RENÉ LAGRANGE

Définitions et théorèmes de métrique anallagmatique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 1-42
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DÉFINITIONS ET THÉORÈMES

DE

MÉTRIQUE ANALLAGMATIQUE

PAR M. RENÉ LAGRANGE.

Introduction.

En géométrie euclidienne, la droite peut être considérée comme le lieu des points communs aux plans d'un faisceau, et le point comme l'intersection des plans d'une famille linéaire double. De même en géométrie anallagmatique, on est conduit à considérer les intersections de familles linéaires, simple ou double, de sphères, ce qui introduit quatre éléments fondamentaux : le point, le cercle, la sphère et le couple de points ou *bipoint*.

Une autre remarque élémentaire guidera nos raisonnements; c'est que la distance de deux éléments (point, droite, plan) de la géométrie euclidienne est invariante pour le groupe des déplacements, mais n'est que covariante pour le groupe des similitudes. Celui-ci est le sous-groupe anallagmatique qui conserve les droites et les plans; et, dans ce sous-groupe, ce sont les rapports de deux distances, ou mesures relatives, qui sont invariants. Dans nos définitions de métrique anallagmatique, il sera donc naturel d'introduire des distances covariantes et des mesures (ou distances) invariantes. Seront covariantes les distances d'un point à une sphère, un cercle, ou un bipoint; seront invariantes les distances de deux quelconques des trois éléments vraiment fondamentaux : la sphère, le cercle et le bipoint.

On pourrait définir directement ces distances invariantes, mais la synthèse semble plus naturelle en définissant tout d'abord les distances covariantes. C'est ce que nous ferons.

En ce qui concerne les notations, il sera commode de désigner les points par des lettres romaines majuscules, les sphères par des lettres romaines minuscules grasses, les cercles par des lettres grecques minuscules, et les bipoints par des lettres grecques majuscules grasses. En combinant ces notations, on peut également désigner un bipoint par les deux lettres romaines majuscules qui représentent les deux points de ce bipoint, une sphère par les lettres romaines majuscules qui représentent quatre de ses points ou les lettres grecques majuscules qui représentent deux de ses bipoints, ou une lettre romaine majuscule et une lettre grecque minuscule correspondant à un poin et un cercle de cette sphère, etc.

Les deux premiers Chapitres sont consacrés aux définitions des distances covariantes et invariantes, ainsi qu'aux relations que l'on peut établir entre elles sur le modèle de la métrique euclidienne. Dans le Chapitre III, j'établis quelques théorèmes généraux relatifs aux champs cocycliques plans de bipoints, un champ cocyclique de bipoints étant un ensemble de bipoints tel que deux bipoints quelconques de l'ensemble soient cocycliques. Cette notion est naturelle car la distance de deux bipoints n'est unique et relativement simple que s'ils sont cocycliques. Les cercles d'un tel champ sont les cercles orthogonaux à une même sphère, ce qui conduit aux géométries classiques non euclidiennes, mais avec une métrique différente. Cette métrique, à laquelle nos conceptions initiales nous ont logiquement amenés, présente l'avantage de fournir des énoncés dont la similitude avec les théorèmes analogues de la géométrie euclidienne est bien remarquable. Le Chapitre IV, qui s'occupe des relations métriques dans la figure formée par trois cercles, confirme cette analogie et, par suite, l'intérêt que peut présenter la métrique à laquelle est consacré ce travail.

CHAPITRE I.

DISTANCES COVARIANTES.

1. En géométrie anallagmatique, on connaît un covariant métrique simple du couple point-sphère : c'est la *puissance réduite* du point par rapport à la sphère. Les observations faites dans l'Introduction nous conduisent à la dénommer *distance* (*anallagmatique*) *du point à la sphère*. A et **a** désignant ces deux éléments, la distance A**a** est donc

$$(1) \qquad \mathrm{A}\mathbf{a} = \frac{(\text{puissance A})_{\mathbf{a}}}{\text{diamètre de } \mathbf{a}}.$$

Voici une démonstration élémentaire de l'invariance anallagmatique du rapport $\left|\frac{\mathrm{A}\mathbf{a}}{\mathrm{B}\mathbf{b}}\right|$ des distances de A à deux sphères $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$. Si BC est un diamètre de la sphère $\mathbf{a}$, on a

$$\mathrm{A}\mathbf{a} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AB}.\mathrm{AC}\cos\widehat{\mathrm{BAC}}}{\mathrm{BC}}.$$

Effectuons une inversion de pôle O et puissance k; soient A′ et $\mathbf{a}'$ les homologues de A et $\mathbf{a}$. On a pu choisir B et C alignés avec O, de sorte que l'homologue B′C′ de BC est un diamètre de $\mathbf{a}'$; il vient alors

$$\mathrm{A}'\mathbf{a}' = \frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'.\mathrm{A}'\mathrm{C}'\cos\widehat{\mathrm{B}'\mathrm{A}'\mathrm{C}'}}{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}.$$

Les deux angles $\widehat{\mathrm{BAC}}$, $\widehat{\mathrm{B}'\mathrm{A}'\mathrm{C}'}$ sont égaux ou supplémentaires suivant que O est extérieur, ou non, à $\mathbf{a}$. D'autre part, on a

$$\frac{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}{\mathrm{AB}} = \frac{|k|}{\mathrm{OA}.\mathrm{OB}}, \qquad \frac{\mathrm{A}'\mathrm{C}'}{\mathrm{AC}} = \frac{|k|}{\mathrm{OA}.\mathrm{OC}}, \qquad \frac{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}{\mathrm{BC}} = \frac{|k|}{\mathrm{OB}.\mathrm{OC}},$$

donc

$$\frac{\mathrm{A}'\mathbf{a}'}{\mathrm{A}\mathbf{a}} = \frac{|k|\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{O}\mathbf{a}}{\overline{\mathrm{OA}}^2}. \tag{2}$$

La valeur absolue de ce rapport est indépendante de la sphère $\mathbf{a}$, d'où résulte l'invariance annoncée. D'une manière précise, on voit que, pour deux sphères $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ et leurs inverses $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, on a

$$\frac{\mathrm{A}'\mathbf{b}'}{\mathrm{A}'\mathbf{a}'} = \frac{\mathrm{A}\mathbf{b}}{\mathrm{A}\mathbf{a}} \times \mathrm{sgn}\,\frac{\mathrm{O}\mathbf{b}}{\mathrm{O}\mathbf{a}}. \tag{3}$$

Le rapport $\frac{\mathrm{A}\mathbf{b}}{\mathrm{A}\mathbf{a}}$ est donc algébriquement invariant pourvu que le pôle d'inversion soit simultanément intérieur, ou extérieur, aux deux sphères.

Lorsque $\mathbf{a}$ devient un plan, $|\mathrm{A}\mathbf{a}|$ devient la distance euclidienne de A à ce plan; on le voit en faisant tendre C vers l'infini, sans que bouge l'autre extrémité du diamètre BC aligné avec A. Le signe de la limite de $\mathrm{A}\mathbf{a}$ est indéterminé, ce qui est normal puisque A est intérieur ou extérieur à des sphères a qui diffèrent infiniment peu du plan.

Cette définition s'applique également à une sphère de centre réel et de rayon imaginaire pur, que nous appellerons *sphère imaginaire pure;* la distance $\mathrm{A}\mathbf{a}$ est alors imaginaire pure. On choisira la détermination $\mathrm{A}\mathbf{a} = |\mathrm{A}\mathbf{a}|\,.\,i$.

2. La *distance d'un point* A *à un cercle* β sera définie par un extremum de la distance de A aux sphères $\mathbf{b}$ qui passent par β, par analogie avec la définition de la distance euclidienne d'un point à une droite comme maximum de la distance du point aux plans qui passent par la droite.

La variation du covariant $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ s'étudie aisément en effectuant une inversion qui transforme β en une droite. $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ représente alors le carré de la distance de A aux plans $\mathbf{b}$ qui passent par β; il oscille donc entre le minimum nul qui correspond au plan $(A\beta)$, qui passe par A, et un maximum qui correspond au plan $\mathbf{b}_0$ orthogonal à $(A\beta)$. Il est donc tout indiqué d'appeler *distance* $A\beta$ *la distance de* A *à la sphère* $\mathbf{b}_0$ *qui est orthogonale à la sphère* $(A\beta)$. C'est encore *la distance de* A *à celle des sphères* $\mathbf{b}$ *pour laquelle* $\overline{A\mathbf{b}}^2$ *est maximum,* dans le cas réel.

La même figure où β est rectiligne nous permet d'énoncer le

THÉORÈME. — *Le carré de la distance d'un point à un cercle est la somme, constante, des carrés des distances de ce point à deux sphères orthogonales quelconques passant par ce cercle.*

Reprenons un vrai cercle β, et soit BC son diamètre situé dans le plan ABC normal au plan de β. $\overline{A\beta}^2$ est la somme des carrés des distances de A au plan de β et à la sphère de diamètre BC. Si h désigne la première de ces distances, on a donc

$$\overline{A\beta}^2 = h^2 + \frac{\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 \cos^2 \widehat{BAC}}{\overline{BC}^2},$$

et, par suite, grâce à l'égalité $AB.AC \sin \widehat{BAC} = h.BC$,

$$\overline{A\beta}^2 = \frac{\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2}{\overline{BC}^2};$$

par conséquent

$$|A\beta| = \frac{AB.AC}{BC} \tag{4}$$

n'est rien autre que ce que Bloch appelle la puissance réduite de A par rapport à β. Observons toutefois que notre définition de $A\beta$ est algébrique.

Si H désigne la projection de A sur le plan de β, de centre O et de rayon r, on a encore

$$\overline{A\beta}^2 = \overline{AH}^2 + \frac{\left(\overline{AO}^2 - r^2\right)^2}{4r^2} = \frac{\left(\overline{AO}^2 - r^2 + 2ir.AH\right)\left(\overline{AO}^2 - r^2 - 2ir.AH\right)}{4r^2},$$

ou, compte tenu de $\overline{AO}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$,

$$\overline{A\beta}^2 = \frac{\left[\overline{OH}^2 + (AH + ir)^2\right] \times \left[\overline{OH}^2 + (AH - ir)^2\right]}{4r^2}.$$

Les crochets au numérateur ne sont rien autre que les carrés des distances de A aux deux foyers F, F' du cercle β, ce qui donne l'expression simple

$$(5) \qquad |A\beta| = \frac{AF.AF'}{\text{diamètre}\,\beta} = \frac{AF.AF'}{|FF'|}.$$

Remarque. — Si β est un cercle imaginaire pur, c'est-à-dire un cercle de plan et centre réels, mais de rayon imaginaire pur, $|\overline{A\mathbf{b}}^2|$ est encore un extremum relatif pour la sphère $\mathbf{b}_0$ orthogonale à la sphère $(A\beta)$; celle-ci est réelle, donc $\mathbf{b}_0$ est une sphère de centre réel et de rayon imaginaire pur; $A\beta$ est imaginaire pur.

3. Sur la figure où β est rectiligne, si $\mathbf{b}$ est un plan quelconque passant par β, on voit que

$$\overline{A\mathbf{b}}^2 = \overline{A\mathbf{b}_0}^2 \cos^2\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{b}_0}.$$

On en déduit, lorsque β est un vrai cercle,

$$(6) \qquad A\mathbf{b} = A\beta \cos\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{b}_0},$$

où l'*angle* $\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{b}_0}$ *est l'angle de deux zones de* $\mathbf{b}$, *et* $\mathbf{b}_0$, *de frontière* β, *situées d'un même côté du plan de* β. Cette condition de validité algébrique de (6) résulte naturellement de la discontinuité algébrique de $A\mathbf{b}$ quand la sphère $\mathbf{b}$ passe par la forme plane. En valeur absolue, on peut se contenter d'écrire

$$|A\mathbf{b}| = |A\beta| \sin\widehat{\mathbf{b}, (A\beta)}.$$

4. Étant donné un point A et un bipoint $(BB') = \mathbf{B}$, *la distance* $A\mathbf{B}$ *est, par définition, la distance de* A *à celle des sphères* $\mathbf{b}$ *passant par* $\mathbf{B}$ *qui rend* $\overline{A\mathbf{b}}^2$ *maximum*. L'étude de la variation de $\overline{A\mathbf{b}}^2$ s'effectue immédiatement en rejetant B' à l'infini à l'aide d'une inversion. Les sphères $\mathbf{b}$ deviennent les plans passant par B, et $\overline{A\mathbf{b}}^2$ est maximum pour celui de ces plans qui est perpendiculaire à la droite AB. En revenant au cas général, on voit que $A\mathbf{B}$ *est la distance de* A *à la sphère* $\mathbf{b}_0$ *qui est orthogonale au cercle* $(A\mathbf{B})$. C'est encore la distance commune de A aux cercles de $\mathbf{b}_0$ qui passent par $\mathbf{B}$, ou, ce qui est équivalent, aux cercles qui coupent orthogonalement $(A\mathbf{B})$ suivant le bipoint $\mathbf{B}$.

La figure où B' est à l'infini met également en évidence le

THÉORÈME. — *Le carré de la distance d'un point* A *à un bipoint* $\mathbf{B}$ *est la somme, constante, des carrés des distances de* A *à trois sphères orthogonales quelconques passant par* $\mathbf{B}$, *ou à une sphère et un cercle orthogonaux passant par* $\mathbf{B}$.

Observons que l'un des cercles orthogonaux à $(\mathbf{AB})$ suivant $\mathbf{B}$ est le cercle de diamètre BB′, dont le plan est perpendiculaire au plan ABB′. Il résulte alors de (4) que

$$(7) \qquad |A(BB')| = \frac{AB.AB'}{|BB'|}.$$

Lorsque B et B′ sont deux points imaginaires conjugués, le bipoint (BB′) est dit imaginaire pur. On peut encore définir la distance A(BB′) par la distance de A à celle des sphères $\mathbf{b}$ qui est orthogonale au cercle (ABB′); elle est imaginaire pure. La formule (7) est encore valable. Enfin, la comparaison de (5) et (7) montre que les distances d'un point à un cercle et au bipoint focal de ce cercle sont égales en valeur absolue.

5. Lorsque B′ est à l'infini, la distance $|A(BB')|$ devient la distance euclidienne AB. Les cercles β et les sphères $\mathbf{b}$ qui passent par le bipoint deviennent les droites et plans passant par B, et les distances $|A\beta|$ et $|A\mathbf{b}|$ sont les distances euclidiennes à ces droites et plans. D'autre part, β étant sur $\mathbf{b}$, on a alors

$$\left|\frac{A\mathbf{b}}{AB}\right| = \sin\widehat{(AB), \mathbf{b}},$$

$$\left|\frac{A\mathbf{b}}{A\beta}\right| = \sin\widehat{(A\beta), \mathbf{b}},$$

$$\left|\frac{A\beta}{AB}\right| = \sin\widehat{(AB), \beta}.$$

L'invariance anallagmatique des angles et des rapports des valeurs absolues des distances donne donc, dans le cas général, les formules

$$(8) \qquad |A\mathbf{b}| = |A(BB')| \sin\widehat{(ABB'), \mathbf{b}} = |A\beta| \sin\widehat{(A\beta), \mathbf{b}},$$

$$(9) \qquad |A\beta| = |A(BB')| \sin\widehat{(ABB'), \beta}.$$

En particulier, on en déduit que

$$\sin\widehat{(ABB'), \mathbf{b}} = \sin\widehat{(A\beta), \mathbf{b}} \times \sin\widehat{(ABB'), \beta},$$

qui peut s'interpréter de la façon suivante : *étant donné deux cercles* β, β' *d'une sphère* $\mathbf{a}$, *et une sphère quelconque* $\mathbf{b}$ *passant par* β, *on a*

$$\sin\widehat{\mathbf{b}, \beta'} = \sin\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}} \times \sin\widehat{\beta, \beta'}.$$

Cette formule élémentaire est d'ailleurs évidente par inversion.

