Annales scientifiques de l'É.N.S.

Pierre Dive

Rotations barotropes dans un astre fluide dont la stratification est ellipsoïdale en seconde approximation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 56 (1939), p. 293-316
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1939_3_56__293_0>

ROTATIONS BAROTROPES

DANS UN

ASTRE FLUIDE DONT LA STRATIFICATION EST ELLIPSOÏDALE EN SECONDE APPROXIMATION

PAR PIERRE DIVE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand.

Les travaux de O. Callandreau et de G. H. Darwin, ainsi que les études approfondies plus récentes de M. Rolin Wavre, prouvent qu'une rotation en bloc est impossible, en seconde approximation, dans un astre fluide stratifié en surfaces d'égale densité ellipsoïdales [1]. Le premier, Callandreau donna le sens de la déformation qu'il faut imposer à ces surfaces pour réaliser l'équilibre relatif de l'astre.

Lorsque cet état de rotation existe, les surfaces à densité constante et les surfaces à pression constante coïncident. La densité est une fonction *univoque* de la pression; mais plusieurs valeurs de la pression peuvent correspondre à une même valeur de la densité [2]. Quoi qu'il en soit, dans une rotation en bloc le champ de la pesanteur (résultante

(1) Une relation est dite de *seconde approximation* lorsque, dans son développement, on néglige les termes dont l'ordre surpasse celui de la quatrième puissance de la vitesse angulaire ω ou, ce qui revient au même, celui de la quatrième puissance de l'ellipticité maxima des surfaces d'égale densité, assimilée, comme ω, à une quantité infiniment petite.

(2) Une relation *biunivoque* entre la densité et la pression serait obtenue, par exemple, dans le cas d'un fluide compressible, chimiquement homogène, doué d'une équation caractéristique et dont la température serait constante.

de l'attraction et de la force centrifuge) est orthogonal à la famille des surfaces à pression et à densité constantes.

La réciproque n'est pas vraie : la coïncidence des surfaces d'égale densité et des surfaces d'égale pression n'implique pas la rotation en bloc, elle permet ainsi que l'a rappelé M. Wavre, l'existence de mouvements relatifs intérieurs dans lesquels les surfaces d'égale vitesse angulaire ($\omega =$ constante) sont des cylindres de révolution autour de l'axe de rotation (1). Nous dirons que ces rotations sont *barotropes*.

On sait qu'elles sont impossibles dans un astre dont les surfaces d'égale densité sont rigoureusement ellipsoïdales (2). Mais on ne peut rien dire, *a priori*, sur l'existence de rotations barotropes dans des masses stratifiées en couches ellipsoïdales en seconde approximation.

Nous allons démontrer la possibilité de ces rotations et établir, en même temps, que toutes les stratifications qui leur correspondent sont données par une double infinité de fonctions $\tau(\beta; h_1, K)$ exprimant les variations de l'aplatissement des couches et par une triple infinité de fonctions $\rho(\beta; h_1, h_3, h_4)$ exprimant les variations de leur densité (3).

1. La condition nécessaire et suffisante de barotropie. — Nous avons établi, dans notre thèse (4), que les surfaces d'égale densité doivent être de révolution autour de l'axe de rotation Oz. Dans un plan méri-

(1) *Cf.* H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, 1893, p. 178 et R. Wavre, *Figures planétaires et géodésie*, 1932, p. 33.

(2) Cf. P. Dive, *Rotations internes des astres fluides,* Dunod, édit., Paris, 1930, p. 70, et R. Wavre, *Sur une méthode de M. Volterra et un théorème de Dive relatif aux masses fluides* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 207, 1938, p. 462).

(3) Nous nous trouvons donc en contradiction à la fois avec la thèse de M. Véronnet [*Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre*, (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1912)] qui postule l'existence de rotations barotropes, en toute rigueur et en deuxième approximation, dans des stratifications ellipsoïdales *quelconques*, et avec le fascicule 2 du tome 4 du *Traité de Mécanique rationnelle* de Paul Appell, où l'auteur, M. Véronnet encore, prétend démontrer, contrairement aux résultats de sa propre thèse, l'impossibilité des rotations barotropes dans les stratifications rigoureusement ellipsoïdales, mais à partir d'une formule exprimant, *en deuxième approximation*, le carré de la vitesse angulaire (Voir p. 207 et 208). La démonstration de M. Véronnet comporte plusieurs erreurs; il est inexact, par exemple, que le premier membre de la formule (50) (§ 156, p. 208) soit un zéro d'ordre 3.

(4) *Rotations internes des astres fluides*, *loc. cit.*, p. 6.

dien (adoptons $y = 0$), il est alors commode de définir la position d'un élément par le demi-petit axe β de l'ellipse (β), à densité constante ρ, sur laquelle il se trouve, et par le carré x^2 de sa distance à l'axe Oz.

Considérons la composante Z de l'attraction newtonienne suivant Oz, et introduisons la fonction

$$(1) \qquad N(\beta, x^2) \equiv -\frac{Z}{4\pi f z} \qquad (f = 6{,}67.10^{-8} \text{ c. g. s.}).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les rotations internes soient barotropes et que N soit de la forme

$$(2) \qquad \boxed{\frac{N_0}{1 + \mu x^2}},$$

où $N_0 = N(\beta, 0)$ et μ ne dépendent que de β.

La condition est nécessaire. — L'équation générale de l'hydrodynamique

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z$$

peut, en effet, s'écrire

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \beta^2}\frac{\partial \beta^2}{\partial z^2} 2z = -4\pi f N z;$$

or, de l'équation de l'ellipse (β),

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1,$$

on tire, par différentiation par rapport à z^2,

$$\frac{\partial \beta^2}{\partial z^2} = \frac{1}{1 + \mu x^2},$$

où, en posant

$$\xi^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{1}{1 + \tau^2},$$

$$(4) \qquad \mu = -\frac{d\xi^2}{d\beta^2} = \frac{1}{(1 + \tau^2)^2}\frac{d\tau^2}{d\beta^2}$$

caractérise la variation de l'aplatissement $\tau(\beta)$, rapport du demi-axe focal γ au demi-petit axe β, et ne dépend que de β. Et, en remplaçant dans (3), $\frac{\partial \beta^2}{\partial z^2}$ par son expression ci-dessus, il vient

$$N = \frac{1}{2\pi f} \frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \beta^2}}{1+\mu x^2},$$

ou, en observant que

$$N_0 = -\frac{1}{2\pi f}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \beta^2}$$

est, lorsque la densité ne dépend que de la pression $[\rho = f(p)]$, une fonction de β seul donnant la valeur de N sur Oz,

$$N = \frac{N_0}{1+\mu x^2}.$$

La condition est suffisante. — Réciproquement, si N est de la forme précédente, l'équation (3), qui doit être satisfaite dans tout état de rotation permanente, donne

$$\frac{\partial p}{\partial \beta^2} = -2\pi f N_0(\beta)\rho(\beta).$$

Il en résulte que p est la somme d'une fonction de β seul et d'une fonction de x^2 seul : $p = \psi(\beta) + \chi(x^2)$. Mais, sur la couche superficielle (β_e) [désignée aussi par (b_e)], la pression est, par hypothèse, une constante $p_e = \psi(\beta_e) + \chi(x^2)$, de sorte que $\chi(x^2)$ se réduit aussi à une constante. La pression p est donc bien, dans tout le domaine du fluide, une fonction de β seul, ou, ce qui revient au même, de ρ seul :

