepsilon'.$$

En particulier si $H(r) = \frac{1}{1-r}$, on peut dire que $L(r) \sqrt{\frac{\varphi(r)}{1-r}} \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 1$ si l'on néglige un ensemble de valeurs de r sur lequel $\int_{r_0}^1 \frac{dr}{1-r}$ est aussi petit qu'on le veut.

(On pourrait dire : en négligeant un ensemble d'épaisseur logarithmique gauche nulle au point $r=1$). Il est à remarquer que la convergence que nous venons de définir est plus forte que la convergence *approximative* définie par M. Denjoy. Celle-ci en effet correspond au cas où la mesure $m(\varepsilon, \eta)$ de la portion $e_{\varepsilon, \eta}$ de l'ensemble exceptionnel satisfait à $\frac{m(\varepsilon, \eta)}{\eta} \rightarrow 0$ si $\eta \rightarrow 0$, ε étant fixé, et l'on a évidemment

$$\frac{1}{\eta} m(\varepsilon, \eta) = \frac{1}{\eta} \int_{e_{\varepsilon, \eta}} dr < \int_{e_{\varepsilon, \eta}} \frac{dr}{1-r}.$$

8. Soit maintenant $l(\rho, \theta)$ la longueur de la courbe décrite par le point $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit le segment de rayon $\text{Arg } z = \theta$, $r_0 \leq |z| \leq \rho$. En vertu de l'inégalité de Schwarz, on aura

$$l^2(\rho, \theta) = \left[\int_{r_0}^{\rho} |f'(r e^{i\theta})| dr \right]^2 \leq \int_{r_0}^{\rho} \varphi(r) |f'(r e^{i\theta})|^2 r dr \int_{r_0}^{\rho} \frac{dr}{r \varphi(r)},$$

$$(6) \quad \int_0^{2\pi} l^2(\rho, \theta) d\theta \leq \frac{M}{r_0} \int_{r_0}^{\rho} \frac{dr}{\varphi(r)} = \frac{M}{r_0} \Phi(\rho).$$

Si la fonction $\Phi(\rho)$ est bornée lorsque $\rho \rightarrow 1$, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_{r_0}^1 \frac{dr}{\varphi(r)}$ est convergente, il résulte de l'inégalité (6) que $l(\rho, \theta)$ reste bornée, et, puisque c'est une fonction croissante de ρ , a une limite finie si $\rho \rightarrow 1$, θ étant

fixé, excepté au plus pour un ensemble de valeurs de θ de mesure linéaire nulle. Alors la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit un rayon non exceptionnel ($\text{Arg} z = \theta$) est rectifiable et aboutit en un point α bien déterminé. Le même résultat n'aurait été obtenu, si l'on était passé par l'intermédiaire de la limitation de $|f(z)|$, que dans l'hypothèse plus restrictive

$$\int_{r_0}^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r)\varphi(r)}} < \infty \quad (\text{considérer le cas } \varphi(r) = (1-r) \log^2(1-r)).$$

On montrerait plus généralement que, pour une plénitude de valeurs de θ , la longueur de la courbe décrite par $\zeta = f(z)$, lorsque z décrit la courbe $L_k(\theta)$: $\text{Arg} z = \theta + k(1 - |z|)$, $r_0 \leq |z| \leq 1$, est finie quel que soit le nombre k donné ($-\infty < k < +\infty$). Plus précisément si l'on désigne par $l_0(\rho, \theta) = l(1, \theta) - l(\rho, \theta)$ la longueur de l'arc $\widehat{\zeta_1 \alpha}$ décrit par ζ lorsque z décrit l'arc $\widehat{z_1 a}$ de $L_k(\theta)$ défini par $\rho \leq |z| \leq 1$ et si l'on pose $\Phi_0(\rho) = \Phi(1) - \Phi(\rho)$, on aura

$$l_0(\rho, \theta) = o[\sqrt{\Phi_0(\rho)}].$$

9. Dans toute la suite de cette étude nous supposerons, pour une raison de commodité, que la fonction $f(z)$ est définie et holomorphe dans la bande de plan B de la variable $z = x + iy$ définie par $x_0 \leq x < \infty$ et satisfait à une condition d'aire de la forme

$$(7) \quad \int_0^{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) |f'(x + iy)|^2 dx dy = \int_0^{x_0} \psi(x) dS(x) < M < \infty,$$

$\psi(x)$ étant une fonction positive mesurable de x et $S(x)$ l'aire décrite par $f(z)$ lorsque z décrit la bande : $x \leq \text{Re}(z) \leq x_0$.

Si nous posons $\omega = re^{i\theta} = \frac{z-1}{z+1}$, la variable ω décrit la région comprise entre deux cercles tangents au point $\omega = -1$. Lorsque z tend vers un point $a = it$ de l'axe $y'y$ ($-\infty < t < +\infty$), ω tend vers le point $b = \frac{t+i}{t-i}$ de la circonférence $K(|\omega| = 1)$; $1 - |\omega|$ est un infiniment petit équivalent à $\frac{x}{1+t^2}$, et $|\omega - b|$ à $\frac{2|z-a|}{1+t^2}$. Nous pouvons donc appliquer les résultats de l'étude précédente

à la fonction $f(z) = F(\omega)$. Pour montrer comment se transforment les énoncés, reprenons la démonstration du paragraphe précédent.

Soit $l(\xi, t)$ la longueur de la courbe décrite par $\zeta = f(z)$ lorsque $z = x + iy$ décrit le segment $y = t$, $x_0 \geq x \geq \xi$,

$$(8) \quad l^2(\xi, t) = \left[\int_{\xi}^{x_0} |f'(x + it)| dx \right]^2 \leq \int_{\xi}^{x_0} |f'(x + it)|^2 \psi(x) dx \int_{\xi}^{x_0} \frac{dx}{\psi(x)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l^2(\xi, t) dt \leq M \int_{\xi}^{x_0} \frac{dx}{\psi(x)} = M \Psi(\xi).$$

Si la fonction $\psi(x)$ peut être choisie de manière que

$$(9) \quad \Psi(o) = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\psi(x)} < \infty$$

pour une plénitude de points $a = it$ de l'axe $y'y$, $l(\xi, t)$ a une limite finie lorsque $\xi \rightarrow 0$, et la courbe décrite par ζ lorsque z décrit le segment $y = t$, $x_0 \geq x \geq 0$, est rectifiable et aboutit en un point α bien déterminé. Il en est alors de même des images des segments $L_k(t)$ définis par $y - t = kx$, $x_0 \geq x \geq 0$, k étant fixé ($-\infty < k < +\infty$).

10. Soit maintenant $a = it$ un point donné de $y'y$. Nous désignerons par $c_{\rho, a}$ la demi-circonférence $|z - a| = \rho$, $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2}$, et par $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ la longueur de la courbe décrite par $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit l'arc de $c_{\rho, a}$ défini par $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0$. En appliquant l'inégalité de Schwarz, on aura

$$\begin{aligned} \lambda^2(\rho, \theta_0, a) &= \left[\int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho e^{i\theta})| \rho d\theta \right]^2 \\ &\leq \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \psi(\rho \cos \theta) |f'(a + \rho e^{i\theta})|^2 \rho d\theta \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\rho d\theta}{\psi(\rho \cos \theta)}. \end{aligned}$$

$$\text{Posons } g(\rho, \theta_0) = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{\rho d\theta}{\psi(\rho \cos \theta)},$$

$$(10) \quad \int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{g(\rho, \theta_0)} d\rho \leq \int_0^R \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \psi(\rho \cos \theta) |f'(a + \rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta \leq \mu(R, a) \leq M,$$

en désignant toujours par $\mu(R, a)$ la charge portée par le cercle de centre a de rayon R .