Remarque. — Considérons une droite β issue d'un point B, et un autre point A situé hors de cette droite. Si M est un point variable de β, le cercle (ABM) coupe la droite AM suivant un angle constant, égal à $\widehat{AB, \beta}$, et dont le sinus est égal au rapport des distances de A à β et à B. Par inversion, on est ramené au cas d'un cercle β et d'un bipoint (BB') de ce cercle. L'invariance anallagmatique du rapport des distances fournit alors le

THÉORÈME. — *Étant donné un point* A, *un cercle* β *et un bipoint* (BB') *de* β, *tout couple de cercles* (ABM), (AB'M) *qui se coupent sur* β *font un angle constant, dont le sinus est égal au rapport des distances absolues de* A *à* β *et au bipoint.*

CHAPITRE II.

DISTANCES INVARIANTES.

6. Comme nous l'avons déjà fait observer, les trois éléments fondamentaux d'une métrique anallagmatique sont la sphère, le cercle et le bipoint. Ce sont les distances relatives à deux de ces trois éléments que l'on peut définir de manière invariante.

Considérons tout d'abord un bipoint $\mathbf{A} = (AA')$ et une sphère $\mathbf{b}$. Le réseau des sphères qui passent par $\mathbf{A}$, et la sphère $\mathbf{b}$, sont orthogonales à une même sphère $\mathbf{c}$; l'inversion par rapport à $\mathbf{c}$ laisse invariants $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$, tout en permutant A et A'. Si $A\mathbf{b}$ est du signe de $A'\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ est réelle et $A\mathbf{c}.A'\mathbf{c} < 0$. Si le produit des distances $A\mathbf{b}$, $A'\mathbf{b}$ est négatif, $\mathbf{c}$ est une sphère imaginaire pure, et $A\mathbf{c}.A'\mathbf{c}$ est encore négatif. On a donc

$$\frac{A'\mathbf{b}}{A'\mathbf{c}} = \mp \frac{A\mathbf{b}}{A\mathbf{c}},$$

suivant que A et A' sont, ou non, du même côté de la sphère $\mathbf{b}$. Nous conviendrons de poser

$$\mathbf{Ab} = \sqrt{-\frac{A\mathbf{b}}{A\mathbf{c}} \times \frac{A'\mathbf{b}}{A'\mathbf{c}}}, \tag{1}$$

de sorte que cette distance $\mathbf{Ab}$ est positive, ou imaginaire pure, suivant que A et A' sont, ou non, du même côté de $\mathbf{b}$. Désignons par O et r le centre et le rayon de $\mathbf{c}$. On a $\overline{OA'} = \dfrac{r^2}{\overline{OA}}$, donc

$$\overline{AA'} = \overline{OA'} - \overline{OA} = \frac{r^2 - \overline{OA}^2}{\overline{OA}}.$$

Il en résulte que

$$A\mathbf{c} = \frac{\overline{OA}^2 - r^2}{2r} = \frac{\overline{OA}.\overline{A'A}}{2r};$$

de même

$$A'\mathbf{c} = \frac{\overline{OA'}.\overline{AA'}}{2r},$$

donc

$$\mathrm{Ac}.\mathrm{A'c} = -\frac{\overline{\mathrm{AA'}}^2}{4}.$$

On obtient ainsi l'expression remarquable

$$\mathbf{Ab} = \frac{2}{\mathrm{AA'}}\sqrt{\mathrm{A}\mathbf{b}.\mathrm{A'}\mathbf{b}}. \tag{2}$$

Lorsque **b** est un plan, A**b** et A'**b** sont les distances euclidiennes algébriques de A et A' à ce plan.

La définition (1) s'applique aussi bien aux cas où **b**, ou **A**, sont imaginaires purs. Si **b** est imaginaire pur, et **A** réel, A**b**.A'**b** est négatif et **Ab** est imaginaire pur. Si **b** est réel et **A** imaginaire pur, A**b**.A'**b** est positif, mais AA' est imaginaire pur, donc **Ab** est imaginaire pur. Si **A** et **b** sont imaginaires purs, le produit des puissances de A et A' par rapport à **b** est positif, donc A**b**.A'**b** est négatif, et **Ab** est réel.

7. *Distance de deux sphères.* — Étant donné deux sphères réelles **a**, **b**, les carrés des distances à **b** des bipoints **A** de **a** constituent un ensemble de nombres dont la borne inférieure est seule finie. Les deux sphères étant anallagmatiquement permutables, cette borne est une fonction symétrique de **a** et **b**. Nous définirons la distance **ab** des deux sphères **a** et **b** par

$$\mathbf{ab} = \sqrt{\text{borne inf}\,\overline{\mathbf{Ab}}^2}. \tag{3}$$

Si **a** et **b** ne se coupent pas, cette borne est positive et **ab** est positif; lorsqu'elles se coupent, cette borne est négative et **ab** est imaginaire pur; la tangence de **a** et **b** se traduit par $\mathbf{ab} = 0$.

Pour déterminer l'expression de cette borne inférieure, on peut admettre que **b** est un plan. Il vient alors

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 = \overline{(\mathrm{AA'})\mathbf{b}}^2 = 4\frac{\overline{\mathrm{AH}}.\overline{\mathrm{A'H'}}}{\overline{\mathrm{A'A}}^2},$$

où H, H' sont les projections orthogonales de A, A' sur ce plan **b**. Il est clair que la borne supérieure de cette expression est $+\infty$, et que le minimum ne peut correspondre qu'à deux points A, A' d'un plan diamétral de **a** perpendiculaire à **b**. On peut donc raisonner dans un tel plan. Soit OO' la hauteur abaissée de O sur **b**, avec $\overline{\mathrm{OO'}} = h$. Si AA' rencontre OO' en I, **b** en K, et fait l'angle φ avec **b**, on voit tout de suite que

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{KA}}.\overline{\mathrm{KA'}}}{r^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2\cos^2\varphi}\sin^2\varphi,$$

où r est le rayon de **a**. D'autre part,

$$\overline{\mathrm{KA}}.\overline{\mathrm{KA'}} = \overline{\mathrm{KO}}^2 - r^2 = \overline{\mathrm{KO'}}^2 + h^2 - r^2 = (h - \overline{\mathrm{OI}})^2 \cot^2\varphi + h^2 - r^2;$$

par suite

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 = \frac{(h^2 - r^2)\sin^2\varphi + (h - \overline{\mathrm{OI}})^2\cos^2\varphi}{r^2\sin^2\varphi + \left(r^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2\right)\cos^2\varphi},$$

en fonction des deux variables indépendantes φ et $\overline{\mathrm{OI}}$. C'est une fonction homographique de $\mathrm{tang}^2\varphi$, de discriminant

$$\Delta = -(r^2 - h.\overline{\mathrm{OI}})^2 \leqq 0.$$

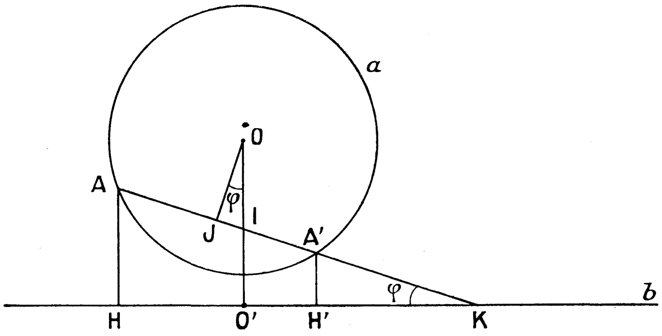

Fig. 1.

Si $\overline{\mathrm{OI}}^2 < r^2$, $\mathrm{tang}^2\varphi$ peut varier de 0 à $+\infty$, et $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ décroît alors de $\dfrac{(h - \overline{\mathrm{OI}})^2}{r^2 - \overline{\mathrm{OI}}^2} > 0$ à $\dfrac{h^2}{r^2} - 1$, I restant fixe. Si $\overline{\mathrm{OI}} > r^2$, $\mathrm{tang}^2\varphi$ ne peut varier que de $\dfrac{\overline{\mathrm{OI}}^2 - r^2}{r^2}$ à $+\infty$, et $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ décroît de $+\infty$ à $\dfrac{h^2}{r^2} - 1$. La borne inférieure de $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ est donc toujours $\dfrac{h^2}{r^2} - 1$. Observons que ce minimum s'obtient encore avec une valeur quelconque de φ lorsque le point I annule Δ, c'est-à-dire que $\overline{\mathrm{OI}} = \dfrac{r^2}{h}$; ceci exprime que AA′ passe par le pôle de **b** par rapport à **a**, autrement dit que le bipoint **A** est sur un cercle orthogonal à **a** et **b**.

Lorsque **a** et **b** se coupent, $\dfrac{h}{r}$ est le cosinus de leur angle d'intersection, donc

$$\mathbf{ab} = i \sin \widehat{\mathbf{a}.\mathbf{b}}. \tag{4}$$

L'orthogonalité se traduit par $\mathbf{ab} = i$, qui correspond au minimum de $\overline{\mathbf{ab}}^2$.

Dans le cas de deux vraies sphères **a**, **b**, de rayons r, r', et dont la distance des centres est d, on voit aisément que

$$\mathbf{ab} = \sqrt{\frac{(r^2 + r'^2 - d^2)^2}{4r^2r'^2} - 1}. \tag{5}$$

Si l'une des deux sphères est imaginaire pure, la distance **ab** fournie par (5) est imaginaire pure, de valeur absolue supérieure à 1; lorsque les deux sphères sont imaginaires pures, **ab** est positif.

8. Étant donné un bipoint **A** et une sphère **b**, si **a** désigne une sphère quelconque passant par **A**, on a

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 \geqq \overline{\mathbf{ab}}^2\,;$$

d'autre part, si **A'** est le bipoint d'intersection de **a** avec un cercle orthogonal commun à **a** et **b**, on sait que

$$\overline{\mathbf{ab}}^2 = \overline{\mathbf{A'b}}^2 \leqq \overline{\mathbf{Ab}}^2.$$

Or, on peut faire passer par **A** un cercle α orthogonal à **b**, et prendre pour **a** la sphère orthogonale à α. Pour cette sphère particulière, on a

$$\overline{\mathbf{A'b}}^2 = \overline{\mathbf{Ab}}^2.$$

On peut donc dire que *le carré de la distance d'une sphère* **b** *à un bipoint* **A** *est le maximum du carré de la distance de cette sphère* **b** *aux sphères qui passent par le bipoint. Ce maximum est atteint pour la sphère orthogonale au cercle mené par* **A**, *orthogonalement à* **b**.

Une inversion permet de supposer que $\mathbf{A} = (AA')$ a l'un de ses points, A', à l'infini. Si O est le centre de **b**, r son rayon, et si O se projette orthogonalement en H sur un plan **a** passant par A, on sait encore que

$$\overline{\mathbf{ab}}^2 = \frac{\overline{OH}^2}{r^2} - 1\,;$$

donc pour trois plans orthogonaux $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, on a

$$\overline{\mathbf{a}_1\mathbf{b}}^2 + \overline{\mathbf{a}_2\mathbf{b}}^2 + \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{b}}^2 = \frac{\overline{OA}^2}{r^2} - 3.$$

Le plan qui fournit **Ab** est ici le plan perpendiculaire à la droite OA, donc

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 = \frac{\overline{OA}^2}{r^2} - 1.$$

Dans le cas général, on a donc l'identité

$$\mathbf{Ab} = \sqrt{\overline{\mathbf{a}_1\mathbf{b}}^2 + \overline{\mathbf{a}_2\mathbf{b}}^2 + \overline{\mathbf{a}_3\mathbf{b}}^2 + 2}, \tag{6}$$

où $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ désignent trois sphères orthogonales quelconques passant par **A**.

9. *Distance d'un cercle et d'une sphère.* — Étant donné une sphère **a** et un cercle β, réels, considérons les sphères réelles **b** qui passent par β. Une

inversion permet d'admettre que β est une droite, de sorte que les $\mathbf{b}$ sont des plans. Les distances $\overline{\mathbf{ab}}^2$ forment un ensemble de nombres réels dont la borne inférieure est -1, valeur atteinte pour le plan $\mathbf{b}'_0$ qui est orthogonal à $\mathbf{a}$. C'est la *racine carrée de la borne supérieure* que nous appellerons distance $\mathbf{a}\beta$.

Désignons par h la distance du centre de $\mathbf{a}$ à la droite β, par φ l'angle du plan $\mathbf{b}$ avec le plan $\mathbf{b}'_0$, et soit r le rayon de $\mathbf{a}$. La distance du centre de $\mathbf{a}$ au plan $\mathbf{b}$ vaut $h\sin\varphi$, de sorte que

$$\overline{\mathbf{ab}}^2 = \frac{h^2}{r^2}\sin^2\varphi - 1.$$

Le maximum de $\overline{\mathbf{ab}}^2$ correspond donc au plan $\mathbf{b}_0$ perpendiculaire à $\mathbf{b}'_0$. On voit en outre que pour deux plans orthogonaux $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,

$$\overline{\mathbf{ab}}_1^2 + \overline{\mathbf{ab}}_2^2 = \frac{h^2}{r^2} - 2.$$

Dans le cas général, on voit donc que $\mathbf{a}\beta$ *est la distance de* $\mathbf{a}$ *à la sphère* $\mathbf{b}_0$ *qui coupe orthogonalement, suivant* β, *la sphère* $\mathbf{b}'_0$ *orthogonale à* $\mathbf{a}$. On a d'autre part

$$(7)\qquad \mathbf{a}\beta = \sqrt{\overline{\mathbf{ab}}_1^2 + \overline{\mathbf{ab}}_2^2 + 1},$$

où $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ désignent deux sphères orthogonales quelconques passant par β.

Il est clair que $\mathbf{a}\beta$ est positif s'il existe une sphère $\mathbf{b}$ ne coupant pas $\mathbf{a}$, c'est-à-dire quand β ne coupe pas $\mathbf{a}$. Si β coupe $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\beta$ est imaginaire pur. $\mathbf{a}\beta = i$ exprime que β est orthogonal à $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\beta = 0$ que β est tangent à $\mathbf{a}$.

Soit $\mathbf{B}$ un bipoint quelconque de β; $\overline{\mathbf{aB}}^2$ est le maximum des carrés des distances de $\mathbf{a}$ aux sphères passant par $\mathbf{B}$, dont l'ensemble contient les sphères passant par β. On a donc

$$\overline{\mathbf{aB}}^2 \geqq \overline{\mathbf{a}\beta}^2.$$

D'autre part, prenons pour $\mathbf{B}$ l'intersection de β avec un cercle γ orthogonal à $\mathbf{a}$ et β; soient $\mathbf{b}'_0$ la sphère $(\beta\gamma)$, et $\mathbf{b}_0$ la sphère menée par β orthogonalement à $\mathbf{b}'_0$. $\mathbf{b}_0$ est également orthogonale à γ. On sait alors que, pour ce bipoint particulier,

$$\overline{\mathbf{a}\beta}^2 = \overline{\mathbf{ab}}_0^2 = \overline{\mathbf{aB}}^2.$$

Il résulte de là que *le carré de la distance d'une sphère* $\mathbf{a}$ *à un cercle* β *est le minimum des carrés des distances de la sphère aux bipoints du cercle. Ce minimum est atteint pour l'intersection, avec* β, *d'un cercle perpendiculaire commun à* $\mathbf{a}$ *et* β.

Les définitions et expressions qui précèdent s'appliquent à une sphère et un cercle non nécessairement réels. Si β est imaginaire pur, tout bipoint $\mathbf{B}$

de β est imaginaire pur ([1]), donc $\overline{\mathbf{aB}}^2$, carré de la distance d'une sphère à un bipoint imaginaire pur, est négatif ou positif suivant que $\mathbf{a}$ est réel ou imaginaire. Si $\mathbf{a}$ est imaginaire pur, et β réel, $\mathbf{B}$ peut être réel, donc $\overline{\mathbf{aB}}^2$ peut prendre des valeurs négatives. On voit ainsi que $\mathbf{a}\beta$ est imaginaire pur lorsqu'un seul des deux éléments est imaginaire pur, et positive lorsqu'ils sont tous deux imaginaires purs.