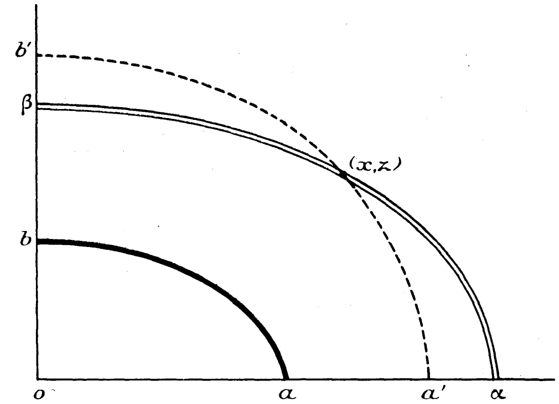
$$\rho = f(p);$$

la rotation est barotrope.

On remarquera encore que si $U(\beta, x^2)$ est la fonction des forces d'attraction, on a

$$N_0 = -\frac{1}{2\pi f}\frac{\partial U}{\partial \beta^2}.$$

Désignons par $k = \tau(b)$ et $s = \frac{c}{b'}$ les aplatissements respectifs, rapports du demi-axe focal $c = \gamma(b)$ aux demi-petits axes b et b', d'une couche attirante (b) et de l'ellipse (b') homofocale de (b) et passant au point $P(\beta, x^2)$; par $q = \rho(b)$ la densité de (b); et affectons de l'indice $_e$ les quantités prises sur la surface extérieure (b_e) de demi-petit axe b_e.



Lorsque la stratification est ellipsoïdale dans toute la masse, on a [1]

$$\mathrm{N} \equiv \int_0^\beta q\,d[j(s - \operatorname{arc\,tang} s)] + \int_\beta^{b_e} q\,d[j(k - \operatorname{arc\,tang} k)]$$

ou, en intégrant par parties

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{N} \equiv \rho_e j_e(\tau_e - \operatorname{arc\,tang} \tau_e) - \int_0^\beta j(s - \operatorname{arc\,tang} s)\,\dot{q}\,db - \int_\beta^{b_e} j(k - \operatorname{arc\,tang} k)\,\dot{q}\,db$$

où

$$j = \frac{1 + k^2}{k^3}, \qquad \dot{q} = \frac{dq}{db}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la rotation soit barotrope s'exprime par l'équation

$$\text{(6)} \qquad (1 + \mu x^2)\mathrm{N} = \mathrm{N}_0;$$

N ne dépend de x^2 que par l'intermédiaire de s défini implicitement par la relation

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{F}(s; b, x^2) \equiv s^4\beta^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) + s^2\left[\alpha^2 - c^2 - \gamma^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\right] - c^2 = 0$$

---

[1] Cf. *Rotations internes des astres fluides*, *loc. cit.*, p. 66.

déduite, par élimination de z^2, des équations des ellipses (β) et (b')

$$\frac{x^2}{1+\tau^2}+z^2=\beta^2,$$

$$\frac{x^2}{1+s^2}+z^2=\frac{c^2}{s^2}.$$

Or nous avons établi que la fonction $s(b, \beta, x^2)$ est holomorphe en x^2 dans le domaine ouvert (Γ) limité par l'ellipse Γ de centre $\frac{\alpha^2}{2}$, de sommets $\alpha^2\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2$, $-\alpha^2\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2$, $\frac{\alpha^2(\alpha+\beta i)^2}{\gamma^2}$, $\frac{\alpha^2(\alpha-\beta i)^2}{\gamma^2}$ [1]. N est alors holomorphe dans tout domaine fermé $[\Gamma'] \subset (\Gamma)$ ouvert [2], et *a fortiori*, le long du segment $[0, \alpha^2]$ de l'axe réel du plan des x^2 imaginaires, de sorte que l'équation (6) peut s'écrire, en toute rigueur

$$(1+\mu x^2)\left[N_0+\sum\frac{x^{2p}}{p!}\frac{\partial^p N}{(\partial x^2)_0^p}\right]=N_0 \qquad (p=1, 2, \ldots, \infty). \tag{8}$$

Elle est équivalente au système

$$\mu\frac{\partial^{(p-1)}N}{(\partial x^2)_0^{p-1}}+\frac{1}{p}\frac{\partial^p N}{(\partial x^2)_0^p}=0. \tag{9}$$

Dans le développement de s^n, par rapport à x^2, x^{2p} est toujours associé à un facteur de l'ordre de τ^{2p}. Posons, en effet,

$$\tau^2(\beta)=K^2\theta(\beta),$$

où

$$k^2(b)=K^2\theta(b);$$
$$s^2=K^2\sigma;$$
$$\varpi=K^2x^2;$$

K est un paramètre qui servira d'infiniment petit principal; θ et σ sont des fonctions demeurant finies pour toutes les valeurs de b et β, dans le voisinage de $[0, b_e]$, et de x^2, dans le voisinage de 0.

En éliminant la solution parasite $K=0$, l'équation (7) s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\sigma; K^2, \varpi) \equiv \sigma^2\left[\beta^2K^2-\frac{\varpi^2}{1+K^2\theta(\beta)}\right]&\\ +\sigma\left[\beta^2-K^2\theta(b)b^2-\frac{\theta(\beta)\varpi^2}{1+K^2\theta(\beta)}\right]&-\theta(b)b^2=0.\end{aligned}$$

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 206, p. 987, 28 mars 1938, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. LXIII, juin 1939.

(2) Le signe $\subset$ signifie « contenu dans ».

La fonction $\mathcal{F}$ s'annule pour $K = 0$, $\varpi = 0$, $\sigma = \theta(b)\left(\frac{b^2}{\beta^2}\right)$ (quantité finie), tandis que sa dérivée

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}\right)_{\substack{K^2=0 \\ \varpi=0}} = \beta^2,$$

est différente de zéro. Or $\mathcal{F}$ est analytique en σ, K^2, ϖ au voisinage de ces valeurs, et il résulte d'un théorème, bien connu, de la théorie des fonctions implicites que l'équation $\mathcal{F} = 0$, définit, au voisinage de $K^2 = 0$ et $\varpi = 0$, une fonction $\sigma(K^2, \varpi)$ holomorphe en K^2 et $\varpi = K^2 x^2$, donc développable en série entière de la forme

$$\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j K^{2j} x^{2j},$$

les λ_j étant des fonctions bornées de K; et l'on a bien

$$s^2 = K^2 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j K^{2j} x^{2j}.$$

Il s'ensuit, comme on le verra plus loin, que, dans le développement de N, x^{2p} est également toujours associé à un facteur de l'ordre de τ^{2p}.