Applications. — Supposons que $g(\rho, \theta_0)$ reste borné, et par conséquent ait une limite $g(\rho)$ lorsque $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, soit

$$(11) \quad g(\rho) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\rho d\theta}{\psi(\rho \cos \theta)} < \infty.$$

a. L'inégalité (10) montre qu'en tout point a : $\int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{g(\rho)} d\rho \leq M$, donc $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ tend vers une limite finie $\lambda(\rho, a)$ lorsque $\theta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, excepté au plus pour un ensemble e de valeurs de ρ sur lequel

$$(12) \quad \int_e \frac{d\rho}{g(\rho)} = 0.$$

C'est-à-dire que, pour une plénitude de valeurs de ρ , la courbe transformée de $c_{\rho,a}$ (du moins des arcs de $c_{\rho,a}$ contenus dans B) est rectifiable et a une longueur finie. Si l'on remarque que les intégrales (9) et (11) sont simultanément convergentes ou divergentes, nous trouvons un résultat voisin de celui du paragraphe précédent.

Si $R \rightarrow 0$, $\int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, a)}{g(\rho)} d\rho \rightarrow 0$ (car $\mu(R, a) \rightarrow 0$).

Ceci montre que $\lambda(\rho, a) \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow 0$, en négligeant un ensemble e satisfaisant à (12); ce qui est intéressant lorsque

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{d\rho}{g(\rho)} \rightarrow +\infty \quad \text{lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Nous retrouvons un mode de convergence déjà rencontré (plus forte que la convergence approximative).

b. En tout point a d'une h -plénitude de $y'y$, le rapport $\frac{\mu(R, a)}{h(R)}$ est borné par un nombre $m(a)$. Donc on a

$$(13) \quad \frac{1}{h(R)} \int_0^R \frac{\lambda^2(\rho, a)}{g(\rho)} d\rho < m(a).$$

$H(\rho)$ étant une fonction positive mesurable quelconque de ρ , il résulte de (13) que le rapport $\frac{\lambda^2(\rho, a)}{H(\rho)g(\rho)}$ est borné, excepté au plus pour un ensemble e de valeurs de ρ tel que

$$(14) \quad \frac{1}{h(R)} \int_{e_R} H(\rho) d\rho = 0,$$

e_R désignant la portion de e contenue dans l'intervalle $0 \leq \rho \leq R$.

Mais, en remplaçant $\psi(x)$ par une fonction $\psi_1(x)$ telle que $\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)} \rightarrow \infty$ et que l'intégrale (7) reste convergente, on voit, en appliquant le calcul précédent à la fonction $\psi_1(x)$, que

$$(15) \quad \text{si } \rho \rightarrow 0, \quad \lambda(\rho, a) = o[\sqrt{g(\rho)H(\rho)}],$$

en négligeant un ensemble e de valeurs de ρ satisfaisant à (14).

Nous trouvons un mode de convergence généralisant la convergence approximative. En particulier si $h(R) = R$, $H(\rho) = 1$, nous pouvons dire que $\frac{\lambda^2(\rho, a)}{g(\rho)} \rightarrow 0$ approximativement (au sens de M. Denjoy) pour une plénitude de points a , ou plus généralement, si $g(\rho, \theta_0)$ n'est pas nécessairement borné, que pour θ_0 fixé, $\frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{g(\rho, \theta_0)} \rightarrow 0$.

Si les intégrales (9) et (11) convergent, il en résulte que les limites de $f(z)$ sur les segments $L_k(t)$ aboutissant au point $a = it$ (voir § 9) sont, pour une plénitude de valeurs de t , indépendantes de k : donc $f(z)$ a une limite unique α si $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation $[|\text{Arg}(z - a)| < \theta_0]$.

Extensions possibles.

11. D'après une méthode indiquée par M. Dufresnoy (1), ces résultats peuvent s'étendre aux fonctions *méromorphes* dans la couronne $C'(r_0 \leq |z| < 1)$ à condition de remplacer partout les mots « aire », « longueur » et « dérivée » par « aire sphérique », « longueur sphérique » et « dérivée sphérique » et « limite finie » par « limite finie ou infinie ». Il faut pourtant faire une restriction. On ne connaît pas, en effet, pour l'aire sphérique, de théorème comparable à celui de M. Bieberbach. Le lemme de M. Dufresnoy (2) permet de montrer que, si $S(z_n)$ est l'aire sphérique décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle γ_n de centre z_n et de rayon $\frac{1-r_n}{2}$ (voir § 4).

$$\frac{1-r_n}{2} \frac{|f'(z_n)|}{1+|f(z_n)|^2} \leq \sqrt{\frac{S(z_n)}{1-S(z_n)}},$$

ou en posant $\delta(z) = \frac{(1-r)|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$,

$$\frac{\delta^2(z_n)}{4+\delta^2(z_n)} \leq S(z_n) \leq \mu \left(\frac{3}{2} |z_n - a|, a \right) \times \frac{1}{k\varphi(r_n)}.$$

Donc pour une h -plénitude de points a de K

$$\frac{\delta^2(z)}{4+\delta^2(z)} = o \left[\frac{h(|z-a|)}{\varphi(r)} \right].$$

Le premier membre étant toujours inférieur à 1, cette inégalité ne sera intéressante que si $\frac{h(|z-a|)}{\varphi(r)}$ reste borné dans les conditions de variation de z envisagées. Alors le premier membre est un infiniment petit équivalent à $\frac{\delta^2(z)}{4}$ et l'on a une généralisation de (4), valable pour la dérivée première seulement

$$(16) \quad \frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} = o \left[\frac{\sqrt{h(|z-a|)}}{(1-r)\sqrt{\varphi(r)}} \right].$$

Le cas $\varphi(r) = 1-r$ correspond aux fonctions méromorphes à caractéristique bornée. Les limitations obtenues ne permettent pas de démontrer le théorème

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 243, 1941, p. 393.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 242, 1941, p. 662.

de Fatou. Il ne faut pas s'en étonner, car $f(z)$ peut avoir une limite radiale (finie ou infinie) sans que la longueur sphérique de la courbe décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le rayon Oa ($\text{Arg } z = \theta_0$) soit finie. Par contre en prenant $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, pour une plénitude de points a de \mathbb{K} .

$$\frac{(1-r)f'(z)}{1+|f(z)|^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } z \rightarrow a \text{ angulairement } \left(\frac{|z-a|}{1-r} \text{ borné} \right).$$

Si l'on admet que $f(z)$ a une limite α lorsque $z \rightarrow a$ sur le rayon Oa , on en déduit que $f(z)$ a même limite lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation, sans utiliser la représentation canonique de $f(z)$, quotient de deux fonctions bornées auxquelles on applique le théorème de Montel-Lindelöf.

Les limitations obtenues pour les longueurs des courbes décrites par le point $\zeta = f(z)$ s'étendent sans difficulté aux courbes décrites par le point représentatif de $f(z)$ sur la sphère de Riemann.

