ANDRÉ LICHNEROWICZ

Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 58 (1941), p. 285-304
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1941_3_58__285_0>

SUR

L'INVARIANT INTÉGRAL

DE

L'HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

PAR M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

Introduction.

Dans un très élégant Mémoire intitulé « Relativistic hydrodynamics » (1), J. L. Synge s'est, le premier, efforcé de développer systématiquement une théorie relativiste du fluide parfait, analogue à l'hydrodynamique classique. Dans ce travail, il montre en particulier qu'il est possible de développer une théorie des tourbillons étendant à la mécanique relativiste la théorie classique de Helmholtz. Dans une Note et un Mémoire (2) précédents, j'ai étudié moi-même les mouvements permanents et les mouvements irrotationnels d'un fluide parfait. Des extensions du théorème de Bernoulli et des théorèmes classiques sur les mouvements irrotationnels d'un fluide homogène incompressible ont été obtenues. Mais ces différents résultats de Synge et de moi-même restaient sans grande cohérence et les raisons du succès n'apparaissaient pas nettement.

(1) J. L. SYNGE, *Proc. London Math. Soc.*, 43, 1937, p. 376-416. Ce Mémoire sera désigné, dans la suite, par la lettre S.

(2) LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, 211, 1940, p. 117-119 et *Bull. des Sc. Math.*, 65, 1941, p. 54-72. Ce dernier Mémoire sera désigné par la lettre L.

On trouvera, dans le présent Mémoire, les bases d'une théorie cohérente de l'hydrodynamique relativiste fondée sur l'existence d'un invariant intégral pour les équations du mouvement. Ce travail réalise l'extension relativiste du point de vue adopté, pour l'hydrodynamique classique, par M. Élie Cartan dans ses *Leçons sur les invariants intégraux* (¹). On verra combien le point de vue de M. Cartan se prête bien, par sa nature même, à une telle extension et tout ce que la théorie y gagne en clarté et en cohérence. A rapprocher du fait suivant : l'introduction de l'invariant intégral complet de la mécanique permet d'obtenir un schéma, invariant dans l'univers, « auquel doivent se subordonner toutes les théories mécaniques et auquel en effet se subordonne la Mécanique relativiste elle-même » (C, p. 8).

Dans une première partie, je montre que le système différentiel aux lignes de courant admet l'invariant intégral relatif au sens de Poincaré

$$\int \omega = \int C_\lambda \, dx^\lambda,$$

où C_λ désigne le vecteur-courant. L'existence de cet invariant intégral est en liaison étroite avec un résultat fondamental de Eisenhart (²) qui joue, dans notre théorie, le rôle d'un principe de moindre action. Je forme ensuite l'invariant intégral absolu associé $\int \omega'$, qui introduit, de la manière la plus naturelle, le tenseur de tourbillon, et j'en déduis le système caractéristique de la forme invariante ω.

En hydrodynamique classique, l'existence des lignes de tourbillon résulte immédiatement du fait que la forme ω est invariante par d'autres systèmes différentiels que celui des lignes de courant. Dans une seconde partie, j'étudie donc le système caractéristique de ω et les variétés caractéristiques correspondantes. On peut alors introduire des lignes de tourbillon proprement dites, susceptibles d'une définition intrinsèque et des lignes de pseudo-tourbillon pouvant jouer le rôle

(¹) É. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, 1922. Cet ouvrage sera désigné par la lettre C.

(²) EISENHART, *Trans. American Math. Soc.*, 26, 1924, p. 205-220, désigné dans la suite par la lettre E.

de lignes de tourbillon dans un repérage déterminé de l'espace-temps. Une théorie complète des tubes de tourbillon en résulte.

Une troisième partie est consacrée à l'étude des mouvements permanents. Il est essentiel de noter que, dans ce cas, le système différentiel aux lignes de courant admet une transformation infinitésimale. On peut alors déduire de ω une nouvelle forme invariante qui donne, pour le système, une intégrale première généralisant celle du théorème de Bernoulli. La théorie des mouvements permanents se construit ainsi de la manière la plus simple.

On notera que la théorie développée est valable non seulement pour un fluide parfait, mais encore pour tous les milieux continus que j'ai appelés *holonomes*, c'est-à-dire qui sont tels que le vecteur force pondéromotrice unitaire J_λ dérive d'un potentiel. Les notations du présent travail sont celles de ma *Thèse* (1). En particulier, la variable temporelle correspond à l'indice 4, les indices grecs sont toujours susceptibles des valeurs 1, 2, 3, 4, les indices latins des valeurs 1, 2, 3 seulement.