Remarque. — La comparaison de (6) et (7) montre que

$$\mathbf{Ab} = \sqrt{\overline{\alpha\mathbf{b}}^2 + \overline{\mathbf{ab}}^2 + 1}, \tag{8}$$

où $\mathbf{a}$ et α désignent une sphère et un cercle orthogonaux, quelconques, passant par $\mathbf{A}$.

10. L'invariance anallagmatique du bipoint focal d'un cercle par rapport à ce cercle fait prévoir qu'il existe une relation entre les deux distances d'une sphère à un cercle et au bipoint focal de ce cercle.

Pour déterminer cette relation, supposons la sphère $\mathbf{a}$ réelle et réduite à un plan, et le cercle β réel; soit (FF') le bipoint focal de β, ρ son rayon, et soit θ l'angle de son plan avec le plan $\mathbf{a}$. $\overline{\mathbf{a}\beta}^2 - 1$ est la somme des carrés des distances de $\mathbf{a}$ au plan de β et à la sphère de grand cercle β. Si h désigne la distance du centre de β au plan $\mathbf{a}$, on a donc

$$\overline{\mathbf{a}\beta}^2 = -\sin^2\theta + \frac{h^2}{\rho^2}.$$

D'autre part,

$$\overline{\mathbf{a}(\mathrm{FF}')}^2 = \frac{4}{-4\rho^2}\mathrm{F}\mathbf{a}.\mathrm{F}'\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho^2}(h + i\rho\cos\theta)(h - i\rho\cos\theta) = -\frac{h^2}{\rho^2} - \cos^2\theta.$$

On voit ainsi que *la somme des carrés des distances d'une sphère à un cercle et au bipoint focal de ce cercle est égale à* -1. Ce théorème permet un calcul rapide de la distance d'une sphère à un cercle, vu la simplicité de la formule (2).

11. Considérons deux sphères réelles $\mathbf{a}, \mathbf{b}$; soient β un cercle réel quelconque de $\mathbf{b}$, et $\mathbf{b}_1$ la sphère orthogonale à $\mathbf{b}$ le long du cercle β. On sait que

$$\overline{\mathbf{a}\beta}^2 = \overline{\mathbf{ab}}^2 + \overline{\mathbf{ab}_1}^2 + 1.$$

$\mathbf{b}_1$ étant réel, $\overline{\mathbf{ab}_1}^2 + 1$ est supérieur ou égal à zéro, donc $\overline{\mathbf{a}\beta}^2 \geqq \overline{\mathbf{ab}}^2$. D'autre part, il existe une infinité de sphères réelles orthogonales à $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, et, pour

---

[1] On ne considère pas d'autre sorte de bipoints imaginaires.

l'intersection β d'une telle sphère avec $\mathbf{b}$, on a $\overline{\mathbf{a}\beta}^2 = \overline{\mathbf{ab}}^2$. Dans le domaine réel on a donc le

THÉORÈME. — *Le carré de la distance de deux sphères réelles est le minimum du carré de la distance de l'une de ces sphères aux cercles de l'autre. Ce minimum est atteint pour l'intersection par une sphère orthogonale commune.*

12. *Distances d'un bipoint à un cercle.* — Soient $\mathbf{A} = (\mathrm{AA}')$ le bipoint et β le cercle, supposés réels. Considérons les sphères $\mathbf{b}$ passant par β et l'ensemble des distances $\mathbf{Ab}$. On peut supposer que β est une droite, prise pour axe des z, et que l'on choisit, pour plans de coordonnées rectangulaires $x\mathrm{O}z$, $y\mathrm{O}z$, les plans bissecteurs du dièdre $\mathrm{A}\beta\mathrm{A}'$, d'ouverture 2θ. Désignons par H, H′ les projections orthogonales de A, A′ sur le plan $x\mathrm{O}y$. Le plan courant $\mathbf{b}$ étant représenté par l'équation $x \sin\varphi - y\cos\varphi = 0$, on a évidemment

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 = \frac{4}{\overline{\mathrm{AA}'}^2}\,\overline{\mathrm{H}\mathbf{b}}.\overline{\mathrm{H}'\mathbf{b}} = \frac{4}{\overline{\mathrm{AA}'}^2}\,\mathrm{OH}\sin(\varphi-\theta)\times\mathrm{OH}'\sin(\varphi+\theta)$$
$$= \frac{2\,\mathrm{OH.OH}'}{\overline{\mathrm{AA}'}^2}(\cos 2\theta - \cos 2\varphi).$$

$\overline{\mathbf{Ab}}^2$ oscille donc entre le maximum

$$4\,\frac{\mathrm{OH.OH}'}{\overline{\mathrm{AA}'}^2}\cos^2\theta \geqq 0$$

et le minimum

$$-4\,\frac{\mathrm{OH.OH}'}{\overline{\mathrm{AA}'}^2}\sin^2\theta \leqq 0.$$

L'existence de ces deux bornes correspond à ce qui se produit pour la définition de la distance de deux droites de la géométrie cayléienne. Elle ne permet pas de définir une distance unique de manière satisfaisante. On pourrait appeler *distance* $\mathbf{A}\beta$ la racine carrée de la borne de $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ qui a la plus grande valeur absolue, et *écart sphérique* la racine carrée de l'autre borne, cette dénomination étant suggérée par la remarque qu'il faut et il suffit que l'une de ces deux bornes soit nulle pour que $\mathbf{A}$ et β soient cosphériques (¹). Pour les applications que nous avons en vue, il nous suffira de considérer ce dernier cas; nous conviendrons donc d'appeler *distance d'un bipoint* $\mathbf{A}$ *et d'un cercle* β *cosphériques la racine carrée de la borne non nulle des carrés des distances de* $\mathbf{A}$ *aux sphères qui passent par* β.

Dans la figure considérée, $\theta = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ suivant que A, A′ sont, ou non, du même côté de $\mathrm{O}z$: $\overline{\mathbf{Ab}}$ est nul pour $\varphi = 0$ dans le premier cas, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dans

(¹) Sauf le cas banal où $\mathbf{A}$ a l'un de ses points sur β, pour lequel $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ est identiquement nul.

l'autre, c'est-à-dire pour le plan $(\mathbf{A}\beta)$. L'autre borne correspond au plan perpendiculaire. On voit d'ailleurs que, si $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ sont deux tels plans orthogonaux quelconques,

$$\overline{\mathbf{Ab}}_1^2 + \overline{\mathbf{Ab}}_2^2 = 4\frac{\mathrm{OH.OH'}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2}\cos 2\theta = \pm 4\frac{\mathrm{OH.OH'}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2} = \overline{\mathbf{A}\beta}^2.$$

Donc *le carré de la distance d'un bipoint et d'un cercle cosphériques est la somme des carrés des distances de ce bipoint à deux sphères orthogonales quelconques passant par le cercle. En particulier,* $\mathbf{A}\beta$ *est la distance de* $\mathbf{A}$ *à la sphère passant par* β *et orthogonale à la sphère* $(\mathbf{A}\beta)$.

Cette distance est positive, ou imaginaire pure.

L'expression obtenue est encore valable lorsque $\mathbf{A}$, ou β est imaginaire pur. Dans tous les cas, l'axe de β et le plan médiateur de $\mathbf{A}$ sont réels, donc le centre de la sphère $(\mathbf{A}\beta)$ est réel. Cette sphère est elle-même réelle si un seul des deux éléments est imaginaire. La sphère orthogonale le long de β est alors réelle ou imaginaire pure en même temps que β. Par conséquent, $\mathbf{A}\beta$ est imaginaire pur lorsqu'un seul des deux éléments est imaginaire pur. Il peut être réel ou imaginaire pur lorsque $\mathbf{A}$ et β sont imaginaires purs.

13. Étant donné un bipoint $\mathbf{A}$ et une sphère $\mathbf{b}$, soit β un cercle de $\mathbf{b}$ cosphérique avec $\mathbf{A}$; soit $\mathbf{b}'$ la sphère orthogonale à $\mathbf{b}$ le long de β. Il résulte de ce qui précède, et de l'observation que $\mathbf{Ab}$, $\mathbf{Ab}'$ et $\mathbf{A}\beta$ sont simultanément réels ou imaginaires purs, que

$$|\mathbf{A}\beta|^2 = |\mathbf{Ab}|^2 + |\mathbf{Ab}'|^2 \geq |\mathbf{Ab}|^2,$$

l'égalité valant si l'on choisit pour β l'intersection de $\mathbf{b}$ par la sphère orthogonale menée par $\mathbf{A}$. On voit ainsi que la valeur absolue de la distance d'un bipoint $\mathbf{A}$ à une sphère $\mathbf{b}$ est le minimum de la valeur absolue de la distance de $\mathbf{A}$ aux cercles de $\mathbf{b}$ cosphériques avec $\mathbf{A}$.

14. *Distances de deux bipoints.* — Pour définir la distance anallagmatique de deux bipoints $\mathbf{A} = (\mathrm{AA'})$ et $\mathbf{B} = (\mathrm{BB'})$, considérons l'ensemble des distances de $\mathbf{A}$ aux sphères $\mathbf{b}$ qui passent par $\mathbf{B}$. Si l'on définit la distance $\mathbf{AB}$ à l'aide de cet ensemble, une question préalable de symétrie se pose, à laquelle répond le théorème : *Deux vrais bipoints sont toujours anallagmatiquement permutables.*

Il suffit de raisonner sur deux bipoints réels. La sphère $(\mathbf{AB})$ doit être invariante dans l'anallagmatie cherchée, et on peut la supposer plane, grâce à une inversion préalable. On peut même supposer que B est à l'infini. Il suffit donc de trouver, dans le plan AA′B′, une inversion, et un déplacement ou une symétrie par rapport à une droite, grâce à quoi A′ est permuté avec B′ et A avec l'infini. L'inversion seule modifiant l'infini, son pôle doit être en A.

Le déplacement ou la symétrie devant conserver A, il ne peut s'agir que d'une rotation de centre A ou d'une symétrie dont l'axe passe par A. Ces deux transformations conservent la distance euclidienne à A. Il faut donc que les inverses A'_1 et B'_1 de A′ et B′ soient tels que l'on ait $AB'_1 = AA'$ et $AA'_1 = AB'$; pour cela, il faut et il suffit que la puissance d'inversion vaille $\pm AA'.AB'$. On voit alors tout de suite qu'il suffit d'associer à cette inversion la symétrie par rapport à une bissectrice convenable de l'angle A′AB′, et notre proposition est démontrée.

Pour étudier l'ensemble des distances $\overline{\mathbf{Ab}}^2$, supposons que B′ soit à l'infini, de sorte que **b** est le plan courant passant par B. Désignons par β la trace de ce plan sur le plan (AA′B), par H et H′ les projections orthogonales de A et A′ sur β, et par θ l'angle des deux plans **b**, (AA′B). Il vient alors

$$\overline{\mathbf{Ab}}^2 = \frac{4}{\overline{AA'}^2}\,\mathbf{Ab}.\mathbf{A'b} = \frac{4}{\overline{AA'}^2}\,\overline{AH}.\overline{A'H'}\sin^2\theta.$$

Pour une même trace β, $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ oscille entre zéro et $\frac{4}{\overline{AA'}^2}\overline{AH}.\overline{A'H'}$, qui correspond au plan perpendiculaire à (AA′B); les bornes de l'ensemble de tous les $\overline{\mathbf{Ab}}^2$ sont les mêmes que pour ces plans **b** particuliers, c'est-à-dire pour les plans qui passent par la droite β_0 perpendiculaire à (AA′B) en B. Nous sommes ainsi ramenés au problème traité au paragraphe 12. Il y a deux bornes, donc *a priori deux distances*; on peut réserver le nom de *distance* à la racine carrée de celle des deux bornes qui a la plus grande valeur absolue, et d'*écart cyclique* à la racine carrée de l'autre borne. Pour que cet écart soit nul, il est en effet nécessaire et suffisant que A, A′, β_0 soient coplanaires dans notre figure, c'est-à-dire A, A′, B en ligne droite; l'autre borne est alors fournie par le plan **b** perpendiculaire à cette droite. Dans le cas de deux bipoints à distance finie, l'écart cyclique est nul pourvu que ces deux bipoints soient cocycliques. C'est d'ailleurs ce cas qui nous intéresse, et nous pouvons adopter la définition suivante : *La distance de deux bipoints cocycliques* **A**, **B** *est la racine carrée de la borne non nulle des carrés des distances de* **A** (*ou* **B**) *aux sphères qui passent par* **B** (*ou* **A**). *C'est encore la distance de* **A** *à la sphère* $\mathbf{b}_0$ *orthogonale au cercle* (**AB**) *suivant le bipoint* **B**.

Cette distance est positive ou imaginaire pure suivant que A et A′ sont, ou non, du même côté de $\mathbf{b}_0$, c'est-à-dire suivant que les deux arcs de cercle AA′, BB′ ne sont pas, ou sont, empiétants.

15. B′ étant toujours à l'infini, et AA′B en ligne droite, soit $\mathbf{b}_1$ un plan quelconque passant par B, et faisant l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta_1$ avec (BAA′). On voit immédiatement que

$$\overline{\mathbf{Ab}_1}^2 = 4\,\frac{\overline{AB}.\overline{A'B}}{\overline{AA'}^2}\cos^2\theta_1,$$

tandis que

$$\overline{\mathbf{AB}}^2 = 4\,\frac{\overline{\mathrm{AB}}.\overline{\mathrm{A'B}}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2}.$$

Par conséquent, pour trois plans $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ orthogonaux deux à deux, on a

$$\overline{\mathbf{Ab}}_1^2 + \overline{\mathbf{Ab}}_2^2 + \overline{\mathbf{Ab}}_3^2 = \overline{\mathbf{AB}}^2,$$

d'où le

Théorème. — *Le carré de la distance de deux bipoints cocycliques est la somme des carrés des distances de l'un de ces bipoints à trois sphères orthogonales quelconques passant par l'autre. C'est encore la somme des carrés des distances de l'un de ces bipoints à une sphère et un cercle orthogonaux, passant par l'autre.*

Pour terminer, voici une expression remarquable de la distance de deux bipoints cocycliques $(\mathrm{AA'})$, $(\mathrm{BB'})$. Soit $\mathbf{b}_0$ la sphère passant par B, B′ et orthogonale au cercle $(\mathrm{AA'BB'})$. On voit successivement que

$$\overline{(\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})}^2 = \overline{(\mathrm{AA'})\mathbf{b}_0}^2 = \frac{4}{\overline{\mathrm{AA'}}^2}\,\mathrm{A}\mathbf{b}_0.\mathrm{A'}\mathbf{b}_0 = \frac{4}{\overline{\mathrm{AA'}}^2}\,\mathrm{A}(\mathrm{BB'}).\mathrm{A'}(\mathrm{BB'})$$
$$= \pm 4\,\frac{\mathrm{AB}.\mathrm{AB'}.\mathrm{A'B}.\mathrm{A'B'}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2.\overline{\mathrm{BB'}}^2},$$

donc

$$(9)\qquad |(\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'})| = 2\,\frac{\sqrt{\mathrm{AB}.\mathrm{AB'}.\mathrm{A'B}.\mathrm{A'B'}}}{\mathrm{AA'}.\mathrm{BB'}}.$$

Algébriquement, on voit immédiatement que

$$(10)\qquad (\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'}) = \frac{2}{\mathrm{AA'}}\sqrt{\mathrm{A}(\mathrm{BB'}).\mathrm{A'}(\mathrm{BB'})}.$$

En particulier, lorsque A′ va à l'infini, on a

$$(10')\qquad (\mathrm{A}\infty)(\mathrm{BB'}) = \frac{2}{\mathrm{BB'}}\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}.\overline{\mathrm{AB'}}}.$$

16. L'invariance anallagmatique de l'expression au second membre de (9) est indépendante du cocyclisme des deux bipoints. La vérification en est immédiate. En outre, sa valeur est liée de manière remarquable aux deux distances anallagmatiques des deux bipoints. Pour établir cette relation, on peut supposer que **A** a les coordonnées cartésiennes rectangulaires $(\pm a, 0, 0)$ et que les deux éléments de **B** sont $\mathrm{B'} = \infty$ et $\mathrm{B}(x_0, y_0, 0)$. L'équation d'une sphère **a** passant par **A** est

$$(\mathbf{a})\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda y - 2\mu z - a^2 = 0,$$

donc

$$\overline{\mathbf{Ba}}^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2\lambda y_0 - a^2}{\lambda^2 + \mu^2 + a^2}.$$

Les valeurs extrémales correspondent à $\mu = 0$ et

$$y_0(\lambda^2 + a^2) + \lambda(x_0^2 + y_0^2 - 2\lambda y_0 - a^2) = 0,$$

et sont alors déterminées par la valeur de

$$\delta^2 = -\frac{y_0}{\lambda}.$$

L'équation en δ^2 est

$$a^2\delta^4 - (x_0^2 + y_0^2 - a^2)\delta^2 - y_0^2 = 0,$$

de sorte que les carrés des deux distances anallagmatiques sont

$$(11) \qquad \begin{aligned} \delta^2 &= \frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2 \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^2 + 4a^2y_0^2}}{2a^2} \\ &= \frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2 \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + a^2)^2 - 4a^2x_0^2}}{2a^2} \\ &= \frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2 \pm \mathrm{AB}.\mathrm{A'B}}{2a^2}. \end{aligned}$$

Leur différence vaut donc $\dfrac{\mathrm{AB}.\mathrm{A'B}}{a^2} = 4\,\dfrac{\mathrm{AB}.\mathrm{A'B}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2}$, et sa comparaison avec le second membre de (10′) montre que, dans le cas général, *la différence des carrés des deux distances anallagmatiques de deux bipoints* (AA′), (BB′) *est égale à* $4\,\dfrac{\mathrm{AB}.\mathrm{AB'}.\mathrm{A'B}.\mathrm{A'B'}}{\overline{\mathrm{AA'}}^2.\overline{\mathrm{BB'}}^2}$.