12. L'aire décrite par $f(z)$ n'est pas la seule fonction additive d'ensemble qui puisse servir pour l'étude de $f(z)$. Nous nous contenterons de donner un exemple :

Supposons connue une fonction $\varphi(r)$ mesurable positive telle que

$$(17) \quad \int_{r_0}^1 \int_0^{2\pi} \varphi(r) |f'(r e^{i\theta})| r dr d\theta = \int_{r_0}^1 \varphi(r) L(r) dr < M,$$

$L(r)$ étant la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ quand z décrit le cercle $|z|=r$. Alors, à tout ensemble quadratiquement mesurable e de la couronne C_1 ($r_0 \leq |z| \leq 1$), nous attacherons la charge

$$\mu(e) = \iint_e \varphi(r) |f'(z)| d\omega.$$

THÉORÈME. — *Nous allons montrer que, pour une h -plénitude de points a de \mathbb{K} ,*

$$(18) \quad f'(z) = o \left[\frac{h(|z-a|)}{(1-r)^2 \varphi(r)} \right],$$

les fonctions $h(\mathbb{R})$ et $\varphi(r)$ devant satisfaire aux mêmes conditions de régularité de croissance que précédemment.

La seule difficulté de la démonstration consiste à trouver une borne supérieure de $|f'(z_n)|$ au moyen de la charge $\mu(\gamma_n)$ portée par le cercle γ_n , de centre z_n et de rayon $\frac{1-r_n}{2}$. Posons, dans γ_n , $z = z_n + \rho e^{i\theta}$,

$$\mu(\gamma_n) = \iint_{\gamma_n} \varphi(r) |f'(z)| d\omega \geq k \varphi(r_n) \int_0^{\frac{1-r_n}{2}} \int_0^{2\pi} |f'(z_n + \rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta,$$

d'où

$$\mu(\gamma_n) \geq k\varphi(r_n) \int_0^{\frac{1-r_n}{2}} \lambda(\rho) d\rho,$$

$\lambda(\rho)$ désignant la longueur de la courbe décrite par $f(z)$ quand z décrit la circonférence $|z - z_n| = \rho$. Or la surface de Riemann, décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le cercle $|z - z_n| \leq \rho$, a une aire

$$S(\rho, z_n) \geq \pi\rho^2 |f'(z_n)|^2,$$

et la longueur $\lambda(\rho)$ de son contour satisfait à

$$\lambda^2(\rho) \geq 4\pi\delta(\rho, z_n) \geq 4\pi^2\rho^2 |f'(z_n)|^2,$$

d'où

$$\mu(\gamma_n) \geq k\varphi(r_n) \int_0^{\frac{1-r_n}{2}} |f'(z_n)| \times 2\pi\rho d\rho = k\varphi(r_n) \frac{(1-r_n)^2}{4} |f'(z_n)|,$$

or

$$\mu(\gamma_n) \leq \mu\left(\frac{3}{2}|z_n - a|, a\right) \leq m(a)h\left(\frac{3}{2}|z_n - a|\right) < m(a)k_1h(|z_n - a|).$$

En appliquant ces deux inégalités à une fonction $\varphi_1(r)$ telle que $\frac{\varphi_1(r)}{\varphi(r)} \rightarrow \infty$ lorsque $r \rightarrow 1$, et satisfaisant aux mêmes conditions que $\varphi(r)$, on voit que

$$\frac{(1-r)^2 |f'(z)| \varphi(r)}{h(|z-a|)} \rightarrow 0, \quad \text{lorsque } r \rightarrow 1. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

La même méthode donne également une limitation des dérivées d'ordre quelconque de $f(z)$

$$f^{(p)}(z) = o\left[\frac{h(|z-a|)}{(1-r)^{p+1}\varphi(r)}\right].$$

En particulier, pour une plénitude de points a [$h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$],

$$f^{(p)}(z) \frac{(1-r)^{p+1}}{|z-a|} \varphi(r) \rightarrow 0.$$

EXEMPLE. — Si $L(r)$ est bornée, nous pouvons prendre pour $\varphi(r)$ n'importe quelle fonction positive telle que

$$\int_{r_0}^1 \varphi(r) dr < \infty.$$

Pour une plénitude de points a , lorsque $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation, on aura

$$f'(z) = o\left[\frac{1}{(1-r)\varphi(r)}\right], \quad \text{d'où si } \varphi(r) = (1-r)^{1-\delta}, \quad f'(z) = o[(1-r)^{-\delta}],$$

quel que soit $\delta > 0$. Mais dans ce cas le théorème de Fatou, applicable à $f'(z)$,

montre que $f'(z)$ a une limite unique finie lorsque $z \rightarrow a$ angulairement, pour une plénitude de points a de K .

CHAPITRE II.

APPLICATIONS A LA REPRÉSENTATION CONFORME.

13. Nous allons maintenant nous limiter au cas des fonctions $\zeta = f(z)$ méromorphes et univalentes dans le demi-plan droit $D(x > 0)$ de la variable $z = x + iy$. La fonction $f(z)$ réalise la représentation conforme de D sur un domaine simplement connexe Δ du plan de la variable $\zeta = \xi + i\eta$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $f(z)$ holomorphe et bornée dans une bande $B(0 < x \leq x_0)$: on remplacerait au besoin $f(z)$ par $\frac{1}{f(z) - f(z_1)}$, z_1 étant un point intérieur au demi-plan $x > x_0$. L'aire décrite par $f(z)$ quand z décrit B est alors bornée par un nombre M , et nous pouvons appliquer les résultats du chapitre précédent en faisant $\psi(x) = 1$. Mais nous allons voir que la nouvelle hypothèse d'univalence permet de les préciser et de les interpréter géométriquement comme des propriétés de la représentation conforme.

Nous ferons fréquemment appel dans cette étude au théorème de Kœbe (*voir* P. MONTEL *[2], p. 52), d'un point de vue que M. Wolff *[1] a introduit avec succès dans ce genre de recherches.

Si la fonction $f(z)$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < R$, pour $|z| \leq kR$ ($k < 1$), on a

$$\frac{1-k}{(1+k)^2} \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right| \leq \frac{1+k}{(1-k)^2},$$

en particulier (si $k = \frac{1}{2}$), le rapport $\left| \frac{f'(z)}{f'(0)} \right|$ reste compris entre deux constantes absolues K, K' , lorsque $|z| \leq \frac{R}{2}$.

Nous appliquerons ceci à une fonction $f(z)$ holomorphe univalente dans un domaine D , de la façon suivante : si z_0 est un point intérieur à D situé à la distance d de la frontière

$$|z - z_0| \leq \frac{d}{2} \quad \text{entraîne} \quad K \leq \left| \frac{f'(z)}{f'(z_0)} \right| \leq K'.$$

Correspondance entre les frontières.

14. Soit $a = it$ un point quelconque de l'axe $y'y$ limitant D . Étudions $f(z)$ au voisinage de $z = a$.

Si $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ désigne la longueur de l'image dans la représentation conforme de l'arc de cercle $|z - a| = \rho$, $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0$ (contenu dans B si $\rho \leq x_0$, $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$), nous aurons

$$(19) \quad \int_0^R \lambda^2(\rho, \theta_0, a) \frac{d\rho}{\rho} < \pi \mu(R, a) < \pi M \quad (R \leq x_0).$$

Si θ_0 croît jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ qui est une fonction croissante de θ_0 tend vers une limite finie $\lambda(\rho, a)$ excepté au plus pour un ensemble ε de valeurs de ρ sur lequel $\int_{\varepsilon} \frac{d\rho}{\rho} = 0$, et l'on a

$$(20) \quad \int_0^R \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} \begin{cases} < \pi M, & \text{si } R \leq x_0; \\ \rightarrow 0, & \text{si } R \rightarrow 0. \end{cases}$$

Donc $\lambda(\rho, a) \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow 0$ en négligeant un ensemble e de valeurs de ρ tel que si e_R désigne la portion de e contenue dans l'intervalle $0 \leq \rho \leq R$

$$\int_{e_R} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0 \quad \text{si } R \rightarrow 0.$$

THÉORÈME. — Nous pourrions donc trouver une suite infinie décroissante ρ_n de valeurs de ρ telle que $\rho_n \rightarrow 0$ et $\lambda(\rho_n, a) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Nous pourrions même imposer à la suite ρ_n la condition supplémentaire $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \rightarrow 1$, mais ceci ne nous servira pas pour le moment.