I. — Recherche de l'invariant intégral.

1. **Équations différentielles des lignes de courant.** — Considérons un domaine de l'espace-temps occupé par un milieu continu de nature quelconque. A l'intérieur de ce domaine, la métrique de l'espace-temps

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \chi T_{\alpha\beta},$$

où χ désigne une constante et $T_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique, de signification purement mécanique, descriptif du milieu continu en mouvement. On donne au tenseur $T_{\alpha\beta}$ le nom de *tenseur d'énergie* du milieu. Le tenseur $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ étant conservatif, il en est de même du

(1) LICHNEROWICZ, *Sur certains problèmes globaux relatifs au système des équations d'Einstein*. Hermann, Paris, 1939.

tenseur $T_{\alpha\beta}$. Les composantes de ce tenseur satisfont donc aux équations de conservation

$$\nabla_\alpha(T^\alpha_\beta) = 0. \tag{1.1}$$

Nous désignerons par u^α le vecteur-vitesse du milieu, c'est-à-dire (1) le vecteur unitaire de celle des directions principales de l'espace-temps qui est orientée dans le temps. Le vecteur u^α étant unitaire,

$$u^\alpha u_\alpha = 1, \qquad u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 0. \tag{1.2}$$

Nous supposerons (2) qu'on a mis le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \tau_{\alpha\beta}, \tag{1.3}$$

où ρ est un scalaire positif que nous appellerons pseudo-densité d'énergie et $\tau_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique quelconque. Les conditions de conservation (1.1) s'écrivent alors

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha u_\beta) = \nabla_\alpha(\tau^\alpha_\beta).$$

La forme de ces conditions nous conduit à introduire, au lieu du tenseur $\tau_{\alpha\beta}$, le vecteur J_β défini par les équations

$$\nabla_\alpha(\tau^\alpha_\beta) = \rho J_\beta$$

et qui joue dans la suite le rôle d'une force pondéromotrice unitaire. En tenant compte des équations (1.2) dans les conditions de conservation

$$\nabla_\alpha(\rho u_\alpha u_\beta) = \rho J_\beta,$$

nous aboutissons aux équations fondamentales

$$\nabla_\alpha(\rho u^\alpha) = \rho J_\alpha u^\alpha, \tag{1.4}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = J_\beta - J_\alpha u^\alpha u_\beta, \tag{1.5}$$

(1.4) joue, pour le milieu, le rôle d'une équation de continuité. Les équations (1.5) déterminent les lignes de courant, tangentes en chacun de leurs points au vecteur-vitesse u^α.

---

(1) *Cf.* LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, 212, 1941, p. 421.

(2) *Cf.* G. DARMOIS, *Mém. des Sc. Math.*, fasc. 25, p. 25, et LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, 212, 1941, p. 330.

2. **Les milieux holonomes.** — La théorie, développée dans le présent Mémoire, est applicable à tous les milieux continus pour lesquels le vecteur J_β dérive d'un potentiel. Nous dirons qu'un tel milieu est un milieu *holonome*. Si nous représentons par $\log F$ le potentiel d'où dérive le vecteur J_β, les équations (1.5) des lignes de courant s'écrivent

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial_\alpha F}{F}(g_\beta^\alpha - u^\alpha u_\beta). \tag{2.1}$$

Le cas le plus remarquable d'un milieu holonome est celui d'un fluide parfait admettant une équation d'état. On peut, dans ce cas, adopter pour le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ la forme

$$\tau_{\alpha\beta} = p g_{\alpha\beta},$$

tandis que la pseudo-densité d'énergie est donnée, à partir de la densité d'énergie propre μ, par la relation

$$\rho = \mu + p,$$

où μ et p sont liés par l'équation d'état. Le vecteur J_β et la fonction F admettent respectivement pour expressions

$$J_\beta = \frac{\partial_\beta p}{\rho}, \qquad F = e^{\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}}.$$

3. **Variation de $\varphi = \int F\,ds$.** — Supposons tracée dans l'espace-temps une courbe C, le long de laquelle les x^α soient des fonctions d'un certain paramètre u et désignons par $\dot{x}^\alpha$ leurs dérivées par rapport à u :

$$\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{du}.$$

Soit $W(x^\alpha, \dot{x}^\beta)$ une fonction des x^α et des $\dot{x}^\beta$, supposée homogène et du premier degré par rapport aux $\dot{x}^\beta$; nous lui ferons correspondre l'intégrale

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_1} W(x^\alpha, \dot{x}^\beta)\,du$$

calculée le long de C. La courbe C étant supposée se déformer, regardons les x^α, u_0, u_1 comme des fonctions d'un nouveau paramètre λ, les valeurs limites x_0^α, x_1^α étant elles-mêmes fonctions de λ, et cherchons à évaluer la variation de Φ quand on donne à λ un accroissement $\delta\lambda$.

