

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ARNAUD DENJOY

Étude sur la détermination des singularités de la fonction analytique définie par une série de Taylor

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 55 (1938), p. 257-336

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1938_3_55_257_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE SUR
LA DÉTERMINATION DES SINGULARITÉS

DE LA
FONCTION ANALYTIQUE

DÉFINIE PAR UNE SÉRIE DE TAYLOR

PAR M. ARNAUD DENJOY

(Paris).

1. Dans un Mémoire paru en 1929 ⁽¹⁾, M. G. Pólya indique un moyen de mettre en évidence une partie des points singuliers de la fonction analytique $f(z)$ définie par un développement de Taylor donné

$$(1) \quad f_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

ou plus commodément de la fonction $g(z)$ définie par l'élément

$$(2) \quad g_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots$$

Soient C_0 le cercle de convergence $|z| = R_0$ de cette dernière série, S_0 la région infinie de C_0 . Pour chaque valeur de θ , considérons la droite $\Delta(\theta)$ d'équation $z = e^{i\theta}[p(\theta) + it]$ (t réel quelconque), $p(\theta)$ étant le plus petit nombre possible tel que, dans la région positive $\Delta^+(\theta)$ de $\Delta(\theta)$ [obtenue en remplaçant $p(\theta)$ par tout nombre plus grand], il existe une fonction holomorphe $g_1(z)$ identique à $g_0(z)$ dans la partie commune à $\Delta^+(\theta)$ et à S_0 . Par hypothèse, $\Delta(\theta)$ contient une singularité de cette même fonction $g_1(z)$. La réunion de toutes les régions $\Delta^+(\theta)$ forme une région infinie Q , renfermant la totalité

⁽¹⁾ G. PÓLYA, *Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* (*Math. Zeitschrift*, 29, p. 550-640).

de S_0 et où la fonction $g_1(z)$ est uniforme et holomorphe. Q est limitée par une courbe fermée convexe V , éventuellement réduite à un segment de droite ou même à un point. Dans tout autre cas, V limite une région finie B , ensemble commun à toutes les régions négatives $\Delta^-(\theta)$.

M. Pólya a montré que $p(\theta)$ a une dérivée à droite $p'(\theta + 0)$ et une dérivée à gauche $p'(\theta - 0)$ [je montre que la fonction $p'(\theta)$, avec une double détermination possible, possède en chaque point la continuité unilatérale]. Sur une droite quelconque $\Delta(\theta)$, V possède ou bien un point unique I ou bien un segment IJ selon que $p(\theta)$ a ou non une dérivée bilatérale au point considéré θ . M. Pólya a montré (et nous rattacherons ce fait à une théorie générale) que I et J sont les points $e^{i\theta}[p(\theta) + ip'(\theta \pm 0)]$. Ces points I, J (confondus sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de θ) sont appelés les *points principaux* de V [situés sur $\Delta(\theta)$]. Ce sont des points singuliers de g_1 . Tous les

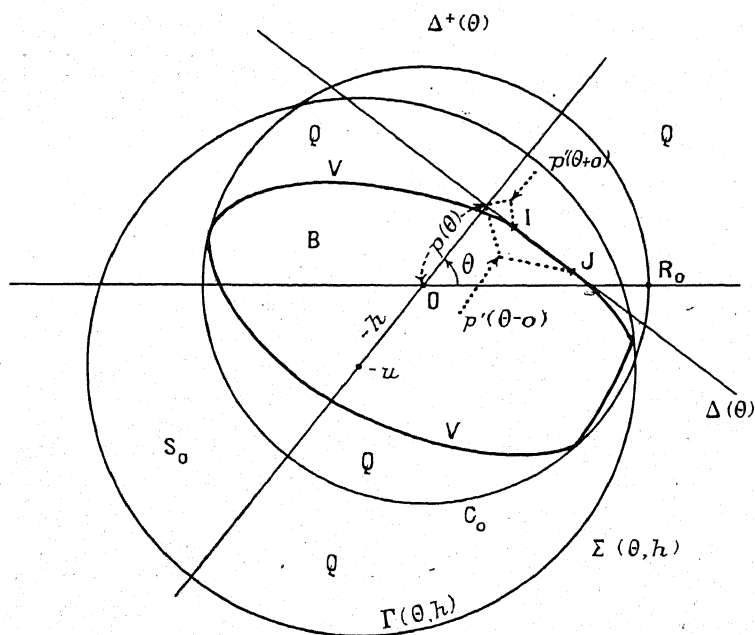


Fig. 1.

points singuliers de g_0 , étant situés sur C_0 , sont singuliers pour g_1 et principaux sur V (*fig. 1*).

Le théorème fondamental de M. Pólya rattache la détermination de la fonction $p(\theta)$ à l'étude de la fonction entière

$$(3) \quad F(v) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a_{p+1}}{p!} v^p,$$

associée à $g_0(z)$. En effet, pour chaque valeur de θ , $p(\theta)$ est définie par l'équation

$$(4) \quad p(\theta) = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log |F(\lambda e^{-i\theta})|.$$

Si $\Gamma(\theta, h)$ est le plus petit cercle de centre $-u = -he^{i\theta}$ ($h > 0$) dans la région infinie $\Sigma(\theta, h)$ duquel $g_0(z)$ est prolongeable en fonction holomorphe à partir de la région circulaire $|z + u| > h + R_0$, $\Sigma(\theta, h)$ est totalement inclus dans Q , B est dans la région finie de Γ . Ce cercle contient au moins un point de V , et tous les points de V situés sur Γ sont principaux. Il y a identité entre l'ensemble des points principaux de V appartenant à des cercles $\Gamma(\theta, h)$ et celui des points où V possède une plus petite courbure positive (et non nulle).

2. Dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. 204, 1937, p. 1456), et dont M. Hadamard a souligné le grand intérêt, M. S. Mandelbrojt donne une règle permettant d'obtenir tous les points de V situés sur C_0 , ou, par une extension immédiate, sur $\Gamma(\theta, h)$. Le procédé de cet auteur repose sur deux fondements distincts :

1° Une remarque de nature géométrique que je rattache à un principe général (4-16); 2° un résultat de calcul dont l'intérêt est dans la simplicité d'expression des formules utilisées.

Dans la dernière partie de ce travail, j'applique le principe géométrique dont M. Mandelbrojt a donné l'idée à des familles de courbes dont la configuration dépend d'un paramètre. Des développements analytiques, dont la simplicité rappelle celle des expressions de M. Mandelbrojt, me conduisent à des règles fournissant, pour la fonction $f(z)$ prolongeant $f_0(z)$ dans l'étoile rectiligne de Mittag-Leffler issue de l'origine, les points singuliers situés aux extrémités des rayons de l'étoile (36-43).

Mais auparavant j'étudie les conséquences fournies par le rap-

prochement de la fonction de M. Pólya et des coefficients de M. Mandelbrojt (21-29).

Considérons les *points principaux isolés* de V (fig. 2). Ce sont des points $\zeta = \rho e^{i\psi}$ tels que, dans un intervalle majeur (non extensible) $\theta_1 < \theta < \theta_2$, la droite $\Delta(\theta)$ ne cesse pas de passer par un tel point. Donc

$$p(\theta) = \rho \cos(\theta - \psi).$$

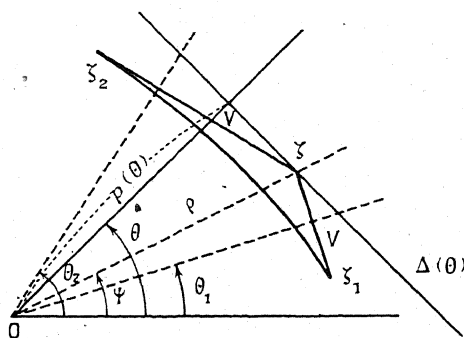


Fig. 2.

On vérifie que $e^{i\theta}(p + ip') = \rho e^{i\psi}$. V contient deux segments rectilignes majeurs $\zeta_1 \zeta$, $\zeta \zeta_2$, aboutissant au point ζ . Si $g_1(z)$ est de la forme $(z - \zeta)^\beta \varphi(z)$, φ étant holomorphe et non nul au point ζ , la fonction

$$(5) \quad F_\alpha(\zeta, \rho) = \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{\delta_{p+1}(-\zeta)}{\Gamma(p+1+\alpha)} \rho^p,$$

si

$$\delta_{p+1}(u) = a_{p+1} + C_p^1 a_p u + \dots + C_p^k a_{p-k+1} u^k + \dots + C_p^p a_1 u^p,$$

a pour exposant radial $p_\alpha(\theta)$ le nombre $p(\theta)$ lui-même si θ n'est pas intérieur à l'intervalle θ_1, θ_2 ou si, avec $\theta_1 < \theta < \theta_2$, α n'est pas de la forme $\beta - r$ (r entier ≥ 0). Au contraire, si $\alpha = \beta - r$, l'exposant $p_\alpha(\theta)$ est inférieur à $p(\theta)$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, et la droite $\Delta_\alpha(\theta)$:

$$z = e^{i\theta} [p_\alpha(\theta) + ip'_\alpha(\theta \pm 0)]$$

enveloppe un arc convexe $\zeta_1 \zeta_2$ remplaçant la succession des deux segments rectilignes $\zeta_1 \zeta$, $\zeta \zeta_2$ de V . Il pourra se faire que certains points principaux isolés de V soient ainsi éliminés. Ils le seraient tous si $\frac{g'_0}{g_0}$

se prolongeait en une fonction méromorphe à pôles simples, dans tout le plan sauf éventuellement à l'origine.

Ayant remplacé V par un contour convexe V_2 à l'extérieur duquel les seuls points principaux de V sont des points isolés, on peut répéter pour chaque point principal isolé de V_2 les mêmes raisonnements. Généralement, on peut substituer à V une courbe convexe Φ limitant la plus grande région infinie dans laquelle $\frac{g'_0}{g_0}$ est prolongeable en une fonction méromorphe à pôles simples. On peut même résorber des singularités isolées d'une nature plus complexe (26-29).

3. Incidemment (23-25), j'examine une autre sorte de problème dont il serait sans doute possible de trouver l'analogue dans maintes questions. Une fonction ou même une famille de fonctions analytiques étant donnée, le rayon de convergence de la série de Taylor autour d'un point z_0 variable est déterminé par une suite de coefficients de la série à modules prédominants. De quelle façon les rangs de ces coefficients varient-ils avec z_0 ? tel est le problème que j'étudie dans un cas très particulier. La fonction $g_1(z)$ ayant pour développement dans $\Sigma(\theta, h)$ la série $\sum \frac{\partial_n(u)}{(z+u)^n}$, le rayon de convergence de cette série, soit $R(\theta, h)$ rayon de $\Gamma(\theta, h)$, est de la forme $h + p(\theta) + \eta(h)$ et même $h + p(\theta) + \frac{\mu + \eta(h)}{2h}$, $\eta(h)$ dans les deux cas tendant vers zéro quand h croît indéfiniment. Il existe donc, pour ε positif et h donnés, des nombres $N(\varepsilon, h)$, $N'(\varepsilon, h)$ et des suites $n_k(\varepsilon, h)$, $n'_k(\varepsilon, h)$ tels que : 1° pour tout entier n supérieur à $N(\varepsilon, h)$ ou à $N'(\varepsilon, h)$ respectivement

$$(6) \quad |\partial_{n+1}(u)| < [h + p(\theta) + \varepsilon]^n \quad \text{ou} \quad |\partial_{n+1}(u)| < \left[h + p(\theta) + \frac{\mu + \varepsilon}{2h} \right]^n;$$

2° pour tout nombre n appartenant à la suite $n_k(\varepsilon, h)$ ou $n'_k(\varepsilon, h)$,

$$(7) \quad |\partial_{n+1}(u)| > [h + p(\theta) - \varepsilon]^n \quad \text{ou} \quad |\partial_{n+1}(u)| > \left[h + p(\theta) + \frac{\mu - \varepsilon}{2h} \right]^n.$$

Je me suis proposé de rattacher aux propriétés de croissance de la fonction entière $F(\nu)$ associée à $g_0(z)$ les valeurs des nombres $N(\varepsilon, h)$, $N'(\varepsilon, h)$, $n_k(\varepsilon, h)$, $n'_k(\varepsilon, h)$ pour h assez grand. Je montre en particulier que les rapports λ_k et λ'_k de $n_k(\varepsilon, h)$ et $n'_k(\varepsilon, h)$ à h sont dans

certaines champs définis *a priori* par l'allure du rapport $|\varrho|^{-1} \log |F(\varrho)|$ aux abords du rayon $\varrho = \lambda e^{-\theta}$, quand λ croît indéfiniment.

Ces résultats, avec l'étude du principe géométrique (4-16) et les considérations finales (36-43), constituent la partie de ce travail où j'appellerai plus particulièrement l'attention du lecteur.

Je reviens encore (30-35) à l'étude de la fonction $F(\varrho)$ pour montrer que son allure asymptotique sur le rayon $\varrho = \lambda e^{-\theta}$, plus précisément la nature de la fonction entière $e^{-\nu\zeta} F(\varrho)$ le long de ce rayon peut donner la partie singulière de g_1 au voisinage du point principal isolé ζ , si toutes les droites $\Delta(\theta)$ passent par ζ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$. La partie principale de $e^{-\nu\zeta} F(\varrho)$ est un polynôme si ζ est un pôle, une fonction entière d'exposant nul si ζ est un point essentiel isolé de $g_1(z)$. On peut décomposer $F(\varrho)$ en une somme de termes mettant en évidence tous les pôles, ou tous les points essentiels isolés situés dans la région infinie du plus petit contour convexe Φ hors duquel cette sorte de points constituent les seules singularités du prolongement de $g_1(z)$. On peut également reconnaître si dans un cercle de centre ζ , $g_1(z)$ est prolongeable en une série absolument convergente $\sum c_m (z - \zeta)^{\alpha_m}$, les α_m étant réels, positifs ou négatifs. On peut même considérer une fonction $\int_{-\infty}^{+\infty} (z - \zeta)^\alpha d\nu(\alpha)$, la fonction $\nu(\alpha)$ étant à variation totale finie dans le champ de tous les nombres réels et l'intégrale étant absolument convergente dans un cercle de centre ζ . Un développement asymptotique correspondant existe pour $F(\varrho)$ et caractérise ce cas (¹).

I. — Principe géométrique de M. Mandelbrojt.

4. Soit $C(a, b)$ une courbe fermée simple de Jordan dépendant continûment de deux paramètres a et b . L'un de ces paramètres b joue un rôle spécial. Nous l'appellerons *paramètre de dilatation*. Si b croît,

(¹) La plupart des résultats contenus dans ce travail ont été publiés aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 204, 1937, p. 1611; 205, 1937, p. 453; 206, 1938, p. 737. Plusieurs auteurs ont également communiqué, postérieurement à la Note initiale de M. Mandelbrojt (204, 1937, p. 1456), d'importantes Notes relatives à ces mêmes sujets.

a restant fixe, l'une des régions $S(a, b)$ de $C(a, b)$ croît. Plus précisément, si $b < b'$, $\bar{S}(a, b) = S(a, b) + C(a, b) < S(a, b')$.

Soit H un ensemble fermé plan donné. Pour chaque valeur de a il existe, en raison de la croissance de $S(a, b)$ avec b , au plus une valeur $b = \psi(a)$ telle que, si $\Gamma(a)$ est la courbe $C[a, \psi(a)]$ et si $\Sigma(a)$ est la région $S[a, \psi(a)]$,

1° $\Sigma(a)$ est vide de points de H ;

2° $\Gamma(a)$ contient au moins un point de H et généralement un sous-ensemble fermé $H(a)$ commun avec H .

$\psi(a)$ est continue en a , d'après les hypothèses faites.

Le théorème que nous nous proposons d'établir est que, sous réserve des mises au point nécessaires, la théorie élémentaire des enveloppes est applicable à la famille de courbes $\Gamma(a)$ à un paramètre. L'enveloppe de $\Gamma(a)$ est un ensemble fermé généralement non continu, ayant en commun avec $\Gamma(a)$ certains points caractérisés de $H(a)$.

D'une façon précise :

1° La fonction $\psi(a)$ possède une dérivée à droite, que nous désignons par $\psi'(a + 0)$, et une dérivée à gauche $\psi'(a - 0)$;

2° Si

$$(8) \quad F(x, y, a, b) = 0$$

est l'équation de $C(a, b)$, et si

$$(9) \quad q(x, y, a, b) = -\frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial b},$$

$\psi'(a + 0)$ est le minimum des valeurs de q sur $H(a)$, $\psi'(a - 0)$ est le maximum des valeurs de q sur $H(a)$. En sorte que les équations

$$(10) \quad F(x, y, a, b) = 0, \quad b = \psi(a), \quad \begin{cases} 1^\circ & \frac{\partial F}{\partial a} + \psi'(a + 0) \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \\ 2^\circ & \frac{\partial F}{\partial a} + \psi'(a - 0) \frac{\partial F}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

définissent sur $\Gamma(a)$ deux ensembles de points caractéristiques $\theta_1(a)$, $\theta_2(a)$, lesquels comprennent respectivement les ensembles $H_1(a)$, $H_2(a)$ inclus dans $H(a)$ et où q atteint soit son minimum, soit son maximum sur $H(a)$. $q(x, y, a, b)$ sera appelé le *rang* du point (x, y) sur $C(a, b)$.

De ce premier point de vue, les points caractéristiques de $\Gamma(a)$ sont les points de $H(a)$ où q est soit minimum, soit maximum, accrus de tous les autres points de $\Gamma(a)$ où q a des valeurs égales à ce maximum ou à ce minimum.

3° *L'intersection de $\Gamma(a + \Delta a)$ et de $\Gamma(a)$ a son ensemble d'accumulation quand Δa tend vers zéro, respectivement inclus dans $\theta_1(a)$ ou dans $\theta_2(a)$ selon que Δa est positif ou négatif.*

C'est un deuxième point de vue définissant encore comme points caractéristiques de $\Gamma(a)$ des points *parmi* ceux où q a respectivement la valeur maximum et la valeur minimum qu'il atteint sur $H(a)$.

4° *L'ensemble d'accumulation de $H(a + \Delta a)$ quand Δa tend vers zéro est dans $H_1(a)$ ou dans $H_2(a)$, selon que Δa tend vers zéro par valeurs positives ou par valeurs négatives.*

Démontrons ces divers énoncés.

5. Les deux paramètres réels a et b varient dans un champ fermé D . Quand le point $M(x, y)$ décrit $C(a, b)$ et que (a, b) parcourt D , le point (x, y) décrit un domaine D' et le point (x, y, a, b) parcourt une variété fermée D'' à trois dimensions de l'espace U_4 à quatre dimensions. Soit Ω le domaine des points de U_4 se projetant dans D et D' .

Soient $S(a, b)$ et $S'(a, b)$ les deux régions de D' séparées par $C(a, b)$. L'inégalité $b < b'$ entraîne à la fois que $\bar{S}(a, b)$ est inclus dans $S(a, b')$ et que $S'(a, b)$ contient $\bar{S}'(a, b')$. En changeant le signe de F s'il le faut, on peut supposer que la région $S(a, b)$ croissant avec b est définie par $F < 0$.

On suppose $F(x, y, a, b)$ continue dans Ω . Cette hypothèse jointe à celle-ci que $F = 0$ définit un contour simple $C(a, b)$ entraîne que $C(a, b)$ et les régions $S(a, b)$, $S'(a, b)$ varient continûment avec a et b .

Dire que l'ensemble $C(a, b)$ varie continûment avec a et b , cela signifie que l'écart de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et de $C(a, b)$ tend vers zéro avec $|\Delta a| + |\Delta b|$. (L'écart mutuel de deux ensembles est le minimum des nombres ρ tels que tout cercle de rayon ρ ayant son centre sur l'un contient un point de l'autre.) Au nombre positif η_1 donné on peut faire correspondre $\eta_2 \leq \eta_1$ tel que si $|\Delta a| < \eta_2, |\Delta b| < \eta_2$, le point $(a + \Delta a, b + \Delta b)$ étant en outre dans D , il est possible à tout

point $M(x, y)$ de $C(a, b)$ de faire correspondre un point $M'(x', y')$ de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et réciproquement, de façon que la distance MM' soit inférieure à r_1 .

On suppose que les dérivées $\frac{\partial F}{\partial a}$ et $\frac{\partial F}{\partial b}$ existent et sont *continues* dans Ω . Pour que la condition $F(x, y, a, b) \leq 0$ entraîne

$$F(x, y, a, b + \Delta b) < 0 \quad \text{pour} \quad \Delta b > 0,$$

nous supposons $\frac{\partial F}{\partial b} < 0$ dans Ω . Dès lors la fonction $q(x, y, a, b)$ est continue dans Ω .

Nous ne faisons aucune hypothèse sur l'existence ni *a fortiori* sur la continuité des dérivées de F par rapport à x et à y (¹).

6. Nous considérons les valeurs de q comme *ordonnant* les points de $C(a, b)$. Les deux points $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$ étant sur $C(a, b)$, si $q(x_1, y_1, a, b) < q(x_2, y_2, a, b)$, nous dirons que M_1 est *antérieur* à M_2 sur $C(a, b)$ et que M_2 est *ultérieur* à M_1 sur la même courbe. E étant un ensemble fermé situé sur $C(a, b)$, le point ou l'ensemble *initial* de E , le point ou l'ensemble *terminal* de E sur $C(a, b)$ seront respectivement formés des points de E où q est minimum ou maximum, a et b gardant les valeurs définissant la courbe C où E est considéré.