Pour qu'une des deux distances soit nulle, il faut et il suffit que y_0 soit nul, c'est-à-dire que A, A′, B soient alignés; on retrouve ainsi la condition de cocyclisme. Le théorème que nous venons d'établir se réduit alors à (9).

17. En changeant a en ia, on peut considérer **A** comme le bipoint focal du cercle α, d'équations

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale d'une sphère **a** passant par α est

$$(\mathbf{a}) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - a^2 = 0,$$

de sorte que

$$\overline{\mathbf{Ba}}^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - 2\lambda x_0 - a^2}{\lambda^2 + a^2}.$$

C'est l'expression de même nom du paragraphe précédent, où l'on fait $\mu = 0$ et où l'on permute x_0 et y_0. Les deux distances anallagmatiques δ' de **B** à α sont donc données par

$$(11') \qquad \delta'^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 - a^2 \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + a^2)^2 - 4a^2y_0^2}}{2a^2}.$$

D'autre part, l'expression (11), où l'on change a en ia, donne ici

$$\delta^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2 + a^2 \pm \sqrt{(x_0^2 + y_0^2 + a^2)^2 - 4a^2 y_0^2}}{-2a^2}.$$

La comparaison avec (11′) montre que *les carrés des deux distances d'un bipoint à un cercle et au bipoint focal de ce cercle ont, chacun à chacun, leur somme égale à* -1.

On en déduit, comme corollaire, que *les deux distances d'un bipoint* **A** *et d'un cercle* β *sont égales à celles du bipoint focal de* β *et du cercle dont* **A** *est le bipoint focal.*

18. *Perpendiculaires et obliques.* — Étant donné un bipoint **A** et une sphère **a**, appelons *hauteur* le cercle β généralement unique passant par **A** et orthogonal à **a**, et *pied de la hauteur* le bipoint **B** d'intersection de **a** et β. **A** et **B** étant cocycliques, et **a** et β étant orthogonaux, la longueur **AB** de la hauteur n'est rien autre que la distance **Aa**. Tout autre cercle β_1 passant par **A** coupe **a** suivant un bipoint $\mathbf{B}_1$; le cercle γ orthogonal à **a** et passant par $\mathbf{B}_1$ ne passe par aucun point de **A**, et l'on a

$$\overline{\mathbf{AB}_1}^2 = \overline{\mathbf{Aa}}^2 + \overline{\mathbf{A}\gamma}^2.$$

En observant que les deux termes au second membre sont simultanément positifs ou négatifs, suivant que A et A′ sont, ou non, du même côté de **a**, on en déduit

$$|\mathbf{AB}_1| > |\mathbf{AB}|.$$

En appelant *obliques* les cercles tels que β_1, on peut donc dire que *toute oblique abaissée de* **A** *sur* **a** *a une longueur supérieure à la hauteur, en valeur absolue*. Ces deux longueurs sont simultanément positives ou imaginaires pures suivant que A et A′ sont, ou non, du même côté de **a**.

Considérons de même un bipoint **A** et un cercle α, cosphériques. Appelons *hauteur* le cercle β, généralement unique, passant par **A** et coupant α orthogonalement, et *oblique* tout autre cercle β_1 passant par **A** et rencontrant α. Soient **B** et $\mathbf{B}_1$ les *pieds* de ces hauteur et oblique. Si $\mathbf{b}_1$ est la sphère orthogonale à α en $\mathbf{B}_1$, on voit comme pour la sphère **a** que

$$|\mathbf{AB}_1|^2 = |\mathbf{A}\alpha|^2 + |\mathbf{Ab}_1|^2 > |\mathbf{A}\alpha|^2 = |\mathbf{AB}|^2,$$

c'est-à-dire que *toute oblique est plus longue que la hauteur, en valeur absolue.*

Le rapport de ces deux longueurs s'évalue aisément. En supposant A′ à l'infini, β est le diamètre ABB′, et β_1 toute autre droite AB_1B_1'. Il vient alors

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AB}_1} = \frac{\sqrt{\overline{AB}.\overline{AB'}}}{BB'} : \frac{\sqrt{\overline{AB_1}.\overline{AB'_1}}}{B_1B'_1} = \frac{B_1B'_1}{BB'} = \sin\widehat{\mathbf{a},\beta_1} \quad \text{ou} \quad \sin\widehat{\alpha,\beta_1},$$

d'où résultent les formules

$$(12)\qquad \mathbf{AB}_1 = \frac{\mathbf{Aa}}{\sin \widehat{\mathbf{a}, \beta_1}} \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{A}\alpha}{\sin \widehat{\alpha, \beta_1}}.$$

D'autre part,

$$|\mathbf{BB}_1| = \frac{2}{BB'.B_1B'_1}\sqrt{BB_1.BB'_1.B'B_1.B'B'_1}$$

donne, grâce aux égalités de la forme

$$B_1B.B_1B' = BB'.AB_1 \sin \widehat{\beta, \beta_1},$$

$$|\mathbf{BB}_1| = 2\frac{\sqrt{AB_1.AB'_1}}{B_1B'_1}\sin \widehat{\beta, \beta_1} = |\mathbf{AB}_1| \sin \widehat{\beta, \beta_1}.$$

On en déduit, en grandeur et signe, les formules

$$(13)\qquad \mathbf{BB}_1 = \mathbf{AB}_1 \sin \widehat{\beta, \beta_1} = \begin{cases} \mathbf{Aa}\,\dfrac{\sin \widehat{\beta, \beta_1}}{\sin \widehat{\mathbf{a}, \beta_1}}, \\ \mathbf{A}\alpha\,\dfrac{\sin \widehat{\beta, \beta_1}}{\sin \widehat{\alpha, \beta_1}}, \end{cases}$$

tout à fait semblables aux relations homologues de la géométrie euclidienne.

Les relations d'inégalité disparaissent lorsque **A** est invariant dans une inversion qui conserve **a** ou α. Tout cercle passant par **A** est alors hauteur et toutes les hauteurs sont égales.

19. *Distances de deux cercles.* — Étant donnés deux cercles α, β, réels, considérons les sphères **a**, **b** qui passent respectivement par eux, et l'ensemble des valeurs de $\overline{\mathbf{ab}}^2$. Sa borne inférieure est -1, et est effectivement atteinte pour l'infinité de couples de sphères orthogonales. On pourrait appeler distance $\alpha\,\beta$ la racine carrée de la borne supérieure des $\overline{\mathbf{ab}}^2$, mais on obtient ainsi la longueur d'une hauteur commune, autrement dit la distance des deux bipoints d'intersection de α, β, avec un cercle perpendiculaire commun, et il est illogique de distinguer l'une de ces hauteurs de l'autre, surtout lorsqu'elles sont toutes les deux réelles. Étudions donc, d'une manière générale, les valeurs extrémales de la fonction de deux variables indépendantes qui représente $\overline{\mathbf{ab}}^2$.

On sait que deux cercles réels ont en général deux cercles perpendiculaires communs, dont l'un au moins est réel. Une inversion permet donc de supposer que α et un cercle perpendiculaire commun γ_0 sont rectilignes; prenant α pour axe des z, γ_0 pour axe des x, on construit un système de coordonnées cartésiennes réelles, par rapport auquel les équations de β sont de la forme

$$(\beta)\qquad \begin{cases} y\cos\theta - z\sin\theta = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + p = 0. \end{cases}$$

Les équations de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont de la forme

$$(\mathbf{a})\qquad x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

$$(\mathbf{b})\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2\lambda(y\cos\theta - z\sin\theta) + p = 0,$$

de sorte que

$$\overline{\mathbf{ab}}^2 = \frac{(m\sin\varphi - \lambda\cos\theta\cos\varphi)^2}{\lambda^2 + m^2 - p} - 1.$$

Les valeurs extrémales de $\overline{\mathbf{ab}}^2$ sont données par

$$m\sin\varphi - \lambda\cos\theta\cos\varphi = 0,$$

qui correspond à la borne inférieure -1, et par le système d'équations en λ, φ

$$(14)\qquad \begin{cases} m\cos\varphi + \lambda\cos\theta\sin\varphi = 0, \\ (m^2 - p)\cos\theta\cos\varphi + \lambda m\sin\varphi = 0. \end{cases}$$

Les solutions de ce système, sont en général, $\cos\varphi = \lambda = 0$ et $\lambda = \infty$, $\sin\varphi = 0$. La première solution donne

$$\overline{\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0}^2 = \frac{m^2}{m^2 - p} - 1,$$

et correspond au plan $yoz = \mathbf{a}_0$ et à la sphère $\mathbf{b}_0$ de grand cercle β; la distance trouvée est celle d'une hauteur commune à $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$, donc de γ_0. L'autre solution correspond au plan $\mathbf{a}'_0 = xoz$ et au plan $\mathbf{b}'_0$ du cercle β, et l'on a

$$\overline{\mathbf{a}'_0\mathbf{b}'_0}^2 = -\sin^2\theta.$$

De même que γ_0 est l'intersection de $\mathbf{a}'_0$, $\mathbf{b}'_0$, de même l'intersection γ'_0 de $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ est une perpendiculaire commune de $\mathbf{a}'_0$, $\mathbf{b}'_0$, également perpendiculaire commune de α, β, et sa longueur vaut $i\sin\theta$. Les valeurs extrémales trouvées pour $\overline{\mathbf{ab}}^2$ sont donc les carrés des longueurs des deux hauteurs communes. Nous appellerons donc *distances anallagmatiques de deux cercles les longueurs de leurs deux hauteurs communes, ou les racines carrées des valeurs extrémales, autres que la borne inférieure fixe* -1, *du carré de la distance des deux sphères variables qui passent respectivement par ces deux cercles.*

Pour que les deux hauteurs communes soient réelles, il faut et il suffit que $\overline{\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0}^2 = \frac{p}{m^2 - p}$ soit négatif, donc $p < 0$, qui correspond au cas où α, β sont entrelacés; les deux distances sont alors imaginaires pures. Lorsque les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre, une des distances est réelle et l'autre imaginaire pure, la distance réelle étant la longueur de la hauteur imaginaire et réciproquement.

On sait d'autre part qu'il y a une infinité de hauteurs communes lorsque α, β sont cosphériques (coplanaires dans les circonstances du calcul) ou paratactiques. Effectivement, dans le premier cas, $\theta = 0$, et γ'_0 est indéterminé; les hauteurs communes ont toutes la longueur $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0$, et l'on sait d'ailleurs qu'elles sont anallagmatiquement équivalentes. Dans le cas des cercles paratactiques, θ est égal à l'angle $\widehat{\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0}$, et le système (14) se réduit à l'équation unique

$$m \cos\varphi + \lambda \cos\theta \sin\varphi = 0. \tag{15}$$

Réciproquement, la condition d'indétermination de (14)

$$m^2 \sin^2\theta + p \cos^2\theta = 0$$

exprime que les deux cercles sont paratactiques, ou, ce qui est équivalent, que $\mathbf{a}_0\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}'_0\mathbf{b}'_0$. (15) exprime que le centre de $\mathbf{b}$ est dans le plan $\mathbf{a}'$ orthogonal à $\mathbf{a}$, et passant par $\alpha = oz$, donc le cercle $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est orthogonal à α; par raison de symétrie il l'est à β. A $\mathbf{a}'$ correspond $\mathbf{b}'$ dont le paramètre λ' est défini par

$$-m \sin\varphi + \lambda' \cos\theta \cos\varphi = 0,$$

donc $\lambda\lambda' = \dfrac{-m^2}{\cos^2\theta} = p - m^2$, de sorte que $\mathbf{b}'$ est orthogonal à $\mathbf{b}$. L'intersection de $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ est donc perpendiculaire à $\mathbf{a}'$ et à $\mathbf{b}'$, et la longueur de cette hauteur commune a la valeur constante $i \sin\theta$. Ainsi, toutes les hauteurs communes de deux cercles paratactiques ont la même longueur, qui représente la distance des deux cercles; cela résulte d'ailleurs de la propriété de ces hauteurs d'être anallagmatiquement équivalentes, c'est-à-dire qu'on peut les transformer l'une en l'autre par une anallagmatie qui conserve α et β. Observons que nous avons établi que deux cercles sont paratactiques lorsque leurs deux distances anallagmatiques sont égales.

20. *Les distances de deux cercles sont encore les valeurs extrémales de la distance de l'un de ces cercles aux bipoints de l'autre cercle qui sont cosphériques avec lui.* En conservant notre figure, considérons un bipoint (CC') de Oz dont les cotes soient u, u'. La condition de cosphéricité avec β est $uu' = p$. Les deux distances anallagmatiques de β à (CC') sont $\delta_2 = 0$ et δ_1. Si l'on désigne par δ'_1 et δ'_2 celles du bipoint focal (BB') de β, à (CC'), les théorèmes des paragraphes 16 et 17 nous permettent d'écrire les trois identités

$$\delta_1^2 + \delta_1'^2 = -1,$$
$$\delta_2^2 + \delta_2'^2 = -1 \qquad \text{ou} \qquad \delta_2'^2 = -1,$$
$$\delta_1'^2 - \delta_2'^2 = \pm 4 \frac{\mathrm{BC}.\mathrm{B'C}.\mathrm{BC'}.\mathrm{B'C'}}{\overline{\mathrm{BB'}}^2.\overline{\mathrm{CC'}}^2},$$

d'où résulte

$$\delta_1^2 = \pm 4 \frac{\mathrm{BC.B'C.BC'.B'C'}}{\overline{\mathrm{BB'}}^2 . \overline{\mathrm{CC'}}^2}.$$

C'est δ_1 qui représente ce que nous avons appelé la distance anallagmatique $\beta(\mathrm{CC'})$, et il s'agit donc de déterminer les valeurs extrémales de ce second membre. Les coordonnées de (B, B') sont $x=m$, $y=\pm ir\cos\theta$, $z=\mp ir\sin\theta$, avec $r^2=m^2-p$, donc

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 = u^2 + 2iur\sin\theta + p,$$

$$\overline{\mathrm{BC}}^2 . \overline{\mathrm{B'C}}^2 = (u^2+p)^2 + 4u^2r^2\sin^2\theta,$$

$$\overline{\mathrm{BC'}}^2 . \overline{\mathrm{B'C'}}^2 = (u'^2+p)^2 + 4u'^2r^2\sin^2\theta = \frac{p^2}{u^4} \times \overline{\mathrm{BC}}^2 . \overline{\mathrm{B'C}}^2.$$

Enfin

$$\overline{\mathrm{CC'}}^2 = (u'-u)^2 = \frac{1}{u^2}(u^2-p)^2,$$

et l'on a ainsi

$$\delta_1^2 = \pm \frac{p}{r^2} \frac{(u^2+p)^2 + 4u^2r^2\sin^2\theta}{(u^2-p)^2};$$

si l'on observe, pour supprimer l'indétermination du signe, que C et C' sont sur la même zone de la sphère (βCC') pourvu que p soit positif, il vient en définitive

$$\delta_1^2 = \frac{p}{r^2}\left\{1 + 4(p + r^2\sin^2\theta)\frac{u^2}{(u^2-p)^2}\right\}.$$

Les valeurs extrémales de $\left(\frac{u^2-p}{u}\right)^2$ sont données par $u=0$, $u'=\infty$ et par $u^2=-p$; le premier bipoint $(0, \infty)$ de Oz donne

$$\delta_1^2 = \frac{p}{r^2} = \frac{p}{m^2-p},$$

et le deuxième $(\sqrt{-p}, -\sqrt{-p})$ donne

$$\delta_1^2 = -\sin^2\theta,$$

ce qui établit notre proposition.