Par un calcul classique (¹), il vient

$$\delta\Phi = W_1\,\delta u_1 - W_0\,\delta u_0 + \left[\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}\delta x^\alpha\right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1}\left[\frac{d}{du}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\right]\delta x^\alpha\,du.$$

En calculant $(\delta x^\alpha)_{u_0}$ et $(\delta x^\alpha)_{u_1}$ en fonction de δx_0^α et δx_1^α, on peut mettre la variation de Φ sous la forme

$$\delta\Phi = [\omega(\delta)]_1 - [\omega(\delta)]_0 - \int_{u_0}^{u_1}\left[\frac{d}{du}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial W}{\partial x^\alpha}\right]\delta x^\alpha\,du, \tag{3.1}$$

où $\omega(\delta)$ désigne la forme linéaire

$$\omega(\delta) = \frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}\delta x^\alpha - \left[\dot{x}^\alpha\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} - W\right]\delta u;$$

mais si l'on tient compte du caractère homogène de W, le coefficient de δu dans $\omega(\delta)$ est nécessairement nul et la forme linéaire se réduit identiquement à

$$\omega(\delta) = \frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}\delta x^\alpha. \tag{3.2}$$

4. Adoptons, pour fonction W, la fonction

$$W = F\frac{ds}{du},$$

où F ne dépend que des x^α et soit $\varphi = \int F\,ds$ l'intégrale correspondante. La fonction W satisfaisant à la relation

$$W^2 = F^2 g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta,$$

il vient

$$W\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} = F^2 g_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta,$$

$$W\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} = F\left[\partial_\alpha F\,g_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma + \frac{1}{2}F\,\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma\right].$$

(¹) *Cf.* C, p. 10.

En reportant ces valeurs de $\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha}$ et $\frac{\partial W}{\partial x^\alpha}$ dans les équations (3.1) et (3.2) et en prenant pour paramètre u l'abscisse curviligne s de la courbe C, on peut mettre la variation de φ sous la forme

$$(4.1)\quad \delta\varphi = [\omega(\delta)]_1 - [\omega(\delta)]_0 - \int_{s_0}^{s_1}\left[\frac{d}{ds}(\mathrm{FV}_\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{F}\,\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\mathrm{V}^\beta\mathrm{V}^\gamma - \partial_\alpha \mathrm{F}\right]\delta x^\alpha\, ds$$

avec

$$(4.2)\qquad \omega(\delta) = \mathrm{FV}_\alpha\,\delta x^\alpha,$$

où V_α désigne le vecteur unitaire de la courbe C.

5. **Le principe d'extremum** (1). — Appliquons la formule (4.1) au cas où les valeurs limites x_0^α, x_1^α sont fixes, indépendantes de λ. Dans ces conditions, la variation de l'intégrale φ se réduit à

$$\begin{aligned}\delta\varphi &= -\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}\left[\frac{d}{ds}(\mathrm{FV}_\alpha) - \frac{1}{2}\mathrm{F}\,\partial_\alpha g_{\beta\gamma}\mathrm{V}^\beta\mathrm{V}^\gamma - \partial_\alpha\mathrm{F}\right]\delta x^\alpha\, ds\\ &= -\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}\mathrm{F}\left[\mathrm{V}^\beta\nabla_\beta\mathrm{V}_\alpha - \frac{\partial_\beta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}(g_\alpha^\beta - \mathrm{V}^\beta\mathrm{V}_\alpha)\right]\delta x^\alpha\, ds,\end{aligned}$$

et les courbes qui réalisent l'extremum de φ satisfont aux équations différentielles

$$(5.1)\qquad \mathrm{V}^\alpha\nabla_\alpha\mathrm{V}_\beta = \frac{\partial_\alpha\mathrm{F}}{\mathrm{F}}(g_\beta^\alpha - \mathrm{V}^\alpha\mathrm{V}_\beta),$$

qui sont formellement identiques aux équations (2.1) des lignes de courant. Il en résulte le théorème suivant :

Théorème. — *Dans tout milieu holonome, les lignes de courant réalisent l'extremum de l'intégrale*

$$\varphi = \int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}\mathrm{F}\, ds$$

par rapport aux courbes infiniment voisines admettant les mêmes extrémités.

(1) *Cf.* E, p. 216, S p. 393, L p. 59.

Ainsi les lignes de courant sont géodésiques d'un espace de Riemann conforme à l'espace-temps fondamental et défini par la métrique

$$d\varphi^2 = F^2\, ds^2. \tag{5.2}$$

A la fonction F, on donne le nom d'indice [1] du milieu considéré.

6. **L'invariant intégral relatif.** — Appliquons maintenant la formule (4.1) à une suite continue de lignes de courant dont chacune est limitée à un arc M_0M_1 variable avec λ. Il vient

$$\delta\varphi = [\omega(\delta)]_{M_1} - [\omega(\delta)]_{M_0}.$$

Par suite, si nous considérons un tube de lignes de courant sur lequel le point M_0 décrit une courbe *fermée* Γ_0 et le point M_1 une courbe *fermée* Γ_1, la variation totale de l'intégrale φ lorsqu'on revient à la ligne de courant initiale est nulle et l'on a

$$\int_{\Gamma_1} [\omega(\delta)]_{M_1} = \int_{\Gamma_0} [\omega(\delta)]_{M_0}.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Pour toute suite fermée de points* M *choisie dans le milieu, l'intégrale*

$$\int \omega(\delta) = \int F\, u_\alpha\, \delta x^\alpha,$$

étendue à cette suite fermée, conserve sa valeur lorsqu'on déplace chaque point M *sur la ligne de courant issue de ce point.*

Ce théorème nous amène au résultat fondamental suivant : *le système des équations différentielles des lignes de courant*

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha; \tag{6.1$_a$}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial_\alpha F}{F}\,(g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \tag{6.1$_b$}$$

admet l'invariant intégral relatif

$$\int \omega(\delta) = \int F\, u_\alpha\, \delta x^\alpha. \tag{6.2}$$

---

(1) *Cf.* S, p. 391.