Soient $e(\lambda) = e(\lambda, a, b)$ l'ensemble des points de $C(a, b)$ où $q(x, y, a, b) = \lambda$ et $e'(\lambda)$ la partie de $e(\lambda)$ formée des points au voisinage desquels $q - \lambda$ prend les deux signes. Nous dirons que les points

(¹) $F(x, y, a, b)$ s'annule avec la distance $d(x, y, a, b)$ du point (x, y) à $C(a, b)$ et $|F|$ est positif en même temps que d . On suppose même que F a des signes différents dans les deux régions séparées par $C(a, b)$. Si F pouvait s'annuler à distance positive de $C(a, b)$, il faudrait pour définir $C(a, b)$ compléter la condition $F = 0$ par des inégalités $\varphi(x, y, a, b) < 0$. Nous n'analyserons pas ces hypothèses plus générales que celles du texte.

D'après un théorème de M. Lebesgue, on peut toujours définir dans Ω une fonction continue F nulle sur D'' , négative dans tous les $S(a, b)$ et positive dans les $S'(a, b)$ si le point (a, b) est dans D , possédant enfin hors de D'' des dérivées partielles continues de tous les ordres en x, y, a, b . Une telle fonction F peut-elle, avec les hypothèses : $C(a, b)$ continue en a, b et $\bar{S}(a, b) < S(a, b')$ si $b < b'$, être toujours supposée mise sous la forme $\varphi(x, y, a) - b, \frac{\partial \varphi}{\partial a}$ existant et étant continue sur $C(a, b)$?

de $e(\lambda)$ sont *conjugués* les uns des autres. Ceux de $e'(\lambda)$ seront dits *conjugués forts*, ceux de $e(\lambda) - e'(\lambda)$ seront dits *conjugués faibles*.

Il nous sera commode de *supposer que* $e(\lambda, a, b)$ *ne contient aucun arc de* $C(a, b)$.

Nous voulons montrer que les équations (10) définissent sur $\Gamma(a)$: la première, l'ensemble $\theta_1(a)$ des conjugués du point ou de l'ensemble initial $H_1(a)$ de $H(a)$, la seconde l'ensemble $\theta_2(a)$ des conjugués du point ou de l'ensemble terminal $H_2(a)$ de $H(a)$.

Nous montrerons aussi que, $\theta'_1(a)$ et $\theta'_2(a)$ désignant les ensembles des conjugués forts inclus respectivement dans $\theta_1(a)$ et dans $\theta_2(a)$, l'ensemble d'accumulation des intersections de $\Gamma(a)$ avec $\Gamma(a + \Delta a)$, quand Δa tend vers zéro avec un signe constant, est inclus dans $\theta_1(a)$ et renferme $\theta'_1(a)$, si Δa est positif, est inclus dans $\theta_2(a)$ et renferme $\theta'_2(a)$ si Δa est négatif.

Nous considérerons la division de $C(a, b)$ par les points de $e(\lambda)$; nous étudierons les positions mutuelles des arcs de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et de $C(a, b)$, ainsi que l'intersection de ces deux courbes.

6 b. $q(x, y, a, b)$ étant continu dans l'ensemble fermé Ω , à ε positif donné nous pouvons faire correspondre $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon)$ de façon que si les quatre différences $x' - x, y' - y, a' - a, b' - b$ sont en valeur absolue inférieures à η_1 , il en résulte $|q(x', y', a', b') - q(x, y, a, b)| < \varepsilon$ quels que soient (x, y, a, b) et (x', y', a', b') dans Ω . Si donc $\mu_1 = \mu_1(a, b)$ et $\mu_2 = \mu_2(a, b)$ sont respectivement le minimum et le maximum de $q(x, y, a, b)$ sur $C(a, b)$, ces nombres différeront des nombres analogues relatifs à $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ de moins de ε en valeur absolue si $|\Delta a|$ et $|\Delta b| < \eta_2 = \eta_2(\varepsilon)$, ces dernières inégalités entraînant que l'écart de $C(a, b)$ et de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ est inférieur à $\eta_1 = \eta_1(\varepsilon)$.

Si $\lambda < \mu_1$ ou $\lambda > \mu_2$, $e(\lambda, a, b)$ n'existe pas.

L'ensemble $e(\mu_1, a, b)$ est l'ensemble initial de $C(a, b)$; $e(\mu_2, a, b)$ en est l'ensemble terminal. $e(\mu_1)$ et $e(\mu_2)$ peuvent chacun ne renfermer qu'un point. Ils ne sont formés que de conjugués faibles.

Si $\mu_1 < \lambda < \mu_2$, $e(\lambda, a, b)$ existe. Soit $E_1(\lambda, a, b)$ l'ensemble des arcs-intervalles (extrémités exclues) de $C(a, b)$ où $q < \lambda$, $E_2(\lambda, a, b)$ l'ensemble des arcs-intervalles de $C(a, b)$ où $q > \lambda$. $E_1(\mu_1, a, b)$ n'existe pas, non plus que $E_2(\mu_2, a, b)$. Pour $\mu_1 < \lambda < \mu_2$, E_1 et E_2 existent.

$E_1(\lambda, a, b)$ croît et $E_2(\lambda, a, b)$ décroît quand λ croît. Quel que soit λ ,

$$C(a, b) = E_1 + e + E_2.$$

$e(\lambda, a, b)$ est la réunion des frontières de $E_1(\lambda, a, b)$ et de $E_2(\lambda, a, b)$, puisque $e(\lambda, a, b)$ est supposé non dense sur $C(a, b)$. $e'(\lambda, a, b)$ est la partie commune à ces deux frontières. $e'(\lambda, a, b)$ renferme au moins deux points, puisque $E_1(\lambda, a, b)$ et $E_2(\lambda, a, b)$ existent l'un et l'autre, et qu'en décrivant $C(a, b)$ dans un sens invariable, on ne peut passer d'un arc de l'un des ensembles $E_1(\lambda, a, b)$ ou $E_2(\lambda, a, b)$ à un arc de l'autre sans rencontrer au moins un point de $e'(\lambda, a, b)$.

7. Considérons la position mutuelle de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et de $C(a, b)$, Δa étant non nul. Supposons que le segment rectiligne joignant (a, b) à $(a + \Delta a, b + \Delta b)$ soit dans D , ce qui aura lieu, si (a, b) est intérieur à D , dès que $|\Delta a|$ et $|\Delta b|$ seront assez petits. Désignons par τ le rapport $\frac{\Delta b}{\Delta a}$ et par Δu l'accroissement d'une variable u .

On a

$$\begin{aligned} (11) \quad \Delta F &= F(x, y, a + \Delta a, b + \Delta b) - F(x, y, a, b) \\ &= \frac{\partial F}{\partial a}(x, y, \alpha, \beta) \Delta a + \frac{\partial F}{\partial b}(x, y, \alpha, \beta) \Delta b \\ &= -\Delta a \frac{\partial F}{\partial b}(x, y, \alpha, \beta) [q(x, y, \alpha, \beta) - \tau], \end{aligned}$$

(α, β) est un certain point du segment rectiligne joignant (a, b) à $(a + \Delta a, b + \Delta b)$.

Le signe de ΔF est celui de $\Delta a [q(x, y, \alpha, \beta) - \tau]$. Supposons

$$|\Delta a| < \eta_2(\varepsilon), \quad |\Delta b| < \eta_2(\varepsilon)$$

ΔF a (6b) le signe de

$$\Delta a [q(x, y, a, b) - \tau + \delta\varepsilon] \quad (\delta^2 < 1)$$

et aussi celui de

$$\Delta a [q(x, y, a + \Delta a, b + \Delta b) - \tau + \delta'\varepsilon] \quad (\delta'^2 < 1).$$

1° Il résulte de ceci que $C(a, b)$ et $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ sont disjointes si $\tau < \mu_1(a, b) - \varepsilon$ ou si $\tau < \mu_1(a + \Delta a, b + \Delta b) - \varepsilon$, et aussi quand $\tau > \mu_2(a, b) + \varepsilon$ ou $\tau > \mu_2(a + \Delta a, b + \Delta b) + \varepsilon$ (toujours avec $|\Delta a|, |\Delta b| < \eta_2$).

En effet, si le point $M(x, y)$ est sur $C(a, b)$,

$$F(x, y, a + \Delta a, b + \Delta b) = \Delta F$$

a le signe de $\Delta a[q(x, y, a, b) - \tau + \delta\varepsilon]$.

Si $M'(x', y')$ est sur $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$, $F(x', y', a, b) = -\Delta F(x', y', a, b)$
a le signe de $-\Delta a[q(x', y', a + \Delta a, b + \Delta b) - \tau + \delta'\varepsilon]$.

Si

$$\tau < \mu_1(a, b) - \varepsilon, \quad \text{ou} \quad \tau < \mu_1(a + \Delta a, b + \Delta b) - \varepsilon, \quad \text{pour } \Delta a > 0,$$

$C(a, b)$ est dans $S'(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ est dans $S(a, b)$. Pour $\Delta a < 0$, $C(a, b)$ est dans $S(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ dans $S'(a, b)$.

Si

$$\tau > \mu_2(a, b) + \varepsilon, \quad \text{ou} \quad \tau > \mu_2(a + \Delta a, b + \Delta b) + \varepsilon,$$

on a des conclusions analogues, les régions S et S' échangeant leurs rôles.

2° ε étant supposé inférieur au quart de $\mu_2(a, b) - \mu_1(a, b)$, soit τ compris entre $\mu_1 + \varepsilon$ et $\mu_2 - \varepsilon$.

L'ensemble $E_1(\tau - \varepsilon, a, b)$, dont chaque point appartient à $C(a, b)$ et vérifie $q(x, y, a, b) < \tau - \varepsilon$, est en totalité dans $S(a + \Delta a, b + \Delta b)$ si $\Delta a > 0$ et dans $S'(a + \Delta a, b + \Delta b)$ si $\Delta a < 0$. C'est l'inverse pour $E_2(\tau + \varepsilon, a, b)$, qui est en totalité dans $S'(a + \Delta a, b + \Delta b)$ si $\Delta a > 0$ et dans $S(a + \Delta a, b + \Delta b)$ si $\Delta a < 0$ (fig. 3).

Soit $e(\tau, \varepsilon, a, b)$ l'ensemble des points de $C(a, b)$ vérifiant

$$\tau - \varepsilon \leq q(x, y, a, b) \leq \tau + \varepsilon,$$

$e(\tau, \varepsilon, a, b)$ est l'ensemble fermé obtenu en retranchant de $C(a, b)$ les deux ensembles $E_1(\tau - \varepsilon, a, b)$ et $E_2(\tau + \varepsilon, a, b)$. Désignons par $e'(\tau, \varepsilon, a, b)$ l'ensemble des arcs-segments de $C(a, b)$ contenus dans $e(\tau, \varepsilon, a, b)$ et ayant une extrémité frontière à $E_1(\tau - \varepsilon, a, b)$ et l'autre extrémité frontière à $E_2(\tau + \varepsilon, a, b)$. $e'(\tau, \varepsilon, a, b)$ renferme au moins deux arcs-segments. Quel que soit le signe de Δa , les deux extrémités d'un arc-segment de $e'(\tau, \varepsilon)$ sont dans deux régions différentes de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$. Donc, tout arc-segment constituant de $e'(\tau, \varepsilon)$ contient au moins un point commun aux deux courbes $C(a, b)$ et $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$.

Au contraire, tout arc-segment majeur (contenu dans nul autre) de $e(\tau, \varepsilon, a, b)$ qui n'est pas dans $e'(\tau, \varepsilon)$ a ses deux extrémités frontières

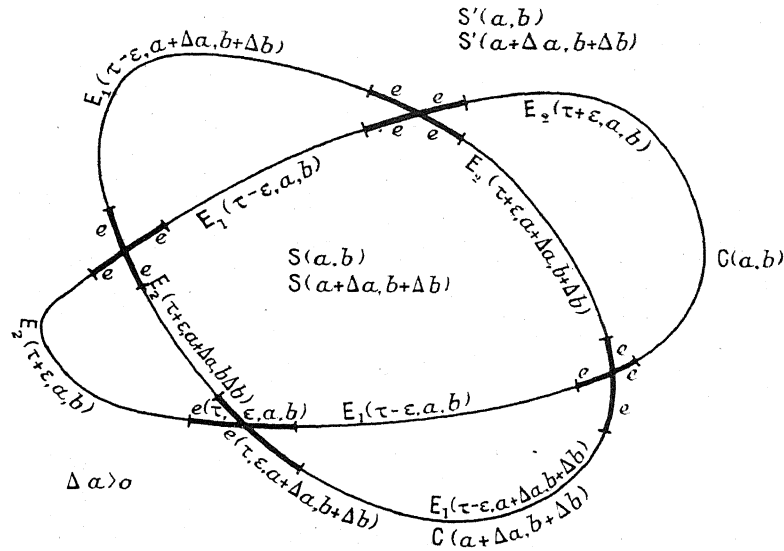


Fig. 3.

au même ensemble $E_1(\tau - \varepsilon, a, b)$ ou $E_2(\tau + \varepsilon, a, b)$, et l'on ne peut *a priori* affirmer ni qu'il contienne ni qu'il ne contienne pas de point commun aux deux courbes.

En tout cas, si

$$\mu_1(a, b) + \varepsilon < \tau < \mu_2(a, b) - \varepsilon, \quad |\Delta a| \text{ et } |\Delta b| < \eta_2(\varepsilon),$$

l'intersection de $C(a, b)$ et de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ existe; elle est située en totalité dans $e(\tau, \varepsilon, a, b)$ et a au moins un point dans chacun des arcs-segments $e'(\tau, \varepsilon, a, b)$.

On peut évidemment échanger dans ce qui précède les rôles des courbes $C(a, b)$ et $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$.

7 b. Supposons maintenant que Δa et Δb tendent vers zéro, et de façon que τ tende vers une limite λ contenue dans l'intervalle $\mu_1(a, b) < \lambda < \mu_2(a, b)$.

Alors ε peut être supposé infiniment petit avec la borne supérieure de $|\Delta a|$.

$e(\lambda, a, b)$ est l'ensemble commun à tous les $e(\lambda, \varepsilon, a, b)$ quand ε varie. D'autre part, sur tout arc-segment de $C(a, b)$ contenant un point de $e'(\lambda, a, b)$ il y a, dès que ε est assez petit, des points de $E_1(\lambda - \varepsilon, a, b)$ et des points de $E_2(\lambda + \varepsilon, a, b)$, donc des arcs-segments de $e'(\lambda, \varepsilon, a, b)$. Donc l'intersection de $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ et de $C(a, b)$ existe dès que $|\Delta a|$ est assez petit et l'ensemble de ses points d'accumulation, quand Δa prend une suite de valeurs tendant vers zéro, est dans $e(\lambda, a, b)$ et renferme la totalité de $e'(\lambda, a, b)$.

Enfin, si Δa a un signe constant, par exemple si $\Delta a > 0$, dès que Δa est assez petit, $E_1(\lambda - \varepsilon, a, b)$ est dans $S(a + \Delta a, b + \Delta b)$, etc. (trois résultats analogues).

8. Arrivons maintenant à la démonstration du principe généralisé de M. Mandelbrojt.

H est un ensemble fermé donné, intérieur à D' . $b = \psi(a)$ est caractérisé par les conditions que $S[a, \psi(a)]$ ou $\Sigma(a)$ est vide de points de H , tandis que $C[a, \psi(a)]$ ou $\Gamma(a)$ renferme un sous-ensemble fermé (non vide), $H(a)$ appartenant à H . Le fait que $\psi(a)$ est déterminé et les hypothèses sur la continuité de $C(a, b)$ en a et b montrent que $\psi(a)$ est une fonction continue de a .

Soient $\lambda_1 = \lambda_1(a)$ et $\lambda_2 = \lambda_2(a)$ le minimum et le maximum de $q[x, y, a, \psi(a)]$ sur $H(a)$. Tout point d'accumulation de la suite d'ensembles $H(a + \Delta a)$, quand Δa tend vers zéro, est un point de $H(a)$ parce que : 1° H est fermé; 2° $\Gamma(a)$ varie continûment avec a , comme $\psi(a)$ lui-même. Il résulte de là que, $q(x, y, a, b)$ étant continu dans Ω , tout élément limite, quand Δa tend vers zéro, d'un point du segment numérique $\lambda_1(a + \Delta a), \lambda_2(a + \Delta a)$ appartient au segment $\lambda_1(a), \lambda_2(a)$. Donc

$$\lim_{\Delta a \rightarrow 0} \lambda_1(a + \Delta a) \geq \lambda_1(a), \quad \overline{\lim}_{\Delta a \rightarrow 0} \lambda_2(a + \Delta a) \leq \lambda_2(a).$$

Soit a' différent de a . $\Gamma(a')$, qui contient les points de H formant $H(a')$ n'est pas en totalité dans $\Sigma(a)$. De même $\Sigma(a')$ ne contient pas la totalité de $\Gamma(a)$. Si a' tend vers a , la région $\Sigma(a')$ tend vers la région $\Sigma(a)$. Dès que $\Sigma(a')$ et $\Sigma(a)$ ont un point commun, on voit immédiatement que $\Gamma(a)$ et $\Gamma(a')$ sont non disjoints. Si donc $\tau = \frac{\psi(a + \Delta a) - \psi(a)}{\Delta a}$, les limites d'indétermination de τ quand Δa tend vers zéro, appartiennent au segment $\mu_1[a, \psi(a)], \mu_2[a, \psi(a)]$.

Soit à démontrer l'égalité $\lambda_1(a) = \psi'(a + 0)$.

Tout d'abord, indépendamment du signe de Δa , dès que $|\Delta a|$ est assez petit,

$$\lambda_1(a + \Delta a) > \lambda_1(a) - \varepsilon.$$

Soit $\Delta a > 0$.

Puisque $E_2[\tau + \varepsilon, a + \Delta a, \psi(a) + \tau\Delta a]$, s'il existe, est en totalité dans $S[a, \psi(a)]$ ou $\Sigma(a)$, cet ensemble E_2 ne contient aucun point de $H(a + \Delta a)$. Donc

$$\lambda_1(a + \Delta a) \leq \lambda_2(a + \Delta a) \leq \tau + \varepsilon.$$

D'où

$$\lambda_1(a) - 2\varepsilon < \lambda_2(a + \Delta a) - \varepsilon < \tau,$$

dès que Δa positif est assez petit.

D'autre part, $E_1[\tau - \varepsilon, a, \psi(a)]$, s'il existe, est en totalité dans $S[a + \Delta a, \psi(a) + \tau\Delta a]$ ou $\Sigma(a + \Delta a)$. Il est donc impossible que $\lambda_1(a) < \tau - \varepsilon$, sinon $H(a)$ aurait un point dans $\Sigma(a + \Delta a)$. Donc $\tau \leq \lambda_1(a) + \varepsilon$.

Finalement, τ tend vers $\lambda_1(a)$. Donc $\psi(a)$ a une dérivée à droite $\psi'(a + 0)$ et

$$\psi'(a + 0) = \lambda_1(a) = - \frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial b} \quad [b = \psi(a)],$$

la valeur du premier terme étant le minimum du dernier sur $H(a)$. On montre de même $\psi'(a - 0) = \lambda_2(a)$, en considérant $\Delta a < 0$.

$\lambda_2(a + \Delta a)$ et $\lambda_1(a + \Delta a)$ tendent, comme τ , vers $\lambda_1(a)$ quand Δa positif tend vers zéro. Donc la dérivée $\psi'(a)$, susceptible de deux déterminations valables chacune unilatéralement, est cependant continue unilatéralement en chaque point. Ce qui justifie les notations $\psi'(a + 0)$ et $\psi'(a - 0)$ pour la dérivée droite et la dérivée gauche de $\psi(a)$. L'ensemble des points de discontinuité de $\psi'(a)$ est dénombrable, et en chacun d'eux $\psi'(a + 0) - \psi'(a - 0) < 0$.

Il est donc démontré que l'ensemble $H_1(a)$ des points initiaux de $H(a)$ est donné solidairement avec tous leurs conjugués par les équations

$$(10, 1^0) \quad F(x, y, a, b) = 0, \quad b = \psi(a), \quad \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b} \psi'(a + 0) = 0.$$

D'autre part, τ tendant vers $\psi'(a + 0)$ pour Δa positif tendant vers zéro, l'ensemble des points d'accumulation de l'intersection de $\Gamma(a + \Delta a)$ et de $\Gamma(a)$ est contenu dans l'ensemble $e[\psi'(a + 0), a, \psi(a)]$,

ou $\theta_1(a)$, des conjugués sur $\Gamma(a)$ des points initiaux de $H(a)$ et il renferme l'ensemble $\theta_1(a)$ de leurs conjugués forts. [Si l'ensemble initial $H(a)$ est formé de points extrêmes de $\Gamma(a)$, les conjugués forts des points de $H_1(a)$ n'existent pas.]