Si en effet il n'existait pas de telle suite, on pourrait trouver deux nombres positifs : k , ε , et une suite infinie d'intervalles disjoints δ_i : $\rho'_i \geq \rho \geq \rho''_i$, sur lesquels $\lambda(\rho, a) > \varepsilon$, et tels que $\log \frac{\rho'_i}{\rho''_i} > k > 0$.

Alors

$$\int_{\rho''}^{\rho'_i} \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} > \sum_{i=1}^{i=n} \int_{\rho''_i}^{\rho'_i} \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} > nk\varepsilon^2,$$

et l'intégrale (20) ne saurait être bornée. Donc la suite existe.

15. La suite ρ_n étant déterminée, les demi-cercles $c_{\rho_n, a}(|z - a| = \rho_n, |\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2})$ ont pour images des coupures rectifiables q_n du domaine Δ , joignant deux points accessibles de la frontière de Δ . (Un point frontière est accessible s'il existe un arc simple de Jordan intérieur à Δ aboutissant en ce point; à fortiori les extrémités d'une coupure rectifiable de longueur finie sont accessibles.) Deux coupures quelconques ne peuvent avoir aucun point commun

intérieur à Δ puisqu'il y a correspondance biunivoque entre l'intérieur de Δ et l'intérieur de D . Ces coupures définissent une suite de domaines emboîtés $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \Delta_{n+1} \supset \dots$, Δ_n étant le domaine décrit par $f(z)$ lorsque z décrit l'intérieur du demi-cercle $c_{\rho_n, a}$. Chaque coupure q_n sépare la précédente q_{n-1} de la suivante q_{n+1} . Tout point intérieur à Δ finit par être, lorsque n est assez grand, extérieur à Δ_n . Les fermetures $\bar{\Delta}_n$ des domaines Δ_n ont en commun un ensemble E continu de points frontières de Δ que nous appellerons d'après M. Carathéodory * [1, p. 323] un *bout* (Ende) de la frontière Γ . Soit α un point d'accumulation quelconque de l'ensemble des coupures q_n ; α appartient à E ; on peut extraire de la suite q_n une suite partielle q_{n_i} de coupures tendant vers α (puisque la longueur de q_n tend vers zéro). La suite q_{n_i} définit le même bout E : or M. Carathéodory montre qu'un bout E défini par une suite de coupures convergeant vers un point α est indécomposable (il n'existe aucun bout qui soit une partie de E) et il lui donne le nom de *bout premier* (Primende). Le point α est dit *principal*.

Si une suite de points z_p tend vers a dans B , pour p assez grand, z_p est intérieur à $c_{\rho_n, a}$, donc $f(z_p)$ est dans Δ_n . Donc les points d'accumulation de la suite z_p sont sur E : à un point a de $y'y$ correspond un bout premier $E(a)$.

Réciproquement si une suite de points de Δ : $\zeta_p = f(z_p)$ tend vers un bout premier E de Γ , la suite z_p tend vers un point déterminé a de $y'y$: car on peut définir le bout au moyen de coupures q'_n convergeant vers un point α , limitant des domaines Δ'_n à l'extérieur desquels il n'existe qu'un nombre fini de points de la suite ζ_p ; un raisonnement devenu classique (voir P. MONTEL * [1, p. 39]) montre que les coupures c'_n du domaine D qui correspondent aux q'_n convergent vers un point a de $y'y$.

C. Q. F. D.

Nous voyons ainsi comment s'introduisent très simplement les notions posées par M. Carathéodory, et nous retrouvons le

THÉORÈME. — *Il y a correspondance biunivoque entre les points a de l'axe $y'y$ limitant D et les bouts premiers E de la frontière Γ de Δ .*

16. Poussons l'analyse un peu plus loin en étudiant $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ pour $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$.

Soit ρ' tel que $\rho \geq \rho' \geq \rho \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{2}\right)$. Nous allons montrer que $\frac{\lambda(\rho', \theta_0, a)}{\lambda(\rho, \theta_0, a)}$ est supérieure à un nombre positif fixe.

A tout point $z = a + \rho e^{i\theta} = x + iy$ de $c_{\rho, a}$, nous faisons correspondre le point $z' = a + \rho' e^{i\theta}$ de $c_{\rho', a}$. D'après la façon dont ρ' est choisi, z' est intérieur au cercle de centre z , de rayon $\frac{\rho'}{2}$. Donc

$$\left| \frac{f'(z')}{f'(z)} \right| \geq K; \quad \lambda(\rho', \theta_0, a) = \rho' \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho' e^{i\theta})| d\theta \geq K \frac{\rho'}{\rho} \lambda(\rho, \theta_0, a),$$

$$\frac{\lambda(\rho', \theta_0, a)}{\lambda(\rho, \theta_0, a)} \geq \frac{K}{2}.$$

Nous allons maintenant montrer que si θ_0 reste fixe, $\lambda(\rho, \theta_0, a)$ tend vers zéro avec ρ ; sinon, on pourrait trouver une suite infinie de valeurs de ρ , soit ρ_n , tendant vers zéro, et un nombre ε , tels que $\lambda(\rho_n, \theta_0, a) > \varepsilon$. Posons

$$\rho'_n = \rho_n \left(1 - \frac{\cos \theta_0}{2}\right), \quad \int_{\rho'_n}^{\rho_n} \frac{\lambda^2(\rho, \theta_0, a)}{\rho} d\rho > \frac{K^2}{4} \varepsilon^2 \frac{\cos \theta_0}{2},$$

et l'intégrale (19) ne pourrait tendre vers zéro avec R.

17. Soit alors z_n une suite de points tendant vers $a = it$ (fig. 1) dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ telle que $f(z_n) \rightarrow \alpha$. Menons par chaque point z_n les arcs $|z - a| = |z_n - a| = \rho_n$, $|\text{Arg}(z - a)| \leq \theta_0$. Sur une suite quelconque de points z''_n pris sur ces arcs, $f(z''_n) \rightarrow \alpha$ puisque

$$|f(z''_n) - f(z_n)| < \lambda(\rho_n, \theta_0, a) \rightarrow 0.$$

En particulier on peut prendre $z''_n = it + \rho_n$, les points z''_n tendent vers a sur une parallèle à Ox . Or nous savons (Chap. I, § 5) que $x f'(z) \rightarrow 0$. Donc la

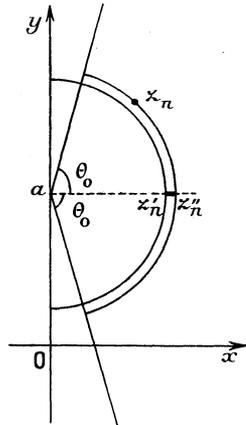


Fig. 1.