Dans l'expression de l'invariant intégral (6.2), apparaît le vecteur $C_\alpha = F u_\alpha$, qui n'est autre que le vecteur collinéaire à u_α et unitaire dans la métrique (5.2). Nous donnerons à ce vecteur le nom de *vecteur-courant* et nous pouvons encore énoncer :

Théorème. — *La circulation du vecteur-courant est la même le long de tout circuit fermé tracée sur un tube de lignes de courant et en faisant une fois le tour.*

On reconnaît là la généralisation du théorème classique sur la conservation de la circulation.

7. **L'invariant intégral absolu à deux dimensions.** — Considérons un mouvement *déterminé* du milieu holonome envisagé. Dans un tel mouvement, les composantes u^α du vecteur-vitesse ainsi que les composantes $\overline{C}^\alpha$ du vecteur-courant sont des fonctions connues des x^α qui, dans le cas du vecteur u^α, satisfont au système différentiel $(6.1)_b$. Les lignes de courant peuvent ainsi être regardées comme solutions du système d'équations différentielles

$$\frac{dx^\alpha}{d\varphi} = \overline{C}^\alpha \qquad (\overline{C}^\alpha = F^{-1} u^\alpha), \tag{7.1}$$

où les $\overline{C}^\alpha$ sont des fonctions déterminées des x^α. Le système (7.1) admet, comme le système (6.1), l'invariant intégral relatif

$$\int_\Gamma \omega(\delta) = \int_\Gamma C_\alpha\, \delta x^\alpha. \tag{7.2}$$

A cet invariant intégral relatif, nous pouvons faire correspondre un invariant intégral absolu à deux dimensions. Il suffit pour cela de transformer l'intégrale (7.2) en une intégrale double. Soit D un domaine à deux dimensions limité au contour Γ; il vient

$$\int_\Gamma \omega = \iint_D \omega',$$

où ω' désigne la forme quadratique dérivée de ω

$$\omega' = \Omega_{\alpha\beta}[\delta x^\alpha\, \delta x^\beta] \tag{7.3}$$

avec

$$(7.4)\qquad \Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha C_\beta - \partial_\beta C_\alpha = \nabla_\alpha C_\beta - \nabla_\beta C_\alpha.$$

Nous donnerons au tenseur antisymétrique $\Omega_{\alpha\beta}$, le nom de tenseur de *tourbillon* (¹) et nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Pour tout domaine* D *à deux dimensions, l'intégrale*

$$\iint_D \Omega_{\alpha\beta}\, \delta x^\alpha\, \delta x^\beta$$

conserve sa valeur lorsqu'on déplace chaque point du domaine sur la ligne de courant issue de ce point.

Ainsi le système différentiel aux lignes de courant admet l'invariant intégral absolu défini par la forme quadratique (7.3).

II. — Les lignes de tourbillon.

8. **Le système caractéristique de la forme** ω. — Dans la première partie de ce travail, nous avons montré que le système différentiel (7.1) aux lignes de courant admet l'intégrale $\int \omega$ comme invariant relatif. Proposons-nous maintenant de rechercher tous les systèmes différentiels de même forme qui jouissent, par rapport à $\int \omega$, de la même propriété. Dans ce but, nous formerons le système caractéristique (²) de la forme ω, qui coïncide avec le système associé de ω'; ce système s'écrira donc

$$(8.1)\qquad \Omega_{\alpha\beta}\, dx^\beta = 0.$$

A tout vecteur V^β tel que

$$(8.2)\qquad \Omega_{\alpha\beta} V^\beta = 0,$$

(¹) Ce n'est autre que le dynamical vorticity-tensor de Synge; *cf.* S, p. 395.
(²) *Cf.* C, p. 75.

correspondra le système différentiel

$$(8.3) \qquad \frac{dx^1}{V^1} = \frac{dx^2}{V^2} = \frac{dx^3}{V^3} = \frac{dx^4}{V^4},$$

laissant invariantes les formes ω et ω'. Nous sommes donc amené à étudier le nombre des équations indépendantes du système (8.2).