Le rang des points de $H(a + \Delta a)$ sur $\Gamma(a + \Delta a)$, rang compris entre $\lambda_1(a + \Delta a)$ et $\lambda_2(a + \Delta a)$ inclusivement, tend vers $\lambda_1(a)$. Donc, les points d'accumulation de la famille $H(a + \Delta a)$ quand Δa tend vers zéro par valeurs positives appartiennent tous à $H_1(a)$, puisqu'ils sont dans $H(a)$ et ont pour rang $\lambda_1(a)$.

Si Δa tend vers zéro par valeurs négatives, on trouve les conclusions analogues formulées dans l'énoncé du théorème.

Celui-ci est dès lors entièrement établi.

8 b. Le principe de M. Mandelbrojt est une réciproque du théorème précédent :

Si, l'ensemble fermé H n'étant pas donné, on connaît cependant la fonction $b = \psi(a)$ définissant pour chaque a la région maximum $S(a, b)$ vide de points de H , les équations (10) feront connaître sur $\Gamma(a) = C[a, \psi(a)]$ respectivement les points initiaux et les points terminaux de $H(a) = H. \Gamma(a)$, mais indistinctement avec leurs conjugués.

Bien entendu, $\psi(a)$ et les courbes $\Gamma(a)$ vérifieront toutes les conditions analytiques ou géométriques établies plus haut.

9. Nous ajouterons à la théorie précédente quelques remarques permettant d'en étendre l'application.

1° Pour que les théorèmes énoncés soient valables pour une courbe déterminée $\Gamma(a)$, il faut et il suffit que les hypothèses de continuité ou de signe, relatives aux configurations, aux fonctions, soient vérifiées simplement dans la partie de Ω correspondant au voisinage du point a , $\psi(a)$ dans D . H étant intérieur à D' , les inégalités supposées peuvent être remplacées par l'égalité sur la frontière de D' . Pareillement, les résultats relatifs à l'existence de $\psi'(a + 0)$, aux ensembles d'accumulation des points communs à $\Gamma(a + \Delta a)$ et à $\Gamma(a)$ quand Δa tend vers zéro par valeurs positives, etc., supposent simplement que $\psi(a + \Delta a)$ est défini pour $\Delta a > 0$. a pourra donc être situé à l'extrémité gauche du segment constitué par les valeurs qu'il prend dans D .

Observation analogue si a est l'extrémité droite du même segment.

2° La région $S(a, b)$ qui, pour $b = \psi(a)$, est la région $\Sigma(a)$ de $\Gamma(a)$ vide de points de H , tandis que $\Gamma(a)$ contient au moins un point de H , a été supposée *croissante* avec b (sous réserve de précisions complémentaires). Si $S(a, b)$ est au contraire *décroissante*, quand b croît, en supposant $S(a, b)$ toujours définie par $F < 0$, on a $\frac{\partial F}{\partial b} > 0$.

Il faut, dans tous les raisonnements et énoncés, changer le signe de Δa . $\psi'(a + 0)$ et $\psi'(a - 0)$ s'échangent. Par conséquent, *dans cette nouvelle hypothèse*, $\psi'(a + 0)$ est le rang de l'ensemble terminal $H_2(a)$ de $H(a)$ [et de l'ensemble conjugué $\theta_2(a)$], $\psi'(a - 0)$ est le rang de l'ensemble initial $H_1(a)$ de $H(a)$ [et des points de $\theta_1(a)$].

3° Le rang $q(x, y, a, b) = -\frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial b}$ du point $M(x, y)$ sur $C(a, b)$ est indépendant d'une transformation $g(F)$, avec $g(0) = 0$, effectuée sur la fonction F nulle sur $C(a, b)$.

Si nous opérons un changement des paramètres a et b en c et d , indépendamment de x et de y , le rang de tout point $M(x, y)$ d'une courbe donnée $C(a, b)$ subit une transformation homographique indépendante du point M sur C et ne dépendant que de la transformation du système (a, b) . L'ensemble des conjugués d'un point donné de $C(a, b)$ reste invariant.

Bien entendu, la transformation de (a, b) en (c, d) doit conduire à une dérivée $\frac{\partial F}{\partial d}$ de signe constant. Il sera nécessaire et suffisant pour cela que $\frac{\partial b}{\partial d} - q \frac{\partial a}{\partial d}$ ait un signe constant dans D . Il en sera ainsi pour

$$a = c + \varepsilon k(c, d), \quad b = d + \varepsilon h(c, d),$$

dès que ε est assez petit (et indépendant de c et de d).

La transformation homographique étant de sens invariable, un changement des paramètres a, b remplissant les conditions que nous venons de dire ne modifie pas l'ordonnement des points d'une courbe $C(a, b)$, sauf à l'inverser simultanément sur toutes les courbes à la fois. Comme on pouvait s'y attendre, les éléments extrêmes de $H(a)$ gardent leur caractère.

Enfin, dans une transformation topologique du plan des x, y , l'équation de la transformée $C'(a, b)$ de $C(a, b)$ est encore $F(x, y, a, b) = 0$,

où x et y sont exprimées au moyen des coordonnées x', y' du transformé de $M(x, y)$. La définition du rang q montre que le rang de M sur $C(a, b)$ est égal au rang de M' sur $C'(a, b)$. La relation de conjugaison de deux points de $C(a, b)$ est topologiquement invariante (¹).

10. Supposons que la courbe $C(a, b)$ admette les équations paramétriques

$$x = x(\omega, a, b), \quad y = y(\omega, a, b),$$

ω étant par exemple l'argument d'un point décrivant le cercle trigonométrique, pendant que le point $M(x, y)$ décrit $C(a, b)$. En tous cas, il sera intéressant et toujours réalisable que le champ de variation de ω soit un segment indépendant de a, b , par exemple le segment $0 \leq \omega \leq 2\pi$. Le domaine Ω' fermé parcouru par le point (a, b, ω) est la composition de deux domaines indépendants, savoir D où le point (a, b) se déplace et le segment décrit par ω .

Nous supposerons x et y doués de dérivées premières continues en ω, a, b dans Ω .

Supposons que la région $S(a, b)$ croissante avec b soit la région positive de $C(a, b)$ parcourue dans le sens des ω croissants. Le changement éventuel de ω en $2\pi - \omega$ permet toujours de réaliser ces conditions. Le rang q en un point est la valeur de $\frac{db}{da}$ en ce point si la courbe y touche son enveloppe, quand la théorie élémentaire s'applique, b étant regardé comme fonction de a . On trouve

$$(9, 2) \quad q = q(x, y, a, b) = q(\omega, a, b) = - \frac{D(x, y)}{D(\omega, a)} : \frac{D(x, y)}{D(\omega, b)}.$$

(¹) Il y aurait peut-être une intéressante étude topologique à faire sur les courbes planes $C(a, b)$ dépendant continûment de deux paramètres, et généralisant comme il suit les conditions de l'énoncé :

1° Il existe deux nombres finis $\mu_1(a, b)$ et $\mu_2(a, b)$ tels que si

$$\overline{\lim}_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta b}{\Delta a} < \mu_1(a, b), \quad \text{ou si} \quad \underline{\lim}_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta b}{\Delta a} > \mu_2(a, b),$$

la courbe $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ finit par être disjointe de $C(a, b)$.

2° Quel que soit le point $M(x, y)$ situé sur $C(a, b)$, si $C(a + \Delta a, b + \Delta b)$ contient M et si $|\Delta a| + |\Delta b|$ tend vers 0, le rapport $\frac{\Delta b}{\Delta a}$ tend vers une limite unique q appelée le rang de M sur $C(a, b)$.

Dans quelle mesure la seconde condition est-elle indépendante de la première ?

C'est bien la valeur de $-\frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial b}$, si l'on forme l'équation $F(x, y, a, b) = 0$ de $C(a, b)$ par l'élimination de ω entre les expressions de x et de y .

Considérons le vecteur $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \omega}$ ou $\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}, \frac{\partial y}{\partial \omega}\right)$, et aussi $\frac{\partial \vec{M}}{\partial b}$ ou $\left(\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}\right)$. Soit

$$u = \frac{\partial x}{\partial \omega} \frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b} \frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{D(x, y)}{D(\omega, b)}$$

le produit vectoriel $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \omega} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial b}$.

L'hypothèse $u < 0$ entraîne $S(a, b) < S(a, b')$ pour $b < b'$.

Soit

$$\Delta \vec{M} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial \vec{M}}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial \vec{M}}{\partial \omega} \Delta \omega + o(|\Delta a| + |\Delta b| + |\Delta \omega|),$$

la notation $o(x)$ étant celle de Landau. Pour connaître la position du point $M' = M + \Delta \vec{M}$ par rapport à $S(a, b)$ quand M est sur $C(a, b)$,

nous considérons le signe du produit vectoriel $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \omega} \wedge \Delta \vec{M}$. Le point M' est dans $S(a, b)$ ou dans $S'(a, b)$ selon que ce produit est positif ou négatif. On voit que si $\Delta \omega$ est infiniment petit, de l'ordre de $|\Delta a| + |\Delta b|$ au moins, le produit vectoriel est mesuré par

$$\frac{D(x, y)}{D(\omega, a)} \Delta a + \frac{D(x, y)}{D(\omega, b)} \Delta b + o(|\Delta a| + |\Delta b|),$$

ou

$$-u \Delta a \left(q - \frac{\Delta b}{\Delta a} + \delta \varepsilon \right),$$

avec $\delta^2 < 1$, dès que $|\Delta a| + |\Delta b|$ est assez petit, ε positif étant donné. La discussion faite plus haut recommence, u remplaçant $\frac{\partial F}{\partial b}$.

Ici encore, $\psi'(a + 0)$ est le rang des éléments initiaux de $H(a)$ et $\psi'(a - 0)$ le rang des éléments terminaux de $H(a)$, ou bien c'est l'inverse selon que, la région $\Sigma(a)$ vide de points de H étant identique à $S[a, \psi(a)]$, la région $S(a, b)$ croît ou décroît quand b croît.

Enfin, si l'équation de $\bar{C}(a, b)$ est mise sous la forme

$$z = x + iy = z(\omega, a, b),$$

on a

$$(9, 3) \quad q = - \frac{\mathcal{J} \left(\frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial a} \right)}{\mathcal{J} \left(\frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial b} \right)},$$

$\mathcal{R}(\omega) + i\mathcal{J}(\omega)$ désignant selon l'usage le nombre complexe ω .

Supposons que la courbe $C(\theta, b)$ soit de la forme $z = e^{i\theta} \zeta(\omega, b)$.

Alors

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial \omega} = e^{i\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = ie^{i\theta} \zeta, \quad \frac{\partial z}{\partial b} = e^{i\theta} \frac{\partial \zeta}{\partial b} \\ \frac{\partial \bar{z}}{\partial \omega} = e^{-i\theta} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} = -ie^{-i\theta} \bar{\zeta}, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial b} = e^{-i\theta} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b} \end{array} \right. \quad q = \frac{-\mathcal{R} \left(\bar{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \omega} \right)}{\mathcal{J} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b} \right)}.$$

Le rang q est indépendant de θ sur la courbe $C(\theta, b)$. Pour une même valeur de ω , il ne dépend que de b .

Applications du principe géométrique.

11. Indiquons à quels exemples de courbes et de quelle manière nous appliquerons le principe géométrique.

Comme famille à deux paramètres considérons les droites du plan $D(\theta, b)$ d'équations

$$F(x, y, \theta, b) = x \cos \theta + y \sin \theta - b = 0 \quad \text{ou} \quad z = x + iy = (b + it) e^{i\theta},$$

t étant un nombre réel quelconque.

Nous pouvons appliquer nos résultats généraux, D et D' étant les plans complets des (θ, b) et des (x, y) , diminués de leurs points à l'infini.

Soit Δ' ou $\Delta'(\theta)$ la droite indéfinie $z = re^{i\theta}$, r étant réel quelconque. Si nous prenons Δ' pour axe des abscisses et $D(\theta, b)$ d'argument $\theta + \frac{\pi}{2}$ comme axe des ordonnées, t sera l'ordonnée du point $z = x + iy$ situé sur $D(\theta, b)$.

La région positive $S(\theta, b)$, ou $F > 0$, de la droite $D(\theta, b)$, contenant les points de Δ' correspondant à $r = +\infty$, donc la région négative

de $D(\theta, b)$ par rapport aux t croissants, cette région $S(\theta, b)$ décroît quand b croît. Le rang sur $D(\theta, b)$ du point $z = e^{i\theta} \zeta$, avec $\zeta = b + it$, est,

$$-\Re\left(\bar{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right) : \Im\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial b}\right) = t.$$

Les hypothèses du cas général sont vérifiées à distance finie (9, 1°). Aussi, H étant un ensemble fermé (borné) donné, soit $b = p(\theta)$ le minimum des valeurs de b telles que l'ensemble H n'ait aucun point dans la région positive de la droite $D(\theta, b)$. La droite $\Delta(\theta)$ d'équation

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0,$$

contient un ensemble $H(\theta)$ appartenant à H , tandis que tous les autres points de H sont dans la région négative de $\Delta(\theta)$. La théorie générale nous apprend que :

- 1° $p'(\theta + 0)$ et $p'(\theta - 0)$ existent quel que soit θ ;
- 2° $p'(\theta + 0)$ est l'ordonnée maximum $\lambda_2(\theta)$, $p'(\theta - 0)$ est l'ordonnée minimum $\lambda_1(\theta)$ des points de $H(\theta)$, ces ordonnées étant comptées suivant $\Delta(\theta)$.

3° Les points de $H(\theta)$ ainsi définis sans ambiguïté par ces deux nombres $p'(\theta + 0)$ et $p'(\theta - 0)$ sont respectivement les points limites uniques de l'intersection de $\Delta(\theta + \Delta\theta)$ avec $\Delta(\theta)$, et les positions limites uniques des points de $H(\theta + \theta)$, quand $\Delta\theta$ tend vers 0, respectivement par valeurs positives et par valeurs négatives.

4° Non seulement $p(\theta)$ est continu, mais $p'(\theta)$ (avec sa double détermination éventuelle) possède, en chaque point la continuité unilatérale; $p'(\theta + 0) - p'(\theta - 0)$ est toujours positif ou nul.

Toutes ces propriétés se vérifient géométriquement avec une grande facilité.

Si l'on trace sur chaque droite $\Delta(\theta)$ le segment $\sigma(\theta)$ (généralement réduit à un point) joignant les points extrêmes de $H(\theta)$, l'ensemble des $\sigma(\theta)$ est la frontière $V(H)$ de ce que j'ai appelé la *borne convexe* de H ⁽¹⁾, soit $B_0(H)$. Les extrémités des segments $\sigma(\theta)$ (confondues

(1) La *borne convexe* d'un ensemble borné plan et non linéaire E est l'ensemble des points $x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4$, $y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4$, avec $k_i > 0$ et $\sum k_i = 1$ les (x_i, y_i) étant quatre points distincts quelconques appartenant à E , trois à trois non alignés, tout au moins si E contient au moins quatre tels points. Sinon, on annulera le coefficient k_4 .

sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de θ) seront appelées les *points principaux* de $V(H)$.

Soit $\zeta = \rho e^{i\psi}$ un point principal *isolé*. Ce point est l'extrémité commune de deux segments appartenant à $V(H)$ et qui, dirigés à partir de ζ , ont pour arguments respectifs, $\theta_1 - \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 - \frac{\pi}{2}$, avec $\theta_1 < \theta_2 < \theta_1 + \pi$.

Alors pour $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, la droite $\Delta(\theta)$ passe par ζ et par suite $p(\theta) = \rho \cos(\theta - \psi)$. On vérifie que le point $e^{i\theta}[p(\theta) + ip'(\theta)]$, caractéristique de la droite $\Delta(\theta)$ ne cesse pas, pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, de coïncider avec ζ .

Nous allons retrouver les points principaux par une autre voie.

12. Considérons comme seconde famille de contours à deux paramètres vérifiant les hypothèses de l'énoncé, les cercles ayant leurs centres sur une droite donnée, que nous prenons pour axe des x .

Soient $-h$ l'abscisse du centre, R le rayon d'un tel cercle $C(h, R)$. Considérons la région infinie $S(h, R)$ de ce cercle. Elle décroît quand R croît. Nous sommes dans le cas d'application de la théorie générale. Le cercle a pour équation

$$\begin{aligned} x + iy = z = -h + Re^{i\omega} \quad & (-\pi \leq \omega \leq \pi), \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} = iRe^{i\omega}, \quad \frac{\partial z}{\partial h} = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial R} = e^{i\omega}, \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial h} = -iRe^{i\omega}, \quad \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial R} = iR. \end{aligned}$$

Le rang $q(\omega, h, R)$ est donc $\cos \omega$, indépendamment de h et de R . A une valeur de q correspondent deux points conjugués d'arguments ω et $-\omega$, sauf pour $q = -1$, $\omega = \pm \pi$, définissant un point initial unique, ou pour $q = 1$, $\omega = 0$, définissant un point terminal unique.

Done, si $\Gamma(h)$ est le cercle de centre $-h$ et de rayon $R(h)$ tel que l'ensemble H n'a pas de point dans la région infinie $\Sigma(h)$ de $\Gamma(h)$, tandis qu'il possède au moins un point et généralement un ensemble $H(h)$ sur $\Gamma(h)$, $\frac{dR}{dh}(h + 0)$ et $\frac{dR}{dh}(h - 0)$ existent l'un et l'autre. Ils valent respectivement le maximum et le minimum de $\cos \omega$ sur $H(h)$. *C'est le théorème de M. Mandelbrojt.*

Si les arguments extrêmes des points de $H(h)$ sur $\Gamma(h)$ sont respec-

tivement ω_1 pour le plus petit en valeur absolue, ω_2 pour le plus grand,

$$(13) \quad \frac{dR}{dh}(h + 0) = \cos \omega_1, \quad \frac{dR}{dh}(h - 0) = \cos \omega_2.$$

12 b. Étudions la variation de $R(h)$ avec h . Bornons-nous au cas de $h > 0$.

Deux cercles $\Gamma(h)$ et $\Gamma(h')$ ont, nous l'avons vu, toujours au moins un point commun. Donc, si $0 \leq h' < h$,

$$-(h - h') \leq R(h) - R(h') \leq h - h' \leq R(h) + R(h').$$

En particulier, faisant $h' = 0$ et posant $R(0) = R_0$,

$$-h \leq R(h) - R_0 \leq h \leq R(h) + R_0,$$

ou

$$-R_0 \leq R(h) - h \leq R_0 \quad \text{et} \quad R(h) + h \geq R_0 \quad (h > 0).$$

1° La condition $R(h) = R_0 + h$, vérifiée pour une valeur de $h (> 0)$ entraîne que $\Gamma(h)$ et $\Gamma(0)$ sont tangents au point R_0 , $\Sigma(h)$ contenant $\Sigma(0)$. Elle est nécessaire et suffisante pour que H renferme le point R_0 . R_0 est alors le seul point de $H(h)$, quel que soit $h > 0$. Cette condition équivaut à $R'(+0) = 1$.

2° Si $0 < h < R_0$, la condition $R(h) = R_0 - h$ entraîne que $\Gamma(h)$ et $\Gamma(0)$ sont tangents, $\Sigma(0)$ contenant $\Sigma(h)$. Elle est nécessaire et suffisante pour que H renferme le point $-R_0$. Vérifiée pour une valeur de h elle l'est aussi pour toutes les valeurs de l'intervalle $(0, R_0)$: Cette condition équivaut à $R'(0) = -1$.

3° Si $h > R_0$, la condition $R(h) = h - R_0$ entraîne que H est formé du seul point $-R_0$, seul point commun à $\bar{\Sigma}(0)$ et à $\bar{\Sigma}(h)$, qui l'un et l'autre renferment H . Vérifiée pour une valeur de h , elle l'est pour toutes les valeurs du champ $h > R_0$. Elle équivaut à

$$\lim_{h \rightarrow \infty} [R(h) - h] = -R_0.$$

L'inégalité fermée ($h' < h$)

$$R(h) - R(h') \leq h - h', \quad \text{ou} \quad R(h) - h \leq R(h') - h',$$

montre que $R(h) - h$ ne saurait croître quand h croît. Ce nombre étant borné, soit μ_0 sa limite pour h infiniment grand. On a $-R_0 \leq \mu_0 \leq R_0$.

On n'aurait $\mu_0 = R_0$ que si constamment

$$R(h) = h + R_0, \quad \text{pour} \quad h > 0,$$

le point R_0 étant alors sur H . On n'a $\mu_0 = -R_0$ que si $-R_0$ est le seul point dont H est constitué et alors $R(h) = |h - R_0|$, $R(h) = h - R_0$, dès que $h \geq R_0$.

En dehors de ces cas, μ_0 est sur l'intervalle $(-R_0, R_0)$. μ_0 est le nombre que nous avons appelé $p(o)$ abscisse de la droite $\Delta(o)$ vers laquelle tend le cercle $\Gamma(h)$ quand h croît indéfiniment. Posons

$$R(h) = h + p(o) + u(h).$$

$u(h)$ tend vers 0 sans jamais croître. Si, pour une valeur h' de h on trouve $u(h') = 0$, le point $p(o)$ est sur H et sur $\Gamma(h')$, et il est le seul point de $H(h)$, avec

$$R(h) = h + p(o), \quad \text{pour } h > h'.$$

Soit $\frac{1}{h} = a$. Le cercle $C[h, h + p(o) + u]$ dépend de a et de u . Pour h donné, $R = h + p(o) + u$ et u varie dans le même sens. Donc la région $S(h, R)$ est décroissante en u . Quand a tend vers 0, il en est de même de $u(h)$. Il est aisé de voir que l'équation de $C(h, R)$ a ses termes dérivables en a et u pour $a = u = 0$, de façon que la théorie générale s'applique en ce point $(9, 1^\circ)$. L'équation de $C(h, R)$ se met sous la forme

$$(x + h)^2 + y^2 = [h + p(o) + u]^2$$

ou

$$x - p(o) - u + \frac{x^2 + y^2 - [p(o) + u]^2}{2h} = 0,$$

$$F(x, y, a, u) = x - p(o) - u + \frac{y^2}{2} a + \dots = 0,$$

en négligeant les termes du second degré en a et u .