Pour l'étude que nous allons faire, concernant la seconde approximation, il suffit, par conséquent, de donner à p les valeurs 1 et 2; on réduit ainsi le système (9) aux deux équations

$$\left\{\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & \mu N_0 + \frac{\partial N}{(\partial x^2)_0} &= 0, \\ &(\mathrm{II}) & \mu \frac{\partial N}{(\partial x^2)_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 N}{(\partial x^2)_0^2} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Ces équations ont une signification mécanique intéressante :

Soient $\omega^2(\beta, x^2)$ le carré de la vitesse angulaire d'un élément situé sur la surface (β) à la distance x de l'axe de rotation Oz, $U(\beta, x^2)$ la fonction des forces d'attraction mutuelle des masses; on sait que

$$\omega^2(\beta, x^2) = -2\frac{\partial U}{\partial x^2} \quad (^1)$$

(1) *Rotations internes des astres fluides*, p. 12, Dunod édit., Paris.

d'où

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial\beta} = -2\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\right),$$

$$\frac{\partial^2\omega^2}{\partial\beta\,\partial x^2} = -2\frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2}\left(\frac{\partial U}{\partial\beta}\right).$$

Or, des relations (1) et (2), on tire

$$\frac{\partial U}{\partial\beta} = -4\pi f N\beta(1+\mu x^2).$$

On en déduit que, sur l'axe Oz, les équations

$$\left(\frac{\partial\omega^2}{\partial\beta}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2\omega^2}{\partial\beta\,\partial x^2}\right)_0 = 0$$

sont identiques aux équations (I) et (II).

2. **Les équations en seconde approximation.** — Soit K la borne supérieure stricte de l'ensemble des valeurs de l'aplatissement dans l'intervalle $[0, b_e]$. La loi des aplatissements sera donnée par la fonction $\theta(\beta)$ telle que

$$\tau^2(\beta) = K^2\theta(\beta)$$

ou

$$k^2 = \tau^2(b) = K^2\theta(b).$$

Il s'agit de voir si les équations (I) et (II) peuvent être satisfaites, par un ou plusieurs systèmes de fonctions $\rho(\beta)$ et $\tau(\beta)$, lorsqu'on développe ces équations jusqu'aux termes en K^4.

Si l'on ne conservait que les termes en K^2, on se trouverait dans le cas de première approximation; on pourrait se donner arbitrairement l'une des fonctions $\theta(\beta)$ ou $\rho(\beta)$, l'autre serait déterminée par la célèbre équation de Clairaut.

Supposons le problème résolu, en seconde approximation, par une loi des aplatissements $\tau(\beta)$ à laquelle correspondrait, en première approximation, par l'équation de Clairaut, la loi des densités $\rho_0(\beta)$ ou $q_0(b)$. Pour satisfaire aux équations de seconde approximation nous sommes conduit à poser

$$\rho(\beta) = \rho_0(\beta) + \Sigma K^{2p}\rho_p(\beta) \tag{10}$$

ou

$$q(b) = q_0(b) + \Sigma K^{2p} q_p(b)$$

et, en dérivant par rapport à b,

$$\dot{q}(b) = \dot{q}_0(b) + \Sigma K^{2p} \dot{q}_p(b). \tag{11}$$

Nous poserons de même, d'une façon générale,

$$N(0, \beta) = n_0 + \Sigma K^{2p} n_p, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^\nu N}{(\partial x^2)_0^\nu} = n_0^{(\nu)} + \Sigma K^{2p} n_p^{(\nu)}. \tag{13}$$

Développons d'abord l'expression (5) de N, en remarquant que k et s sont du même ordre que K; il vient

$$N = \frac{\rho_e}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\tau_e^2\right) - \int_0^\beta \frac{1+k^2}{k^3}\left(\frac{s^3}{3} - \frac{s^5}{5}\right)\dot{q}\,db$$
$$- \int_\beta^{b_e} (1+k^2)\left(\frac{1}{3} - \frac{k^2}{5}\right)\dot{q}\,db.$$

Puis, sur Oz où $s = k\dfrac{b}{\beta}$, après une intégration partielle,

$$N(0, \beta) = \frac{1}{3}\left(\rho - \frac{1}{\beta^3}\int_0^\beta b^3 \dot{q}\,db\right) + \frac{2}{15}\left(\rho_e \tau_e^2 - \int_\beta^{b_e} k^2 \dot{q}\,db\right)$$
$$- \int_0^\beta \left(\frac{b}{\beta}\right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\left(\frac{b}{\beta}\right)^2\right] k^2 \dot{q}\,db.$$

Soit

$$D = \rho - \frac{1}{\beta^3}\int_0^\beta b^3 \dot{q}\,db; \tag{14}$$

c'est la densité moyenne de la sphère de rayon β; et

$$H = \frac{2}{15}\left(\rho_e \tau_e^2 - \int_\beta^{b_e} k^2 \dot{q}\,db\right) - \int_0^\beta \left(\frac{b}{\beta}\right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\left(\frac{b}{\beta}\right)^2\right] k^2 \dot{q}\,db. \tag{15}$$

Remplaçons τ^2 par $K^2\theta(\beta)$, k^2 par $K^2\theta(b)$ et utilisons les développements (10) et (11), on aura

$$D = D_0 + K^2 D_1,$$

où

(16) $$D_0 = q_0(\beta) - \frac{1}{\beta^3}\int_0^\beta b^3 \dot{q}_0\,db, \qquad D_1 = q_1(\beta) - \frac{1}{\beta^3}\int_0^\beta b^3 \dot{q}_1\,db,$$

et

$$H = H_0 + K^2 H_1,$$

où

(17) $$H_0 = 0, \qquad H_1 = \frac{2}{15}\left[q_0(b_e)\theta(b_e) - \int_\beta^{b_e} \theta(b)\dot{q}_0\,db\right] - \int_0^\beta \left(\frac{b}{\beta}\right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\left(\frac{b}{\beta}\right)^2\right]\theta(b)\dot{q}_0\,db.$$

Il vient ainsi

(18) $$N(0, \beta) = \frac{D_0}{3} + K^2\left(\frac{D_1}{3} + H_1\right),$$

$$n_0 = \frac{D_0}{3}, \qquad n_1 = \frac{D_1}{3} + H_1.$$

Calculons maintenant $\frac{\partial N}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 N}{(\partial x^2)^2}$.