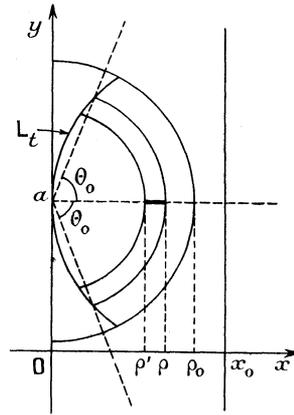


Fig. 2.

longueur l_n de l'image d'un segment $z'_n z''_n$ de la droite $y = t$ satisfait à

$$l_n = o \left[\log \frac{\rho_n}{\rho'_n} \right] \quad (\rho_n = |z''_n - a|, \rho'_n = |z'_n - a|, \rho'_n < \rho_n).$$

Donc si $\frac{\rho_n}{\rho'_n}$ est borné $l_n \rightarrow 0$ et $f(z'_n)$ tend vers α comme $f(z''_n)$.

Or il résulte de la convergence de l'intégrale (20) que, si $\rho_n \rightarrow 0$, on peut choisir ρ'_n de manière que

$$\frac{\rho'_n}{\rho_n} \rightarrow 1, \quad \lambda(\rho'_n, a) \rightarrow 0,$$

par un raisonnement analogue à celui qui a été fait (§ 14). Nous prendrons

alors $z'_n = it + \rho'_n$. D'après ce qui précède, $f(z'_n) \rightarrow \alpha$ et les coupures g'_n images des demi-cercles $c_{\rho'_n, a}$ convergent vers α . Donc α est un point principal du bout.

Réciproquement, si α est un point principal, il est par définition limite de coupures Q_n définissant le bout (on peut prendre pour Q_n des arcs de cercle de centre α de rayons décroissants). Les images des Q_n dans D sont des coupures C_n limitant une suite de domaines D_n emboîtés. L'ensemble des fermetures \overline{D}_n de ces domaines n'ont en commun que le point a vers lequel convergent les coupures C_n . Prenons, sur chaque coupure C_n , un point z_n ; à la suite z_n correspond une suite $\zeta_n = f(z_n)$ tendant vers α . En particulier on peut choisir les points z_n sur un continu de Jordan arbitraire L issu de a , contenu dans D , puisqu'un tel continu rencontre chaque coupure C_n au moins une fois pour n assez grand. Nous avons le théorème suivant, déjà établi par M. E. Lindelöf * [1, p. 28].

THÉORÈME. — *L'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ lorsque $z \rightarrow a$ sur un continu de Jordan quelconque L contenu dans D contient l'ensemble P des points principaux du bout $E(a)$ et se réduit à P si L est contenu dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$.*

18. *Remarques.* — *a.* L'ensemble des valeurs limites de $f(z)$ sur un continu L est toujours un continu, donc P est un continu.

b. Il n'est même pas nécessaire pour obtenir tous les points principaux, de prendre un continu L : Soit z_n une suite quelconque de points tendant vers a dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, telle que, si $\rho_n = |z_n - a|$, on ait : $\frac{\rho_n}{k} < \rho_{n+1} < \rho_n$ ($1 \leq k < \infty$) quel que soit n . Si α est un point principal quelconque, on peut trouver une suite z'_p tendant vers a dans l'angle $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ telle que $f(z'_p) \rightarrow \alpha$. Soit ρ_{np} le plus petit nombre de la suite ρ_n au moins égal à $\rho'_p = |z'_p - a|$. On aura $\rho_{np+1} < \rho'_p \leq \rho_{np}$.

On voit facilement que la longueur de l'image du segment $z'_p z_{np}$ tend vers zéro [en utilisant la limitation de $|f'(z)|$ du paragraphe 5], donc que $f(z_{np}) \rightarrow \alpha$ lorsque $p \rightarrow \infty$; α est donc un point d'accumulation de la suite $f(z_n)$.

THÉORÈME. — *L'ensemble P des points principaux du bout $E(a)$ est identique à l'ensemble des points limites de la suite $f(z_n)$, pour une suite quelconque z_n tendant vers a dans un angle d'approximation et telle que $\left| \frac{z_n - a}{z_{n+1} - a} \right|$ reste borné.*

COROLLAIRE. — *Si, en particulier, il existe une suite z_n de ce genre sur laquelle $f(z_n)$ ait pour limite unique α , $f(z)$ a même limite sur toute suite tendant vers a dans un angle d'approximation.*

On montrerait dans le même ordre d'idées que si $f(z_n) \rightarrow \alpha$ pour une suite $z_n = x_n + iy_n$ quelconque telle que $\frac{|z_{n+1} - z_n|}{x_n}$ reste borné, $f(z)$ a même limite α si $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation.

19. Signalons, à ce propos, quelques résultats plus généraux concernant les fonctions $f(z)$ supposées seulement holomorphes et bornées dans D au voisinage de $z = a$:

a. Par une méthode ingénieuse, mais un peu longue (qui devient rapide si on utilise la mesure conforme), M. E. Lindelöf *[1] a montré que s'il existe dans D un arc de Jordan L aboutissant en a sur lequel $f(z)$ a une seule limite α , $f(z)$ a même limite si $z \rightarrow a$ dans un angle d'approximation.

b. M. Montel *[1, p. 19] a donné de ce fait une démonstration élégante par sa méthode des familles normales. Mais il semble nécessaire de supposer que L est lui-même contenu dans un angle d'approximation. Par contre, sa méthode peut s'étendre facilement, et permet de remplacer le continu L par une suite de points z_n tendant vers a dans un angle $|\text{Arg}(z - a)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et telle que $\left| \frac{z_n - a}{z_{n+1} - a} \right| \rightarrow 1$; et même si α est une valeur exceptionnelle (ce qui est toujours le cas pour une fonction univalente) il suffit que $\left| \frac{z_n - a}{z_{n+1} - a} \right|$ reste borné.

L'intégrale de Cauchy permettrait de montrer qu'on peut remplacer L par une suite $z_n = x_n + iy_n$ telle que $\frac{|z_{n+1} - z_n|}{x_n} \rightarrow 0$.

Classification et répartition des bouts.

20. Si le bout $E(a)$ possède un point accessible α , c'est qu'il existe un arc de Jordan Λ contenu dans Δ aboutissant en α . Son image dans D est un arc de Jordan L aboutissant en a sur lequel $f(z)$ a pour limite unique α . De l'étude faite (§ 17) découle le

THÉORÈME (1). — Si le bout $E(a)$ possède un point accessible α , l'ensemble P des points principaux se réduit au point α , et $f(z)$ a pour limite unique α lorsque z tend vers a angulairement.

DÉFINITIONS. — Un bout premier ne peut donc avoir au plus qu'un point accessible α . S'il se réduit au point α , il est dit de *première espèce*. S'il possède d'autres points (points accessoires inaccessibles), il est dit de *deuxième espèce*.

(1) Au moment où je termine ce travail, M. Wolff me fait part d'une démonstration de ce théorème utilisant aussi l'intégrale (20), présentée à l'Académie d'Amsterdam le 31 janvier 1942.

Dans le cas le plus général, P est un continu de points inaccessibles; si E se réduit à P, le bout est dit de *troisième espèce*. S'il y a d'autres points (points accessoires inaccessibles), nous avons le type le plus général de bout, dit de *quatrième espèce*.

Les points accessoires β du bout sont des limites extrêmement rares de $f(z)$. D'une part si $f(z_n)$, pour une suite z_n donnée, n'a pour points limites que des points accessoires,

$$|\text{Arg}(z_n - a)| \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

D'autre part, la longueur de la courbe image du demi-cercle $c_{\rho_n, a}$ ($\rho_n = |z_n - a|$) reste supérieure à un nombre fixe, sans quoi on pourrait extraire de la suite z_n une suite partielle z_{n_p} telle que $\lambda(\rho_{n_p}, a) \rightarrow 0$, et de cette suite une autre suite partielle z_{n_q} sur laquelle $f(z_{n_q})$ ait pour limite un point principal α . Il résulte de la convergence de l'intégrale (20) que l'ensemble e des valeurs de ρ formé par toutes ces suites ρ_n est d'épaisseur logarithmique droite nulle au point $\rho = 0$.