Le rang q est

$$-\frac{\partial F}{\partial a} : \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{y^2}{2} + \dots$$

Donc $u'(o)$ existe et si $u(h) = \frac{\alpha}{2} [\mu_1 + \varepsilon(a)]$, $\varepsilon(a)$ tendant vers 0 avec a , μ_1 est le maximum de y^2 sur $\Delta(o)$. D'après le résultat obtenu plus haut, μ_1 est le plus grand des deux nombres (éventuellement confondus) $p'^2(+o)$ et $p'^2(-o)$.

13. Si au lieu de la famille $C(h, R)$ des cercles que nous avons con-

sidérés, ayant leurs centres sur l'axe réel, nous prenions les cercles ayant leurs centres sur l'axe indéfini d'argument θ , cercles $C(\theta, h, R)$ d'équation

$$z = e^{i\theta}(-h + Re^{i\omega}) \quad (|\omega| \leq \pi),$$

nous trouverions que, $S(\theta, h, R)$ étant la région infinie de $C(\theta, h, R)$ et $R(\theta, h)$ désignant le rayon du cercle $\Gamma(\theta, h)$ contenant une partie $H(\theta, h)$ de H , tandis que H n'a aucun point dans la région infinie $\Sigma(\theta, h)$ de $\Gamma(\theta, h)$,

1° $\frac{\partial R(\theta, h + o)}{\partial h}$ et $\frac{\partial R(\theta, h - o)}{\partial h}$ existent et sont respectivement les cosinus du minimum et du maximum de $|\omega|$ sur $H(\theta, h)$.

$$2^\circ \quad R(\theta, h) = h + p(\theta) + \frac{\mu_1(\theta) + \varepsilon'(h)}{2h} \quad \left[\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon'(h) = 0 \right],$$

$\mu_1(\theta)$ étant le plus grand des nombres $p'^2(\theta + o)$ et $p'^2(\theta - o)$.

Le dernier terme de $R(\theta, h)$ décroît toujours, à moins que pour une certaine valeur de h et toutes les suivantes $\mu_1(\theta) = \varepsilon'(h) = 0$. Ce dernier cas se présente si la frontière $V(H)$ de la borne convexe $B_0(H)$ admet en un point principal une normale passant par l'origine [toute droite rencontrant $V(H)$ en un seul point étant regardée comme tangente à $V(H)$].

La distance d'un point quelconque de $\Delta(\theta)$ à l'origine étant $p^2(\theta) + y^2$, si y^2 est l'ordonnée de ce point par rapport à l'axe $\Delta'(\theta)$, d'équation $z = re^{i\theta}$, on a toujours

$$(14) \quad p^2(\theta) + \mu_1(\theta) = p^2(\theta) + p'^2(\theta \pm o) \leq R_0^2.$$

Observons que tout point de H situé sur une circonférence $\Gamma(\theta, h)$ [en particulier tout point de $H(o)$] est un point principal de $V(H)$. Mais certains points principaux de $V(H)$ ne sont sur aucune circonférence $\Gamma(\theta, h)$. Cependant, la connaissance de la fonction $R(\theta, h)$, par l'opération

$$p(\theta) = \lim_{h \rightarrow 0} [R(\theta, h) - h],$$

fournit les points $e^{i\theta}[p(\theta) + ip'(\theta - o)]$ et $e^{i\theta}[p(\theta) + ip'(\theta + o)]$ extrémités du segment $\sigma(\theta)$ pour toutes les valeurs de θ . On a ainsi tous les points principaux de la frontière $V(H)$ de $B_0(H)$.

L'extérieur de la borne convexe $B_0(H)$ est identique à l'ensemble des régions $S(\theta, h, R)$ ne contenant aucun point de H . Si, en effet, M est un point de ce dernier ensemble, par hypothèse M est dans une région $S(\theta, h, R)$. Par M menons la perpendiculaire au segment joignant M au centre $-he^{i\theta}$ du cercle $C(\theta, h, R)$. Il est évident que cette droite est totalement extérieure à la borne convexe $B_0(H)$. Réciproquement, par un point M' extérieur à cette borne passe une droite indéfinie située à distance positive de $B_0(H)$, et l'on peut évidemment construire une circonférence séparant cette droite et $B_0(H)$, $B_0(H)$ étant dans la région finie de ce cercle.

14. *Inversion.* — Si nous prenons l'inverse géométrique de la figure par rapport à l'origine, avec une certaine puissance, 1 par exemple, l'ensemble H devient un ensemble H' fermé (sur la sphère de Riemann). Les cercles $C(\theta, h, R)$ deviennent des cercles $C'(\theta, h, R)$ de la forme

$$z = \frac{e^{i\theta}}{-h + Re^{i\omega}} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi).$$

$\Gamma(\theta, h)$ devient un cercle $\Gamma'(\theta, h)$ dont l'une des régions Σ' contient l'origine et est vide de points de H , tandis que $\Gamma'(\theta, h)$ en renferme au moins un. La réunion des régions Σ' est identique à celle des régions $s(\theta)$ de circonférences $\delta(\theta)$ passant par l'origine et contenant au moins un point de H' , tandis que $s(\theta)$ n'en renferme aucun point. La frontière de la région ainsi obtenue est l'inverse géométrique V' de $V(H)$. Les segments $\sigma(\theta)$ sont remplacés par des arcs de circonférences $\delta(\theta)$. Les points de H' appartenant à l'arc-intervalle $\sigma'(\theta)$ ne sont décelés en aucune façon par la fonction $R(\theta, h)$, d'où peuvent se déduire au contraire tous les points principaux de V' , inverses des points principaux de V .

15. Considérons plus particulièrement la détermination au moyen de $R(\theta, h)$ des points de la partie $H(o)$ ou H_0 de H située sur $\Gamma(o)$. $\frac{\partial R}{\partial h}(\theta, +o) = \cos(\varphi - \theta)$, φ étant l'argument du point de H_0 le plus voisin du point $R_0 e^{i\theta}$. La considération de ces dérivées pour $h = 0$ va nous permettre d'obtenir une condition nécessaire et suffisante pour que H_0 se réduise à un point unique.

θ étant un nombre réel quelconque, posons

$$\theta_1 = \theta, \quad \theta_2 = \theta + \frac{2\pi}{3}, \quad \theta_3 = \theta + \frac{4\pi}{3}$$

et soit I_k le point $R_0 e^{i\theta_k}$ (fig. 4).

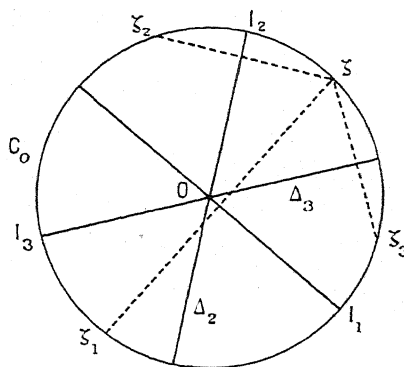


Fig. 4.

Considérons la somme

$$S_3(\theta) = \frac{\partial}{\partial h} R(\theta_1, +0) + \frac{\partial}{\partial h} R(\theta_2, +0) + \frac{\partial}{\partial h} R(\theta_3, +0).$$

$S_3(\theta)$ admet la période $\frac{2\pi}{3}$.

S'il n'existe dans H_0 qu'un point singulier $\zeta = R_0 e^{i\varphi}$,

$$S_3(\theta) = \sum \cos(\theta_k - \psi) = 0 \quad (k = 1, 2, 3)$$

quel que soit θ .

Je dis que si la condition $S_3(\theta) = 0$ est vérifiée pour une valeur particulière de θ , H_0 ne contient qu'un seul point et dès lors $S_3(\theta') = 0$ quel que soit θ' . Soit, en effet, ζ un point de H_0 . S'il en existe un second $\zeta' = R_0 e^{i\varphi'}$, distinct du premier, chacun des trois termes $\frac{\partial}{\partial h} R(\theta_k, +0)$ de $S_3(\theta)$ vaut au moins $\cos(\theta_k - \varphi)$, donc $S_3(\theta) \geq 0$. Pour avoir $S_3(\theta) = 0$, il faut que $\cos(\theta_k - \varphi') \leq \cos(\theta_k - \varphi)$ pour $k = 1, 2, 3$.

Soit I'_k le point de C_0 diamétralement opposé à I_k . L'hexagone $I_1 I'_3 I_2 I'_1 I_3 I'_2$ est régulier convexe. Soit ζ_k le symétrique de ζ par rapport au diamètre $I_k I'_k$. D'après $\cos(\theta_k - \varphi') \leq \cos(\theta_k - \varphi)$, ζ' est étranger à l'arc-intervalle $\zeta I_k \zeta_k$ et contenu dans l'arc-segment $\zeta I_k \zeta_k$.

Quitte à augmenter θ d'un multiple de $\frac{2\pi}{3}$, ce qui ne change pas $S_3(\theta)$, on peut supposer $\theta_1 \leq \varphi \leq \theta_2$. ζ est sur l'arc-segment $I_1 I_3 I_2$. Celui-ci contient donc l'arc-segment $\zeta I_3 \zeta_3$, donc aussi ζ' . Mais ζ' est étranger aux arcs-intervalles $\zeta I_1 \zeta_1$, $\zeta I_2 \zeta_2$ et il est distinct de ζ . Il est donc étranger à l'arc-segment $I_1 \zeta I_2$ ou $I_1 I_3 I_2$. Il y a contradiction. Donc ζ' n'existe pas.

Un raisonnement analogue montre que, si

$$\theta_{r,k} = \theta + \frac{2k\pi}{r} \quad (r \geq 3; 1 \leq k \leq r),$$

la condition $S_r(\theta) = \sum_k \frac{\partial}{\partial h} R(\theta_{r,k}, +0) = 0$ est nécessaire et suffisante pour que H_0 se compose d'un seul point.

Si

$$\frac{\partial R}{\partial h}(\theta, +0) + \frac{\partial R}{\partial h}(\theta, -0) = 0$$

pour une valeur de θ , H_0 se compose de deux points au plus, symétriques par rapport au diamètre Δ' d'argument θ .

16. Nous trouverons plus loin un autre exemple de courbes $C(\theta, \alpha, R)$ à trois paramètres, R étant encore un paramètre de dilatation, en ce sens que la région $S(\theta, \alpha, R)$ est constamment croissante (ou toujours décroissante) avec R .

Si nous donnons à l'un des deux nombres θ ou α une valeur fixe, et si nous faisons varier l'autre, nous obtenons une courbe à deux paramètres, R étant toujours de dilatation. Il en est de même si, entre θ et α nous établissons une relation, θ et α devenant fonctions d'un même paramètre a par rapport auquel ils ont des dérivées continues. Supposons, par exemple,

$$\frac{d\theta}{\cos \nu} = \frac{d\alpha}{\sin \nu} = da,$$

ν étant fonction continue de α . A chacun de ces cas correspond pour un point variable de $C(\theta, \alpha, R)$ un rang variable sur cette courbe. Car, $S(\theta, \alpha, R)$, où a est donné, est croissant en R . Quel que soit le mode de représentation de C , savoir $F(x, y, \theta, \alpha, R) = 0$ ou $z = z(\omega, \theta, \alpha, R)$,

il est visible que, si q_1 est le rang d'un point pour θ constant, α et R variables associés, q_2 le rang pour α constant, θ et R variables associés, $q = q_1 \cos \nu + q_2 \sin \nu$ est le rang pour a et R variables associés. q est une fonction de ω, a, R . Sur une courbe $C(a, R)$ identique à $C(\theta, \alpha, R)$, ω figurant dans q_1 et q_2 varie seul, a et R ont des valeurs déterminées.

Mais, $S(\theta, \alpha, R)$ étant croissant avec R , il existe pour chaque système de valeurs θ, α une valeur de R et une seule $R = \psi(\theta, \alpha)$ telle que $C[\theta, \alpha, \psi(\theta, \alpha)] = \Gamma(\theta, \alpha)$ contient une partie $H(\theta, \alpha)$ de H , tandis que $S[\theta, \alpha, \psi(\theta, \alpha)] = \Sigma(\theta, \alpha)$ est vide de points de H . Il est évident que, si θ, α ont des valeurs données θ_0, α_0 , quelle que soit la façon dont on associe leur variation en fonction de a , avec les conditions $\theta(a_0) = \theta_0, \alpha(a_0) = \alpha_0$, la valeur $R = \psi(a_0)$ de la théorie générale (R pour b) sera toujours égale à $\psi(\theta_0, \alpha_0)$. Il suit de là que, quel que soit ν fonction continue de a , la fonction $\psi(\theta, \alpha) = p(a)$ a par rapport à a une dérivée $p'(a + 0)$ et une dérivée $p'(a - 0)$, égales au minimum et au maximum respectivement (S croissant avec R) de $q = q_1 \cos \nu + q_2 \sin \nu$ sur $H(\theta, \alpha)$. On peut se borner à considérer $p'(a + 0)$, en remarquant que $p'(a - 0)$ est donné alors par le changement de ν en $\nu + \pi$. Donc

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\theta + \eta \cos \nu, \alpha + \eta \sin \nu)_{\eta=+0} = \min(q_1 \cos \nu + q_2 \sin \nu) \\ [x, y \text{ sur } H(\theta, \alpha)].$$

Bien entendu, cette formule ne signifie nullement que le premier membre soit de la forme $A(\theta, \alpha) \cos \nu + B(\theta, \alpha) \sin \nu$, comme ce serait le cas si $\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ valaient bilatéralement et étaient continues au point (θ, α) . Ceci ne se présente que si $H(\theta, \alpha)$ se réduit à un point (1).

Pour chaque valeur de ν on obtient le point initial ou le point terminal de $H(\theta, \alpha)$ (point qui peut ne pas être unique sur cet ensemble) et en même temps tous les conjugués de ce point sur

(1) Il serait intéressant d'étudier les fonctions $u(x, y)$ possédant sur chaque courbe admettant une tangente continue au point (x, y) , une dérivée $\lim \frac{u(x', y') - u(x, y)}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}$ (quand x', y' tend vers x, y). On voit aisément que, si $x' = x + \eta \cos \nu, y' = y + \eta \sin \nu$, il faut et il suffit que $u(x + \eta \cos \nu, y + \eta \sin \nu)$ ait une dérivée droite par rapport à η au point $\eta = 0$, cette dérivée $\omega(x, y, \nu)$ variant continûment avec ν .

$\Gamma(\theta, \alpha)$, ces conjugués étant relatifs à l'ordination définie par l'angle ν . Mais, on conçoit qu'en faisant varier ν on puisse d'une part éliminer tout au moins une fraction importante de $H(\theta, \alpha)$, d'autre part éliminer les conjugués parasites. *A priori*, si q_1 et q_2 sont dérivables en ω , on peut en tout point de $H(\theta, \alpha)$ défini par un argument ω , en prenant pour ν le nombre défini par $\frac{\partial q_1}{\partial \omega} \cos \nu + \frac{\partial q_2}{\partial \omega} \sin \nu = 0$, faire qu'en ce point le rang q soit stationnaire. Il n'est cependant pas sûr que ce rang sera maximum ou minimum absolu sur $H(\theta, \alpha)$, donc qu'il sera égal à une valeur de $\frac{\partial \psi}{\partial \eta} (+ 0)$.

Par exemple, soit $z = e^{i\theta}(-h + Re^{i\omega})$ le cercle $C(\theta, h, R)$, R étant le paramètre de dilatation, h et θ deux autres paramètres, et $S(\theta, h, R)$ étant la région infinie de C . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \omega} &= iR e^{i(\theta+\omega)}, & \frac{\partial z}{\partial \theta} &= iz, & \frac{\partial z}{\partial h} &= -e^{i\theta}, & \frac{\partial z}{\partial R} &= e^{i(\theta+\omega)}, \\ \omega_1 = \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \theta} &= R(-he^{i\omega} + R), & \omega_2 = \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial h} &= -iR e^{i\omega}, & \omega_3 = \frac{\partial z}{\partial \omega} \frac{\partial \bar{z}}{\partial R} &= iR, \\ \mathcal{J}(\omega_1) &= -hR \sin \omega, & \mathcal{J}(\omega_2) &= -R \cos \omega, & \mathcal{J}(\omega_3) &= R. \end{aligned}$$

D'où $q_1 = h \sin \omega$, $q_2 = \cos \omega$. Si les accroissements donnés à θ et h sont $\eta \sin \nu$ et $\eta h \cos \nu$, le rang q relatif aux variables η , R est

$$q = q_1 \sin \nu + q_2 h \cos \nu = h \cos(\omega - \nu).$$

Donc $\frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\theta + \eta \sin \nu, h + h\eta \cos \nu)_{\eta=+0}$ est le maximum de $h \cos(\omega - \nu)$ sur $H(\theta, \alpha)$. Il correspond au minimum de $|\omega - \nu|$ si ce dernier reste au plus égal à π .

En faisant varier ν , on est sûr d'obtenir ici tous les points de $H(\theta, \alpha)$ et l'on éliminera sans peine leurs conjugués variables avec ν .

II. — Détermination des points singuliers d'une fonction analytique donnée par un de ses éléments.

17. Soient

$$(1) \quad f_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots \quad \left(|z| < \frac{1}{R_0} \right),$$

$$(2) \quad g_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots \quad (|z| < R_0)$$

deux éléments de fonctions analytiques en relation mutuelle évidente.

Le problème de la détermination des points singuliers des fonctions analytiques engendrées par ces deux éléments est manifestement le même pour les deux fonctions.

Soient Γ'_0 et Γ_0 les cercles de convergence respectifs des deux séries (1) et (2); Σ'_0 la région finie de Γ'_0 , soit $|z| < \frac{1}{R_0}$, Σ_0 la région infinie de Γ_0 , soit $|z| > R_0$.

Nous envisagerons le prolongement de $g_0(z)$ (ou solidairement celui de f_0) dans des régions Q engendrées comme sommes de régions S à connexion simple et vérifiant les conditions suivantes :

1° Chaque région S contient : le point à l'infini pour Q, l'origine pour Q'.

2° Il existe une fonction $g_1(z, S)$ [$f_1(z, S)$] définie et homorphe dans S et coïncidant avec g_0 (avec f_0) dans la partie commune à S et à Σ_0 (à Σ'_0).

3° Deux régions quelconques S_1, S_2 différentes forment ensemble une région à connexion simple (leur partie commune forme une région unique). Cette condition sera en particulier vérifiée si les S sont convexes.

De cette manière, si S_1 et S_2 sont deux régions différentes, il est visible que $g_1(z, S_1)$ et $g_1(z, S_2)$ sont identiques dans la partie commune à S_1 et à S_2 . Donc la fonction $g_1(z)$ coïncidant en tout point z donné de Q avec $g_1(z, S)$ dans toute région S contenant ce point z , cette fonction $g_1(z)$ est uniforme et homolorphe dans Q.

Les mêmes considérations valent pour la fonction $f_1(z)$ définie dans le domaine Q' inverse complexe ($z' = \frac{1}{z}$) de Q.

Si une fonction analytique $\varphi(z)$ est définie et homolorphe dans un ensemble ouvert Q limité par une courbe de Jordan V, nous dirons que $\varphi(z)$ admet un point ζ de V pour point singulier si, (z_0, ζ) étant dans Q un arc-intervalle de Jordan (ensemble ne contenant ni ζ ni z_0 et qui, accru de ces deux points, devient homéomorphe à un segment de droite), le rayon de convergence de la série de Taylor de $\varphi(z)$ au point a de (z_0, ζ) tend vers 0 quand a tend vers ζ .

Nous désignons par H_0 (H'_0) l'ensemble des points singuliers de $g_0(z)$ [$f_0(z)$]. Ils sont sur Γ_0 (sur Γ'_0).

18. Considérons d'abord comme région variable S la région infinie $S(\theta, h, R)$ d'une circonférence $C(\theta, h, R)$ d'équation $z = e^{i\theta}(-h + Re^{i\omega})$ telle que dans S existe une fonction holomorphe $g_1(z, S)$ coïncidant avec g_0 dans la partie commune à S et à Σ_0 . Σ_0 est évidemment une des régions S . La réunion de tous les S forme une région Q où est définie et holomorphe une fonction $g_1(z)$ coïncidant avec $g_0(z)$ dans Σ_0 . Selon un raisonnement fait plus haut, la région Q est la région infinie limitée par une courbe convexe V (exceptionnellement réduite à un segment de droite ou même à un point). Évidemment V est dans la région finie de Γ_0 , accrue de Γ_0 lui-même. Nous qualifions encore de *principaux* les points de V par où passe une droite Δ indéfinie dans les deux sens, non traversée par V et n'ayant en commun avec V que ζ ou des points situés tous du même côté de ζ sur Δ . Alors tout point principal de ζ de V est singulier pour $g_1(z)$. Sinon il est visible que Q devrait contenir ζ .