On tire de l'expression (5) de N,

(19) $$\frac{\partial N}{\partial x^2} = -\int_0^\beta j\,\frac{s^2}{1+s^2}\,\frac{\partial s}{\partial x^2}\,\dot{q}\,db;$$

et, de l'équation (7),

(20) $$\frac{\partial s}{\partial x^2} = -\frac{\xi^2}{2}s^3\,\frac{\tau^2 - s^2}{s^4(\beta^2 - \xi^2 x^2) + c^2} \quad (^1).$$

D'où, en posant

(21) $$W = \frac{1}{1+s^2} - \frac{1}{1+\tau^2},$$

(22) $$\frac{\partial N}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\beta jW\,\frac{s^5}{s^4\beta^2\left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) + c^2}\,\dot{q}\,db.$$

Et, sur Oz, où $s = k\frac{b}{\beta}$, $W = W_0$,

$$\frac{\partial s^2}{(\partial x^2)_0} = -\frac{1}{\beta^2}s_0^2 W_0,$$

---

(1) *Rotations internes des astres fluides*, *loc. cit.*, p. 61.

d'où

$$s^2 = s_0^2\left(1 - W_0\frac{x^2}{\beta^2}\right).$$

En développant, au moyen de cette expression, les divers facteurs de la fonction sous le signe somme de l'intégrale (22), on obtient

$$s^5 = s_0^5\left(1 - \frac{5}{2}W_0\frac{x^2}{\beta^2}\right),$$

$$(24)\qquad W = W_0\left[1 + \frac{s_0^2}{(1+s_0^2)^2}\frac{x^2}{\beta^2}\right],$$

$$(25)\qquad \frac{1}{s^4\beta^2\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)+c^2} = \frac{1}{s_0^2\beta^2(1+s_0^2)}\left[1+(2W_0+\xi^2)\frac{s_0^2}{1+s_0^2}\frac{x^2}{\beta^2}\right].$$

Et, en substituant à W_0 son expression tirée de (21),

$$(26)\qquad \frac{\partial N}{\partial x^2} = \frac{\xi^2}{2\beta^2}\int_0^\beta js_0^3\frac{\tau^2-s_0^2}{(1+s_0^2)^2}\left\{1+\frac{\xi^2}{2\beta^2}\frac{x^2}{(1+s_0^2)^2}[9s_0^2-5\tau^2+s_0^2(3s_0^2+\tau^2)]\right\}\dot q\,db.$$

On a, par suite, en toute rigueur,

$$(27)\qquad \frac{\partial N}{(\partial x^2)_0} = \frac{\xi^2}{2\beta^2}\int_0^\beta js_0^3\frac{\tau^2-s_0^2}{(1+s_0^2)^2}\dot q\,db$$

et

$$(28)\qquad \frac{\partial^2 N}{(\partial x^2)_0^2} = \frac{\xi^4}{4\beta^4}\int_0^\beta js_0^3\frac{\tau^2-s_0^2}{(1+s_0^2)^4}[9s_0^2-5\tau^2+s_0^2(3s_0^2+\tau^2)]\,\dot q\,db.$$

Utilisons, comme nouvelle variable d'intégration, $t = \frac{b}{\beta}$; et remplaçons s_0^2 par $K^2\theta(b)t^2$, $\dot q$ par son développement (11), et posons

$$(29)\qquad \begin{cases} u = \theta(\beta) - \theta(t\beta)t^2, \\ v = 9\theta(t\beta)t^2 - 5\theta(\beta), \qquad w = \theta(\beta) - \theta(t\beta) + 2\theta(t\beta)t^2 \end{cases}$$

on a, aux termes en K^6 près,

$$(30)\qquad \frac{\partial N}{(\partial x^2)_0} = \frac{K^2}{2\beta}\int_0^1 t^3 u\dot q_0\,dt + \frac{K^4}{2\beta}\left[\int_0^1 t^3 u\dot q_1\,dt - \int_0^1 t^3 uw\dot q_0\,dt\right],$$

$$(31)\qquad \frac{\partial^2 N}{(\partial x^2)_0} = \frac{K^4}{4\beta^3}\int_0^1 t^3 uv\dot q_0\,dt.$$

D'où, par identification,

$$(32)\quad \begin{cases} n_0^{(1)}=0, \qquad n_1^{(1)}=\dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_0^1 t^5 u\dot{q}_0\,dt,\\[2mm] n_2^{(1)}=\dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_0^1 t^5 u\dot{q}_1\,dt-\dfrac{1}{2\beta}\displaystyle\int_0^1 t^5 uw\dot{q}_0\,dt,\\[2mm] n_0^{(2)}=0, \qquad n_1^{(2)}=0, \qquad n_2^{(2)}=\dfrac{1}{4\beta^3}\displaystyle\int_0^1 t^5 uv\dot{q}_0\,dt. \end{cases}$$

Enfin, la formule de définition (4) de μ donne

$$(33)\qquad \mu=\frac{K^2}{2\beta}[1-2\theta(\beta)K^2]\theta'(\beta) \quad (^1).$$

On voit alors qu'aux termes en K^6 près les équations (I) et (II) s'écrivent

$$\begin{cases} (I_2) & K^2\left(\dfrac{\theta'}{2\beta}n_0+n_1^{(1)}\right)+K^4\left[\dfrac{\theta'}{2\beta}(n_1-2\theta n_0)+n_2^{(1)}\right]=0,\\[2mm] (II_2) & K^4\left(\dfrac{\theta'}{\beta}n_1^{(1)}+n_2^{(2)}\right)=0. \end{cases}$$

Dire que, pour les faibles aplatissements, la rotation est barotrope en seconde approximation, c'est dire que ces équations sont satisfaites pour toute valeur positive de K^2 *prise dans un intervalle fermé, assez petit, comprenant zéro.*

Les coefficients de K^2 et de K^4, qui sont indépendants de K, doivent donc être tous nuls :

$$(34)\quad \begin{cases} \theta' n_0+2\beta n_1^{(1)}=0,\\ \theta'(n_1-2\theta n_0)+2\beta n_2^{(1)}=0,\\ \theta' n_1^{(1)}+\beta n_2^{(2)}=0. \end{cases}$$

Explicitons les $n_p^{(\nu)}$ au moyen des formules (16), (17), (18), (29), (30), (31), (32), il vient le système de trois équations intégro-différentielles, à trois fonctions inconnues $q_0(\beta)$, $q_1(\beta)$, $\theta(\beta)$, qui exprime

(1) Nous désignons une dérivée par rapport à b par un point $\cdot$ et une dérivée par rapport à β par un prime $'$.