Nous pouvons en déduire le corollaire suivant :

THÉORÈME. — Si $f(z)$ a pour limite unique α sur un ensemble de points z tel que les valeurs de $\rho = |z - a|$ couvrent une infinité d'intervalles disjoints $\rho_n \geq \rho \geq \rho'_n$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{\rho_n}{\rho'_n}$ étant divergente, α est un point principal.

L'énoncé reste valable si certains points z de l'ensemble considéré se trouvent sur la frontière de D : il faut alors supposer que les bouts qui les contiennent convergent vers α .

21. La convergence de l'intégrale (20) nous a montré que $\lambda(\rho, a)$ était finie excepté au plus pour un ensemble e de valeurs de ρ d'épaisseur logarithmique droite nulle au point $\rho = 0$. Or, si $\lambda(\rho, a) < \infty$, les points $i(t \pm \rho)$ de $y'y$ ont pour correspondants sur Γ deux bouts premiers ayant chacun un point accessible (et même accessible par un arc de Jordan rectifiable), donc de première ou deuxième espèce.

THÉORÈME. — L'ensemble A des points de $y'y$, ayant pour images des bouts premiers de Γ ne contenant aucun point accessible par un arc de Jordan rectifiable, est d'épaisseur logarithmique nulle en tout point : c'est-à-dire que l'intégrale $\int_A \frac{dy}{|y-t|}$ est nulle, quel que soit t fixé.

Rappelons (d'après les résultats du § 6) que cet ensemble A est de h -mesure nulle pour toute fonction $h(R)$ telle que

$$\int_0^R \frac{\sqrt{h(R)}}{R} dR < \infty.$$

22. *Limites de $f(z)$ sur des courbes de forme donnée.* — Le lemme de Cartan-Ahlfors nous permet de montrer que pour une h -plénitude de points $a = it$ de $y'y$

$$(21) \quad \frac{1}{h\left(\frac{3R}{2}\right)} \int_0^R \lambda^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } R \rightarrow 0,$$

[on ne suppose pas nécessairement que $\frac{h\left(\frac{3R}{2}\right)}{h(R)}$ soit borné].

Pour simplifier, on peut remplacer dans (21) $h\left(\frac{3R}{2}\right)$ par $h(2R)$ puisque $h(R)$ est croissante. Nous supposons, par contre, que $h(0) = 0$.

Soit $a = it$ un point non exceptionnel et L_t (fig. 2) la courbe d'équation polaire $\cos\theta = h(2\rho)$ décrite par le point

$$z = a + \rho e^{i\theta} = x + iy \quad \text{pour } 0 \leq \rho \leq \rho_0,$$

ρ_0 étant choisi assez petit pour que $h(2\rho_0) \leq 1$. L_t est formée de deux arcs symétriques par rapport à la droite $y = t$. Soit D_t le domaine limité par L_t et le cercle $|z - a| = \rho_0$ qui contient le segment $s(y = t, 0 < x < \rho_0)$. Désignons par $\lambda_t(\rho, a)$ la longueur de la courbe décrite par le point $\zeta = f(z)$ lorsque z décrit l'arc du cercle $|z - a| = \rho$ ($\rho < \rho_0$) contenu dans D_t . Considérons une autre valeur $\rho' < \rho$ et comparons $\lambda_t(\rho, a)$ et $\lambda_t(\rho', a)$

$$\lambda_t(\rho, a) = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho e^{i\theta})| \rho d\theta, \quad \lambda_t(\rho', a) = \int_{-\theta'_0}^{+\theta'_0} |f'(a + \rho' e^{i\theta})| \rho' d\theta,$$

on pose $\cos\theta_0 = h(\rho)$, $\cos\theta'_0 = h(\rho')$; $\rho' < \rho$ entraîne $\theta'_0 > \theta_0$.

Choisissons d'autre part

$$\rho' \geq \rho \left(1 - \frac{\cos\theta_0}{2}\right), \quad \text{c'est-à-dire } \rho' \geq \rho \left[1 - \frac{h(2\rho)}{2}\right].$$

D'après le théorème de Kœbe, on voit que si $|\theta| < \theta_0$, on a

$$\frac{f'(a + \rho' e^{i\theta})}{f'(a + \rho e^{i\theta})} > K,$$

d'où

$$\lambda_t(\rho', a) \geq \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} |f'(a + \rho' e^{i\theta})| \rho' d\theta \geq K \frac{\rho'}{\rho} \lambda_t(\rho, a) \geq \frac{K}{2} \lambda_t(\rho, a).$$

Nous allons montrer que $\lambda_t(\rho, a)$ tend vers zéro avec ρ .

Si on ne pourrait trouver une suite infinie $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \dots$ tendant vers zéro, telle que $\lambda_t(\rho_n, a)$ reste supérieure à un nombre fixe $\varepsilon > 0$. Soit

$$\rho'_n = \rho_n \left[1 - \frac{h(2\rho_n)}{2}\right];$$

on aurait

$$\int_{\rho'_n}^{\rho_n} \lambda_t^2(\rho, a) \frac{d\rho}{\rho} \geq \frac{K^2}{4} \times \varepsilon^2 \times \frac{h(2\rho_n)}{2},$$

ce qui est contraire à (21).

Soit alors $z_n = it + \rho_n e^{i\theta_n}$ une suite de points tendant vers $a = it$, contenue dans le domaine D_t . Posons $z''_n = it + \rho_n$. La longueur de l'image de l'arc du cercle $|z - a| = \rho_n$ joignant z_n à z''_n dans D_t tend vers zéro. Donc $f(z''_n) - f(z_n) \rightarrow 0$. Or les limites de la suite $f(z''_n)$, puisque z''_n tend vers a sur la droite $y = t$, ne peuvent être que des points principaux du bout $E(a)$.

Remarquons que la courbe L_t est une courbe quelconque convexe vers la gauche, tangente en a à l'axe $y'y$ et symétrique par rapport à la droite $y = t$. La fonction $h(R)$ détermine la forme des courbes L_t , et réciproquement; pour que le rapport $\frac{h(R)}{R}$ reste borné inférieurement lorsque $R \rightarrow 0$ (seul cas intéressant, voir § 3), il faut que la plus petite courbure de L_t au point a soit non nulle.

THÉORÈME. — *L'axe imaginaire contient une h-plénitude de points $a = it$ tels que $f(z)$ n'ait pour points limites que des points principaux de $E(a)$ lorsque z tend vers a dans le domaine D_t limité par la courbe L_t , convexe vers la gauche, d'équation polaire*

$$\cos \theta = h(2\rho) \quad (z = a + \rho e^{i\theta}).$$

En particulier si le bout premier $E(a)$ est de première ou deuxième espèce et possède un point accessible α , $f(z)$ tend vers α lorsque z tend vers a dans D_t .

Or nous savons justement qu'aux points a considérés, d'après le théorème fondamental,

$$(22) \quad f'(z) = o \left[\frac{\sqrt{h(\rho)}}{x} \right];$$

donc si

$$(23) \quad \int_0^{\rho_0} \sqrt{h(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} < \infty,$$

la longueur de l'image du segment s est finie, et le bout $E(a)$ possède un point α accessible par un arc de Jordan rectifiable.