Si H_1 est l'ensemble des points singuliers de g_1 , H_1 est formé de tous les points principaux ζ de V et en outre éventuellement de points « secondaires » situés sur les intervalles $\sigma(\theta)$ appartenant à V et le long desquels la normale extérieure à V fait avec l'axe réel l'angle θ .

Tous les points singuliers de g_0 , formant H_0 , appartiennent à H_1 et sont principaux pour H_1 . Et de même, tous les points de H_1 situés sur une circonférence $\Gamma(\theta, h)$ de centre $-u = -he^{i\theta}$ et de rayon $R(\theta, h)$, telle que $g_1(z)$ soit holomorphe dans la région infinie $\Sigma(\theta, h)$ de $\Gamma(\theta, h)$ et non pas sur $\Sigma + \Gamma$, sont principaux pour H_1 . En ces points le caractère de convexité du contour V s'accroît de l'existence d'une plus petite courbure non nulle.

Deux solutions existent pour la détermination des points principaux de H_1 . Celle de M. Pólya (1) et celle de M. Mandelbrojt. A vrai dire celle-ci ne fournit pas les points de H_1 où la plus petite courbure de V est nulle, donc les points qui, appartenant toujours à une droite $\Delta(\theta)$ comme points uniques ou extrêmes communs à V et à $\Delta(\theta)$, ne sont cependant sur aucun cercle $\Gamma(\theta, h)$. Pour ces derniers points, il faudrait ajouter à la famille des cercles $\Gamma(\theta, h)$ la famille des droites $\Delta(\theta)$ et appliquer à celles-ci le principe géométrique établi plus haut.

19. M. Pólya considère la fonction entière de M. Borel, associée

à $g_0(z)$

$$(3) \quad F(v) = a_1 + a_2 v + \dots + \frac{a_{n+1}}{n!} v^n + \dots$$

Il définit $p(\theta)$ comme la plus grande limite de $\frac{1}{\lambda} \log |F(\lambda e^{-i\theta})|$ quand λ réel positif croît indéfiniment.

Les points $R_0 e^{i\omega}$ de H_0 sont ceux pour lesquels $p(\omega) = R_0$. En ces points $p'(\omega) = 0$. Les points de H_1 situés sur $\Gamma(\theta, h)$, soit $e^{i\theta}(-h + R e^{i\omega})$, sont donnés par les valeurs de ω , telles que la droite $\Delta(\theta + \omega)$ soit tangente à Γ . Ce sont les solutions de l'équation en ω :

$$(16) \quad h \cos \omega + p(\theta + \omega) = R(\theta, h).$$

Sauf au point de contact de $\Delta(\theta + \omega)$ avec Γ , la totalité d'une telle droite est dans la région infinie de $\Gamma(\theta, h)$ tandis que V est dans la région finie de $\Gamma(\theta, h)$ ou sur cette circonférence. Donc, la droite $\Delta(\theta + \omega)$ contenant un point de H_1 , celui-ci est unique, et c'est le point de contact, soit $e^{i(\theta + \omega)} [p(\theta + \omega) + ip'(\theta + \omega)]$. $p'(\theta + \omega)$ existe, est bilatéral et vaut $h \sin \omega$.

La solution de M. Mandelbrojt permet de résoudre l'équation (16). M. Mandelbrojt calcule par une formule simple $R(\theta, h) = R(u)$. Ensuite, η étant positif, la dérivée $\frac{d}{d\eta} R(u + \eta e^{i\nu})$ pour $\eta = 0$ est le nombre $\cos \psi$, tel que $g_1(z)$ soit holomorphe sur l'arc de $\Gamma(\theta, h)$ limité aux rayons extrêmes d'argument $\nu - \psi$, $\nu + \psi$, tandis que l'une au moins des extrémités de l'arc est singulière pour g_1 . Excluons de $\Gamma(\theta, h)$ cet arc-intervalle. Si ν prend un ensemble de valeurs partout dense, tout point d'holomorphie de g_1 sur $\Gamma(\theta, h)$ est sur un arc exclu. L'ensemble $H_1(\theta, h)$ commun à H_1 et à $\Gamma(\theta, h)$, correspondant à l'ensemble des solutions de l'équation (16), est l'ensemble commun aux arcs non exclus. Il est donc obtenu par une suite dénombrable d'opérations, étant donné $\Gamma(\theta, h)$. La méthode de M. Mandelbrojt permet de résoudre l'équation (16) posée par les résultats de M. Pólya.

Exposons la méthode de M. Mandelbrojt et montrons comment elle fournit le théorème de M. Pólya.

20. Tout au moins dans la région des points z vérifiant les condi-

tions

$$|z+u| > h + R_0 \quad (u = he^{i\theta}),$$

on a les égalités

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \sum_0^{\infty} \frac{a_m}{(z+u-u)^m} \\ &= \sum \frac{a_m}{(z+u)^m} \left(1 - \frac{u}{z+u}\right)^{-m} = a_0 + \sum_{m=1}^{m_{\infty}} \frac{a_m}{(z+u)^m} \sum_{p=0}^{p_{\infty}} C_{m+p-1}^p \frac{u^p}{(z+u)^p}, \\ (17) \quad g_0(z) &= \sum_0^{\infty} \frac{\delta_n(u)}{(z+u)^n} \end{aligned}$$

avec

$$(18) \quad \delta_0 = a_0, \quad \delta_{n+1}(u) = a_1 u^n + C_n^1 a_2 u^{n-1} + \dots + C_n^{n-1} a_{p+1} u^{n-p} + \dots + a_{n+1}.$$

$R(u)$ ou $R(\theta, h)$ est le rayon de convergence de la série (17). Donc

$$(19) \quad R(u) = R(\theta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\delta_{n+1}(u)|}.$$

Choissant pour $\left(\frac{z+u}{z}\right)^{\alpha}$ la détermination égale à 1 à l'infini, on aurait encore dans la région $|z+u| > R_0 + h$,

$$\begin{aligned} (20) \quad \left(\frac{z+u}{z}\right)^{\alpha} g_0(z) &= (z+u)^{\alpha} \sum_{m=0}^{m_{\infty}} \frac{a_m}{(z+u-u)^{m+\alpha}} \\ &= \sum_{m=0}^{m_{\infty}} \frac{a_m}{(z+u)^m} \left(1 - \frac{u}{z+u}\right)^{-m-\alpha} = \sum_0^{\infty} \frac{d_n(u, \alpha)}{(z+u)^n} \end{aligned}$$

avec $d_0(u, \alpha) = a_0$,

$$(21) \quad d_{n+1}(u, \alpha) = C_{n+\alpha}^{n+1} a_0 u^{n+1} + \dots + C_{n+\alpha}^{n-p} a_{p+1} u^{n-p} + \dots + a_{n+1},$$

en posant, pour p entier positif, et quel que soit x :

$$C_x^p = \frac{x(x-1)\dots(x-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(p+1)\Gamma(x-p+1)},$$

la seconde expression ayant un sens, quels que soient x et p , en supposant toutefois x non entier négatif, non plus que p , ni $x-p$.

Le rayon de convergence de la dernière série est

$$(22) \quad R_x(u) = R_x(\theta, h) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|d_{n+1}(u, \alpha)|}.$$

M. Mandelbrojt a considéré $R_1(\theta, h)$ pour les valeurs infiniment petites de h . Il a montré, comme nous l'avons exposé plus haut, que la dérivée de $R(\theta, h)$ par rapport à h supposé infiniment petit donne les points de H_0 . Pareillement, la dérivée de $R(u)$ en un point quelconque, prise radialement, donne les points de $H_1(\theta, h)$.

Mais en considérant au contraire les valeurs infiniment grandes de h , les propriétés établies pour $R(\theta, h)$ conduisent aisément à la théorie de M. Pólya. C'est ce que nous allons établir.

20 bis. Les nombres $\delta_{n+1}(u)$ ou $\delta_{n+1}(\theta, h)$ nous donnent $R(\theta, h)$. $p(\theta)$ est défini comme la limite de $R(\theta, h) - h$ pour h infini. La réunion des segments $\sigma(\theta)$ d'équation $e^{it}[p(\theta) + it]$, $p'(\theta - 0) \leq t \leq p'(\theta + 0)$ forment un contour V convexe dont les points principaux sont singuliers pour $g_1(z)$. Au surplus

$$R(\theta, h) = h + p(\theta) + \frac{\mu(\theta) + \varepsilon(h)}{2h}, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \varepsilon(h) = 0,$$

$\mu(\theta)$ étant le plus grand des nombres $p'^2(\theta + 0)$ et $p'^2(\theta - 0)$. Plus précisément, quel que soit h :

$$(23) \quad [h + p(\theta)]^2 + \mu(\theta) \leq R^2(\theta, h)$$

et, si ε positif est indépendant de h , l'inégalité

$$(23 \text{ bis}) \quad R^2(\theta, h) < [h + p(\theta)]^2 + \mu(\theta) + \varepsilon \quad [h > h_1(\varepsilon)]$$

a lieu à partir d'une valeur $h_1(\varepsilon)$ de h .

21. Il faut montrer que si, pour chaque valeur de θ , nous posons

$$(24) \quad q(\theta) = \overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log |F(\lambda e^{-i\theta})|,$$

$p(\theta)$ et $q(\theta)$ sont égaux quel que soit θ .

Soit $V(\varepsilon)$ la courbe parallèle à V , extérieurement et à la distance ε . $V(\varepsilon)$ est l'enveloppe de la droite :

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta) + \varepsilon \quad \text{ou} \quad z = x + iy = e^{i\theta} [p(\theta) + \varepsilon + it],$$

$V(\varepsilon)$ est donc la courbe

$$z = e^{i\theta} [p(\theta) + \varepsilon + it] \quad \text{avec} \quad p'(\theta - 0) \leq t \leq p'(\theta + 0),$$

$V(\varepsilon)$ est convexe et intérieur au cercle $|z| < R_0 + \varepsilon$. La longueur de $V(\varepsilon)$ est inférieure à $2\pi(R_0 + \varepsilon)$.

Soit $Q(\varepsilon)$ la région infinie de $V(\varepsilon)$. Dans $Q(\varepsilon)$ et sur $V(\varepsilon)$, $g_1(z)$ est holomorphe. Soit $M_1(\varepsilon)$ le maximum de son module sur $V(\varepsilon)$. Soit $-u = -he^{i\theta}$ un point quelconque du plan et G le cercle de centre $-u$ et de rayon $h + p(\theta) + 2\varepsilon$.

Le cercle G passe par le point $e^{i\theta}[p(\theta) + 2\varepsilon]$, et quand h croît indéfiniment, il tend vers la droite $z = e^{i\theta}[p(\theta) + 2\varepsilon + it]$. Quand h est suffisamment grand, ce cercle contient dans sa région finie la totalité de $V(\varepsilon)$. Ceci aura lieu pour

$$h > h_1(\varepsilon) \sim \frac{R_0}{2\varepsilon},$$

$h(\varepsilon)$ étant indépendant de θ . Et dès lors la totalité de $V(\varepsilon)$ est à une distance de $-u$ inférieure à $h + p(\theta) + 2\varepsilon$, rayon de G ; $g_1(z)(z+u)^n$ étant holomorphe dans $Q(\varepsilon)$, on a

$$\delta_{n+1}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_{V(\varepsilon)} g_1(z)(z+u)^n dz,$$

$$|\delta_{n+1}(he^{i\theta})| < M_1(\varepsilon)(R_0 + \varepsilon)[h + p(\theta) + 2\varepsilon]^n \quad [h > h_1(\varepsilon)].$$

Pour simplifier les notations

$$(25) \quad |\delta_{n+1}(he^{i\theta})| < M(\varepsilon)[h + p(\theta) + \varepsilon]^n \quad [(h > h(\varepsilon))],$$

$M(\varepsilon)$ étant indépendant de n , de θ et de $h > h(\varepsilon)$.

En divisant les deux membres de (25) par h^n , on a

$$\left| \alpha_1 + C_n^1 \frac{\alpha_2}{h} e^{-i\theta} + \dots + C_n^p \frac{\alpha_{p+1}}{h^p} e^{-ip\theta} + \dots + \frac{\alpha_{n+1}}{h^n} e^{-in\theta} \right| < M(\varepsilon) \left[1 + \frac{p(\theta) + \varepsilon}{h} \right]^n$$

quels que soient θ , n et $h > h(\varepsilon)$.

Remplaçons C_n^p par $n^p \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$ et soit λ un nombre positif quelconque. Supposons que h et n croissent indéfiniment de façon que $\frac{n}{h}$ tende vers λ . h étant équivalent à $\frac{n}{\lambda}$ finit par surpasser $h(\varepsilon)$. Donc à la limite,

$$|F(\lambda e^{-i\theta})| < M(\varepsilon) e^{\lambda[p(\theta) + \varepsilon]}$$

quel que soit λ , $M(\varepsilon)$ étant indépendant de θ et de λ .

Donc $q(\theta) \leq p(\theta)$.

22. Réciproquement, soit à montrer $p(\theta) \leq q(\theta)$.

Nous supposons donnée la fonction $F(v) = \sum \frac{a_{n+1}}{n!} v^n$, la suite des coefficients $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ vérifiant la condition

$$|a_{n+1}| < M_2(\varepsilon) (R_0 + \varepsilon)^n,$$

$M_2(\varepsilon)$ étant indépendant de $n \geq 0$.

On conclut immédiatement de là

$$|F(\lambda e^{-i\theta})| < M_2(\varepsilon) e^{\lambda(R_0 + \varepsilon)},$$

quels que soient λ et θ . Donc $q(\theta) \leq R_0$ quel que soit θ .

Considérons la fonction paire entière $F(v) F(-v) = \Omega(v^2)$ donnant lieu à $\log |\Omega(u)| < 2(R_0 + \varepsilon) \sqrt{|u|} + 2 \log M(\varepsilon)$. Si l'on range les zéros de $\Omega(u)$ par modules croissants, le n^{e} module surpasse kn^2 (k indépendant de n). On en conclut $\log |\Omega(u)| > -\varepsilon \sqrt{|u|}$ sur une infinité de cercles ayant leurs centres à l'origine ⁽¹⁾ et croissant indéfiniment. Par suite $F(v) F(-v) > e^{-\varepsilon|v|}$ dans les mêmes conditions. On en conclut $q(\theta) + q(\theta + \pi) \geq 0$, d'où $q(\theta) \geq -R_0$, quel que soit θ . Il existe donc toujours un angle $\varphi = \varphi(\theta)$ tel que $q(\theta) = R_0 \cos \varphi$. Soit $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Pour faire un raisonnement convenant au cas où $q(\theta) \leq 0$, il y a avantage à considérer $\varphi' = \varphi'(\theta, \varepsilon)$ défini par

$$q(\theta) + \varepsilon = (R_0 + \varepsilon) \cos \varphi'.$$

On ne peut pas avoir $\varphi' = \pi$. Nous supposons donc $0 \leq \varphi' < \pi$. $\log |F(\lambda e^{-i\theta})| - \lambda(R_0 + \varepsilon) \cos \varphi'$ tend vers $-\infty$ quand λ croît indéfiniment, θ étant invariable.

Soit J l'angle décrit par

$$z = \lambda e^{-i(\omega + \theta)} \quad \text{si } 0 \leq \omega \leq \varphi'.$$

Soient L et L' les côtés de J définis respectivement par $\omega = 0$ et $\omega = \varphi'$. La fonction

$$K(\lambda, \omega) = \log |F(\lambda e^{-i(\theta + \omega)})| - \lambda(R_0 + \varepsilon) \cos(\varphi' - \omega)$$

est harmonique en x, y si $x = \lambda \cos \omega, y = \lambda \sin \omega$, sauf aux points

⁽¹⁾ On trouvera une démonstration simple de ce fait dans ma Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. 193, 1931, p. 828).

annulant $F(\varphi)$ et où elle vaut $-\infty$. Elle tend vers $-\infty$ pour λ infiniment grand à la fois sur $L(\omega = 0)$ et sur $L'(\omega = \varphi')$. L'ouverture de J étant inférieure à π , et $|K(\lambda, \omega)|$ étant inférieur à $2(R_0 + \omega)\lambda + \text{const.}$, $K(\lambda, \omega)$ tend uniformément vers $-\infty$ dans J (Phragmen et Lindelöf). En changeant ω en $-\omega$, on trouverait le même résultat dans l'angle $0 \leq \omega \leq -\varphi'$. Finalement, on voit que

$$\log |F(\lambda e^{-i(\theta+\omega)})| - \lambda(R_0 + \varepsilon) \cos(\varphi' - |\omega|)$$

tend uniformément vers $-\infty$ pour λ infiniment grand si $|\omega| \leq \varphi'$. De là résulte l'inégalité $q(\theta + \omega) \leq R_0 \cos(\varphi - |\omega|)$ pour $|\omega| \leq \varphi$. On en tire, quel que soit ω entre $-\pi$ et π inclus,

$$(26) \quad q(\theta + \omega) < q(\theta) + 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \leq q(\theta) + 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2}.$$

Car, pour $|\omega| \leq \varphi$,

$$q(\theta + \omega) - q(\theta) \leq R_0 \cos(\varphi - |\omega|) - R_0 \cos \varphi = 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2} \sin \left(\varphi - \frac{|\omega|}{2} \right),$$

d'où l'inégalité dans ce premier cas. Si $|\omega| > \varphi$,

$$q(\theta + \omega) - q(\theta) \leq R_0(1 - \cos \varphi) = 2R_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} < 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

On déduit de là non seulement la continuité de $q(\theta)$, mais encore que, dans tout angle bissecté par $\varphi = \lambda e^{-i\theta}$ et d'ouverture suffisamment petite, $\log |F(\lambda e^{-i(\theta+\omega)})| - \lambda[q(\theta) + \varepsilon]$ tend vers $-\infty$ pour $\lambda = +\infty$. On en conclut l'existence d'un nombre $M(\varepsilon)$ ne dépendant ni de λ ni de θ , mais de ε seul et tel que

$$(27) \quad |F(\nu e^{-i\theta})| < M(\varepsilon) e^{\lambda[q(\theta) + \varepsilon]}$$

quel que soit $\nu = \lambda e^{-i\theta}$.

Ceci posé, soit C un cercle $|\nu| = \lambda$. On a

$$\frac{a_{p+1}}{p!} = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(\nu)}{\nu^{p+1}} d\nu$$

et, par suite,

$$\delta_{n+1}(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(\nu)}{\nu^{n+1}} \left[\sum_{p=0}^{p=n} C_n^p p! u^{n-p} \nu^{n-p} \right].$$

Le crochet vaut

$$n! \sum_{p=0}^{p=n} \frac{u^p \nu^p}{p!}.$$

On peut ajouter à cette somme les termes $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{u^p v^p}{p!}$ qui, divisés par v^{n+1} , donnent une fonction holomorphe et ne changent pas la valeur de l'intégrale. Donc

$$(28) \quad \delta_{n+1}(u) = \frac{n!}{2i\pi} \int_C \frac{F(v)}{v^{n+1}} e^{uv} dv.$$

Posons $v = \lambda e^{-i(\theta+\omega)}$. Alors d'après $|F(v)| < M(\varepsilon) e^{\lambda[q(\theta+\omega)+\varepsilon]}$, $|e^{uv}| = \lambda h \cos \omega$ et l'inégalité (26),

$$(29) \quad |F(v) e^{uv}| < M(\varepsilon) e^{\lambda[A(\omega)+h+q(\theta)+\varepsilon]}$$

avec

$$A(\omega) = -2h \sin^2 \frac{\omega}{2} + q(\theta + \omega) - q(\theta) < 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2} - 2h \sin^2 \frac{\omega}{2} = R_0 t - h \frac{t^2}{2}$$

en posant

$$t = 2 \sin \frac{|\omega|}{2} \leq 2.$$

Le maximum de $A(\omega)$ est inférieur à $\frac{R_0^2}{2h}$ si $h > \frac{R_0}{2}$.

Finalement si $\rho = h + q(\theta) + \varepsilon + \frac{R_0^2}{2h}$

$$|\delta_{n+1}(he^{i\theta})| < \frac{n!}{\lambda^n} M(\varepsilon) e^{\lambda\rho},$$

quel que soit λ . ρ étant indépendant de λ , le minimum du second membre est atteint pour $\lambda = \frac{n}{\rho}$. Donc, d'après la formule d'approximation de la fonction Γ ,

$$(30) \quad |\delta_{n+1}(u)| < M(\varepsilon) \left[h + q(\theta) + \varepsilon + \frac{R_0^2}{2h} \right]^n \sqrt{2\pi n},$$

quels que soient n et $h > \frac{R_0}{2}$. Donc

$$R(\theta, h) \leq h + q(\theta) + \varepsilon + \frac{R_0^2}{2h}$$

et par suite $p(\theta) \leq q(\theta)$. Finalement $p(\theta) = q(\theta)$.

Le théorème de M. Pólya est ainsi établi.

Étude de la suite $\delta_{n+1}(u)$ déterminant $R(u)$.