la condition nécessaire et suffisante pour que le mouvement du fluide soit barotrope en seconde approximation.

$$
(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned}
&\theta'(\beta)\left[q_0(\beta)-\int_0^1 t^3\dot{q}_0(t\beta)\beta\,dt\right]\\
&\quad+3\int_0^1 t^3[\theta(\beta)-\theta(t\beta)t^2]\,\dot{q}_0(t\beta)\,dt=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{B})\left\{\begin{aligned}
&\theta'(\beta)\left\{q_1(\beta)-\int_0^1 t^3\dot{q}_1(t\beta)\beta\,dt+\frac{2}{5}\left[q_0(b_c)\theta(b_c)-\int_\beta^{b_e}\theta(b)\dot{q}_0\,db\right].\right.\\
&\qquad\qquad\qquad-3\int_0^1 t^3\left(\frac{1}{3}-\frac{t^2}{5}\right)\theta(t\beta)\,\dot{q}_0(t\beta)\beta\,dt\\
&\qquad\qquad\qquad\left.-2\theta(\beta)\left[q_0(\beta)-\int_0^1 t^3\dot{q}_0(t\beta)\beta\,dt\right]\right\}\\
&\quad+3\int_0^1 t^3[\theta(\beta)-\theta(t\beta)t^2]\,\dot{q}_1(t\beta)\,dt\\
&\quad-3\int_0^1 t^3[\theta(\beta)-\theta(t\beta)t^2]\,[\theta(\beta)-\theta(t\beta)+2\theta(t\beta)t^2]\,\dot{q}_0(t\beta)\,dt=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{C})\left\{\begin{aligned}
&2\beta\theta'(\beta)\int_0^1 t^3[\theta(\beta)-\theta(t\beta)t^2]\dot{q}_0(t\beta)\,dt\\
&\quad+\int_0^1 t^3[\theta(\beta)-\theta(t\beta)t^2]\,[9\theta(t\beta)t^2-5\theta(\beta)]\dot{q}_0(t\beta)\,dt=0.
\end{aligned}\right.
$$

3. **Résolution du système précédent.** — Nous allons montrer que la résolution du système d'équations intégro-différentielles (A), (B), (C), se ramène à des quadratures.

Tout d'abord les équations (A) et (C) ne contiennent que les deux fonctions inconnues $\theta(\beta)$ et $q_0(\beta)$ et doivent, en principe, servir à les calculer. L'équation (B) contient, en plus, la fonction $q_1(\beta)$ qui définit la correction à apporter, en seconde approximation, à la densité $q_0(\beta)$ réalisant, avec la loi des aplatissements $\theta(\beta)$, la condition de barotropie en première approximation,

L'équation (A) exprime, aux termes en K^4 près, la condition

$$\left(\frac{\partial\omega^2}{\partial\beta}\right)_{x^2=0}=0,$$

qui traduit la propriété d'invariance de la vitesse angulaire le long de toute parallèle à Oz [1]. C'est, sous une forme peu différente, l'équation de Clairaut [2].

L'équation (C) exprime, aux termes en K^6 près, la condition

$$\left(\frac{\partial^2 \omega^2}{\partial\beta\, \partial x^2}\right)_{x^2=0} = 0.$$

En toute rigueur [3]

$$\frac{1}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} = \xi^4 \int_0^\beta j\, \frac{s^5(\tau^2 - s^2)^2}{(1+s^2)^2(s^4 z^2 + c^2)}\, \dot{q}\, db; \tag{35}$$

en deuxième approximation

$$\frac{1}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial x^2} = \frac{K^4}{\beta^5}\int_0^\beta b^3 u^2 \dot{q}(b)\, db. \tag{36}$$

(C) exige donc que

$$\frac{1}{\beta^5}\int_0^\beta b^3 u^2 \dot{q}(b)\, db = J, \tag{37}$$

J étant une constante indépendante de β et x^2. On vérifiera d'ailleurs qu'en dérivant (37) par rapport à β, on retrouve l'équation (C).

Remarques. — Avant de procéder à la transformation des équations (A) et (C), en vue de leur résolution, faisons quelques remarques importantes concernant l'aplatissement et la densité au centre de l'astre.

1° *L'aplatissement d'aucune couche ne peut être nul; en particulier, au centre* $\theta(0)$ *est* > 0.

En toute rigueur, cette proposition, *applicable aux rotations baroclines*, est la conséquence d'une discussion exposée dans nos *Rotations internes des astres fluides* (p. 57). J'en rappelle les résultats essentiels :

---

(1) *Cf.* H. Poincaré, *Théorie des tourbillons*, p. 178, et R. Wavre, *Arch. d. Sc. Ph. et nat. de Genève,* 5e part., vol. 8, p. 330.

(2) *Cf.* P. Dive, *Sur les variations de la vitesse angulaire dans un astre fluide* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 204, p. 661, février 1937).

(3) *Rotations internes*, *loc. cit.*, p. 64 et 69.

Le carré de la vitesse angulaire est donné par la formule

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho}\left(\rho_e \Omega_e - \int_\beta^{b_e} \Omega \rho' \, d\beta\right), \tag{38}$$

où

$$\Omega = \rho_e j_e \Upsilon(k_e, \tau) - \int_0^\beta j\Upsilon(s, \tau)\dot{q}\, db - \int_\beta^{b_e} j\Upsilon(k, \tau)\dot{q}\, db. \tag{39}$$

L'existence réelle de ω^2 dépend donc du signe de $\Upsilon(t, \tau)$. Or en posant

$$H(t) = 2\frac{t - \operatorname{arc\,tang} t}{\operatorname{arc\,tang} t - \dfrac{t}{1+t^2}},$$

on trouve que

$$\Upsilon(t, \tau) \gtrless 0, \qquad \text{entraîne} \quad 1 + \tau^2 \gtrless H(t)$$

et réciproquement.

D'autre part, en développant $H(t)$ suivant les puissances croissantes de t, il vient

$$H(t) = 1 + \frac{3}{5}t^2 - \frac{24}{175}t^4 \ldots; \tag{40}$$

on voit que $\lim\limits_{t=0} H(t) = 1$ et, comme $H(t)$ est une fonction croissante de t, sa valeur est certainement $\geqq 1$ quand $t \geqq 0$. Si τ était nul, on aurait alors $1 + \tau^2 \leqq H(t)$ et, dans l'expression de ω^2, les trois fonctions $\Upsilon(k_e, \tau)$, $\Upsilon(s, \tau)$, $\Upsilon(k, \tau)$ seraient négatives ou nulles; ω serait imaginaire ou nul.

Aucune couche d'égale densité ne saurait donc être sphérique sans que la masse entière ne soit au repos absolu dans une stratification exclusivement constituée de couches sphériques (¹).