Le carré de la distance de (BB') à **a** est ici

$$\overline{(\mathrm{BB'})\mathbf{a}}^2 = \frac{m^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi}{-r^2},$$

dont les valeurs extrémales sont $-\cos^2\theta$ et $-\frac{m^2}{r^2}$; elles sont complémentaires à -1 de celles trouvées pour δ_1^2. Donc *les carrés des distances anallagmatiques de deux cercles et de celles de l'un de ces cercles au bipoint focal de l'autre sont, chacun à chacun, complémentaires à* -1.

On en déduit immédiatement que *les distances anallagmatiques de deux cercles sont égales à celles de leurs bipoints focaux.*

CHAPITRE III.

GÉOMÉTRIE D'UN CHAMP COCYCLIQUE PLAN DE BIPOINTS.

21. Appelons *champ cocyclique de bipoints* un ensemble de bipoints de l'espace tels que deux bipoints quelconques de cet ensemble soient cocycliques. Associons à ce champ les cercles passant par un couple de ces bipoints. On démontre aisément le

Théorème. — *Les cercles d'un champ cocyclique de bipoints sont les cercles orthogonaux à une même sphère* $\mathbf{g}$, *réelle ou imaginaire, et les bipoints sont les couples de points inverses par rapport à* $\mathbf{g}$.

Soient en effet $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux bipoints du champ, que nous considérons comme fixes, et Γ et Δ deux autres bipoints quelconques de ce champ. Appelons λ le cercle (Γ, Δ). $\mathbf{A}$ et λ sont cosphériques, et les sphères $(\mathbf{A}, \lambda)$ forment un réseau; de même les sphères $(\mathbf{B}, \lambda)$. $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ étant eux-mêmes cocycliques, ces deux réseaux sont orthogonaux à une même sphère fixe $\mathbf{g}$. L'intersection λ de deux sphères de ces deux réseaux est elle-même orthogonale à $\mathbf{g}$. D'autre part, les droites AA' et BB', en posant $\mathbf{A} = (A, A')$ et $\mathbf{B} = (B, B')$, concourent au centre G de $\mathbf{g}$, et A, A', ainsi que B, B' sont inverses par rapport à $\mathbf{g}$; donc les points C, C' de Γ, qui sont les intersections des deux cercles (A, Γ), (B, Γ), sont eux-mêmes alignés avec G et inverses par rapport à $\mathbf{g}$.

Inversement, deux bipoints quelconques, dont les deux points sont inverses par rapport à une sphère donnée $\mathbf{g}$, sont cocycliques, et le théorème est entièrement démontré.

Il résulte de là que les champs cocycliques de bipoints de l'espace sont définis par deux bipoints cocycliques, et se réduisent à deux champs anallagmatiquement distincts, suivant la réalité ou l'irréalité de la base $\mathbf{g}$. Si $\mathbf{g}$ est réel, le champ équivaut à l'ensemble des couples de points symétriques par rapport à un plan; les cercles deviennent alors les droites de la géométrie non euclidienne de Poincaré. Les propriétés des champs cocycliques de base réelle se trouvent donc incluses dans cette géométrie. Cependant, notre point de vue est un peu différent, par suite de la considération de l'être géométrique « bipoint » et de la « distance anallagmatique de deux bipoints cocycliques »; celle-ci diffère de la distance non euclidienne mesurée le long des cercles qui jouent le rôle des droites dans cette géométrie, et qui est bien plus la longueur anallagmatique d'un arc de cercle qu'une distance considérée à notre point de vue.

22. Précisons cette dernière observation. Supposons que $\mathbf{g}$ soit un plan réel, ce qui ne restreint pas la généralité; soit (A, A') et (B, B') deux bipoints

du champ, et I, J les points d'intersection de g avec le cercle (AA'BB'). Par définition,

$$(1)\qquad (\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'}) = 2\frac{\sqrt{\mathrm{AB.AB'.A'B.A'B'}}}{\mathrm{AA'.BB'}} = 2\frac{\mathrm{AB.A'B}}{\mathrm{AA'.BB'}}.$$

Or

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AA'}} = \frac{\sin\frac{\widehat{\mathrm{AB}}}{2}}{\sin\widehat{\mathrm{IA}}} = \frac{\sin\frac{\widehat{\mathrm{IB}}-\widehat{\mathrm{IA}}}{2}}{\sin\widehat{\mathrm{IA}}},$$

$$\frac{\mathrm{A'B}}{\mathrm{BB'}} = \frac{\sin\frac{\widehat{\mathrm{IB}}+\widehat{\mathrm{IA}}}{2}}{\sin\widehat{\mathrm{IB}}},$$

donc

$$(2)\qquad (\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'}) = 2\frac{\sin^2\frac{\widehat{\mathrm{IB}}}{2}\cos^2\frac{\widehat{\mathrm{IA}}}{2} - \cos^2\frac{\widehat{\mathrm{IB}}}{2}\sin^2\frac{\widehat{\mathrm{IA}}}{2}}{\sin\widehat{\mathrm{IA}}\sin\widehat{\mathrm{IB}}} = \frac{\tan^2\widehat{\mathrm{IJB}} - \tan^2\widehat{\mathrm{IJA}}}{2\tan\widehat{\mathrm{IJB}}\tan\widehat{\mathrm{IJA}}}.$$

Lorsque (BB') tend vers (AA'), on déduit de (1) que la différentielle dl de la distance est, en (AA'),

$$(3)\qquad dl = 2\frac{d(\mathrm{arc\,IA})}{\mathrm{AA'}},$$

qui est l'invariant différentiel classique de la géométrie non euclidienne. Son intégration donne, de la distance non euclidienne de A à B, l'expression

$$(4)\qquad l(\mathrm{AB}) = \mathrm{Log}\frac{\tan\widehat{\mathrm{IJB}}}{\tan\widehat{\mathrm{IJA}}} = \mathrm{Log}\,\mathcal{R}(\mathrm{B, A, I, J}).$$

La comparaison avec (2) donne alors

$$(5)\qquad (\mathrm{AA'})(\mathrm{BB'}) = \frac{e^{2l(\mathrm{AB})}-1}{2e^{l(\mathrm{AB})}} = \mathrm{Sh}\,l(\mathrm{AB}).$$

C'est la distance définie absolument par (1) que nous utiliserons dans les théorèmes que nous allons établir, et c'est grâce à la considération de cette distance de deux bipoints que nos énoncés de métrique anallagmatique ne différeront pas de ceux de la métrique euclidienne. D'ailleurs, nous n'aurons à préciser si g est réelle ou imaginaire que dans les discussions de réalité, et les théorèmes obtenus traduiront des propriétés des deux géométries elliptique et hyperbolique.

23. Un champ cocyclique plan est défini par deux bipoints cocycliques (AA'), (BB'); c'est d'ailleurs l'intersection d'un champ cocyclique de l'espace par un plan diamétral de la base g. Tout autre bipoint (MM') de ce champ est défini par l'un de ses points, de sorte que les propriétés où inter-

viennent les distances de (MM′) à (AA′) et (BB′) s'expriment à l'aide des distances du point M, ou du point M′, aux mêmes bipoints ([1]). Bien que certains énoncés s'appliquent à un champ cocyclique quelconque, nous nous bornerons, pour simplifier, à l'étude des champs cocycliques plans. Voici un premier théorème concernant les distances en question.

THÉORÈME I. — *Entre trois bipoints* (AA′), (BB′), (MM′) *d'un champ cocyclique, on a la double égalité*

$$\frac{M(AA')}{M(BB')}=\frac{M'(AA')}{M'(BB')}=\pm\frac{(MM')(AA')}{(MM')(BB')}. \tag{6}$$

Ces trois rapports étant anallagmatiquement invariants, effectuons une inversion de pôle M′. M devient le point de rencontre de deux cordes AA′, BB′ d'un cercle, M′ étant à l'infini. M est simultanément entre A et A′, et entre B et B′, ou hors des deux segments. Il vient d'ailleurs

$$\frac{M(AA')}{M(BB')}=\frac{\overline{MA}.\overline{MA'}}{AA'}:\frac{\overline{MB}.\overline{MB'}}{BB'}=\frac{BB'}{AA'}=\frac{\infty(AA')}{\infty(BB')}>0,$$

ce qui démontre, dans ce cas, l'égalité des deux premiers membres de (6). On voit d'autre part que ces deux rapports ne peuvent que changer simultanément de signe dans une inversion quelconque; ils sont donc toujours algébriquement égaux. Il résulte enfin de l'expression

$$(MM')(AA')=\frac{2}{MM'}\sqrt{M(AA').M'(AA')},$$

et de l'expression semblable de (MM′)(BB′), que $\frac{(MM')(AA')}{(MM')(BB')}$ est essentiellement positif et égal à la valeur absolue des deux premiers rapports.

Si les trois bipoints sont sur un même cercle, (6) subsiste à condition qu'ils fassent partie d'un même champ, autrement dit que AA′, BB′, MM′ soient trois droites concourantes.

THÉORÈME II. — *Pour que deux bipoints* (AA′), (BB′), *cocycliques avec* (MM′), *soient eux-mêmes cocycliques, il faut et il suffit que*

$$\frac{M(AA')}{M(BB')}=\frac{M'(AA')}{M'(BB')}. \tag{7}$$

([1]) Tout champ cocyclique sphérique présente évidemment les mêmes propriétés. Par exemple, un champ cocyclique plan, dont la base est un cercle imaginaire γ, équivaut par inversion à l'ensemble des couples de points diamétralement opposés de la sphère qui a pour diamètre l'axe focal de γ. Les cercles d'un champ cocyclique sphérique quelconque, de base imaginaire, équivalent donc anallagmatiquement à l'ensemble des grands cercles d'une sphère. La distance de deux bipoints est alors égale au sinus de l'angle des deux diamètres correspondants, en valeur absolue.

Le théorème I établit la nécessité, avec l'interprétation que les trois bipoints appartiennent à un même champ, lorsqu'ils sont sur un même cercle. Réciproquement, (7) ayant lieu, le cercle (AA′B) coupe le cercle (MM′B) en B″, de façon que l'on ait, grâce à la nécessité de (7),

$$\frac{\mathrm{M(AA')}}{\mathrm{M(BB'')}} = \frac{\mathrm{M'(AA')}}{\mathrm{M'(BB'')}},$$

et par suite

$$\frac{\mathrm{M(BB'')}}{\mathrm{M'(BB'')}} = \frac{\mathrm{M(BB')}}{\mathrm{M'(BB')}}. \tag{8}$$

En vertu de (7; I), ceci entraîne

$$\frac{\mathrm{B''M}}{\mathrm{B''M'}} = \frac{\mathrm{B'M}}{\mathrm{B'M'}},$$

avec la condition supplémentaire que B′ et B″ soient sur un même arc d'extrémités $\widehat{\mathrm{M}, \mathrm{M'}}$. Ces deux points ne peuvent donc que coïncider.

Corollaire. — *Trois cercles d'un faisceau sont coupés par tout cercle en trois bipoints* (AA′), (BB′), (CC′) *tels que l'on ait*

$$\frac{\mathrm{A(BB')}}{\mathrm{A(CC')}} = \frac{\mathrm{A'(BB')}}{\mathrm{A'(CC')}}. \tag{9}$$

C'est la première partie du théorème II relatif à trois bipoints cocycliques. En voici une démonstration directe. Si les trois cercles α, β, γ ont un bipoint réel commun (MM′), on a

$$\frac{\mathrm{A(BB')}}{\mathrm{A(MM')}} = \frac{\mathrm{A'(BB')}}{\mathrm{A'(MM')}},$$

et

$$\frac{\mathrm{A(CC')}}{\mathrm{A(MM')}} = \frac{\mathrm{A'(CC')}}{\mathrm{A'(MM')}},$$

d'où résulte (9) par division membre à membre. Il est clair que (9) subsiste en valeur absolue si les points communs du faisceau sont imaginaires, et l'égalité des signes provient du fait que les trois bipoints délimitent des arcs non empiétants.

On peut encore démontrer (9) à l'aide de la formule (9; I), qui donne

$$|\mathrm{A}\beta| = |\mathrm{A(BB')}|\sin\widehat{\beta, \varepsilon},$$
$$|\mathrm{A}\gamma| = |\mathrm{A(CC')}|\sin\widehat{\gamma, \varepsilon},$$

en désignant par ε le cercle sécant; il vient donc

$$\left\{\begin{aligned} \left|\frac{\mathrm{A}\beta}{\mathrm{A}\gamma}\right| &= \left|\frac{\mathrm{A(BB')}}{\mathrm{A(CC')}}\right| \frac{\sin\widehat{\beta, \varepsilon}}{\sin\widehat{\gamma, \varepsilon}}, \\ \left|\frac{\mathrm{A'}\beta}{\mathrm{A'}\gamma}\right| &= \left|\frac{\mathrm{A'(BB')}}{\mathrm{A'(CC')}}\right| \frac{\sin\widehat{\beta, \varepsilon}}{\sin\widehat{\gamma, \varepsilon}}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

et il suffit de remarquer que $\frac{A\beta}{A\gamma} = \frac{A'\beta}{A'\gamma}$. On complète comme précédemment par des considérations topographiques.

24. Théorème III. — *Quatre cercles d'un faisceau sont coupés par tout cercle en quatre bipoints* (AA′), (BB′), (CC′), (DD′) *tels que le rapport*

$$\frac{C(AA')}{C(BB')} : \frac{D(AA')}{D(BB')} \tag{11}$$

ait une valeur constante.

α, β, γ, δ désignant les cercles fixes du faisceau, observons tout d'abord que ce rapport est indépendant du choix de l'élément C, ou D, des deux bipoints d'intersection du cercle sécant ε avec γ, δ, et que sa valeur absolue vaut, d'après (6),

$$\frac{(CC')(AA')}{(CC')(BB')} : \frac{(DD')(AA')}{(DD')(BB')}.$$

Il résulte d'autre part de (10) que

$$\left|\frac{C(AA')}{C(BB')}\right| = \left|\frac{C\alpha}{C\beta}\right| \frac{\sin\widehat{\beta, \varepsilon}}{\sin\widehat{\alpha, \varepsilon}};$$

la division membre à membre avec la formule semblable relative à D donne alors

$$\left|\frac{C(AA')}{C(BB')} : \frac{D(AA')}{D(BB')}\right| = \left|\frac{C\alpha}{C\beta} : \frac{D\alpha}{D\beta}\right| = |\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)|.$$

D'autre part, l'égalité

$$\frac{C(AA')}{C(BB')} : \frac{D(AA')}{D(BB')} = \frac{C\alpha}{C\beta} : \frac{D\alpha}{D\beta} = \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \tag{12}$$

est vraie en signe lorsque C et D sont suffisamment voisins et subsiste par déplacement continu de D sur ε puisque les deux premiers rapports ne changent de signe que lorsque D traverse α ou β.