23. La définition même de $R(u) = R(\theta, h)$ signifie que, à tout nombre positif donné ε correspondent : d'une part un nombre

$N = N(\varepsilon, u)$ tel que l'inégalité $n > N(\varepsilon, u)$ entraîne

$$(30^{bis}) \quad |\delta_{n+1}(u)| < [R(\theta, h) + \varepsilon]^n,$$

d'autre part une suite d'entiers $n_1(\varepsilon, u), n_2(\varepsilon, u), \dots, n_k(\varepsilon, u), \dots$ croissants, tels que pour $n = n_k(\varepsilon, u)$ on ait

$$|\delta_{n+1}(u)| > [R(\theta, h) - \varepsilon]^n.$$

Il est intéressant de rechercher si la connaissance des propriétés de la fonction entière $F(v)$ permet d'obtenir des indications précises sur les fonctions $N(\varepsilon, u)$ et $n_k(\varepsilon, u)$ et de mettre en évidence certains caractères d'uniformité dans le lien rattachant au nombre u ces divers entiers $N(\varepsilon, u), n_k(\varepsilon, u)$. Il est remarquable que cette uniformité se manifeste dans le rapport de ces nombres à $h = |u|$, pour un même argument θ de u .

1° La fonction $p(\theta) = q(\theta)$ étant définie comme la plus grande limite pour λ infini réel positif, de $\frac{1}{\lambda} \log |F(\lambda e^{-i\theta})|$, nous savons que $R(u) = R(\theta, h) \geq h + p(\theta)$, tandis que nous connaissons l'existence d'un nombre $M(\varepsilon)$ indépendant de θ et de h et tel que, pour toute valeur de l'entier n , la formule (30) est valable si $h > \frac{R_0}{2}$.

Soit $h > \frac{2R_0^2}{\varepsilon}$. Alors

$$|\delta_{n+1}(u)| < M\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \left[h + p(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\right]^n \sqrt{2\pi n}.$$

$\left[M\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \sqrt{2\pi n}\right]^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 par valeurs supérieures quand n croît. Il existe donc un nombre $N(\varepsilon, h)$ tel que pour $n > N(\varepsilon, h)$,

$$\left[M\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \sqrt{2\pi n}\right]^{\frac{1}{n}} \left[h + p(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}\right] < h + p(\theta) + \varepsilon.$$

Cette valeur de N est inférieure à celle qui correspond à l'inégalité

$$\frac{1}{n} \log \left[M\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \sqrt{2\pi n}\right] < \frac{\varepsilon}{4h} \quad \text{ou} \quad \frac{4}{\varepsilon} \log \left[\sqrt{\frac{8\pi h}{\varepsilon}} M\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right] < \frac{n\varepsilon}{4h} - \frac{1}{2} \log \frac{n\varepsilon}{4h}.$$

Posons :

$$N(\varepsilon, h) = \frac{8h}{\varepsilon} \log \left[\sqrt{\frac{8\pi h}{\varepsilon}} M\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right].$$

Telle est une valeur de $N(\varepsilon, h)$ à partir de laquelle (pour $n > N$) l'inégalité (3o bis) est constamment vérifiée. Cette valeur de N n'est pas proportionnelle à h (pour ε donné), mais pour h infiniment grand elle est de l'ordre de $h \log h$.

2° Nous allons constater que, pour ε et θ donnés, la connaissance de la fonction $F(\nu)$ sur le rayon $\nu = \lambda e^{-i\theta}$ ou plus précisément dans un étroit voisinage de ce rayon va nous fournir des renseignements sur les valeurs du rapport de $n_k(\varepsilon, u)$ à $h = |u|$, θ restant invariable. Posons

$$\delta_{n+1}(u) = u^n \Delta_{n+1}(u).$$

Il existe, d'après la définition de $p(\theta) = q(\theta)$ à partir de $F(\nu)$, un ensemble non borné de nombres positifs λ' pour lesquels

$$\log |F(\lambda' e^{-i\theta})| > \lambda' [p(\theta) - \varepsilon] + \log M(\varepsilon).$$

Soit $\lambda'_0 = \frac{\log M(\varepsilon)}{\varepsilon}$ et $E(\varepsilon, \theta)$ ou simplement $E(\varepsilon)$ l'ensemble des $\lambda' > \lambda'_0$. Considérons dans $E(\varepsilon)$ l'ensemble $E(\varepsilon, A)$ des λ' inférieurs à un nombre donné $A > \lambda'_0$. Si n et h croissent indéfiniment de façon que $\frac{n}{h}$ tende vers $\lambda' < A$, le rapport de $\Delta_{n+1}(h e^{i\theta})$ à $F(\lambda' e^{-i\theta})$ tend uniformément vers 1 sur $E(\varepsilon, A)$. Désignons par $E_n(\varepsilon, A)$ l'ensemble des λ' de $E(\varepsilon, A)$ tels que $h\lambda'$ soit entier. En désignant par hE l'ensemble des produits des nombres d'un ensemble E par le nombre h , il est évident que la suite des $n = n_k(\varepsilon, u)$ pour lesquels $|\delta_{n+1}(u)| > [R(u) - \varepsilon]^n$ contient $hE_n(\frac{\varepsilon}{2}, A)$ et est inclus dans $hE_n(2\varepsilon, A)$, dès que $h > h(\varepsilon, A)$, ce dernier nombre étant indépendant de h , mais non de θ . Le début de la suite $n_k(\varepsilon, u)$ possède donc une allure uniforme, puisque le rapport de ces nombres à h tend à être indépendant de h , supposé de plus en plus grand.

Mais si, h restant fixe, $n = n_k(\varepsilon, u)$ croît indéfiniment, on ne voit plus immédiatement qu'il puisse exister une relation simple entre $\Delta_{n+1}(u)$ et $F(\frac{n}{h} e^{-i\theta})$. Autrement dit, le lien entre l'ensemble des λ' pour les valeurs infiniment grandes de λ' et la suite des rapports $\frac{n_k(\varepsilon, u)}{h}$ pour les indices k indéfiniment croissants, h restant invariable, ce lien, s'il existe, n'apparaît plus simplement.

24. Posons

$$\frac{1}{\lambda} \log |F(\lambda e^{-i(\theta+\omega)})| - \frac{1}{\lambda} \log M(\varepsilon) = p(\theta) + u(\omega, \lambda),$$

$u(\omega, \lambda)$ est mis pour $u(\theta, \varepsilon, \lambda, \omega)$, mais ne dépend de ε que par le terme soustractif $-\frac{1}{\lambda} \log M(\varepsilon)$. Désignons enfin par $m(\theta, h, \lambda, \varepsilon)$ le maximum pour $|\omega| \leq \pi$ de $h \cos \omega + u(\omega, \lambda)$. Nous avons, quel que soit λ ,

$$|\partial_{n+1}(u)| < M(\varepsilon) \frac{n!}{\lambda^n} e^{\lambda[p(\theta) + m(\theta, h, \lambda, \varepsilon)]}.$$

Nous savons que

$$u(\omega, \lambda) < p(\theta + \omega) - p(\theta) + \varepsilon < 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2} + \varepsilon$$

quel que soit ω . Soit ω_1 la valeur de ω pour laquelle $h \cos \omega + u(\omega, \lambda)$ atteint son maximum $m(\theta, h, \lambda, \varepsilon)$. ω_1 dépend de λ , de h , mais non pas de ε . On a

$$[h + p(\theta) - \varepsilon]^n < M(\varepsilon) \frac{n!}{\lambda^n} e^{\lambda[p(\theta) + h \cos \omega_1 + u(\omega_1)]}$$

si $n = n_h(\varepsilon, h)$ et, quel que soit λ , pour θ, h, ε donnés.

Faisons

$$\lambda = \frac{n}{h} (1 + \delta)$$

et remplaçons $n!$ par la quantité supérieure $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Alors

$$h + p(\theta) - \varepsilon < \frac{h}{e(1+\delta)} e^{\left[\frac{p+u(\omega_1)}{h} + \cos \omega_1\right](1+\delta)} \left[\sqrt{2\pi n} M(\varepsilon)\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Divisons par h et prenons les logarithmes des deux membres

$$\begin{aligned} \frac{p(\theta) - \varepsilon}{h} + o\left(\frac{1}{h^2}\right) &< -1 - \log(1 + \delta) \\ &+ \left[\frac{p + u(\omega_1)}{h} + \cos \omega_1\right](1 + \delta) + \frac{1}{n} \log[\sqrt{2\pi n} M(\varepsilon)]; \\ \frac{-p\delta - \varepsilon}{h} + o\left(\frac{1}{h^2}\right) &< \frac{\delta^2}{2} \\ &+ \left[\frac{u(\omega_1)}{h} - 2 \sin^2 \frac{\omega_1}{2}\right](1 + \delta) + \frac{1}{n} \log[\sqrt{2\pi n} M(\varepsilon)]. \end{aligned}$$

Considérons uniquement les $n = n_h(\varepsilon, u)$ supérieurs au nombre

$N(\varepsilon, u)$ déterminé plus haut. Le dernier terme de l'inégalité est inférieur à $\frac{\varepsilon}{4h}$. Soit $h\delta^2 < \alpha^2\varepsilon$, α étant indépendant de ε en sorte que λ est un nombre quelconque de l'intervalle $\frac{n}{h} \left(1 - \alpha\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}\right)$ à $\frac{n}{h} \left(1 + \alpha\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}\right)$. Supposons que $h\varepsilon$ soit grand. Alors, à une quantité près négligeable par rapport à ε ,

$$-(3 + \alpha^2)\varepsilon < u(\omega_1) - 2h \sin^2 \frac{\omega_1}{2}.$$

Nous concluons de cette inégalité

a. $u(\omega_1) > -(3 + \alpha^2)\varepsilon$;

b. D'après $u(\omega_1) < 2R_0 \sin \frac{|\omega_1|}{2} + \varepsilon$, $2 \sin \frac{|\omega_1|}{2}$ est inférieur à la racine positive de l'équation en t

$$h \frac{t^2}{2} - R_0 t - (4 + \alpha^2)\varepsilon = 0,$$

soit

$$t = \frac{R_0 + \sqrt{R_0^2 + 2\varepsilon h(4 + \alpha^2)}}{h} \sim \beta \sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} \quad \text{avec} \quad \beta = \sqrt{8 + 2\alpha^2},$$

si εh est infiniment grand pour ε infiniment petit.

Donc, sensiblement

$$|\omega_1| < \beta \sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}.$$

Nous aboutissons à la conclusion suivante :

$h\varepsilon$ et $\frac{n_k(\varepsilon, u)}{N(\varepsilon, u)}$ étant grands avec ε^{-1} , pour que $n_k(\varepsilon, u)$ soit tel que si $n = n_k$, l'inégalité $|\delta_{n+1}(u)| > [h + p(\theta) - \varepsilon]^n$ soit satisfaite, il est nécessaire qu'en posant $\lambda'_k = \frac{n_k(\varepsilon, u)}{h}$, λ'_k soit dans l'ensemble $E'(\varepsilon, h)$ des nombres λ' vérifiant cette condition (A) :

Sur chaque arc de cercle $|\varrho| = \text{const.}$, dont le rayon $|\varrho|$ et l'angle au centre vérifient les inégalités

$$(31) \quad -\alpha\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} < \frac{|\varrho|}{\lambda'} - 1 < \alpha\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}}, \quad -\beta\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}} < \text{Arg} \frac{\varrho}{\lambda} e^{i\theta} < \beta\sqrt{\frac{\varepsilon}{h}},$$

le maximum de $\frac{1}{|\varrho|} \log \frac{|F(\varrho)|}{M(\varepsilon)}$ surpasse $p(\theta) - \varepsilon$, α, β étant indé-

pendants de ε et de h (et de ν, λ'). α peut être choisi quelconque, β en résulte.

Ainsi, connaissant $F(\nu)$, puis h et ε étant donnés ($h\varepsilon$ très grand, pour ε très petit), l'ensemble des valeurs possibles des rangs n'_k peut être inclus dans un ensemble de valeurs $h\lambda'$ se déterminant au moyen de l'étude de $F(\nu)$ seul.

On peut aller plus loin.

25. Quand h croît indéfiniment, les points de rencontre du cercle $C(\theta, h, R)$ de centre $-he^{i\theta}$, de rayon $R = R(\theta, h)$ avec la droite Δ d'équation $z = e^{i\theta}[p(\theta) + it]$ tendent vers les points correspondant à $t = \pm\sqrt{\mu}$, μ étant le plus grand des deux nombres $p'^2(\theta + 0)$ et $p'^2(\theta - 0)$. Donc, quel que soit h ,

$$R(\theta, h) \geq \sqrt{[h + p(\theta)]^2 + \mu},$$

et dès que h est assez grand,

$$R(\theta, h) < \sqrt{[h + p(\theta)]^2 + \mu + \varepsilon} < h + p(\theta) + \frac{\mu + \varepsilon}{2(h + p)}.$$

Donc, pour h assez grand, on a, dès $n > N'(\varepsilon, u)$,

$$|\delta_{n+1}(u)| < \left[h + p(\theta) + \frac{\mu + \varepsilon}{2h} \right]^n.$$

D'autre part, il existe une suite d'entiers croissants $n'_k(\varepsilon, u)$ tels que si $n = n'_k$,

$$|\delta_{n+1}(u)| > \left[h + p(\theta) + \frac{\mu - \varepsilon}{2h} \right]^n.$$

Caractérisons la suite n'_k à partir de la fonction $F(\nu)$. On a quel que soit λ et d'après l'inégalité (29)

$$|F[\lambda e^{-i(\theta+\omega)}]| < M \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) e^{\lambda \left[A(\omega) + h + p(\theta) + \frac{\varepsilon}{h} \right]}$$

avec

$$A(\omega) = -2h \sin^2 \frac{\omega}{2} + p(\theta + \omega) - p(\theta).$$

Donc

$$|\delta_{n+1}(u)| < \sqrt{2\pi n} M \left(\frac{\varepsilon}{h} \right) \left(\frac{n}{e\lambda} \right)^n e^{\lambda \left[h + p(\theta) + m(\theta, h, \lambda) + \frac{\varepsilon}{h} \right]},$$

$m(\theta, h, \lambda)$ étant le maximum de $A(\omega)$ pour $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Puisque $p'(\theta + 0)$ et $p'(\theta - 0)$ sont en valeur absolue inférieurs ou égaux (l'un égal) à $\sqrt{\mu}$, il existe un nombre positif $\eta = \eta(\varepsilon, \theta, \lambda) < \frac{\pi}{3}$, tel que si $|\omega| < \eta$, il en résulte

$$p(\theta + \omega) - p(\theta) < 2\sqrt{\mu + \varepsilon} \sin \frac{|\omega|}{2}.$$

Donc, pour $|\omega| < \eta$,

$$A(\omega) < \frac{\mu + \varepsilon}{2h}.$$

Pour $|\omega| > \eta$,

$$A(\omega) < -2h \sin^2 \frac{|\omega|}{2} + 2R_0 \sin \frac{|\omega|}{2}.$$

Le second membre atteint son maximum pour $2 \sin \frac{|\omega|}{2} = \frac{R_0}{h}$. Donc, si $h > \frac{3R_0}{\eta}$, le maximum de la seconde limitation de $A(\omega)$ pour $|\omega| > \eta$, est inférieur à $-2h \sin^2 \frac{\eta}{2} + 2R_0 \sin \frac{\eta}{2} < 0$. Donc

$$A(\omega) < \frac{\mu + \varepsilon}{2h},$$

quel que soit ω entre $-\pi$ et $+\pi$. Remplaçons ε par $\frac{\varepsilon}{4}$. Finalement pour

$$h > \frac{2R_0}{\eta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)} = h'(\varepsilon) \quad \text{et} \quad n > N'(\varepsilon, h)$$

tel que pour

$$n < N'(\varepsilon, h) \sim \frac{8h^2}{\varepsilon} \log \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} M\left(\frac{\varepsilon}{h}\right), \quad \frac{1}{n} \log \sqrt{2\pi n} M\left(\frac{\varepsilon}{4h}\right) < \frac{\varepsilon}{4h^2},$$

on a

$$|\delta_{n+1}(u)| < \left[h + p(\theta) + \frac{\mu + \varepsilon}{h} \right]^n \quad \text{pour} \quad h > h'(\varepsilon), \quad n > N'(\varepsilon, h).$$

25 bis. Considérons maintenant une valeur $n'_k(\varepsilon, u)$ de n telle que

$$|\delta_{n+1}(u)| > \sqrt{\left[h + p(\theta) + \frac{\mu - \varepsilon}{2h} \right]^n},$$

d'où

$$\left[h + p(\theta) + \frac{\mu - \varepsilon}{2h} \right]^n < \sqrt{2\pi n} M\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) \left(\frac{n}{e\lambda}\right)^n e^{\lambda \left[h + p(\theta) + A(\omega_1) + \frac{\varepsilon}{h} \right]},$$

ω_1 étant la valeur de ω rendant maximum

$$A(\omega) = -2h \sin^2 \frac{\omega}{2} + u(\omega),$$

si

$$\begin{aligned} u(\omega) &= u(\theta, \varepsilon, h, \lambda, \omega) \\ &= \frac{1}{\lambda} \log |F(\lambda e^{-i(\theta+\omega)})| - \frac{1}{\lambda} \log M\left(\frac{\varepsilon}{h}\right) - p(\theta) < p(\theta + \omega) - p(\theta) + \frac{\varepsilon}{h}. \end{aligned}$$

Supposons $n'_k > N'(\varepsilon, h)$ et faisons $\lambda = \frac{n}{h+p}(1 + \delta')$. Supposons $h > \varepsilon^{-2}$, en sorte que h^{-1} sera comparable à $\frac{\varepsilon^2}{h^2}$ au plus. Prenant les logarithmes des deux membres après division par $(h+p)^n$, et négligeant les termes beaucoup plus petits que $\frac{\varepsilon}{h^2}$, nous trouvons

$$\frac{\mu - \varepsilon}{2h(h+p)} < \frac{\varepsilon}{4h^2} + \frac{\delta'^2}{2} + \left[\frac{u(\omega_1)}{h+p} - 2 \frac{h}{h+p} \sin^2 \frac{\omega_1}{2} \right] (1 + \delta') + \frac{\varepsilon}{h(h+p)}.$$

Faisons

$$|\delta'| < \alpha' \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h}},$$

en sorte que λ est un nombre quelconque de l'intervalle $\frac{n}{h} \left(1 - \alpha' \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h}} \right)$ à $\frac{n}{h} \left(1 + \alpha' \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h}} \right)$.

Alors

$$1^\circ \quad u(\omega_1) > \frac{\mu - \gamma' \varepsilon}{h+p} \quad (\gamma' = 4 + \alpha'^2),$$

$$2^\circ \quad \frac{\mu - \varepsilon(4 + \alpha'^2)}{2(h+p)^2} < \frac{u(\omega_1)}{h+p} - 2 \frac{h}{h+p} \sin^2 \frac{\omega_1}{2}.$$

Or,

$$u(\omega_1) < 2\sqrt{\mu + \varepsilon} \sin \frac{|\omega_1|}{2},$$

$2 \sin \frac{|\omega_1|}{2}$ doit donc être inférieur à la plus grande racine de l'équation en t

$$ht^2 - 2t\sqrt{\mu + \varepsilon} + \frac{\mu - (4 + \alpha'^2)\varepsilon}{h} = 0.$$

Donc sensiblement

$$|\omega_1| < \frac{\sqrt{\mu + \varepsilon} + \sqrt{\varepsilon} \sqrt{5 + \alpha'^2}}{h}.$$

En résumé, pour que, avec $u = he^{i\theta}$, on ait

$$|\delta_{n+1}(u)| > [\sqrt{(h+p)^2 + \mu - \varepsilon}]^n, \quad [p = p(\theta)]$$

moyennant $n = n'_k(\varepsilon, u)$, il faut, en supposant

$$h > h'(\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \quad \text{et} \quad n'_k > N'(\varepsilon, h),$$

que le rapport $\lambda_k'' = \frac{n_k'}{h}$ soit dans l'ensemble $E''(\varepsilon, u)$ des nombres λ'' vérifiant cette condition (B) :

Sur tous les arcs de cercles ayant leurs centres à l'origine et définis par les conditions

$$(32) \quad -\alpha' \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h} < \frac{|\varrho|}{\lambda''} - 1 < \alpha' \frac{\sqrt{\varepsilon}}{h}, \quad -\frac{\sqrt{\mu} + \beta' \sqrt{\varepsilon}}{h} < \text{Arg} \left(\frac{\varrho}{\lambda''} e^{i\theta} \right) < \frac{\sqrt{\mu} + \beta' \sqrt{\varepsilon}}{h},$$

le maximum de $\frac{1}{|\varrho|} \log \frac{|F(\varrho)|}{M\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)}$ surpasse $p(\theta) + \frac{\mu - \gamma' \varepsilon}{h}$, α' , β' , γ' étant indépendants de ε et de h , α' pouvant être choisi quelconque, β' et γ' en résultant.

Formules analogues à celles de M. Mandelbrojt.