En développant l'expression (39) de Ω, on reconnaît que *ce résultat s'étend aux rotations barotropes en première et en seconde approximation.*

Établissons-le directement au moyen de l'équation (A) : Faisons

(¹) Dans sa thèse [*Rotation de l'ellipsoïde hétérogène*, (*Journ. de Math.*, fasc. 4, 1912)], M. Véronnet énonce un théorème semblable, mais seulement pour les rotations barotropes que nous savons impossibles, en toute rigueur, dans une stratification ellipsoïdale.

tendre β vers o; en vertu de la continuité uniforme des quantités sous le signe somme, cette équation donne, à la limite,

$$D_0(0)\theta'(0) + 3\theta(0)\dot{q}_0(0)\int_0^1 t^3(1-t^2)\,dt = 0.$$

Si $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$, car, évidemment, $D_0(0) = q_0(0) \neq 0$.

Dérivons (A) par rapport à β,

$$D'_0(\beta)\theta'(\beta) + D_0(\beta)\theta''(\beta)$$
$$+ 3\int_0^1 t^3[\theta'(\beta) - \dot{\theta}(t\beta)t^3]\dot{q}(t\beta)\,dt + 3\int_0^1 t^3[\theta(\beta) - \theta(t\beta)t^2]\ddot{q}_0 t\,dt = 0.$$

Passons à la limite pour $\beta = 0$; on voit que les égalités $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$, entraînent $\theta''(0) = 0$.

Le procédé peut se répéter indéfiniment :

Si $\theta(0) = 0$, on a successivement

$$\theta'(0) = 0, \qquad \theta''(0) = 0, \qquad \ldots, \qquad \theta^{(n)}(0) = 0$$

et, par suite, $\theta(\beta) \equiv 0$, du moins si l'on postule l'analyticité de cette fonction [1].

2° *La dérivée de la densité $q_0(\beta)$ par rapport à l'axe polaire β est nulle au centre.*

En effet, (35) donne, en toute rigueur sur Oz,

$$(41) \qquad \frac{1}{2\pi f}\frac{d\omega^2}{(dx^2)_0} = K^4\xi^4\int_0^1 t^3\frac{[1+K^2\theta(t\beta)][\theta(\beta)-\theta(t\beta)t^2]^2}{[1+K^2\theta(t\beta)]^3}\frac{\dot{q}_0}{\beta}\,dt.$$

Cette expression n'est finie pour $\beta = 0$ que si $\dot{q}_0(0) = 0$ [2]. Et, dans ce cas, elle n'est indépendante de β que si $\ddot{q}_0(0) \neq 0$,

Ces remarques sont encore valables en deuxième approximation; ce qui est visible sur les formules (36) et (37).

3° *La dérivée de l'aplatissement $\tau^2(\beta) = K^2\theta(\beta)$ par rapport à l'axe polaire β est nulle au centre.*

---

[1] Les raisonnements qui suivent prouvent que cette propriété doit appartenir aux intégrales $\theta(\beta)$, $q_0(\beta)$, $q_1(\beta)$, du système des équations (A), (B), (C).

[2] Nous exceptons toujours, évidemment, le cas des ellipsoïdes homofocaux, pour lesquels $K = \infty$.

Cette propriété vraie en toute rigueur, et en première et deuxième approximation, s'établit de la même façon que les précédentes, au moyen de la formule (A) et en tenant compte de l'égalité $\dot{q}(0) = 0$.

Résolution des équations (A) *et* (C). — Transformons maintenant les équations (A) et (C) en introduisant les fonctions $\eta(\beta)$ et $\zeta(\beta)$ de Radau et Tisserand

$$\eta = \beta \frac{\theta'}{\theta}, \tag{42}$$

$$\zeta = -\beta \frac{D'_0}{D_0} \; (> 0). \tag{43}$$

De la formule

$$D_0(\beta) = q_0(\beta) - \frac{1}{\beta^3} \int_0^\beta b^3 \dot{q}_0(b)\, db, \tag{16}$$

on tire

$$q_0 = D_0 \left(1 - \frac{\zeta}{3}\right); \tag{44}$$

d'où

$$\boxed{0 \leqq \zeta \leqq 3}.$$

L'équation (A) peut s'écrire, en utilisant (42), (16), (43),

$$\eta - \zeta = \frac{3\beta}{D_0} \int_0^1 t^5 \frac{\theta(t\beta)}{\theta(\beta)} \dot{q}_0(t\beta)\, dt$$

$\dot{q}_0$ est négatif, par suite,

$$\boxed{\zeta > \eta} \quad (^1).$$

Multiplions l'équation (A) par β^6 et dérivons-la par rapport à β, on obtient

$$\boxed{\beta\eta' + \eta^2 + 5\eta - 2\zeta(1 + \eta) = 0}; \tag{A'}$$

c'est l'équation de Clairaut-Radau.

---

(1) *Cf.* O. Callandreau, *Bulletin astronomique*, t. V., 1889, p. 474. *Cf.* aussi *Mémoire sur la théorie de la Figure des planètes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX, 1889, p. 20).

Passons à l'équation (C) : on lui donne facilement la forme

$$(45) \qquad (5-2\eta)\int_0^1 t^3 u\,\dot{q}_0\,dt = 9\int_0^1 t^5\,u\,\frac{\theta(t\beta)}{\theta(\beta)}\,\dot{q}_0(t\beta)\,dt$$

qui met en évidence la condition nécessaire, plus restrictive que la condition classique $\eta < 3$,

$$(46) \qquad \boxed{\eta \leqq \frac{5}{2}}.$$

Nous verrons d'ailleurs que *la borne supérieure stricte de* η *est très voisine de* 2,25. Cette borne est donc sensiblement plus faible en seconde approximation qu'en première.

Tirons des équations (A) et (C) une relation différentielle analogue à (A') :

Décomposons, comme il suit, le second membre de (C)

$$\int_0^1 t^3 u v \dot{q}_0\,dt = -9\int_0^1 t^3 u^2 \dot{q}_0\,dt + 4\theta(\beta)\int_0^1 t^3 u\,\dot{q}_0\,dt;$$

il vient, en tenant compte de (A), (42) et (37),

$$(47) \qquad \boxed{\mathrm{J} = -\frac{2}{27}\eta(\eta+2)\frac{\theta^2}{\beta^2}\mathrm{D}_0(\beta)}.$$

Lorsque la rotation est barotrope, en seconde approximation, cette expression est donc constante dans tout le domaine du fluide. D'après (37), elle peut servir à mesurer la *rapidité de variation de* ω^2 sur une couche d'égale densité (β).

En dérivant la relation (47) par rapport à β, on trouve

$$(\mathrm{C}') \qquad \boxed{2\beta\eta'(\eta+1) + 2\eta(\eta^2+\eta-2) - \zeta\eta(\eta+2) = 0}.$$

Montrons que toute solution finie, dans $[0, b_e]$, du système des équations (A') et (C') est solution du système des équations (A) et (C).