23. COROLLAIRE. — *Si l'intégrale (23) est convergente, l'axe imaginaire contient une h-plénitude de points $a = it$ tels que $f(z)$ ait une limite unique α lorsque z tend vers a dans D_t .*

En particulier pour $h(R) = kR$ ($k > 0$ quelconque) nous retrouvons un théorème de M. Wolff*[1].

THÉORÈME. — *L'axe imaginaire contient une plénitude de points $a = it$ tels que $f(z)$ ait une limite unique α lorsque z tend vers a dans un cercle quelconque tangent en a à $y'y$.*

M. Denjoy *[2] avait démontré le résultat suivant : Pour tout point a d'une plénitude de l'axe imaginaire, les images des courbes $C_{\gamma,a}(|z-a|^\gamma = x, 1 \leq \gamma < 2)$ sont rectifiables.

Notre méthode directe, toujours fondée sur l'inégalité de Schwarz, permet de préciser ce qui se passe pour $\gamma = 2$.

THÉORÈME. — *L'axe imaginaire contient une plénitude de points a pour lesquels la longueur $l_k(\rho, \rho', a)$ de l'image d'un arc du cercle $|z-a|^2 = kx (k > 0$ quelconque) compris entre les cercles $|z-a| = \rho, |z-a| = \rho' (\rho' < \rho)$ satisfait à*

$$l_k(\rho, \rho', a) = o \left[\log \frac{\rho}{\rho'} \right].$$

Ces résultats sont beaucoup plus précis que ceux qu'on pourrait déduire de la limitation connue de $|f'(z)|$ (§ 5)

$$(24) \quad |f'(z)| = o \left[\frac{\sqrt{|z-a|}}{x} \right];$$

ils correspondent, en effet, non pas à une limitation de $|f'(z)|$, quantité qui peut osciller beaucoup sur une courbe C aboutissant en a , mais à une limitation de la *valeur moyenne* de $|f'(z)|^2$ sur la courbe C .

Malgré ces résultats plus précis, nous ne pouvons affirmer que les images des cercles $|z-a|^2 = kx$ aient une longueur finie pour une plénitude de points a . Le théorème de M. Wolff, qui nous montre que ces images sont des arcs de Jordan aboutissant en des points α déterminés (mais pas nécessairement rectifiables), semble difficile à améliorer.

Signification géométrique des résultats.

24. La limitation obtenue pour $|f'(z)|$ et celle qu'on en déduit par intégration

$$(25) \quad f(z) = o[\sqrt{z-a}],$$

valable dans un angle d'approximation pour une plénitude A_1 de points a de l'axe $y'y$, semblent suggérer l'existence, sur l'ensemble π_1 des points α accessibles correspondants de la frontière Γ de Δ , d'un angle d'accessibilité de sommet α intérieur à Δ et d'ouverture au moins égale à $\frac{\pi}{2}$. M. Denjoy *[3] a montré l'inexactitude de cette hypothèse en construisant des domaines n'admettant en aucun point frontière, excepté sur un ensemble dénombrable, d'angle d'accessibilité d'ouverture positive.

Nous montrerons cependant qu'il existe des arcs : $|\zeta - \alpha| = \rho, \theta' < \text{Arg}(\zeta - \alpha) < \theta''$ intérieurs à Δ , la différence $\theta'' - \theta'$ étant aussi voisine

de $\frac{\pi}{2}$ que l'on veut pourvu que ρ soit assez petit. Cette étude faisant appel à l'inégalité de M. Ahlfors sera développée seulement au Chapitre IV (§ 39).

Mais la question se pose alors de préciser l'importance de l'ensemble exceptionnel π sur Γ (correspondant à l'ensemble A de $y'y$ de mesure linéaire nulle). Il est facile de comprendre que l'on ne puisse rien dire sur π en général au point de vue métrique : si Γ a une aire positive, comme c'est possible, M. Denjoy ayant montré que π_1 a une aire nulle, π a une aire positive. *C'est donc le mécanisme de la représentation conforme qui fait correspondre à l'ensemble π d'aire positive un ensemble A de mesure linéaire nulle pouvant être considéré comme exceptionnel* : et cela justement parce qu'au voisinage des points considérés la dérivée de la fonction $\varphi(\zeta)$ inverse de $f(z)$ prend des valeurs infiniment petites d'un ordre convenable.

Par contre les propriétés topologiques se conservent dans la représentation conforme, à condition de prendre pour éléments des bouts premiers au lieu de points, et de modifier la notion de voisinage : ainsi l'ensemble π_1 de bouts premiers est partout dense sur Γ et possède la puissance du continu. Mais pour ce genre de propriétés l'étude directe semble préférable.

25. THÉORÈME. — *Il existe un ensemble π_2 partout dense (topologiquement) sur Γ en chaque point α duquel existe un cercle d'accessibilité γ , intérieur à Δ , dont la circonférence passe par α .*

Démonstration. — Soit E un bout premier quelconque de Γ . Un voisinage topologique de E est limité par une coupure q que nous pouvons supposer être un arc de cercle centré en un point principal quelconque de E ; q isole un domaine δ dont la frontière contient E . Soit γ l'un des cercles de plus grand rayon contenus dans δ . La circonférence de γ a au moins deux points communs avec la frontière de δ et ne la traverse pas. Ces points ne peuvent être tous les deux sur l'arc de cercle q (extrémités exclues) sans que la circonférence γ contienne l'arc q tout entier. Donc l'un au moins des deux points, soit α , est sur la frontière de Δ (α peut être l'une des extrémités de q) et le point α répond aux conditions.

CONSÉQUENCE. — *Pour tout point a de l'ensemble A_2 de $y'y$ correspondant à π_2 , $|f'(z)|$ est borné lorsque z tend vers a angulairement.*

En effet (voir Chap. III, lemme II, § 34), le domaine Δ contient un domaine valable qui est le cercle γ ayant même point frontière α . Le rapport $\left| \frac{\zeta - \alpha}{z - a} \right|$ reste borné dans les conditions de variation de z , d'où l'on déduit la propriété de $f'(z)$ au moyen de l'intégrale de Cauchy.

26. Supposons que la frontière Γ de Δ ne comporte que des bouts de première espèce (c'est-à-dire des points accessibles et pas de points accessoires),

ou, selon une définition de M. Denjoy (1), que Γ soit un *continu cyclique* (ce serait une courbe simple de Jordan si tous les points étaient simples au sens de M. Carathéodory). Alors, pour tout point α de Γ , tout point topologiquement voisin de α est voisin au sens ordinaire (défini par la métrique euclidienne). L'ensemble π_2 est partout dense sur Γ . Choisissons dans π_2 un ensemble dénombrable de points partout denses sur Γ , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ auxquels correspondent les cercles $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots$ de rayons $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$. Soit d'autre part $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro en décroissant. Pour chaque valeur de n , traçons le cercle C_n de centre α_n , de rayon $\varepsilon_n \rho_n$. De tout point α de Γ intérieur à C_n , on voit le cercle γ_n sous un angle au moins égal à $2\theta_n$ ($\sin \theta_n = \frac{1}{1 + \varepsilon_n}$). Si α est intérieur à une infinité de cercles C_n , on pourra trouver une infinité de cercles de la suite γ_n , intérieurs à Δ , et vus de α sous des angles tendant vers π . Il en résulte qu'au point α il existe une suite infinie de secteurs d'accessibilité S_p

$$\rho'_p < |\zeta - \alpha| < \rho''_p, \quad \theta'_p < \text{Arg}(\zeta - \alpha) < \theta''_p,$$

tels que

$$\rho''_p \rightarrow 0, \quad \frac{\rho'_p}{\rho''_p} \rightarrow 0, \quad \theta''_p - \theta'_p \rightarrow \pi.$$

C'est beaucoup plus qu'on ne peut affirmer aux points de l'ensemble π_1 . Or, l'ensemble des points de Γ intérieurs à une infinité de cercles C_n forme, d'après les définitions de M. Denjoy, un *résiduel* R de Γ .