Conséquences. — Appelons *rapport anharmonique de quatre bipoints cocycliques* (AA′), (BB′), (CC′), (DD′) *d'un champ cocyclique* (¹) la valeur commune des quatre rapports tels que le premier membre de (12).

Il est *cycliquement projectif*, la projection consistant à joindre les quatre bipoints à un bipoint quelconque (OO′), réel ou non, du même champ, et à couper les quatre cercles α, β, γ, δ qui réalisent cette jonction par un nouveau cercle *quelconque* (²) ε'. Le bipoint d'intersection de α avec ε' s'appellera

---

(¹) Les quatres droites AA′, BB′, CC′, DD′ sont alors concourantes.

(²) ε' n'appartient pas, en général, au champ de α, β, γ, δ, ε.

la *projection cyclique* de (AA') sur ε', le centre de projection étant le bipoint (OO').

En particulier, on déduit de là la conception de *cercle polaire d'un bipoint* (C, C') *par rapport à deux cercles* α, β, dans un champ cocyclique : c'est le lieu des bipoints (DD'), cocycliques avec (CC'), et conjugués de (CC') par rapport aux deux bipoints d'intersection (AA'), (BB') du cercle $(CC'DD')$ avec α, β, c'est-à-dire tels que le rapport (12) vaille -1. D et D' sont encore, sur le cercle sécant considéré, les solutions de l'équation en D,

$$\frac{D(AA')}{D(BB')} : \frac{C(AA')}{C(BB')} = -1, \tag{13}$$

et le cercle polaire est le cercle du faisceau α, β qui est conjugué, par rapport à α, β, du cercle du faisceau qui contient (CC').

Au lieu de se donner (CC'), on peut se donner le seul point C. Sur tout cercle ε passant par C, (13) définit un bipoint (DD'), qui est d'ailleurs le conjugué du bipoint d'intersection de ε par le cercle γ du faisceau α, β qui passe par C. Lorsque ε varie, α, β et γ sont fixes, donc le cercle du faisceau qui passe par (DD') est également fixe. On peut donc parler de *cercle polaire d'un point par rapport à deux cercles*, au lieu de *cercle polaire, dans un champ cocyclique, d'un bipoint par rapport à deux cercles*. Dans le cas du bipoint (CC'), les cercles sécants forment un faisceau; dans le cas du point C, ils dépendent de deux paramètres.

Ces remarques élémentaires nous conduisent à dire que, sur le cercle ε, *deux points* C et D *vérifiant* (13) *sont conjugués par* rapport aux deux bipoints (AA'), (BB'); et *le cercle polaire de* C *par rapport à* α, β *est le lieu des points conjugués de* C, *sur chaque sécante* ε, *par rapport aux deux bipoints d'intersection de* ε *avec* α, β.

25. La construction du cercle polaire de C par rapport à α, β peut être calquée sur celle de la polaire d'un point par rapport à deux droites. Soit en effet un cercle sécant ε passant par C, et (CC') son bipoint d'intersection avec le cercle γ du faisceau α, β qui passe par C. Soit un deuxième cercle sécant ε_1, passant par (CC'). α, β, ε, ε_1 appartiennent à un même champ cocyclique. Les quatre bipoints d'intersection (AA'), (BB') et $(A_1A'_1)$, $(B_1B'_1)$ de ε et ε_1 avec α, β sont cocycliques deux à deux, ce qui donne deux nouveaux cercles du champ, $\varphi = (AA'B_1B'_1)$, $\psi = (BB'A_1A'_1)$. Les deux bipoints (AA'), (BB') sont aussi bien les intersections de ε avec α, β qu'avec φ, ψ. Le bipoint (DD') de ε, conjugué de (CC') par rapport à (AA'), (BB'), est donc sur les cercles polaires de (CC') par rapport à α, β et par rapport à φ, ψ. Il en est de même pour $(D_1D'_1)$, situé sur ε_1. Ces deux cercles polaires sont donc confondus avec le cercle commun aux deux faisceaux (α, β), (φ, ψ). Le cercle polaire cherché est

encore le cercle du champ cocyclique dont le centre est à l'intersection des lignes des centres des deux faisceaux.

26. *Tétracercle d'un champ cocyclique.* — C'est la figure formée par quatre cercles d'un même champ, autrement dit d'un réseau de cercles. Soient α, β, γ, δ ces quatre cercles, et O leur centre radical. α, β se coupent en (CC'); α, γ en (BB'); β, γ en (AA'); α, δ en (DD'); β, δ en (EE'); γ, δ en (FF'). Ces six bipoints appartiennent au champ et sont deux à deux cocycliques; les six droites qui les portent passent par O. Appelons *diagonales* du tétracercle les trois cercles

$$\varphi = (AA'DD'), \qquad \psi = (BB'EE'), \qquad \chi = (CC'FF').$$

Il résulte de la construction du cercle polaire que le cercle polaire de (AA') par rapport à ψ, χ est le cercle commun aux deux faisceaux (α, δ) et (ψ, χ). Si l'on désigne respectivement par (II'), (JJ'), (HH') les bipoints d'intersection, réels ou non, des couples de cercles (ψ, χ), (χ, φ), (φ, ψ), le cercle polaire de (AA') par rapport à (ψ, χ) est le cercle $(DD'II')$. Sur la diagonale φ, (DD') est donc conjugué harmonique de (AA') par rapport à ψ, χ, donc par rapport aux deux bipoints (JJ'), (HH'). Ce résultat est analogue au théorème sur les diagonales du quadrilatère complet rectiligne.

27. *Polaire d'un bipoint par rapport à une quartique bicirculaire.* — Soient $\mathbf{A}$ et (Q) un bipoint et une quartique bicirculaire dans un champ cocyclique de base ω; (Q) étant un lieu de bipoints du champ est invariante dans l'inversion de cercle ω; c'est encore la quartique bicirculaire la plus générale admettant ω pour cercle directeur. Un cercle ε passant par $\mathbf{A}$ coupe (Q) en deux bipoints $\mathbf{B}$, Γ, qui appartiennent également au champ. Si Δ est le bipoint du champ conjugué de $\mathbf{A}$ par rapport à $\mathbf{B}$, Γ, le lieu de Δ quand ε varie est, par définition, la *polaire de* $\mathbf{A}$ *par rapport à* (Q). On a alors le

Théorème. — *La polaire d'un bipoint par rapport à une quartique bicirculaire, dans un champ cocyclique, est un cercle de ce champ.*

Chaque cercle ε coupe en effet ce lieu en un seul bipoint Δ; si $\mathbf{A}$ est hors de (Q), $\mathbf{B}$ ou Γ ne peut venir en $\mathbf{A}$, donc Δ ne coïncide jamais avec $\mathbf{A}$. Si ce lieu est une courbe p-circulaire, de degré n, on a donc $2n - 2p = 2$ avec $n \geqq 2p$; il n'y a pas d'autre solution que $n = 2$, $p = 1$ ou $n = 1$, $p = 0$, donc ce lieu est un cercle, ou une droite, du champ. Lorsque $\mathbf{A}$ est sur (Q), Δ coïncide avec lui, sauf lorsque ε est tangent à (Q) en $\mathbf{A}$; Δ est alors indéterminé sur ce cercle, ou droite, qui est ici la polaire de $\mathbf{A}$.

L'analogie avec la polaire d'un point par rapport à une conique est évidente. On voit même que, par un bipoint $\mathbf{A}$ extérieur à (Q), il passe deux cercles tangents à (Q), car les bipoints de contact sont les intersections de (Q) et de la polaire de $\mathbf{A}$.

Deux bipoints sont dits *conjugués par rapport à* (Q) s'ils le sont par rapport aux deux bipoints d'intersection de (Q) avec le cercle des deux bipoints considérés. Il est équivalent de dire que la polaire de l'un de ces bipoints passe par l'autre.

Si α, β sont les polaires de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ par rapport à (Q), leur intersection Γ est conjuguée de ces deux bipoints par rapport à (Q); donc la polaire de Γ est le cercle ($\mathbf{AB}$). Γ s'appelle *le pôle du cercle* ($\mathbf{AB}$).

Si $\mathbf{A}$ décrit un cercle, sa polaire passe constamment par le pôle de ce cercle.

La théorie des polaires réciproques peut être faite comme en géométrie euclidienne élémentaire. Supposons que $\mathbf{A}$ décrive une courbe (S) du champ. Appelons *polaire réciproque de* (S) *par rapport à* (Q) *l'enveloppe* (Σ) *des polaires* α *de* $\mathbf{A}$ *par rapport à cette quartique bicirculaire* (Q). Le bipoint caractéristique $\mathbf{T}$ de α est la limite de l'intersection Γ de α avec la polaire β d'un bipoint $\mathbf{B}$ de (S) lorsque $\mathbf{B}$ tend vers $\mathbf{A}$. La polaire de Γ est le cercle ($\mathbf{AB}$), et devient à la limite le cercle τ du champ, tangent à (S) en $\mathbf{A}$; le pôle de τ est $\mathbf{T}$. Donc *la polaire réciproque de* (S) *par rapport à* (Q) *est également le lieu des pôles des cercles du champ qui sont tangents à* (S).

THÉORÈME. — *La polaire réciproque d'une quartique bicirculaire est une quartique bicirculaire.*

En effet les bipoints d'intersection de cette polaire réciproque avec un cercle γ du champ sont les pôles des cercles tangents à la quartique et passant par le pôle de γ; ils sont donc au nombre de deux. Si cette polaire réciproque est p-circulaire et de degré n, on a donc $2n - 2p = 4$, avec $n \geqq 2p$, c'est-à-dire $2 \leqq n \leqq 4$; les trois solutions sont bien $n = 4$, $p = 2$; $n = 3$, $p = 1$; ou $n = 2$, $p = 0$, les deux dernières, conique et cubique circulaire, étant des dégénérescences de la première.

28. Les propriétés mises en évidence montrent que les bipoints, les cercles et les quartiques bicirculaires d'un champ cocyclique se comportent comme les points, les droites, et les coniques du plan euclidien; ce fait correspond à une réalité profonde. Rapportons le plan anallagmatique à un tétracercle rectangle, dont l'un des cercles soit le cercle de base du champ cocyclique considéré; désignons par ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ces quatre cercles, ω_4 étant le cercle de base. Les coordonnées tétracycliques x_i d'un point M sont proportionnelles aux quatre distances anallagmatiques $M\omega_i$, et telles que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

L'inversion par rapport à ω_4 change x_1, x_2, x_3, x_4 en λx_1, λx_2, λx_3, $-\lambda x_4$, de sorte qu'un bipoint du champ est représenté par $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\pm i\sqrt{\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 + \mathbf{x}_3^2}$; un bipoint peut donc être simplement représenté par trois coordonnées $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$.

Les cercles et quartiques bicirculaires sont définis par des équations homogènes en x_1, x_2, x_3, x_4, respectivement du premier et du second degré; s'ils appartiennent au champ, ces équations sont paires par rapport à x_4, donc respectivement de la forme

$$(14) \qquad \sum_{i=1}^{3} a_i x_i = 0,$$

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k + a_{44} x_4^2 = 0$$

cette dernière s'écrit encore

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} x_i x_k - a_{44} \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = \sum_{i,k=1}^{3} b_{ik} x_i x_k = 0.$$

Or, dans le plan euclidien, de coordonnées cartésiennes homogènes, ces équations sont celles des droites et coniques. On voit ainsi que toutes les propriétés des points, droites et coniques du plan euclidien, ont leurs analogues pour les bipoints, cercles et quartiques bicirculaires d'un champ cocyclique; en particulier, les théorèmes de Poncelet.

Au lieu de considérer x_1, x_2, x_3 comme les coordonnées homogènes d'un point du plan, on peut les considérer comme les paramètres directeurs d'une droite de l'espace ordinaire, issue de l'origine O des coordonnées cartésiennes rectangulaires [1]. (14) représente alors un plan passant par O, avec $\sum_{i=1}^{3} a_i^2 = 1$ si les a_i sont les cosinus des angles du cercle représenté avec les cercles du tétracercle ($a_4 = 0$); le cosinus de l'angle de deux cercles du champ, de coordonnées a_i et b_i est alors $\sum_{i=1} a_i b_i$; cet angle est donc égal à celui des deux plans représentatifs, et leur distance anallagmatique vaut i fois le sinus de cet angle. Les considérations de valeurs extrémales qui permettent de définir les autres distances anallagmatiques montrent ensuite que la distance d'un bipoint et d'un cercle du champ vaut i fois le sinus de l'angle des droite et plan représentatifs, et que celle des deux bipoints vaut i fois le sinus de l'angle des droites correspondantes.

Suivant que ω_4 est imaginaire ou réel, x_4 ou l'une des trois autres coordonnées est imaginaire pur, si l'on suppose que trois des cercles du tétracercle de référence sont réels. Suivant la nature de la base du champ, les droites représentatives des bipoints de ce champ sont donc réelles ou imaginaires. Nous

---

[1] Ce n'est rien autre que la correspondance classique entre le plan cayleyen et la représentation conforme plane de la géométrie sphérique.

n'insisterons pas sur cette représentation qui nous ramène aux géométries non euclidiennes, alors que le but de ce travail est justement d'en faire abstraction. Signalons seulement qu'elle éclaire encore les théorèmes qui vont suivre.

29. Nous terminerons ce chapitre par la détermination de deux lieux géométriques simples. Voici le premier.

THÉORÈME. — *Dans un champ cocyclique, le lieu des bipoints situés à une distance donnée d'un bipoint donné est un couple de cercles, inverses par rapport à la base du champ, et orthogonaux aux cercles issus du bipoint donné.*

C'est un résultat connu en géométrie non euclidienne que le lieu des points situés à une distance donnée d'un point donné est un cercle; ces lieux sont les cercles non euclidiens. Dans notre énoncé, le lieu se compose d'un tel cercle et de son inverse par rapport à la base du champ, grâce aux observations faites au paragraphe 22. Voici d'ailleurs une démonstration. Soient (AA') et k le bipoint et la distance donnés. Une inversion de pôle A' permet de supposer qu'il s'agit d'un bipoint $(A\infty)$; la base du champ est alors un cercle ω de centre A et de rayon r, réel ou imaginaire pur. Les cercles du champ passant par $(A\infty)$ sont les rayons de ω, et les bipoints du champ sont les bipoints (MM') situés sur ces rayons, et tels que $\overline{AM}.\overline{AM'} = r^2$. D'autre part, on sait que

$$k = (A\infty)(MM') = \frac{2}{MM'}\sqrt{\overline{AM}.\overline{AM'}} = \frac{2r}{\left|\frac{r^2}{\overline{AM}} - \overline{AM}\right|} = \frac{2r.AM}{|r^2 - \overline{AM}|^2}.$$

Si r est réel, le lieu n'est réel que si k est réel, et l'on peut admettre que M est extérieur à ω. Si r est imaginaire pur, il doit en être de même pour k, de sorte qu'on peut toujours mettre l'équation du lieu réel sous la forme

$$k\left(\overline{AM}^2 - r^2\right) - 2r.AM = 0.$$

La racine positive est

$$AM = \frac{r}{k}\left(1 + \sqrt{1 + k^2}\right),$$

donc le lieu de M est un cercle de centre A; celui de M' est le cercle inverse par rapport à ω. Dans le cas général, A et A' sont inverses par rapport aux deux cercles du lieu. (AA') est le *bicentre* du lieu, et les cercles issus de (AA') sont les *rayons* de ce lieu. Les cercles géodésiques, ou cercles du champ, sont les lieux d'égale distance tels que $k = \pm i$, puisqu'ils sont tels que $\overline{AM}^2 + r^2 = 0$ lorsqu'on a rejeté A' à l'infini.