Représentons par A et C les premiers membres de (A) et (C). L'équation (A') est équivalente à l'équation

$$(\beta^6 \mathrm{A})' = 0$$

qui implique $\beta^6 A = \text{const.}$ Mais, quand $\beta = 0$, toute solution finie de (A′) et (C′) donne à A une valeur finie, et l'on voit que $\beta^6 A$ ne saurait être constant, pour toute valeur de β dans $[0, b_e]$, sans que A n'y soit nul identiquement : ainsi (A′) entraîne $A = 0$.

D'autre part, l'équation (C′) implique la relation (47), la constante J, indéterminée, dépendant des constantes introduites dans l'intégration de (A′) et (C′); or, cette relation, jointe à l'équation $A = 0$, entraîne, en vertu des formules (42), définissant η et ζ, la relation (37), d'où l'on tire, par dérivation, $C = 0$.

Nous pouvons dès lors remplacer les équations (A) et (C) par les équations (A′) et (C′), ou encore, par les suivantes, obtenues en éliminant ζ, puis η', entre (A′) et (C′)

(48) $$\eta' = \frac{\eta}{\beta}\,\frac{-3\eta^3 - \eta^2 + 14\eta + 8}{3\eta^2 + 6\eta + 4},$$

(49) $$\zeta = 2\eta\,\frac{5\eta + 7}{3\eta^2 + 6\eta + 4}.$$

On sépare les variables de l'équation (48), écrite sous la forme

(50) $$\eta(-3\eta^3 - \eta^2 + 14\eta + 8)\,d\beta - \beta(3\eta^2 + 6\eta + 4)\,d\eta = 0,$$

en multipliant ses deux membres par le facteur intégrant

(51) $$\frac{1}{\beta\eta(-3\eta^3 - \eta^2 + 14\eta + 8)};$$

son intégrale est ensuite donnée par la quadrature

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{3\eta^2 + 6\eta + 4}{\eta(-3\eta^3 - \eta^2 + 14\eta + 8)}\,d\eta = \int_{\beta_1}^{\beta} \frac{d\beta}{\beta},$$

où η_1 et β_1 sont deux constantes positives arbitraires.

Il est facile de trouver l'allure de cette intégrale au voisinage de $\eta = 0$; on a, en effet, sensiblement

$$\frac{1}{2}\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{d\eta}{\eta} \simeq \int_{\beta_1}^{\beta} \frac{d\beta}{\beta};$$

d'où

(52) $$\eta \simeq h_1\beta^2,$$

avec

$$h_1 = \frac{\eta_1}{\beta_1^2}. \tag{53}$$

Il existe, par conséquent, une famille de courbes intégrales passant par l'origine des coordonnées η et β, et tangentes en ce point à l'axe des β; ce sont celles dont la pente η' est positive, les seules qui, en vertu des équations (A′) et (C′), intéressent le problème actuel; elles sont toutes situées au-dessous de la droite

$$\eta = p$$

telle que

$$-3p^3 - p^2 + 14p + 8 = 0; \tag{54}$$

et l'on vérifie bien que la racine positive p de cette équation est comprise entre 2 et $\frac{5}{2}$, ce qui était prévu, *et voisine de* 2,25.

La famille de courbes intégrales situées au-dessus de la droite $\eta = p$, et dont la pente η' est négative, est à rejeter.

Enfin, la solution qui rend infini le facteur intégrant, pour laquelle

$$\beta\eta(-3\eta^3 - \eta^2 + 14\eta + 8) = 0,$$

donne

$$\begin{array}{lcl} \beta = 0 & \text{et} & \eta \text{ quelconque}, \\ \eta = 0 & \text{et} & \beta \text{ quelconque}, \\ \eta = p & \text{et} & \beta \text{ quelconque}. \end{array}$$

L'intégrale singulière $\beta = 0$, η quelconque est en dehors des domaines où les conditions de continuité et d'holomorphie du second membre de (48) sont satisfaites. Elle entraînerait, d'après (42), $\theta'(0) = \infty$ ou $\theta(0) = 0$, hypothèses exclues l'une et l'autre.

$\eta = 0$, β quelconque entraînerait $\theta'(\beta) = 0$; les surfaces d'égale densité seraient homothétiques, mais (49) montre que ζ serait nul, et l'on aurait, d'après (43), $q_0(\beta) = D_0(\beta)$, ce qui ne conviendrait qu'à une masse homogène.

$\eta = p$, β quelconque, entraînerait encore $\theta'(0) = \infty$ ou $\theta(0) = 0$, égalités déjà éliminées.

En résumé nous ne retiendrons que la famille de courbes intégrales dont l'équation générale, au voisinage de l'origine est de la forme

$$\eta = h_1 \beta^2$$

dans laquelle entre, comme cas limite, l'intégrale $\eta = 0$, β quelconque.

Au centre, on a nécessairement

$$(55)\qquad \begin{cases} \eta(0) = 0, & \eta'(0) = 0, & \zeta\ (0) = 0; \\ \theta(0) \neq 0, & \theta'(0) = 0, & q_0(0) = 0. \end{cases}$$

La fonction $\eta(\beta)$ étant une fois connue, la fonction $\zeta(\beta)$ est donnée par la formule (49).

$\theta(\beta)$ se déduit de $\eta(\beta)$ par une simple quadrature

$$\int_{\theta(0)}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^{\beta} \frac{\eta(\beta)}{\beta}\, d\beta,$$

où les fonctions sous le signe somme demeurent bornées quand $\beta = 0$; il vient

$$\theta = h_2 e^{\int_0^{\beta} \frac{\eta}{\beta} d\beta};$$

$h_2 = \theta(0)$. L'aplatissement maximum étant $\tau_e = \mathrm{K}\sqrt{\theta(b_e)}$, égal à K, les constantes h_1 et h_2 devront être choisies telles que $\theta(b_e) = 1$.

Au voisinage du centre

$$(56)\qquad \theta \simeq \theta(0) e^{\frac{h_1}{2}\beta^2}.$$

De $\zeta(\beta)$ on tire $\mathrm{D}_0(\beta)$, au moyen de la formule (43), par une simple quadrature encore

$$(57)\qquad \mathrm{D}_0(\beta) = \mathrm{D}_0(0)\, e^{-\int_0^{\beta} \frac{\zeta}{\beta} d\beta},$$

où $\mathrm{D}_0(0) = q_0(0) = h_3$ est une troisième constante d'intégration.