D'après un théorème classique [1] sur la classe d'une forme quadratique extérieure, ce nombre est nécessairement pair et il est inférieur à 4 puisque (7.1) laisse invariantes les formes ω et ω'. Il en résulte que le système (8.2) est nécessairement de rang 2 ou 0.

a. Si le système (8.2) est de rang 2, le mouvement du milieu considéré sera dit *rotationnel*. La forme ω' admet alors des variétés caractéristiques à deux dimensions que l'on peut engendrer par des lignes de courant et qui seront étudiées dans les paragraphes qui vont suivre.

b. Si le système (8.2) est de rang 0, le mouvement du milieu sera dit *irrotationnel*. Dans ce cas, le tenseur de tourbillon $\Omega_{\alpha\beta}$ est identiquement nul et les lignes de courant, géodésiques de la métrique (5.2), forment une congruence de normales [2].

L'introduction des mouvements irrotationnels s'effectue ainsi de la manière la plus naturelle, et ce mode de définition nous paraît préférable à celui donné par Synge [3]. On trouvera, dans le travail de Synge et dans notre Mémoire précédemment cité, une étude approfondie de ces mouvements. Nous nous limiterons désormais au cas où le mouvement considéré est rotationnel.

9. **Le vecteur-tourbillon.** — Reprenons les variétés caractéristiques à deux dimensions introduites au paragraphe 8 et cherchons à définir

---

(1) *Cf.* C, p. 53.

(2) *Cf.* L, p. 59-60.

(3) La définition du mouvement irrotationnel donnée par Synge fait intervenir le « kinematical vorticityvector » ω_λ. Synge indique même dans une Note (S, p. 381) qu'il semblerait naturel, si une telle condition n'était pas trop stricte, de définir le mouvement irrotationnel par les équations $\omega_{\lambda\mu} = 0$, $\omega_{\lambda\mu}$ désignant le « kinematical vorticity-tensor ». Le mode de définition donné ici, qui est strictement équivalent à celui utilisé en hydrodynamique classique, montre que l'introduction des tenseurs « cinématiques » est peu satisfaisante.

leur élément-plan tangent en un point. De cet élément-plan, nous connaissons déjà la direction C^λ ($C^\lambda = F u^\lambda$) du vecteur-courant

$$\Omega_{\lambda\mu} C^\mu = 0. \tag{9.1}$$

Il nous suffira donc de rechercher une seconde direction θ^λ de ce plan, direction que nous choisirons orthogonale à la première. Nous sommes ainsi amené à déterminer un vecteur θ^λ satisfaisant aux équations

$$\Omega_{\lambda\mu} \theta^\mu = 0, \tag{9.2$_a$}$$

$$C_\mu \theta^\mu = 0. \tag{9.2$_b$}$$

Adoptons provisoirement, pour système de coordonnées, un système dans lequel les lignes de temps coïncident avec les lignes de courant. Il vient

$$C^1 = C^2 = C^3 = 0, \qquad C^4 \neq 0,$$

et, en vertu des équations (9.1),

$$\Omega_{14} = \Omega_{24} = \Omega_{34} = 0.$$

Les équations (9.2) se réduisent alors aux équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\Omega_{12}\theta^2 + \Omega_{13}\theta^3 = 0, \\ &\Omega_{21}\theta^1 + \Omega_{23}\theta^3 = 0, \\ &\Omega_{31}\theta' + \Omega_{32}\theta^2 = 0; \end{aligned} \right. \tag{9.3$_a$}$$

$$\theta_4 = 0, \tag{9.3$_b$}$$

La résolution des équations (9.3) nous conduit à la solution

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta^1 = A\Omega_{23}, \qquad \theta^2 = A\Omega_{31}, \qquad \theta^3 = A\Omega_{12}, \\ &\theta^4 = -A u^4 [u_1\Omega_{23} + u_2\Omega_{31} + u_3\Omega_{12}], \end{aligned} \right. \tag{9.4}$$

où A désigne un facteur arbitraire. Si nous choisissons

$$A = (-g)^{-\frac{1}{2}} u_4,$$

nous pouvons mettre (9.4) sous la forme

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \varepsilon^{1423} (-g)^{-\frac{1}{2}} u_4 \Omega_{23}, \\ \theta^2 &= \varepsilon^{2431} (-g)^{-\frac{1}{2}} u_4 \Omega_{31}, \\ \theta^3 &= \varepsilon^{3412} (-g)^{-\frac{1}{2}} u_4 \Omega_{12}, \\ \theta^4 &= \varepsilon^{4\beta\gamma\delta} (-g)^{-\frac{1}{2}} u_\beta \Omega_{\gamma\delta}, \end{aligned}$$

où $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ représente l'indicateur classique associé à une permutation. Par suite, dans un système de coordonnées arbitraire, les composantes du vecteur θ^α sont données par la formule contravariante

$$\theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(-g)^{-\frac{1}{2}} u_\beta \Omega_{\gamma\delta}. \tag{9.5}$$

Nous donnerons au vecteur θ^α, défini par la formule (9.5), le nom de *vecteur-tourbillon*. Les lignes, trajectoires du champ de vecteurs θ^α, seront dites *lignes de tourbillon*. Ces lignes, orthogonales aux lignes de courant, sont partout orientées dans l'espace.