26. Considérons le nombre

$$(22) \quad R_\alpha(u) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt{|d_{n+1}(u, \alpha)|}.$$

Dans la région infinie $\Sigma_\alpha(u)$ ou Σ_α du cercle $\Gamma_\alpha(u)$ de centre $-u$ et de rayon $R_\alpha(u)$, il existe une fonction $g_{1,\alpha}(z)$ (non uniforme si α n'est pas entier réel) coïncidant avec $z^{-\alpha} g_0(z)$ dans la partie commune à Σ_α et à $S_0(|z| > R_0)$, et ne possédant dans $\Sigma_\alpha(u)$ aucun point singulier à distance finie. Au contraire la circonférence $\Gamma_\alpha(u)$ contient au moins un point singulier de $g_{1,\alpha}$. Quatre cas sont à distinguer :

1° L'origine est dans la région finie de Γ_α . Alors $g_1(z)$ est défini dans Σ_α et les points singuliers de $g_{1,\alpha}$ situés sur Γ_α (ils appartiennent à V) sont des points singuliers de g_1 . Donc

$$R_\alpha(u) = R(u) > h = |u|.$$

On a encore $R_\alpha(u) = R(u)$, la valeur des deux nombres étant $h = |u|$ quand, O étant extérieur à B_0 , Γ_α contient O et un point de V distinct de O. Ce point est singulier pour $g_{1,-\alpha}$ et pour g_1 .

2° O est dans Σ_α et extérieur à B_0 . Alors $g_1(z)$ est holomorphe à l'origine. Si $k \geq 0$ est l'ordre du zéro présenté par $g_1(z)$ au point O, α est entier au plus égal à k . On a encore

$$R_\alpha(u) = R(u) < h = |u|.$$

3° O extérieur à B_0 est sur Γ_α et Γ_α est disjoint de V. g_1 est holo-

morphe au point 0, mais non pas $z^{-\alpha} g_1(z)$. Avec les notations du cas précédent, α est non entier ou entier supérieur à k .

$$R_\alpha(u) = h > R(u).$$

4° 0 est sur V et dans Σ_α . Alors $g_1(z)$ est au voisinage de 0 (et hors de V) de la forme $z^\alpha \varphi(z)$, φ étant holomorphe au point 0, sans que g_1 le soit. α est ou bien non entier, ou bien entier inférieur à l'ordre (éventuellement nul) changé de signe du zéro présenté par $\varphi(z)$ à l'origine

$$R_\alpha(u) < h = R(u).$$

Soit V_α la région formée par la réunion de toutes les régions $\Sigma_\alpha(u)$ pour toutes les valeurs possibles de u . V_α peut encore se définir ainsi : Soit $\Delta_\alpha(\theta)$ la droite $z = e^{i\theta}[p_\alpha(\theta) + it]$ telle que, dans sa région positive $\Delta_\alpha^+(\theta)$ d'équation $z = e^{i\theta}(p + it)$, $p > p_\alpha(\theta)$, t réel quelconque, il existe une fonction holomorphe $g_{1,\alpha}(z)$ égale à une détermination de $z^{-\alpha} g_0(z)$ dans la partie commune à Δ_α^+ et à S_0 .

Si l'on n'avait pas exclu l'hypothèse $R_0 = 0$, il aurait pu se faire que $z = 0$ fût l'unique singularité de $g_1(z)$, et si $g_1(z) = z^{-q} P(z)$, P étant un polynôme de degré au plus égal à l'entier positif q , alors quel que soit α entier au plus égal à $-q$, $g_{1,\alpha}(z)$ est holomorphe dans tout le plan à distance finie, $R_\alpha(u) = 0$, quel que soit u , et $p_\alpha(\theta) = -\infty$ quel que soit θ . Mais, R_0 étant supposé positif, $p_\alpha(\theta)$ a encore pour minimum $-R_0$, comme $p(\theta)$.

$R_\alpha(u) - h$ tend en décroissant vers $p_\alpha(\theta)$ quand h croît indéfiniment. Si $\mu_\alpha = \mu_\alpha(\theta)$ est le plus grand des deux nombres $p_\alpha'^2(\theta + 0)$ et $p_\alpha'^2(\theta - 0)$, $R_\alpha(u)$ vaut toujours au moins $\sqrt{[h + p_\alpha(\theta)]^2 + \mu_\alpha}$ et finit par devenir inférieur à $\sqrt{[h + p_\alpha(\theta)]^2 + \mu_\alpha} + \varepsilon$ quel que soit ε positif donné. Comparons $p_\alpha(\theta)$ à $p(\theta)$.

1° Si $p(\theta) > 0$, g_1 ayant au moins un point singulier sur $\Delta(\theta)$, un tel point est différent de 0 et par conséquent est singulier aussi pour $g_{1,\alpha}(z)$. Alors $p_\alpha(\theta) = p(\theta) > 0$. Et réciproquement.

De même, si $p(\theta) = 0$ avec $|p'(\theta + 0)| + |p'(\theta - 0)| > 0$, $\Delta(\theta)$ passant par 0 contient au moins un point singulier de $g_1(z)$ distinct de 0.

Donc $p_\alpha(\theta) = p(\theta) = 0$,

2° et 3° Si $p(\theta) < 0$, c'est que $g_1(z)$ est holomorphe à l'origine.

Soit k l'ordre du zéro ($k \geq 0$) présenté par g_1 pour $z = 0$. Alors $p_\alpha(\theta) = p(\theta) < 0$ si α est entier inférieur ou au plus égal à k , et pour toute autre valeur de α , $p_\alpha(\theta) = 0 > p(\theta)$.

4° Si $p(\theta) = 0$, $p'(\theta + 0) = p'(\theta - 0) = 0$ et si $z^{-\alpha} g_1(z)$ vaut hors de B_0 une fonction holomorphe à l'origine $\varphi(z)$, alors $p_\alpha(\theta) < 0 = p(\theta)$.

Dans ce dernier cas il existe un angle (majeur)

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad (0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi) \quad \text{où } p(\theta) = 0.$$

V renferme deux segments de droite partant de l'origine et ayant pour arguments $\theta_1 - \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 + \frac{\pi}{2}$. Dans le triangle limité par ces deux côtés et par une droite d'orientation $\theta + \frac{\pi}{2}$, et sur les deux côtés du même triangle se rejoignant en O, $z^{-\alpha} g_1(z)$ se prolonge en une fonction uniforme et holomorphe, même en O. Si donc hors de B_0 , au voisinage du sommet O, $g_1(z) = z^\beta \psi(z)$, ψ étant holomorphe non nul à l'origine, α vaut $-\beta + r$, r étant un entier non négatif quelconque et $p_\alpha(\theta) < 0$.

27. Nous allons évaluer $d_{n+1}(u, \alpha)$ quand n et h croissent indéfiniment, de façon que le rapport $\frac{n}{h}$ tende vers une limite finie λ . Reprenons la formule

$$(21) \quad d_{n+1}(u, \alpha) = C_{n+\alpha}^{n+1} a_0 u^{n+1} + \dots + C_{n+\alpha}^{n-p} a_{p+1} u^{n-p} + \dots + a_{n+1}.$$

Posons

$$\Delta_{n+1}(u, \alpha) = \frac{d_{n+1}(u, \alpha)}{u^{n+\alpha}} = \sum_{p=-1}^{p=n} C_{n+\alpha}^{n-p} a_{p+1} u^{-p-\alpha}.$$

D'après l'expression

$$C_{n+\alpha}^{n-p} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n - p + 1) \Gamma(p + \alpha + 1)}$$

et la formule d'approximation

$$* \quad \Gamma(x + 1) \sim \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \quad [\mathcal{R}(x) \text{ grand}],$$

$C_{n+\alpha}^{n-p}$ équivaut, pour p fixe, n croissant, à $\frac{n^{p+\alpha}}{\Gamma(p + \alpha + 1)}$. Donc,

$$\Delta_{n+1}(u, \alpha) = \sum_{p=-1}^{p=n} (1 + \varepsilon_{n,p}) \frac{a_{p+1}}{\Gamma(p + \alpha + 1)} \left(\frac{n}{h}\right)^{p+\alpha} e^{-i(p+\alpha)\theta}$$

les $\varepsilon_{n,p}$ étant bornés indépendamment de n et de p , et chacun tendant vers 0 quand n croît, p restant fixe.

Finalement, θ restant invariable, si n et h croissent de façon que $\frac{n}{h}$ tende vers λ , $\Delta_{n+1}(u, \alpha)$ tend vers

$$\sum_{p=-1}^{\infty} \frac{a_{p+1}}{\Gamma(p+\alpha+1)} \lambda^{p+\alpha} e^{-i(p+\alpha)\theta} = \lambda^\alpha e^{-i\alpha\theta} F_\alpha(\lambda e^{-i\theta}),$$

en posant

$$(33) \quad F_\alpha(\varrho) = \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{a_{p+1}}{\Gamma(p+\alpha+1)} \varrho^p,$$

$F_\alpha(\varrho)$ est le quotient d'une fonction entière par ϱ ; $F_\alpha(\varrho)$ est une fonction entière si α est entier nul ou négatif, d'après $\frac{1}{\Gamma(x)} = 0$, pour x entier non positif, ou encore si $a_0 = 0$.

Limitons supérieurement le module de $\Delta_{n+1}(u, \alpha)$, supposant connue une borne de $|g_{1,\alpha}(z)|$. On a

$$\Delta_{n+1}(u, \alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_G \left(1 + \frac{z}{u}\right)^{n+\alpha} g_{1,\alpha}(z) dz,$$

G étant un contour fermé simple quelconque renfermant dans sa région finie la totalité de V_α et le point $-u$. Les déterminations de $\left(1 + \frac{z}{u}\right)^\alpha$ et de $g_{1,\alpha}(z, \alpha)$ dans la région infinie de G et sur \bar{G} sont associées par la condition que, pour z infini, le coefficient différentiel de l'intégrale vaut a_0 [ou le premier terme $\frac{a_p}{z^p}$ non nul de $g_0(z)$].

Dès que h est assez grand, $h > h(\varepsilon) \sim \frac{2R_0}{\varepsilon}$, le cercle ouvert $|z+u| < h + p_\alpha(\theta) + \varepsilon$, contient à son intérieur la totalité de V_α . Soit γ la frontière du fuseau bicirculaire commun à ce cercle et au cercle $|z| < R_0 + \varepsilon$. Désignons par ζ le point de γ le plus proche de $-u$, par x le segment rectiligne $(\zeta, -u)$. Supposant que n surpasse $-\alpha'$, partie réelle de $-\alpha$ ($\alpha = \alpha' + i\alpha''$) en sorte que $\left(1 + \frac{z}{u}\right)^{n+\alpha}$ s'annule pour $z = -u$, nous constituons G ainsi : 1° le bord supérieur de x parcouru de ζ à $-u$; 2° le bord inférieur de x de $-u$ à ζ ; 3° le contour γ décrit dans le sens direct de ζ en ζ .

Sur z , nous posons

$$z = -te^{i\theta} = te^{i(\theta+\pi)} \quad \text{et} \quad g_{1,z}(z) = t^{-\alpha} e^{-i\pi(\theta+\alpha)} g_0(z).$$

Sur le bord supérieur de z , $\left(1 + \frac{z}{u}\right)^{n+\alpha}$ vaut $\left(1 - \frac{t}{h}\right)^n e^{\alpha \log\left(1 - \frac{t}{h}\right)}$ ($R_0 + \varepsilon < t < h$) la détermination considérée de $\log\left(1 - \frac{t}{h}\right)$ étant réelle. Sur le bord inférieur $\left(1 + \frac{z}{u}\right)^{n+\alpha}$ vaut le nombre précédent multiplié par $e^{2i\pi\alpha}$. Finalement

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}(u, \alpha) &= \frac{1 - e^{2i\pi\alpha}}{2i\pi} \int_{R_0+\varepsilon}^h \left(1 - \frac{t}{h}\right)^{n+\alpha} t^{-\alpha} e^{-i\theta+\pi\alpha} g_0(z) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(1 + \frac{z}{u}\right)^{n+\alpha} g_{1,z}(z) dz = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

D'après $1 - x < e^{-x}$ si x est réel positif inférieur à 1, on voit que, $\frac{n}{h}$ tendant vers λ , toutes les limites de $|I_1|$ sont inférieures en module à

$$\frac{1 + e^{2\pi\alpha'}}{2\pi} \int_{R_0+\varepsilon}^{\infty} e^{-\lambda t} t^{-\alpha'} |g_0(-te^{i\theta})| dt.$$

Le maximum de $|g_0(z)|$ pour $|z| > R_0 + \varepsilon$ est borné par un nombre $M(\varepsilon)$,

$$\int_{\lambda(R_0+\varepsilon)}^{\infty} e^{-t} t^{-\alpha'} dt \sim \frac{1}{\lambda^{\alpha'}} e^{-R_0+\varepsilon\lambda} (R_0 + \varepsilon)^{-\alpha'},$$

quand λ croît. Soit

$$A(\alpha) = \frac{1 + e^{2\pi\alpha'}}{\pi} (R_0 + \varepsilon)^{-\alpha'}.$$

Finalement, à partir d'une certaine valeur de λ , $|I_1| < \frac{A(\alpha) M(\varepsilon)}{\lambda} e^{-(R_0+\varepsilon)\lambda}$.

Sur γ où $g_{1,z}(z)$ est holomorphe en chaque point et où $|g_{1,z}(z)|$ est uniforme,

$$|g_{1,z}(z)| < M'_\alpha(\varepsilon).$$

La longueur de γ est inférieure à $2\pi(R_0 + \varepsilon)$,

$$\left|1 + \frac{z}{u}\right|^{n+\alpha} < \left[1 + \frac{p_\alpha(\theta) + \varepsilon}{h}\right]^{n+|\alpha'|} e^{\frac{2R_0}{R} |\alpha'|}$$

qui tend vers $e^{\lambda|p_\alpha(\theta)+\varepsilon}$. Finalement, d'après $p_\alpha(\theta) \geq -R_0$,

$$|\Delta_{n+1}(u, \alpha)| < M''_\alpha(\varepsilon) e^{\lambda|p_\alpha(\theta)+\varepsilon}$$

quels que soient λ et ε , $M'_\alpha(\varepsilon)$ ne dépendant que de ε (et de α par un coefficient de proportionnalité).

28. Considérons la fonction $F_\alpha(\nu)$ qui, après multiplication par ν , est pour toute valeur de α , une fonction entière de type exponentiel, dont le module maximum, pour $|\nu|$ constant, a son logarithme de l'ordre de $R_0|\nu|$, si ν est infiniment grand :

$$F_\alpha(\nu) = \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{\alpha_{p+1}}{\Gamma(p + \alpha + 1)} \nu^p.$$

Pour toute valeur donnée de θ , on montre comme dans le cas $\alpha = 0$ que le nombre $p_\alpha(\theta)$ défini comme la limite de $R_\alpha(h, \theta) - h$ pour h infini est égal au nombre $q_\alpha(\theta)$ donné par la relation

$$q_\alpha(\theta) = \overline{\lim}_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \log |F_\alpha(\lambda e^{-i\theta})|.$$

La discussion effectuée plus haut nous mène aux conclusions suivantes :

1° θ étant donné, si la relation $q_\alpha(\theta) > 0$ [ou $q_\alpha(\theta) = 0$, $|q'_\alpha(\theta + 0)| + |q'_\alpha(\theta - 0)| > 0$] a lieu pour une valeur de α , elle a lieu quel que soit α .

Dans ce cas, en effet, la droite $\Delta_\alpha(\theta)$ est indépendante de α . Car elle passe par un point singulier de $g_1(z)$ autre que l'origine.

2° Si pour une valeur de θ et pour une valeur de α , on a $q_\alpha(\theta) < 0$, les nombres θ où la même inégalité a lieu forment un intervalle inférieur à π , soit $\theta_1 < \theta < \theta_2 < \theta_1 + \pi$. Pour tous les nombres θ de cet intervalle, et pour toutes les valeurs et les seules valeurs α comprises dans une même formule $\alpha = \beta - r$, r étant un entier quelconque positif ou nul, $q_\alpha(\theta) < 0$.

Si $\theta_1 < \theta < \theta_2$, et si α n'est pas de la forme $\beta - r$, $q_\alpha(\theta) = 0$. Si $\theta = \theta_1$, ou $\theta = \theta_2$, $q_\alpha(\theta) = 0$, quel que soit α .

Si $\theta_2 < \theta < \theta_1 + 2\pi$, $q_\alpha(\theta) > 0$, quel que soit α .

Dans le cas ainsi étudié, l'origine est un point principal de V , V contient deux segments se rejoignant à l'origine et dont les arguments sont $\theta_1 - \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 + \frac{\pi}{2}$, et autour de O , $g_1(z) = z^\beta \varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant holomorphe et non nul à l'origine.

3° Si pour une valeur de θ et une valeur de α , on a $q_\alpha(\theta) = 0$ et $q'_\alpha(\theta) = 0$, il peut exister une famille de nombres $\beta - r$, et il en existe au plus une, et généralement aucune, telle $q_{\beta-r}(\theta) < 0$. Si β existe, les circonstances sont celles du second cas, avec $\theta_1 < \theta < \theta_2$ et $\alpha = \beta - r$, ou avec $\theta = \theta_1$, ou $\theta = \theta_2$, α quelconque.

Le corollaire suivant se déduirait immédiatement du théorème de M. Pólya.

COROLLAIRE. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'origine soit dans une certaine région limitée par une droite et dans laquelle $g_0(z)$ est prolongeable en une fonction holomorphe $g_1(z)$, ou méromorphe $g_2(z)$ ayant pour seule singularité un pôle à l'origine, l'ordre de l'origine par rapport à g_1 ou à g_2 étant l'entier k , c'est-à-dire : l'origine étant un zéro d'ordre k pour g_1 , si k est positif ou nul, et un pôle d'ordre $-k$ pour g_2 si k est négatif, cette condition est que, pour une certaine valeur de θ , et dès lors pour tout un ensemble de valeurs formant un intervalle,*

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log \left| \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{\alpha_{p+1}}{(p+k)!} \lambda^p e^{-i p \theta} \right| < 0,$$

tandis que la plus grande limite du premier membre est nulle quand on remplace l'entier k par $k + 1$.

29. Soit a un point quelconque du plan, différent de l'origine. Hors du cercle de convergence $\Gamma(-a)$ dont le centre est a et le rayon $R(-a)$, et dans la région $S_0(|z| > R_0)$, on a [formule (17)]

$$g_0(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\delta_n(-a)}{(z-a)^n}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_0(-a) &= a_0, & \delta_1(-a) &= a_1, \\ \delta_{n+1}(-a) &= a_{n+1} - C_n^1 a_n a + \dots + (-1)^{n-p} C_n^{n-p} a_{p+1} a^{n-p} + \dots + (-1) C_n^n a_1 a^n. \end{aligned}$$

Même si $R_0 = 0$ (mais s'il y a une infinité de coefficients a_p non nuls), la fonction

$$(5) \quad F_\alpha(a, \nu) = \sum_{p=-1}^{p=\infty} \frac{\delta_{p+1}(-a)}{\Gamma(p+\alpha+1)} \nu^p$$

est, après multiplication par ν une fonction entière de type exponentiel

avec l'exposant $R(-a)$. Cette fonction correspond à la fonction $\sum \frac{\delta_n(-a)}{z^n}$, holomorphe et égale autour de l'infini à $g_0(z+a)$. Tous les résultats obtenus par le moyen de la fonction $F_\alpha(v)$ et pour le caractère présenté par $g_1(z)$ à l'origine, nous fournissent, à l'aide de la fonction $F_\alpha(a, v)$, les renseignements analogues pour la fonction $g_1(z)$ au voisinage du point a .

Posons $g_0(a, z) = g_0(z+a)$,

$$p_\alpha(a, \theta) = \overline{\lim} \frac{1}{\lambda} \log |F_\alpha(a, \lambda e^{-i\theta})| \quad \text{et} \quad p(a, \theta) = p_0(a, \theta).$$

La fonction $g_1(a, z)$ réalisant le prolongement de $g_0(a, z)$ dans des demi-plans limités par des droites $\Delta(a, \theta) = e^{i\theta}[p(a, \theta) + it]$ est $g_1(z+a)$. Soit $a = \rho e^{i\psi}$. Alors

$$p(a, \theta) = p(\theta) - \rho \cos(\theta - \psi).$$

Le contour $V(a)$ correspondant à $g_1(a, z)$ se déduit de V par la translation figurée par la relation ponctuelle $V(a) = V - a$. C'est le contour V quand l'origine du plan complexe est portée au point a . On a $g_{1,\alpha}(a, z) = z^{-\alpha} g_1(z+a)$, si a est non extérieur à V .

Si a est sur V sans en être un point principal isolé,

$$p(a, \theta) = p_\alpha(a, \theta) = 0,$$

quels que soient α et θ .

Si a est dans V , O est intérieur à $V(a)$, $p(a, \theta) = p_\alpha(a, \theta) > 0$, quels que soient θ et α .

Si a est extérieur à V , cas où $g_1(z)$ est holomorphe au point a , ou si a est un point principal isolé de V (supposons que V ne se réduise pas au seul point a), il existe dans les deux cas un angle θ' , θ'' ($\theta' < \theta'' < \theta' + \pi$) tel que $\theta' - \frac{\pi}{2}$, $\theta'' + \frac{\pi}{2}$ soient les directions des demi-tangentes menées de a à V et parcourues à partir de a .

Alors pour tout θ appartenant à l'intervalle $\theta' < \theta < \theta''$, $p_\alpha(a, \theta) \leq 0$, l'inégalité $p_\alpha(a, \theta) < 0$ ne pouvant avoir lieu que pour une famille $\alpha = \beta - r$ (r entier positif ou nul). Au contraire, pour $\theta'' < \theta < \theta' + 2\pi$, $p_\alpha(a, \theta) > 0$, quel que soit α .