30. La relation entre la mesure euclidienne de l'arc d'un cercle et l'angle au centre a son équivalent infinitésimal anallagmatique dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Sur un lieu d'égale distance* $\mathbf{AM} = k$, *de bicentre* $\mathbf{A}$, *le rapport* $\dfrac{\mathbf{MM}_1}{(\widehat{\mathbf{AM})(\mathbf{AM}_1})}$ *tend vers* k *lorsque* $\mathbf{M}_1$ *tend vers* $\mathbf{M}$.

On peut toujours supposer que $\mathbf{A}$ est de la forme $(A\ \infty)$; les rayons $(\mathbf{AM})$ et $(\mathbf{AM}_1)$ sont alors deux droites AMM′, $AM_1M'_1$, dont nous désignons l'angle infinitésimal par θ. AM et AM′ ont les longueurs $\frac{r}{k}(\sqrt{1+k^2}\pm 1)$, de sorte que $MM' = \frac{2r}{k}\cdot$ Il vient donc

$$|\mathbf{MM}_1| = \frac{2\,MM'_1}{\overline{MM'}^2}\sqrt{MM_1.M'M'_1} = \frac{k^2}{r^2}\,MM'_1\sqrt{AM.AM'}\sin\frac{\theta}{2},$$

avec

$$\overline{MM'_1}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AM'}^2 - 2\,AM.AM'\cos\theta$$
$$= \frac{2r^2}{k^2}(2 + k^2 - k^2\cos\theta) = \frac{4r^2}{k^2}\left(1 + k^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

et, par suite, compte tenu de ce que $\mathbf{MM}_1$ et k sont simultanément réels ou imaginaires purs,

$$\mathbf{MM}_1 = 2k\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{1 + k^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

La propriété annoncée en découle immédiatement.

Observons qu'avec la mesure cayleyienne, on aurait posé, dans le plan hyperbolique,

$$k = \operatorname{Sh} l, \qquad \mathbf{MM}_1 = \operatorname{Sh} L,$$

et l'on aurait eu

$$\lim_{\theta \to 0}\frac{L}{\theta} = \lim_{\theta \to 0}\frac{\mathbf{MM}_1}{\theta} = k = \operatorname{Sh} l \neq l.$$

Ce n'est qu'avec notre définition de la distance que cette propriété fondamentale du cercle se retrouve chez les lieux d'égale distance anallagmatique.

31. Le théorème suivant n'a pas d'équivalent simple dans la géométrie non euclidienne classique.

THÉORÈME. — *Dans un champ cocyclique, le lieu des bipoints dont le rapport des distances à deux bipoints donnés est constant est une quartique bicirculaire, pouvant se réduire à une cubique circulaire ou à une conique.*

Soient r et O le rayon et le centre du cercle de base ω. Il résulte de (6) et (7; I) que l'équation $\frac{(AA')(MM')}{(BB')(MM')} = k$ du lieu cherché (Q) s'écrit encore

$$\frac{AM.A'M}{BM.B'M} = k\frac{AA'}{BB'} = \text{const.} = m,$$

k étant la constante donnée, nécessairement positive si le lieu (Q) est réel. (Q) est donc le lieu des points communs aux cercles des deux faisceaux

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} = h, \qquad \frac{\mathrm{A'M}}{\mathrm{B'M}} = \frac{m}{h}, \tag{15}$$

quand le paramètre h varie. Les cercles du premier faisceau passent par les foyers F, G du bipoint (AB), et ceux du deuxième par les foyers F′, G′ de (A′B′). Les points de rencontre M, M_1 des deux cercles (15) sont inverses par rapport au cercle fixe $\varepsilon = (\mathrm{ABA'B'})$, orthogonal aux deux faisceaux. (Q) est donc l'enveloppe du cercle orthogonal à ε et centré au point caractéristique de la médiatrice de $(\mathrm{MM_1})$. Les centres des deux cercles (15) se correspondent homographiquement sur les lignes des centres des deux faisceaux, donc cette médiatrice, qui les joint, enveloppe une conique $(\mathcal{E})$. Par conséquent, (Q) est une quartique bicirculaire de cercle directeur ε et de déférente $(\mathcal{E})$.

Les axes des deux faisceaux de cercles (15) sont AB et A′B′, et $(\mathcal{E})$ leur est tangente. En permutant B et B′ dans (15), on voit que le quadrilatère ABA′B′ est inscrit dans le cercle ε et circonscrit à $(\mathcal{E})$. On peut le déformer de manière continue en conservant ces deux propriétés; à chaque nouveau quadrilatère $\mathrm{A_1B_1A'_1B'_1}$, et à une valeur associée m_1 du paramètre m, correspond une quartique $(\mathrm{Q_1})$ de cercle directeur ε et de déférente $(\mathcal{E}_1)$, inscrite, comme $(\mathcal{E})$, dans $\mathrm{A_1B_1A'_1B'_1}$; il suffit de choisir m_1 de manière que $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}_1)$ aient une cinquième tangente commune pour que ces deux coniques, donc (Q) et $(\mathrm{Q_1})$, coïncident. Observons encore que le cercle ω_1, orthogonal à ε, et centré au point de rencontre de $\mathrm{A_1A'_1}$, $\mathrm{B_1B'_1}$, doit être un cercle directeur de (Q), puisque l'inversion par rapport à ω_1 conserve ces deux bipoints; par continuité, ω_1 n'est rien autre que ω, de sorte que les deux bipoints variables $(\mathrm{A_1A'_1})$, $(\mathrm{B_1B'_1})$ ne cessent pas d'appartenir au champ cocyclique considéré.

D'une manière plus complète, nous avons ainsi démontré que *le lieu d'égal rapport des distances à deux bipoints est une quartique bicirculaire dont une déférente et le cercle directeur associé sont liés par un quadrilatère de Poncelet, de sorte que ce lieu peut être défini à l'aide d'une infinité de couples de bipoints du champ, en associant à chaque couple un rapport k convenable* (1).

CHAPITRE IV.

RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRICERCLE.

32. Étant donné un champ cocyclique plan $\mathcal{E}$, dans lequel nous continuons à nous placer, appelons *tricercle* la figure formée par trois cercles de $\mathcal{E}$, sécants

(1) Le lieu d'égal rapport des distances à deux cercles de l'espace est une cyclide jouissant de propriétés analogues. Cf. R. LAGRANGE, *Sur le théorème de Poncelet* et *Sur le théorème de Poncelet et une classe de cyclides* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 196, pp. 319 et 663).

deux à deux et non concourants, ou, ce qui est équivalent, par les cercles joignant trois bipoints de $\mathcal{E}$, non cocycliques dans leur ensemble. Appelons sommets du tricercle les trois bipoints d'intersection $\mathbf{A} = (AA')$, $\mathbf{B} = (BB')$, $\Gamma = (CC')$ et côtés les trois cercles $\alpha = (\mathbf{B}\Gamma)$, $\beta = (\Gamma\mathbf{A})$, $\gamma = (\mathbf{AB})$.

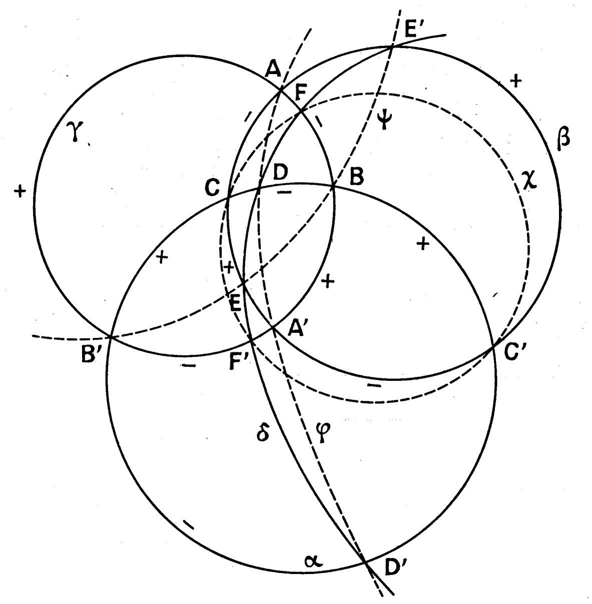

Fig. 2.

Il est commode d'isoler sur cette figure des *triangles circulaires* dont les sommets soient trois points appartenant aux trois bipoints, chacun à chacun, et dont les côtés soient trois arcs des cercles, joignant ces trois points sans traverser les trois autres éléments des bipoints. On constate alors que ces triangles sont au nombre de huit ou deux suivant que $\mathcal{E}$ est riemannien ou lobatchewskien. Sur notre figure, par exemple, la région du plan extérieure aux trois cercles constitue un tel triangle. Cette observation va nous permettre d'affecter d'un signe tous les arcs des côtés d'un tricercle. Considérons par exemple le triangle ABC, et parcourons ses côtés dans le sens ABC; nous définissons ainsi trois sens de parcours sur les trois cercles. Sur le côté $\widehat{AB}$, on constate qu'on se trouve à l'intérieur de l'arc $\widehat{AA'}$ qui correspond au sens de parcours, et à l'extérieur de l'arc $\widehat{BB'}$ correspondant au même sens. Lorsqu'on traverse B pour passer sur l'arc $\widehat{BA'}$, on se trouve à l'intérieur des deux arcs $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$; puis, sur l'arc $\widehat{A'B'}$, à l'extérieur de $\widehat{AA'}$ et à l'intérieur de $\widehat{BB'}$, et ainsi de suite. Les quatre arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$, $\widehat{B'A}$ de γ sont ainsi affectés des signes marqués sur la figure, si l'on a convenu de choisir le signe —

lorsqu'on se trouve à l'intérieur de l'un des arcs $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$ définis par le sens de parcours, et à l'extérieur de l'autre, et le signe $+$ dans le cas contraire. Le sens de parcours défini sur α par le triangle orienté ABC permet ensuite d'affecter d'un signe les quatre arcs de ce côté α; et enfin, le sens $\widehat{CA}$ permet la même opération sur le cercle β.

Ces signes ne dépendent pas du sens de parcours choisi sur le triangle ABC; ils ne dépendent que du triangle initial choisi, les trois côtés de ce triangle étant affectés du signe $-$; il en est de même pour le triangle formé par les trois autres éléments des bipoints, qu'on peut appeler opposé au premier. Deux triangles opposés ont d'ailleurs les côtés homologues affectés des mêmes signes, et le produit des signes des trois côtés d'un triangle équivaut toujours au signe $-$.

Ces considérations vont nous permettre d'affecter d'un nouveau signe la distance d'un point à un sommet d'un tricercle, sur les côtés de ce tricercle. M désignant un point de α, nous conviendrons de poser, par exemple,

$$\overline{M(BB')} = \pm\,|\,M(BB')\,|,$$

où le signe $-$ est adopté lorsque M est sur l'arc $\widehat{BB'}$ défini par le sens de parcours choisi, et le signe $+$ dans le cas contraire. Le rapport

$$\frac{\overline{M(BB')}}{\overline{M(CC')}}$$

est alors affecté du même signe que l'arc sur lequel se trouve le point M. Si (MM') désigne un bipoint du champ, situé sur α, M et M' sont sur deux arcs confondus ou opposés de α, donc de même signe, et l'on a, grâce au théorème II (7; III),

$$\frac{\overline{M(BB')}}{\overline{M(CC')}} = \frac{\overline{M'(BB')}}{\overline{M'(CC')}}.$$

Enfin, en se rappelant (6; III), il est commode d'affecter d'un signe le rapport positif $\frac{(MM')(BB')}{(MM')(CC')}$; en posant

$$\left[\frac{(MM')(BB')}{(MM')(CC')}\right] = \frac{\overline{M(BB')}}{\overline{M(CC')}} = \frac{\overline{M'(BB')}}{\overline{M'(CC')}}. \tag{1}$$

33. *Relations entre les côtés et les angles d'un tricercle.* — La longueur d'un côté $(\mathbf{B\Gamma})$ est, par définition, la distance $|\mathbf{B\Gamma}|$. On sait que l'on a alors, grâce à (12; II),

$$\frac{|\mathbf{AB}|}{|\mathbf{A\Gamma}|} = \frac{\sin\widehat{\alpha, \beta}}{\sin\widehat{\alpha, \gamma}}.$$

En désignant par a, b, c les longueurs $|\mathbf{B\Gamma}|$, $|\mathbf{\Gamma A}|$, $|\mathbf{AB}|$ des trois côtés du tricercle, et par $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ les trois angles $\widehat{\beta,\gamma}$, $\widehat{\gamma,\alpha}$, $\widehat{\alpha,\beta}$, on a donc les relations

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}, \tag{2}$$

qui traduisent de manière uniforme, dans notre métrique, les relations classiques des géométries riemannienne et lobatchewskienne, qui ont, suivant le cas, la forme de rapports de deux sinus, ou d'un sinus hyperbolique et d'un sinus [1].

34. *Cercle transversal.* — Coupons le tricercle $\mathbf{AB\Gamma}$ par un cercle δ du même champ $\mathcal{E}$, et soient $\Delta = (\mathrm{DD}')$, $\mathbf{E} = (\mathrm{EE}')$, $\Phi = (\mathrm{FF}')$ ses bipoints d'intersection avec α, β, γ. $\mathbf{A}$ et Δ sont sur un même cercle φ, et il résulte de (10; III) que

$$\frac{\overline{\mathrm{D(BB')}}}{\overline{\mathrm{D(CC')}}} = \frac{\overline{\mathrm{D'(BB')}}}{\overline{\mathrm{D'(CC')}}} = \pm\frac{\mathrm{D}\beta}{\mathrm{D}\gamma}\,\frac{\sin\hat{B}}{\sin\hat{C}};$$

on a de même

$$\frac{\overline{\mathrm{E(CC')}}}{\overline{\mathrm{E(AA')}}} = \frac{\overline{\mathrm{E'(CC')}}}{\overline{\mathrm{E'(AA')}}} = \pm\frac{\mathrm{E}\gamma}{\mathrm{E}\alpha}\,\frac{\sin\hat{C}}{\sin\hat{A}},$$

$$\frac{\overline{\mathrm{F(AA')}}}{\overline{\mathrm{F(BB')}}} = \frac{\overline{\mathrm{F'(AA')}}}{\overline{\mathrm{F'(BB')}}} = \pm\frac{\mathrm{F}\alpha}{\mathrm{F}\beta}\,\frac{\sin\hat{A}}{\sin\hat{B}}.$$

Par multiplication membre à membre, on établit, pour trois points quelconques D, E, F des trois côtés α, β, γ, l'identité

$$\frac{\overline{\mathrm{D(BB')}}}{\overline{\mathrm{D(CC')}}} \times \frac{\overline{\mathrm{E(CC')}}}{\overline{\mathrm{E(AA')}}} \times \frac{\overline{\mathrm{F(AA')}}}{\overline{\mathrm{F(BB')}}} = \pm\frac{\mathrm{D}\beta}{\mathrm{D}\gamma} \times \frac{\mathrm{E}\gamma}{\mathrm{E}\alpha} \times \frac{\mathrm{F}\alpha}{\mathrm{F}\beta}. \tag{3}$$

Ici, le deuxième membre ne dépend en outre que de δ, et non des trois points choisis parmi les trois bipoints Δ, $\mathbf{E}$, Φ. L'invariance anallagmatique absolue du second membre permet de rendre δ rectiligne; les six points D, D′, E, E′, F, F′ étant alors alignés, on a

$$\frac{\mathrm{D}\beta}{\mathrm{D}\gamma} \times \frac{\mathrm{E}\gamma}{\mathrm{E}\alpha} \times \frac{\mathrm{F}\alpha}{\mathrm{F}\beta} = \frac{\overline{\mathrm{DE}}.\overline{\mathrm{DE'}}}{\overline{\mathrm{DF}}.\overline{\mathrm{DF'}}} \times \frac{\overline{\mathrm{EF}}.\overline{\mathrm{EF'}}}{\overline{\mathrm{ED}}.\overline{\mathrm{ED'}}} \times \frac{\overline{\mathrm{FD}}.\overline{\mathrm{FD'}}}{\overline{\mathrm{FE}}.\overline{\mathrm{FE'}}} = \pm\frac{\mathrm{DE'.EF'.FD'}}{\mathrm{D'E.E'F.F'D}}.$$

En permutant les deux trios D, E, F et D′, E′, F′, ce rapport est inversé sans que sa valeur soit modifiée; il vaut donc ± 1, et il en est de même pour la valeur commune de (3).