Au voisinage du centre

$$\mathrm{D}_0(\beta) = q_0(0)\, e^{-\frac{7}{4} h_1 \beta^2}.$$

Enfin, la relation (44) donne

$$(58)\qquad q_0(\beta) = q_0(0)\left(1 - \frac{\zeta}{3}\right) e^{-\int_0^{\beta} \frac{\zeta}{\beta} d\beta}.$$

La résolution du système des équations (A) et (C) est, aux quadratures près, terminée. On voit qu'elle introduit 3 constantes h_1, h_2, h_3 qui permettraient, par exemple, de choisir le paramètre de condensation $\eta(b_e)$ de Callandreau, l'aplatissement $\tau(o) = K\theta(o)$ au centre et la densité $q_0(o)$ au centre [1].

Il nous reste à résoudre l'équation (B).

En groupant les termes qui contiennent la fonction inconnue $q_1(\beta)$, on l'écrit

$$(59)\quad \theta'(\beta)\left[q_1 - \frac{1}{\beta^3}\int_0^\beta b^3 \dot{q}_1(b)\, db\right] + 3\int_0^\beta \frac{b^3}{\beta^3}\left[\theta(\beta) - \theta(b)\frac{b^2}{\beta^2}\right]\frac{\dot{q}_1}{\beta}\, db = 3F_0(\beta),$$

où

$$F_0(\beta) = 2\theta(\beta)\theta'(\beta)D_0(\beta) - 3H_1(\beta)\theta'(\beta) + 3\int_0^1 t^5 uw\dot{q}_0(t\beta)\, dt.$$

Posons, comme précédemment,

$$(42)\qquad \eta = \beta\frac{\theta'}{\theta}$$

et

$$(60)\qquad \chi(\beta) = \beta^2\theta(\beta), \qquad \varphi(\beta) = \beta^2 q_1(\beta).$$

Multiplions l'équation (59) par β^6 et intégrons par parties; on obtient

$$(61)\qquad \int_0^\beta \{\chi(\beta)[\eta(\beta) - 3] + \chi(b)[\eta(b) + 5]\}\varphi(b)\, db = \beta^6 F_0.$$

C'est une équation intégrale de Volterra de première espèce dont le noyau

$$Y(\beta, b) = \chi(\beta)[\eta(\beta) - 3] + \chi(b)[\eta(b) + 5],$$

nul quand $\beta = b = o$, ne satisfait pas à la condition exigée par le

---

[1] Mais, du point de vue géodésique, c'est l'aplatissement superficiel (maximum) $\tau_e = K\sqrt{\theta(b_e)} = K$ qui est donné, de sorte que

$$h_2 = e^{-\int_0^{b_e}\frac{\eta}{\beta}d\beta}.$$

On pouvait d'ailleurs remarquer *a priori* que si $\theta(\beta)$ et $q_0(\beta)$ constituent une solution du système des équations (A) et (C), les fonctions $h_2\theta(\beta)$ et $h_2 q_0(\beta)$ en constituent une également.

théorème de Le Roux pour affirmer l'existence d'une solution continue unique dans tout intervalle fermé $[o, \beta]$ (1).

Dérivons l'équation (61) par rapport à β, et posons encore, pour simplifier l'écriture,

$$(62) \qquad L(\beta) = \chi(\beta)[\eta(\beta) - 3], \qquad J(b) = \chi(b)[\eta(b) + 5],$$

$$(63) \qquad \lambda = \frac{L+J}{L'}, \qquad G_0 = \left[\frac{(\beta^6 F_0)'}{L'}\right]';$$

dérivons une seconde fois, on obtient l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(64) \qquad \lambda \frac{d\varphi}{d\beta} + (1+\lambda')\varphi - G_0 = o.$$

ou, sous la forme canonique,

$$(B') \qquad \frac{d\varphi}{d\beta} = \frac{1}{\lambda}[G_0(\beta) - (1+\lambda')\varphi].$$

Au moyen des relations (56), (62) et (63) on reconnaitra aisément qu'au voisinage de $\beta = o$,

$F_0(\beta)$ est un infiniment petit de l'ordre de β;
$L + J$, un infiniment petit de l'ordre de β^2;
L', un infiniment petit de l'ordre de β;
λ, un infiniment petit de l'ordre de β;
λ', une quantité finie $\neq o$;
G_0, un infiniment petit de l'ordre de β^4.

Dans ces conditions, le second membre de l'équation (B') est discontinu quand $\beta = o$; mais est continu dans tout domaine ouvert du premier quadrant.

Dans un tel domaine, cette équation est lipschitzienne et l'on peut affirmer l'existence d'une intégrale générale continue unique (2) qui s'obtient par deux quadratures sucessives

$$(65) \qquad \varphi(\beta) = e^{-\int_{\beta_1}^{\beta}\frac{1+\lambda'}{\lambda}d\beta}\left[\varphi(\beta_1) + \int_{\beta_1}^{\beta}\frac{G_0}{\lambda}e^{-\int_{\beta_1}^{\beta}\frac{1+\lambda'}{\lambda}d\beta}d\beta\right].$$

(1) *Cf.* LE ROUX, *Annales de l'École Normale*, 1894, p. 19-22.
(2) *Cf.*, par exemple, GOURSAT, *Analyse mathématique*, t. II, 1918, p. 374.

L'intégrale singulière, $\beta = 0$, φ quelconque, n'est pas à retenir.

L'équation (64) montre que $\beta = 0$ est un zéro d'ordre 4 pour $\varphi(\beta) = \beta^2 q_1(\beta)$; donc que $\beta = 0$ est un zéro d'ordre deux pour $q_1(\beta)$.

La résolution de l'équation (B) introduit une constante arbitraire de plus $h_4 = q_1(\beta_1)$; elle permet de choisir sur une couche (β_1) déterminée la valeur $K^2 q_1(\beta_1)$ corrigeant la densité $q_0(\beta_1)$ de cette couche.

Le problème est résolu par la connaissance des trois fonctions

$$\tau(\beta; h_1, K), \quad q_0(\beta; h_1, h_3), \quad q_1(\beta; h_1, h_3, h_4).$$

Il comporte une double infinité de solutions pour les fonctions τ et q_0 et une triple pour q_1.

Nous venons ainsi de faire entrer dans le domaine des recherches sur les astres fluides une notion nouvelle : celle d'*ellipsoïde hétérogène barotrope en deuxième approximation.*

Il serait intéressant de préciser la valeur des constantes arbitraires de la solution générale au moyen des données de la géodésie.

Nous croyons utile de terminer ce mémoire par un tableau qui résume l'état de nos connaissances sur l'existence ou l'impossibilité des rotations permanentes dans les stratifications ellispsoïdales

		Stratifications ellipsoïdales		
		en toute rigueur.	*en seconde approximation.*	*en première approximation.*
Rotations permanentes	*baroclines*...	existence	existence	existence
	barotropes...	impossibilité	*existence*	existence
	en bloc.....	impossibilité	impossibilité	existence