10. Moment d'un tube de tourbillon. — Le vecteur θ^α satisfaisant aux équations (8.2), il résulte des considérations développées au paragraphe 8 que le système différentiel aux lignes de tourbillon

$$\frac{dx^1}{\theta^1} = \frac{dx^2}{\theta^2} = \frac{dx^3}{\theta^3} = \frac{dx^4}{\theta^4} \tag{10.1}$$

laisse invariantes les formes ω et ω'.

Soit alors Γ_0 une courbe fermée arbitraire. Par chaque point de Γ_0 menons la ligne de tourbillon issue de ce point. Nous engendrons ainsi une variété Σ à deux dimensions appelée *tube de tourbillon*. Traçons sur Σ une courbe fermée Γ_1 faisant le tour du tube; comme $\int \omega(\delta)$ est invariant intégral relatif pour le système (10.1), il vient

$$\int_{\Gamma_0} \omega(\delta) = \int_{\Gamma_1} \omega(\delta),$$

et nous pouvons énoncer le théorème

Théorème. — *La circulation du vecteur-courant est la même le long de tout circuit fermé tracé sur un tube de tourbillon et en faisant une fois le tour.*

Par analogie avec l'hydrodynamique classique, nous dirons que cette circulation définit le *moment* du tube de tourbillon Σ considéré.

11. Conservation du moment d'un tube de tourbillon. — Considérons un tube de tourbillon Σ de moment M et soit Γ une courbe fermée tracée sur Σ et en faisant le tour. Par les différents points de Γ, menons les lignes de courant issues de ces points; nous engendrons ainsi un tube S de lignes de courant sur lequel nous tracerons une courbe fermée Γ' faisant le tour de ce tube. Les lignes de tourbillon issues des différents points de Γ' déterminent un tube de tourbillon Σ' de moment M'.

D'après la définition du moment d'un tube de tourbillon et en vertu du théorème du paragraphe 6, il vient

$$M' = \int_{\Gamma'} C_\alpha \, \delta x^\alpha = \int_{\Gamma} C_\alpha \, \delta x^\alpha = M,$$

ce que nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Deux tubes de tourbillon Σ et Σ' qui s'appuient sur un même tube* S *de lignes de eourant, ont même moment.*

On reconnaît là une généralisation d'un théorème classique dû à Helmholz. L'échange des rôles joués par les lignes de courant et les lignes de tourbillon, conduit d'ailleurs à une proposition analogue.

12. **Les variétés caractéristiques**. — Le système caractéristique $\Omega_{\alpha\beta} dx^\beta = 0$ de la forme ω, définit des variétés V à deux dimensions, dépendant de deux constantes arbitraires de telle façon qu'il en passe une et une seule par tout point de l'espace-temps. Ce sont les variétés caractéristiques dont nous avons déjà parlé. Ces variétés peuvent être engendrées par des lignes de courant et sont par suite toujours orientées dans le temps. Elles peuvent aussi être engendrées par des lignes de tourbillon. Ce double mode de génération rend leur construction immédiate.

Pour construire la variété caractéristique V_0 passant par un point P_0 de l'espace-temps, on mène la ligne de courant C_0 et la ligne de tourbillon $\mathfrak{T}_0$ issue de ce point. Les lignes de courant C passant par les points de $\mathfrak{T}_0$ engendrent la variété V_0. Soit P un point quelconque de C_0; la ligne de tourbillon $\mathfrak{T}$ issue de P est située sur V_0 et, sur cette variété, est trajectoire orthogonale des lignes de courant C. La réciproque étant immédiate, nous sommes conduit à énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'on mène les lignes de courant passant par les points d'une ligne de tourbillon, les trajectoires orthogonales de ces lignes de courant sont lignes de tourbillon.*

Ce théorème est, dans notre théorie, l'analogue du théorème classique : si une ligne fluide est de tourbillon à un instant, elle est de tourbillon à tout instant. La propriété des systèmes différentiels aux lignes de courant et aux lignes de tourbillon d'admettre le même invariant intégral $\int \omega$, nous a ainsi conduit à étendre entièrement à l'hydrodynamique relativiste la théorie des tourbillons.

13. **Systèmes différentiels admettant ω pour forme invariante. Lignes de pseudo-tourbillon.** — Reprenons le système linéaire (8.2)

$$\Omega_{\alpha\beta} V^{\alpha} = 0.$$

De ce système de rang 2, nous connaissons deux solutions particulières, orthogonales l'une à l'autre, C^{α} et θ^{α}. Ces solutions étant distinctes, la solution la plus générale du système (8.2) peut s'écrire

$$V^{\alpha} = \lambda C^{\alpha} + \mu \theta^{\alpha}, \tag{13.1}$$

où λ et μ désignent deux scalaires arbitraires; par suite le système différentiel le plus général, laissant invariantes les formes ω et ω', est le système

$$\frac{dx^1}{\lambda C^1 + \mu \theta^1} = \frac{dx^2}{\lambda C^2 + \mu \theta^2} = \frac{dx^3}{\lambda C^3 + \mu \theta^3} = \frac{dx^3}{\lambda C^4 + \mu \theta^4}. \tag{13.2}$$

Nous donnerons aux lignes T, solutions du système (13.2), le nom de *lignes de pseudo-tourbillon*. Une famille quelconque de ces lignes jouit, relativement à l'invariant intégral $\int \omega$, de propriétés identiques à celles des lignes de tourbillon. En particulier les théorèmes des paragraphes 10 et 11 s'étendent immédiatement aux tubes de pseudo-tourbillon.