THÉORÈME. — *Si Γ est un continu cyclique, il y a un résiduel de points α de Γ en chacun desquels existe une suite infinie de secteurs d'accessibilité S_p intérieurs à Δ .*

27. Pour terminer, démontrons une propriété géométrique des continus bornés Γ les plus généraux limitant un domaine simplement connexe Δ , se rattachant assez étroitement à nos considérations sur l'aire et précisant une observation de M. Denjoy (2).

THÉORÈME. — *Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ quelconque, il est possible de trouver sur Γ une chaîne fermée de points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (α_{n+1} étant confondu avec α_1), progressant sur Γ dans un sens invariable (déterminé par la représentation conforme de Δ sur D), et telle que l'on puisse joindre chaque couple de points consécutifs α_i, α_{i+1} par un arc de Jordan rectifiable Λ_i contenu dans Δ , de*

longueur l_i satisfaisant à $\sum_{i=1}^n l_i^2 < \varepsilon$.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 975.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1941, p. 976. M. Denjoy m'a signalé une démonstration directe de ce théorème faisant appel à la topologie.

Démonstration. — Δ peut contenir le point à l'infini, mais puisque Γ est borné, si l'on représente conformément sur Δ le demi-plan droit $D(x > 0)$ au moyen de la fonction $\zeta = f(z)$, $f(z)$ reste bornée au voisinage de l'axe $y'y$, donc à l'extérieur d'un segment de cercle K_0 défini par $x \geq x_0$, $|\zeta| \leq \rho_0$ (fig. 3).

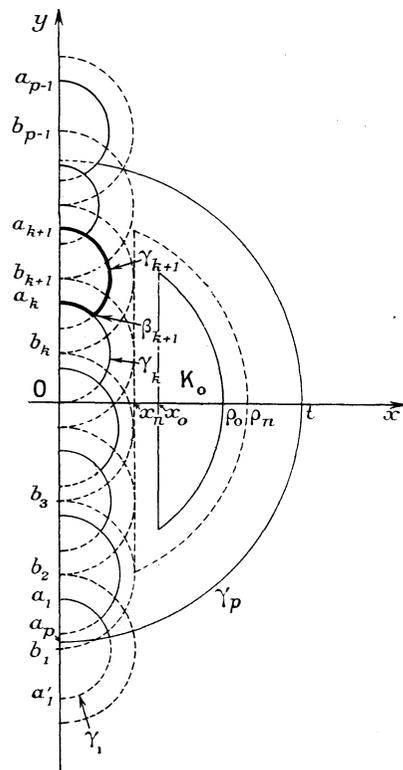


Fig. 3.

Soit de même K_n le segment de cercle ($x \geq x_n$, $|\zeta| \leq \rho_n$), x_n et ρ_n étant deux suites monotones positives ($x_n \rightarrow 0$, $\rho_n \rightarrow \infty$). L'aire S_n décrite par $f(z)$ lorsque z décrit le domaine ($K_n - K_0$) croît avec l'indice n , mais reste bornée, et tend vers une limite S lorsque $n \rightarrow \infty$. $S - S_n$ représente, selon une définition déjà donnée, la charge portée par le domaine $D_n = D - K_n$. Pour n assez grand (soit $n > N$), on aura $S - S_n < \frac{\varepsilon}{60}$. Soient $\mu(\rho_n, \infty)$ la charge portée par le domaine $C(|z| > \rho_n, x > 0)$ et $\lambda(\rho, \infty)$ la longueur de l'image du demi-cercle $|z| = \rho$ contenu dans D . L'inégalité de Schwarz montre que

$$\int_{\rho_n}^{\infty} \lambda^2(\rho, \infty) \frac{d\rho}{\rho} < \pi \mu(\rho_n, \infty).$$

Donc on peut trouver un nombre t $\rho_n \leq t \leq 2\rho_n$ tel que

$$\lambda^2(t, \infty) \leq \mu(\rho_n, \infty) \times \frac{\pi}{\log 2} < 5\mu(\rho_n, \infty),$$

t étant déterminé, on recouvre l'intervalle $(-it, +it)$ de $y'y$ d'intervalles égaux de longueur x_n , d'extrémités b_1, b_2, \dots, b_{p-1}

$$\left(\frac{b_1}{i} < -t, \frac{b_{p-1}}{i} > t\right).$$

En chaque point b_k on a, d'après (19),

$$\int_0^{x_n} \lambda^2(\rho, b_k) \frac{d\rho}{\rho} < \pi \mu(x_n, b_k),$$

$\mu(x_n, b_k)$ étant la charge portée par le domaine $C_k(|z - b_k| < x_n, x > 0)$ et $\lambda(\rho, b_k)$ la longueur de l'image du demi-cercle $|z - b_k| = \rho$ contenu dans D .

Donc, on peut trouver dans l'intervalle $\frac{x_n}{2} < \rho < x_n$ une valeur ρ_k telle que

$$\lambda^2(\rho_k, b_k) < \frac{\pi}{\log 2} \mu(x_n, b_k) < 5 \mu(x_n, b_k).$$

Soient $\gamma_k (1 \leq k \leq p-1)$ les demi-cercles $|z - b_k| = \rho_k, x > 0$, de diamètres $a'_k a_k$ portés par l'axe imaginaire ($a'_k = b_k - i\rho_k, a_k = b_k + i\rho_k$) et γ_p le demi-cercle $|z| = t, x > 0$, de diamètre $a'_p a_p$ ($a_p = -it, a'_p = +it$). Nous poserons $a_{p+1} = a_1, a'_{p+1} = a'_1, \gamma_{p+1} = \gamma_1$.

Deux demi-cercles consécutifs $\gamma_k, \gamma_{k+1} (1 \leq k \leq p)$ se coupent toujours en un point β_{k+1} . Soit L_k la coupure constituée par l'arc $\widehat{a_k \beta_{k+1}}$ de γ_k et l'arc $\widehat{\beta_{k+1} a_{k+1}}$ de γ_{k+1} ; la longueur l_k de son image Λ_k dans la représentation conforme satisfait à

$$l_k^2 < [\lambda(\rho_k, b_k) + \lambda(\rho_{k+1}, b_{k+1})]^2 < 2[\lambda^2(\rho_k, b_k) + \lambda^2(\rho_{k+1}, b_{k+1})],$$

$$\sum_{k=1}^p l_k^2 < 4 \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^2(\rho_k, b_k) + 4\lambda^2(t, \infty) < 20 \sum_{k=1}^{p-1} \mu(x_n, b_k) + 20 \mu(\rho_n, \infty).$$

Or, tout point du domaine D_n est au plus intérieur à la fois à deux demi-cercles $C_k (k \leq p-1)$ et à C . La somme des charges portées par ces domaines est donc au plus égale à $3\mu(D_n)$, c'est-à-dire à $3(S - S_n)$

$$\sum_{k=1}^p l_k^2 < 60(S - S_n) < \varepsilon.$$

Aux points a_1, a_2, \dots, a_p de $y'y$ correspondent des points accessibles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ de Γ répondant aux conditions puisque les images Λ_k des coupures L_k sont des arcs simples de Jordan rectifiables intérieurs à Δ .

(A suivre.)