---

[1] On peut encore dire que la distance de deux sommets est proportionnelle à celle des côtés qui les joignent au troisième sommet (formule 4; II).

D'autre part, ce nombre ne peut changer quand on déforme δ de manière continue, car, même lorsque δ traverse un sommet tel que A, il y a un point de chaque bipoint $\mathbf{E}$, Φ qui ne traverse pas A et pour lequel aucune discontinuité n'apparaît. Il n'y a plus qu'à se placer dans un cas particulier pour constater que cette valeur commune est 1, pour les deux formes de tricercle anallagmatiquement distinctes. Nous avons ainsi établi l'analogue du théorème de Ménélaüs, sous la forme

THÉORÈME. — *Les trois bipoints d'intersection* Δ, $\mathbf{E}$, Φ *d'un tricercle orienté* $\mathbf{AB}\Gamma$, *par un cercle sécant, sont tels que l'on ait*

$$\frac{\overline{\mathrm{D}\mathbf{B}}}{\overline{\mathrm{D}\Gamma}} \times \frac{\overline{\mathbf{E}\Gamma}}{\overline{\mathrm{E}\mathbf{A}}} \times \frac{\overline{\mathrm{F}\mathbf{A}}}{\overline{\mathrm{F}\mathbf{B}}} = 1, \tag{4}$$

ou encore

$$\left[\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta\Gamma}\right] \times \left[\frac{\mathbf{E}\Gamma}{\mathbf{EA}}\right] \times \left[\frac{\Phi\mathbf{A}}{\Phi\mathbf{B}}\right] = 1. \tag{4'}$$

Réciproquement : *trois bipoints* Δ, $\mathbf{E}$, Φ *des trois côtés du tricercle orienté, vérifiant* (4'), *sont sur un même cercle.*

Il s'agit, bien entendu, de trois bipoints du champ $\mathcal{E}$. Le cercle $\Delta\mathbf{E}$ coupe alors γ en Φ_1 tel que l'on ait, grâce à (4') et (1),

$$\frac{\overline{\mathrm{F}_1(\mathrm{AA}')}}{\overline{\mathrm{F}_1(\mathrm{BB}')}} = \frac{\overline{\mathrm{F}(\mathrm{AA}')}}{\overline{\mathrm{F}(\mathrm{BB}')}};$$

on en déduit tout de suite

$$\frac{\mathrm{F}_1\alpha}{\mathrm{F}_1\beta} = \frac{\mathrm{F}\alpha}{\mathrm{F}\beta},$$

d'où résulte la coïncidence de Φ_1 et Φ.

35. Reprenons l'identité (3) relative aux pieds, sur α, β, γ, de trois cercles sécants φ, ψ, χ passant respectivement par $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, Γ. Si φ, ψ, χ forment un faisceau, la valeur absolue du second membre de (3) vaut 1, car on peut y remplacer D, E, F par l'un des points d'intersections de φ, ψ, χ, réel ou non. Par le même raisonnement de continuité qu'au paragraphe précédent, et en étudiant un cas particulier de figure, on voit que la valeur du premier membre de (3) est alors -1. On obtient ainsi l'extension du théorème de Jean de Ceva, sous la forme

THÉORÈME. — *Pour que trois cercles* φ, ψ, χ *menés par les sommets* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, Γ *d'un tricercle, forment un faisceau, il faut et il suffit que leurs bipoints de rencontre* Δ, $\mathbf{E}$, Φ *avec* α, β, γ *vérifient la relation*

$$\frac{\overline{\mathrm{D}\mathbf{B}}}{\overline{\mathrm{D}\Gamma}} \times \frac{\overline{\mathrm{E}\Gamma}}{\overline{\mathrm{E}\mathbf{A}}} \times \frac{\overline{\mathrm{F}\mathbf{A}}}{\overline{\mathrm{F}\mathbf{B}}} = -1, \tag{5}$$

ou encore

$$(5') \qquad \left[\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta\Gamma}\right] \times \left[\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\mathbf{A}}\right] \times \left[\frac{\Phi\mathbf{A}}{\Phi\mathbf{B}}\right] = -1.$$

La suffisance se démontre comme pour le théorème précédent.

Les conséquences des théorèmes analogues de la géométrie euclidienne se retrouvent ici tout naturellement. Par exemple, si φ, ψ, χ forment un faisceau, et si φ_1, ψ_1, χ_1 sont leurs cercles conjugués harmoniques par rapport aux angles $\widehat{\beta, \gamma}$, $\widehat{\gamma, \alpha}$, $\widehat{\alpha, \beta}$, les pieds de φ_1, ψ_1, χ_1 sur les côtés α, β, γ sont trois bipoints cocycliques, et réciproquement.

36. Un cercle bissecteur φ de $\widehat{\beta, \gamma}$ est un lieu de points tels que l'on ait

$$|M\beta| = \left|\mathbf{MA} \sin \widehat{\beta, \varphi}\right| = \left|\mathbf{MA} \sin \widehat{\gamma, \varphi}\right| = |M\gamma|,$$

donc son pied $\Delta = (\mathrm{DD}')$ est tel que l'on ait

$$|D\beta| = \left|\mathbf{DB} \sin \hat{C}\right| = |D\gamma| = \left|\mathbf{D\Gamma} \sin \hat{B}\right|;$$

on en déduit que

$$(6) \qquad \left[\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta\Gamma}\right] = \pm \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \pm \frac{b}{c}.$$

Appelons *cercle bissecteur intérieur* d'un triangle ABC, défini comme il a été fait au paragraphe 32, celui des deux cercles bissecteurs, issu de chaque sommet, pour lequel le rapport tel que (6) est du signe du côté opposé; le *cercle bissecteur extérieur* correspond à l'autre signe.

Il résulte de la remarque faite sur les produits des signes des trois côtés que les trois cercles bissecteurs intérieurs forment un faisceau, ainsi que l'ensemble de deux bissecteurs extérieurs et d'un bissecteur intérieur; de même, les pieds des trois bissecteurs extérieurs, ou de deux bissecteurs intérieurs et du bissecteur extérieur du troisième angle sont trois bipoints cocycliques. Les trois bissecteurs intérieurs sont d'ailleurs concourants, comme le montre la figure où deux des côtés du tricercle sont rectilignes.

Appelons *milieu du côté* $\widehat{BC}$ du triangle ABC le bipoint $\Delta = (\mathrm{DD}')$ tel que

$$(7) \qquad \left[\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta\Gamma}\right] = \frac{\overline{\mathrm{D(BB')}}}{\overline{\mathrm{D(CC')}}} = \operatorname{sgn} \text{ côté } \widehat{BC},$$

et appelons *cercle médian intérieur* le cercle $(\mathbf{A}\Delta)$. Les trois cercles médians intérieurs forment un faisceau, et sont même concourants. On peut compléter ce résultat à l'aide des *cercles médians extérieurs*, définis en changeant le signe de (7). D'ailleurs en géométrie riemannienne, un cercle médian (ou bissecteur) extérieur d'un triangle est intérieur pour un autre triangle du même tricercle. Tous les résultats de ce paragraphe sont ainsi inclus dans le

THÉORÈME. — *Les trois cercles bissecteurs (médians) intérieurs d'un triangle cyclique concourent. Les pieds des trois cercles bissecteurs (médians) extérieurs sont cocycliques.*

En géométrie lobatchewskienne, il faut compléter en distinguant les cas de deux cercles médians intérieurs (extérieurs) associés avec un cercle médian extérieur (intérieur); les propriétés sont les mêmes que pour les cercles bissecteurs.

37. *Cercles médiateurs.* — Appelons *médiateur* du côté $\mathbf{B}\Gamma$ le lieu des bipoints équidistants des deux sommets $\mathbf{B}$ et Γ. Ce lieu se compose de deux cercles orthogonaux au cercle α. En effet, on sait qu'il revient au même de chercher le lieu des points équidistants. Soit alors μ et ν les cercles orthogonaux à α en $\mathbf{B}$ et Γ, respectivement. Nous avons vu au paragraphe 4 que

$$\overline{\mathrm{M}\mathbf{B}}^2 = \overline{\mathrm{M}\alpha}^2 + \overline{\mathrm{M}\mu}^2;$$

on a de même

$$\overline{\mathrm{M}\Gamma}^2 = \overline{\mathrm{M}\alpha}^2 + \overline{\mathrm{M}\nu}^2;$$

donc le médiateur de $\mathbf{B}\Gamma$ est le lieu des points M pour lesquels

$$\mathrm{M}\mu = \pm \mathrm{M}\nu. \tag{8}$$

Il se compose effectivement des deux cercles bissecteurs de l'angle $\widehat{\mu, \nu}$; ces deux cercles sont orthogonaux à α, comme le sont μ et ν. On peut encore dire que *les deux cercles médiateurs du côté* $\mathbf{B}\Gamma$ *sont les cercles orthogonaux à ce côté en l'un des bipoints* Δ *qui partage ce côté dans le rapport*

$$\left[\frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta\Gamma}\right] = \pm 1.$$

Le bipoint d'intersection de deux médiateurs orthogonaux à deux côtés différents est équidistant des trois sommets du tricercle; il y a ainsi quatre bipoints du champ qui sont équidistants de ces trois sommets. Les six cercles médiateurs forment, trois à trois, quatre faisceaux.

Si le tricercle est riemannien, on peut le supposer sphérique et formé par trois grands cercles; les cercles médiateurs sont alors les grands cercles orthogonaux au milieu [1] des arcs des huit triangles, et les quatre bipoints d'intersection sont réels.

Pour un tricercle lobatchewskien, on peut supposer que A' est à l'infini, A étant alors à l'extérieur du cercle α.

---

[1] Ceci résulte immédiatement de la note de la page 25.

Posons $AB = b$, $AB' = b'$, $AC = c$, $AC' = c'$, de sorte que $bb' = cc' = k^2$. Les abscisses, sur l'axe $AB = Ax$, d'un bipoint médian de $(A\infty)$ (BB'), sont donnés par l'équation

$$(x-b)(x-b') = \pm (b'-b)x,$$

ou

$$x^2 - [b + b' \pm (b - b')]x + bb' = 0.$$

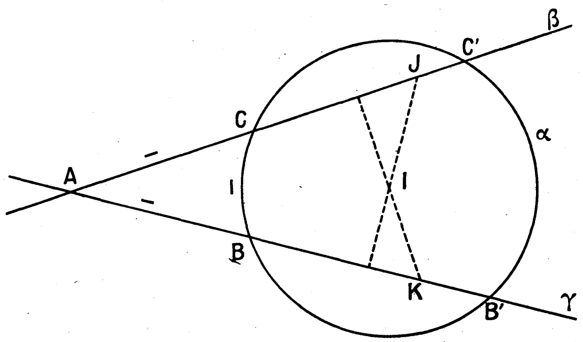

Fig. 3.

Une seule de ces deux équations a des racines réelles, donc chaque côté d'un triangle de cette espèce n'a qu'un bipoint médian réel; un tel triangle n'admet donc qu'un ou zéro bipoint réel équidistant de ses trois sommets (1). Le calcul montre d'ailleurs que les deux cas peuvent se présenter, suivant le signe + ou — de

$$\frac{\sin^2 \hat{A}}{k^2} - \frac{1}{b'^2} - \frac{1}{c'^2} + \frac{2}{b'c'}\cos \hat{A},$$

où, comme dans la figure 3, $b' > b$ et $c' > c$. Effectivement, quand b' et c' augmentent indéfiniment, cette expression devient du signe de sa partie principale $\frac{\sin^2 A}{bb'}$, donc positive, alors que le triangle ABC se rapproche de la forme rectiligne.

38. *Hauteurs d'un tricercle.* — Ce sont les cercles passant par un sommet et orthogonaux au côté opposé. Par **A** il passe une seule hauteur, sauf si $\widehat{\alpha, \beta} = \widehat{\alpha, \gamma} = \frac{\pi}{2}$, dans quel cas tous les cercles issus de **A** sont orthogonaux à α. Dans ce cas, A et A′ sont d'ailleurs conjugués par rapport à α, et le tricercle est riemannien. Si les trois angles du tricercle sont droits, tout cercle passant par un sommet est hauteur.

Dans le cas général, il n'y a que trois hauteurs. Il est aisé de voir qu'elles font partie d'un même faisceau, de sorte qu'un tricercle a un *bipoint orthocentre*,

(1) Il y a tout de même quatre lieux d'équidistance, réels, passant par les trois sommets; ils sont formés, sur la figure 3, d'une droite associée à un cercle, tels que B′C′ et (ABC).

ou *orthobicentre*, mais réel ou non. Il est toujours réel pour un triangle riemannien, anallagmatiquement équivalent à un triangle sphérique.

Pour démontrer l'existence de cet orthobipoint, supposons encore A' à l'infini et reprenons la figure 3. Soit I le centre de α. La hauteur issue de (BB') est le cercle passant par (BB') et centré sur β; son centre J est donc l'intersection de β avec la perpendiculaire abaissée de I sur γ; de même, le centre K de la hauteur qui passe par (CC') est l'intersection de γ avec la perpendiculaire abaissée de I sur β. La troisième hauteur est la droite AI. On est conduit à montrer que AI est l'axe radical des deux premières hauteurs; A appartient *a priori* à cet axe, et il suffit de montrer que AI est perpendiculaire à la ligne des centres IJ; or c'est évident, puisque IJ et IK sont deux hauteurs du triangle rectiligne AJK. Il est clair que la position de A par rapport à α n'interviendrait que pour discuter la réalité de cet orthobicentre. Donnons seulement le résultat de cette discussion, qui n'est nécessaire que lorsque A est extérieur à α, et dont le calcul est élémentaire. En posant $AB = ke^{-u}$, $AB' = ke^{u}$, $AC = ke^{-v}$, $AC' = ke^{v}$, les éléments de l'orthobicentre, rapportés aux axes $Ax = ABB'$ et $Ay = ACC'$, ont les coordonnées

$$x = \rho\left(\operatorname{ch} u - \operatorname{ch} v \cos\widehat{A}\right), \qquad y = \rho\left(\operatorname{ch} v - \operatorname{ch} u \cos\widehat{A}\right),$$

avec

$$\left(\operatorname{ch}^2 u + \operatorname{ch}^2 v - 2\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \cos\widehat{A}\right)\rho^2 \sin^2\widehat{A} - 2k \operatorname{ch} u \operatorname{ch} v \frac{\sin^2\widehat{A}}{\cos\widehat{A}}\rho + k^2 = 0.$$

La réalité de ρ dépend du signe de

$$\operatorname{tang}^2\widehat{A} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v} + \frac{2}{\operatorname{ch} u \operatorname{ch} v}\cos\widehat{A},$$

qui est positif si $\widehat{A}$ est suffisamment voisin de $\frac{\pi}{2}$, et négatif dans le cas contraire.

39. On peut établir, entre les longueurs des côtés et des hauteurs, et les angles, des relations analogues à celles des triangles rectilignes euclidiens. Désignons par a, b, c les longueurs absolues des trois côtés $|\mathbf{B\Gamma}|$, $|\mathbf{\Gamma A}|$, $|\mathbf{AB}|$, et par h, h', h'' celles des trois hauteurs $|\mathbf{A}\alpha|$, $|\mathbf{B}\beta|$, $|\Gamma\gamma|$. On sait que l'on a $h = b \sin\widehat{C} = c \sin\widehat{B}$, donc

$$ah = ab\sin\widehat{C} = ac\sin\widehat{B} = bc\sin\widehat{A}, \tag{9}$$

l'égalité avec le dernier rapport résultant de (2). On a de même

$$bh' = bc\sin A,$$

donc les trois hauteurs sont telles que

$$ah = bh' = ch'' = bc\sin A. \tag{10}$$