N'étant pas orthogonales aux lignes de courant, les lignes T ne sont pas nécessairement orientées dans l'espace. Il est clair en effet que les différentes familles de lignes de pseudo-tourbillon ne sont autres que les différentes familles de lignes tracées sur les variétés caractéristiques V. Celles-ci étant orientées dans le temps, les lignes T peuvent être orientées dans le temps, dans l'espace ou même être de longueur nulle.

Les lignes de pseudo-tourbillon sont de longueur nulle lorsqu'elles sont trajectoires du vecteur

$$V^\alpha = \pm \theta u^\alpha + \theta^\alpha,$$

où θ désigne la mesure du vecteur-tourbillon. L'importance physique de ces lignes de longueur nulle apparaîtra ultérieurement.

III. — Les mouvements permanents.

14. **Définition d'un mouvement permanent.** — Nous dirons qu'un milieu holonome est *en mouvement permanent* lorsque les potentiels $g_{\alpha\beta}$ de la métrique associée au milieu et l'indice F du milieu sont indépendants de la variable temporelle x^4. Il résulte de la définition du vecteur-vitesse rappelée au paragraphe 1 que, dans ces conditions, les composantes u^α de ce vecteur demeurent, elles aussi, constantes le long d'une ligne de temps.

Considérons par exemple un fluide parfait admettant une équation d'état et dont le mouvement soit tel que la métrique associée soit statique. On peut montrer (¹) que la donnée d'une telle métrique le long d'une section d'espace $S(x^4 = \text{const.})$ détermine les valeurs sur S de la densité de matière μ et de la pression p du fluide. Il en résulte que μ, p et par suite F ont, tout le long d'une ligne de temps, des valeurs constantes. Nous énoncerons

Théorème. — *Si un fluide parfait admet une équation d'état, tout mouvement de ce fluide, pour lequel la métrique de l'espace-temps est du type statique le plus général, est un mouvement permanent.*

Considérons un milieu holonome quelconque en mouvement

(¹) *Cf.* Lichnerowicz, *Thèse*, Hermann (1939), p. 29-30.

permanent et soit

$$\frac{dx^\alpha}{d\varphi} = \overline{C}^\alpha \tag{14.1}$$

le système différentiel aux lignes de courant. Les équations (14.1), ne contenant pas explicitement la variable x^4, ne changent pas par la transformation $(x^4)' = x^4 + h$. Elles admettent donc la transformation infinitésimale

$$Xf = \partial_4 f.$$

L'étude des mouvements permanents est ainsi ramenée, comme dans le cas classique, à l'étude d'un système différentiel admettant simultanément un invariant intégral et une transformation infinitésimale.

15. **L'intégrale première** C_4. — Le système (14.1) admet l'invariant intégral absolu $\int\int \omega'$ dont l'élément d'intégration se déduit par dérivation extérieure de la forme linéaire

$$\omega = C_\alpha \,\delta x^\alpha.$$

La forme ω' peut donc s'écrire

$$\omega' = [\delta C_\alpha \,\delta x^\alpha]. \tag{15.1}$$

L'existence de la transformation infinitésimale Xf permet de déduire de la forme quadratique invariante ω' une forme linéaire invariante $\omega'(X, \delta)$. Il vient

$$\omega'(X, \delta) = \frac{\partial \omega'}{\partial(\delta x^4)} = -\,\delta C_4. \tag{15.2}$$

Par suite C_4 est une intégrale première du système (14.1) aux lignes de courant, et nous pouvons énoncer (1) :

THÉORÈME. — *Dans tout mouvement permanent d'un milieu holonome, la quantité* C_4 *conserve une valeur constante le long de chaque ligne de courant.*

---

(1) *Cf.* LICHNEROWICZ, *C. R. Acad. Sc.*, 211, 1940, p. 117. On trouvera dans cette Note une démonstration directe du présent théorème.

16. **Cas des lignes de tourbillon.** — Pour tout milieu holonome en mouvement permanent, le système différentiel (10.1) aux lignes de tourbillon admet, comme le système différentiel aux lignes de courant, la transformation infinitésimale Xf. Le système (10.1) laissant invariante la forme ω', il en résulte que la quantité C_4 demeure encore constante le long de chaque ligne de tourbillon.

Plus généralement la composante C_4, étant intégrale première du système (14.1), conserve une valeur constante sur toute variété caractéristique V(1). Cette proposition résulte encore immédiatement du fait que ces variétés peuvent être engendrées par des lignes de temps. Nous avons ainsi pu mettre en évidence des familles à un paramètre de lignes de courant (ou de lignes de tourbillon) pour lesquelles C_4 admet la même valeur.

17. **Le théorème de Bernoulli.** — En introduisant, au lieu de la quantité C_4, la mesure du vecteur d'espace associé au vecteur-vitesse, nous allons montrer que l'intégrale première donnée par le théorème du paragraphe 15 réalise l'extension relativiste de l'intégrale première donnée, en hydrodynamique classique, par le théorème de Bernoulli.

Nous désignerons par

$$g_{\lambda\mu} Y^\lambda Y^\mu, \qquad g_{44} = U > 0$$

la forme quadratique fondamentale de l'espace-temps en un point du milieu considéré. On peut montrer (2) que $g_{\lambda\mu} Y^\lambda Y^\mu$ peut être mis sous la forme

$$g_{\lambda\mu} Y^\lambda Y^\mu = \frac{1}{U}(Y_4)^2 + \Phi(Y^1, Y^2, Y^3),$$

où Φ désigne une forme définie négative des variables Y^i. Nous appelons vecteur d'espace Y^i associé au vecteur Y^λ le vecteur de composantes Y^1, Y^2, Y^3. Le carré $(Y)^2$ de sa mesure sera défini par l'équation

$$(Y)^2 = -\Phi(Y^i).$$

(1) A noter qu'il existe des lignes de longueur nulle (lignes de pseudo-tourbillon) le long desquelles la quantité C_4 demeure constante.

(2) *Cf.* LICHNEROWICZ, *Thèse*, Hermann (1939), p. 24.

Considérons alors le vecteur d'espace u^i associé au vecteur-vitesse; on donne à ce vecteur d'espace le nom de *vecteur-vitesse relatif*. Sa mesure u est liée à la composante u_4 du vecteur-vitesse par la relation

$$(u_4)^2 = \mathrm{U}[1 + (u)^2].$$

Par suite

$$(\mathrm{C}_4)^2 = \mathrm{F}^2 (u_4)^2 = \mathrm{F}^2 \mathrm{U}[1 + (u)^2].$$

Nous sommes ainsi conduit à énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le mouvement permanent d'un milieu holonome arbitraire satisfait, le long de toute ligne de courant, à la condition :*

$$\mathrm{F}^2 \mathrm{U}[1 + (u)^2] = \text{const.}, \tag{17.1}$$

où u désigne la mesure du vecteur-vitesse relatif et U *le potentiel principal du champ de gravitation.*

Supposons que le milieu holonome considéré soit un fluide parfait admettant une équation d'état

$$\rho = \mu + p = f(p),$$

et plaçons-nous dans le cas, très général au point de vue physique, où le quotient $\frac{p}{\mu}$ est petit par rapport à 1 et où la vitesse de la matière, mesurée par u, est petite par rapport à celle de la lumière mesurée par l'unité. La condition (17.1) est alors susceptible d'une forme approchée simple. Nous poserons

$$\mathrm{F}^2 = e^{2\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}} = 1 + 2\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}.$$

Aux termes d'ordre supérieur près, la condition (17.1) peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\mathrm{U} + \left[\frac{1}{2}(u)^2 + \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right] \mathrm{U} = \text{const.},$$

forme qui rappelle étroitement l'énoncé classique du théorème de Bernoulli.

18. **Dérivée spatiale de C_4.** — Cherchons à évaluer la variation, le

long des sections d'espace, de l'intégrale première C_4. De l'expression

$$\omega' = \Omega_{\alpha\beta}[\delta x^\alpha \, \delta x^\beta]$$

de la forme quadratique invariante ω', on tire

$$\omega'(X, \delta) = \frac{\partial \omega'}{\partial(\delta x^4)} = -\Omega_{i4}\,\delta x^i.$$

Il vient, par suite,

$$\delta C_4 = \Omega_{i4}\,\delta x^i,$$

formule qui ne fait d'ailleurs que traduire l'équation $\Omega_{i4} = \partial_i C_4$. Les quantités Ω_{i4} s'expriment aisément à partir des composantes du tenseur d'espace Ω_{ij} et des composantes du vecteur-vitesse. On a, en effet,

$$\Omega_{i\mu}\,u^\mu = 0$$

ou

$$\Omega_{ij}\,u^j + \Omega_{i4}\,u^4 = 0.$$

On aboutit ainsi à la formule fondamentale

$$u^4\,\delta C_4 = -\Omega_{ik}\,u^j\,\delta x^i; \tag{18.1}$$

qui exprime que sur les sections d'espace le gradient de C_4 a pour composantes $\dfrac{-\Omega_{ij}u^j}{u^4}$; (18.1) est l'extension relativiste d'une formule bien connue de l'hydrodynamique classique.

Supposons que le mouvement permanent considéré soit un mouvement irrotationnel. Il résulte de (18.1) que sur les sections d'espace $\delta C_4 = 0$ et que, par suite, en chaque point du milieu considéré, la composante C_4 du vecteur-courant conserve une valeur constante.