Supposons encore a extérieur à V . $g_1(z)$ étant holomorphe au point a , β existe. C'est un entier k , nul si $g_1(a) \neq 0$, égal à l'ordre du zéro présenté par $g_1(z)$ au point a , si $g_1(a) = 0$.

En particulier, considérons le cas où

$$f_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

est une fonction entière. $g_0(z) = \sum \frac{a_n}{z^n}$ n'a d'autre singularité que l'origine ($R_0 = 0$). $g_{1,\alpha}(a, z)$ est toujours singulier au point $-a$ et régulier au point a si $\alpha = k - r$ ($0 \leq r \leq k$). Ici, $\theta' = \psi - \frac{\pi}{2}$, $\theta'' = \psi + \frac{\pi}{2}$:
 1° $p_\alpha(\alpha, \theta) = -\rho \cos(\theta - \psi) > 0$ si $|\theta - \psi| \geq \frac{\pi}{2}$, et quel que soit α ;
 2° si $|\theta - \psi| < \frac{\pi}{2}$, $p_\alpha(a, \theta) = 0$ pour α non entier ou entier supérieur à k ; et $p_{k-r}(a, \theta) = -\rho \cos(\theta - \psi) < 0$ pour $r = 0, 1, 2, \dots, k$.

Soient $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots, \frac{1}{z_n}, \dots$ les zéros de $f_0(z)$. z_n tend vers 0 quand n croît. Les z_n sont les zéros de $g_0(z)$. L'ensemble des z_n est donc identique à l'ensemble des nombres $a = \rho e^{i\psi}$ vérifiant la condition

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log \left| \sum_{p=-1}^{\infty} \frac{\delta_{p+1}(-a)}{(p+1)!} \lambda^p e^{-ip\psi} \right| = -\rho = -|a|,$$

tandis que si $\frac{1}{a}$ n'annule pas $f_0(z)$, le premier membre vaut 0.

En remplaçant dans le premier membre le diviseur $(p+1)!$ de $\delta_{p+1}(a)$ par $(p+k)!$, sans changer le reste de l'inégalité, on caractérise les nombres a tels que $\frac{1}{a}$ soit racine d'ordre au moins égal à k de $f_0(z)$.

Revenons au cas général où $R_0 > 0$, et supposons que a soit un point principal isolé de V . On a cet énoncé :

Si $f_0(z)$ est méromorphe, tout pôle $\frac{1}{a}$ de $f_0(z)$, tel qu'il existe un cercle passant par ce point, et laissant l'origine dans une région où $f_0(z)$ est prolongeable en fonction holomorphe, sera caractérisé par la condition

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log \left| \sum_{p=s}^{p=\infty} \frac{\delta_{p+1}(-a)}{p!} \lambda^p e^{-ip\theta} \right| = 0 \quad (\theta' < \theta < \theta'').$$

Étude des points singuliers principaux isolés par la fonction entière associée.

30. L'examen de la fonction entière $F(\nu)$ associée à $g_0(z)$ peut nous faire connaître la nature de la singularité présentée par $g_1(z)$

en un point ζ principal *isolé* du contour convexe V . Rappelons qu'un tel point ζ est ainsi défini, que sur un intervalle majeur $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $p(\theta)$ est linéaire en $\cos \theta$ et $\sin \theta$, $p(\theta) = \rho \cos(\theta - \psi)$. Dès lors, $\zeta = \rho e^{i\psi}$. Les points ζ sont ainsi mis en évidence par la seule étude de $F(\nu)$. Citons encore les deux formules bien connues :

$$(34) \quad F(\nu) = \frac{1}{2i\pi} \int_C g_1(z) e^{\nu z} dz,$$

C'étant un contour simple quelconque dont la région finie contient V et

$$(35) \quad g_1(z) = \int_0^\infty F(\nu) e^{-\nu z} d\nu,$$

la dernière intégralè étant prise le long d'un rayon $\nu = \lambda e^{-i\theta}$ et ayant un sens si $z = e^{i\theta}(p + it)$ avec $p > p(\theta)$, donc si z est dans la région positive de $\Delta(\theta)$.

Ces relations montrent que les deux fonctions $F(\nu)$ et $g_1(z)$ sont chacune pour l'autre une fonctionnelle linéaire.

Supposons que, autour du point ζ et dans Q , région infinie de V , g_1 se mette sous la forme $A(z - \zeta) + B(z, \zeta)$ de façon que, dans la région positive d'une droite $z = e^{i\theta}[p_1(\theta) + it]$, $p_1(\theta)$ étant le plus petit possible et inférieur à $p(\theta)$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $A(z - \zeta)$ n'admette que la singularité $z = \zeta$, et $B(z, \zeta)$ soit holomorphe. On peut évidemment supposer en outre que A et B sont holomorphes en z dans Q et nuls à l'infini.

Alors, si $F(\nu) = e^{\nu\zeta}L(\nu) + L_1(\nu)$, avec

$$L(\nu) = \frac{1}{2i\pi} \int_C A(u) e^{\nu u} du.$$

$L(\nu)$ est d'ordre exponentiel nul pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, en ce sens que

$$\overline{\lim}_{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \log |L(\lambda e^{-i\theta})| = 0 \quad (\theta_1 < \theta < \theta_2)$$

et $L(\nu)$ est d'ordre exponentiel négatif $p_1(\theta) - p(\theta)$ dans le même intervalle $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Ainsi, pour $\nu = \lambda e^{i\theta}$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, λ infiniment grand, $e^{-\nu\zeta}F(\nu)$ possède une valeur asymptotique $L(\nu)$ ne dépendant que de la partie principale de $g_1(z)$ au point ζ , $L(\nu)$ ne changeant pas par l'addition à $g_1(z)$ d'une fonction holomorphe au point ζ [et dans un demi-plan contenant $\Delta(\theta)$

à son intérieur]; l'approximation de $e^{-v\zeta}F(v)$ par $L(v)$ étant d'ordre exponentiel négatif pour toute valeur de θ dans l'intervalle θ_1, θ_2 .

Réciproquement, si, pour

$$\theta_1 < \theta < \theta_2 \quad \text{et} \quad v = \lambda e^{-i\theta},$$

$e^{-v\zeta}F(v)$ vaut $L(v)$ à l'addition près d'une quantité d'ordre exponentiel négatif, on a

$$g_1(z) = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} L(v) e^{-v(z-\zeta)} dv + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe au point ζ et même dans la région positive d'une droite $z = e^{i\theta}[p_1(\theta) + i\zeta]$, avec $p_1 < p(\theta)$, en sorte que ζ est intérieur à cette même région. Si ζ est une singularité isolée pour l'intégrale constituant le premier terme de l'expression de g_1 , cette intégrale fournit la partie principale de $g_1(z)$ au point ζ .

Appliquons ces considérations à divers cas particuliers.

31. 1° Supposons qu'au point ζ , $g_1(z)$ ait un pôle d'ordre m ,

$$g_1(z) = \frac{b_1}{z-\zeta} + \frac{b_2}{(z-\zeta)^2} + \dots + \frac{b_m}{(z-\zeta)^m} + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant holomorphe au point ζ et par suite aussi, dans la région positive d'une droite $z = e^{i\theta}[p_1(\theta) + i\zeta]$ avec $p_1(\theta) < p(\theta)$ ($\theta_1 < \theta < \theta_2$). La partie principale de $g_1(z)$ au point ζ est représentée dans $F(v)$ par la fonction entière

$$L(v) = e^{v\zeta} \left[b_1 + b_2 v + \dots + \frac{b_m}{(m-1)!} v^{m-1} \right],$$

tandis que $\psi(z)$ est représentée dans $F(v)$ par une fonction entière du type exponentiel, mais d'exposant $p(\theta) < p(\theta)$. Si donc $\sigma(\theta)$ est un nombre positif inférieur à $p_1(\theta) - p_1(\theta)$, $L(v)$ est valeur de $e^{-v\zeta}F(v)$ avec une erreur inférieure à $e^{-\sigma(\theta)|v|}$, quand v s'éloigne indéfiniment sur le rayon $v = \lambda e^{-i\theta}$. D'ailleurs, $\sigma(\theta)$ n'est positif qu'à l'intérieur de l'intervalle $\theta_1 < \theta < \theta_2$ et s'annule aux deux extrémités de cet intervalle.

Ainsi, d'abord la fonction $F(v)$ par l'examen de son exposant $p(\theta)$ nous donne la connaissance du point ζ commun à toutes les droites $\Delta(\theta)$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, et ensuite la partie principale

de $e^{-\nu\zeta}F(\nu)$ pour ν infini dans l'angle $(-\theta_2, -\theta_1)$ nous donne la partie principale du pôle présenté par $g_1(z)$ au point ζ .

Réciproquement, si $e^{-\nu\zeta}F(\nu)$ est la somme d'un polynôme et d'une quantité dont l'ordre exponentiel dans l'angle $(-\theta_2, -\theta_1)$ contenant la direction $-\theta$ est négatif, $g_1(z)$ possède au point ζ un pôle dont le polynôme susdésigné nous fournit la partie principale de $g_1(z)$ au pôle ζ .

Considérons maintenant la fonction

$$F_1(\nu) = F(\nu) - e^{\nu\zeta}L(\nu).$$

C'est la fonction $F(\nu, \psi)$ relative à

$$\psi(z) = g_1(z) - \sum_{k=1}^{k=m} \frac{b_k}{(z-\zeta)^k}.$$

Cherchons l'ordre exponentiel $p_1(\theta)$ de cette fonction dans l'angle $\theta_1 < \theta < \theta_2$. Si, dans un intervalle majeur (θ'_1, θ'_2) contenant le nombre θ et inclus dans θ_1, θ_2 , $p_1(\theta)$ est de la forme $a \cos \theta + b \sin \theta$, la droite $z = e^{i\theta}[p(\theta) + ip'(\theta)]$ passe par un point ζ_1 fixe. On forme $e^{-\nu\zeta_1}F_1(\nu)$, et l'on examine si, dans l'intervalle $\theta'_1 < \theta < \theta'_2$ cette fonction est la somme d'un polynôme et d'une fonction d'ordre exponentiel négatif. S'il en est ainsi, la fonction $\psi(z)$ possède un pôle au point ζ_1 , et l'on a la partie principale de $\psi(z)$ relative à ce pôle au moyen des coefficients du polynôme désigné.

Toujours avec la même valeur de θ , on peut recommencer l'application de la méthode. Soit qu'après un nombre fini d'opérations, on trouve un exposant $p_n(\theta) = p_{n-1}(\theta) = \varpi(\theta)$, soit que ces opérations se poursuivent indéfiniment, on trouve à la limite la valeur minimum $\varpi(\theta)$ telle que dans la région positive de la droite $z = e^{i\theta}[\varpi(\theta) + it]$ la fonction $g_0(z)$ soit prolongeable en fonction méromorphe.

En opérant ainsi pour chaque valeur de θ , on obtient le plus petit contour convexe Φ dans la région infinie duquel $g_0(z)$ est prolongeable en fonction méromorphe. Cet exposé appelle toutefois diverses observations.

31 bis. D'abord, la méthode indiquée pour obtenir $\varpi(\theta)$ exige une infinité d'opérations ayant la puissance du continu, savoir une suite distincte pour chaque valeur de θ . On peut, en réalité, obtenir Φ avec

une suite dénombrable d'opérations. Il suffit de se donner une succession de valeurs de θ partout denses, par exemple, $\theta^{(n)} = \theta + 2\pi\alpha n$, α étant un nombre irrationnel et n un entier positif quelconque.

Si les n premières valeurs de θ ont mis en évidence des pôles ζ , ζ' , ..., $\zeta^{(n-1)}$ (dont certains peuvent manquer) et les parties principales correspondantes, on considère la fonction

$$F_n(\nu) = F(\nu) - \sum_{k=0}^{k=n-1} e^{\nu\zeta^{(k)}} [b_1^{(k)} + \dots + b_{m_k}^{(k)} \nu^{m_k-1}]$$

obtenue en retranchant de F la somme des parties principales relatives aux exposants successifs ζ , ζ' , ..., $\zeta^{(n-1)}$. $F_n(\nu)$ est la fonctionnelle F relative à

$$g_{0,n}(z) = g_0(z) - \sum_{k=0}^{k=n-1} \left[\frac{b_1^{(k)}}{z - \zeta^{(k)}} + \dots + \frac{b_{m_k}^{(k)}}{(z - \zeta^{(k)})^{m_k}} \right].$$

Si, dans un intervalle $\theta_1^{(n)}$, $\theta_2^{(n)}$ contenant θ (intervalle pouvant ne pas exister), $F_n(\nu)$ est de la forme $e^{\nu\zeta^{(n)}} [L_n(\nu) + \delta(\nu)e^{-\sigma(\theta)|\nu|}]$, $L_n(\nu)$ étant un polynôme, $\sigma(\theta)$ pouvant être choisi positif, mais non indépendant de $-\theta$, argument de ν variant entre $-\theta_2^{(n)}$ et $-\theta_1^{(n)}$, et de façon que $\delta(\nu)$ soit borné pour chaque valeur de cet argument de ν , dans cette hypothèse, $\zeta^{(n)}$ est à la fois un point singulier principal isolé et un pôle pour le prolongement de $g_{0,n}(z)$ en fonction holomorphe dans la région positive de la droite normale à l'argument θ et menée par $\zeta^{(n)}$.

Il est évident que le nombre de pôles situés à distance positive de Φ et dans la région infinie de Φ est fini. Chacun d'eux se manifestera dès que n est assez grand. Car, si de l'un quelconque d'entre eux, soit η , on mène les deux demi-tangentes à Φ , la bissectrice extérieure de cet angle sépare de Φ un nombre fini de pôles. Si θ est l'argument de la bissectrice intérieure dirigée de Φ vers le sommet η de l'angle, une suite de nombres choisis parmi les $\theta^{(n)}$ et tendant vers θ finit par caractériser un $\zeta^{(n)}$ identique à η . Ainsi, une suite dénombrable d'opérations nous donnera tous les pôles $\zeta^{(n)}$ du prolongement de $g_0(z)$ dans Φ .

31 ter. D'autre part, si les $\zeta^{(n)}$ existant effectivement sont en infinité, une question de convergence se pose. Dans la région finie Φ , choi-

sissons un point quelconque ζ_0 . Si Φ est un segment unique, ζ_0 sera pris indifféremment sur ce segment. Si Φ est un point unique, ζ_0 sera ce point. De $e^{\nu\zeta_0} [b_1^{(k)} + \dots + b_{m_k}^{(k)} \nu^{m_k-1}] = e^{\nu\zeta_0} L_k(\nu)$ on retranche $e^{\nu\zeta_0} [\beta_1^{(k)} + \dots + \beta_{m_k}^{(k)} \nu^{m_k-1}]$, le crochet étant formé des premiers termes du produit $e^{\nu\zeta_0} L_k(\nu)$ développé suivant les puissances croissantes de ν et arrêté à un rang m_k tel que le reste, désigné par $e^{-\nu\zeta_0} \chi_n(\nu)$, soit inférieur à 2^{-n} si $|\nu| < 2^n$. La série

$$\Omega(\nu) = F(\nu) - \sum \chi_n(\nu) = F(\nu) - \sum [e^{\nu\zeta_0} L_k(\nu) - e^{\nu\zeta_0} (\beta_1^{(k)} + \dots + \beta_{m_k}^{(k)} \nu^{m_k-1})]$$

est une fonction entière. Son exposant dans une direction θ quelconque est au plus égal au nombre $\varpi(\theta)$ tel que la droite $D(\theta)$ définie par $z = e^{i\theta} [\varpi(\theta) + it]$ soit tangente à Φ (1). $\Omega(\nu)$ est la fonctionnelle F d'une fonction $g_a(z)$ holomorphe hors de Φ et telle que $g_0(z) - g_a(z)$ se prolonge à partir de S_0 et dans toute la région infinie de Φ en une fonction méromorphe, ayant précisément pour singularités les pôles $\zeta^{(n)}$ avec les parties principales définies par l'expression asymptotique de $F(\nu)$. L'étude de $\Omega(\nu)$ pourra nous donner sur $g_a(z)$ des indications analogues à celles que $F(\nu)$ nous a données sur $g_0(z)$. Et ainsi indéfiniment, transfiniment, si la nature de $g_0(z)$ s'y prête.

32. Si $g_1(z)$ au point ζ possède une singularité isolée essentielle et vaut $\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{b_k}{(z-\zeta)^k} + \psi(z)$, une infinité de coefficients b_k étant non nuls, et $\psi(z)$ étant holomorphe au point ζ , $\sqrt[k]{b_k}$ tend vers 0 quand k croît, et

$$e^{-\nu\zeta} F(\nu) = L(\nu) + l(\nu), \quad L(\nu) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(m-1)!} \nu^{m-1},$$

(1) Il ne suffit pas cependant de s'inquiéter de la seule convergence de la série. Une correction $\chi_n(z)$ trop accentuée pourrait donner une fonction $\Omega(\nu)$ plus croissante que le type exponentiel ou une fonction $g_a(z)$ exagérément singulière aux abords de Φ . On peut éviter cet inconvénient en rectifiant la partie principale polaire $P_n \left(\frac{1}{z-\zeta^{(n)}} \right)$ de $g_{0,n}(z)$ au point $\zeta^{(n)}$ par soustraction d'un polynôme en $\frac{1}{z-\zeta_0}$, soit Z_n , obtenu par la méthode de Runge et différant de P_n de moins de n^{-2} dans la région formée des points dont la distance à Φ surpasse le double de la distance de $\zeta^{(n)}$ à Φ . La fonction F relative à $g_0 - \sum Z_n$ jouit des propriétés désirées pour $\Omega(\nu)$.

$l(\nu)$ étant de l'ordre de $e^{-\sigma(\theta)\lambda}$, $\sigma(\theta) > 0$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $\nu = \lambda e^{-i\theta}$. La partie principale de $L(\nu)$ est une fonction entière dont l'ordre exponentiel est nul, en ce sens que $\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \log |L(\lambda e^{-i\theta})| = 0$ pour toute direction θ . Réciproquement, si $e^{-\nu z} F(\nu)$ a une partie principale $L(\nu)$ entière d'ordre exponentiel nul, dans un intervalle $\theta_1 < \theta < \theta_2$ avec une approximation exponentielle comparable à $e^{-\sigma(\theta)\lambda}$, $\sigma(\theta)$ étant positif dans le même intervalle, $g_1(z)$ admet ζ comme point essentiel isolé, et la partie principale de $g_1(z)$ autour de ζ se déduit immédiatement de la partie principale $L(\nu)$ de $e^{-\nu z} F(\nu)$ dans l'angle $\theta_1 < \theta < \theta_2$.

Ces singularités isolées pourront être réunies aux pôles du prolongement de $g_0(z)$, et l'on obtiendra le plus petit contour convexe Φ' , dans la région infinie duquel le prolongement de $g(z)$ est uniforme et ne renferme que des points singuliers isolés, polaires ou essentiels.

Ainsi, le seul examen de la fonction $F(\nu)$ attachée à $g_0(z)$ donne successivement les singularités uniformes isolées du prolongement de $g(z)$ dans la région infinie Φ'^+ et les parties principales de ce prolongement en chacune des singularités mises en évidence.

33. Examinons maintenant si l'étude de $F(\nu)$ nous donne encore la nature analytique de $g_1(z)$ et l'expression de sa partie singulière en certains points ζ principaux isolés sur V quand le prolongement de g_1 autour de ζ n'est plus uniforme.

Supposons que, dans Q et au voisinage du point ζ , principal isolé de V , commun à toutes les droites $\Delta(\theta)$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, la

fonction $g_1(z)$ soit de la forme $\sum_{m=-\infty}^{m+\infty} c_m (z - \zeta)^{\alpha_m} + \psi(z)$, avec les

précisions suivantes : $\Delta_1(\theta)$ étant la droite parallèle à $\Delta(\theta)$ et définie par sa distance à l'origine, savoir $p_1(\theta)$, inférieure à $p(\theta)$ et non diminuable, soit Δ_1^+ la région positive de $\Delta_1(\theta)$, région contenant $\Delta(\theta)$ et en particulier ζ . Soit $Q_1(\zeta, \theta)$ la région réunissant Q et $\Delta_1^+(\theta)$. Voici nos hypothèses :

1° $\psi(z)$ est définie et holomorphe dans $\Delta_1^+(\theta)$, et aucun α_m n'est entier positif.

2° Désignons par σ à la fois l'intervalle rectiligne accru du point ζ , joignant ζ à sa projection orthogonale sur $\Delta_1(\theta)$, et aussi la longueur

de cet intervalle : $0 < \sigma = p(\theta) - p_1(\theta) < 2R_0$. En retranchant σ de $\Delta_1^+(\theta)$, il reste une région $\Delta_1^+(\theta) - \sigma$, où l'argument de $z - \zeta$ variera de $\theta - \pi$ sur le bord négatif de σ à $\theta + \pi$ sur le bord supérieur. Nous supposons que dans cette région $g_1(z)$ est prolongeable en fonction holomorphe $g(z)$. Il en résulte que $A(z - \zeta) = g_1(z) - \psi(z)$ est aussi prolongeable et holomorphe dans $\Delta_1^+(\theta) - \sigma$.

3° Les α_m sont réels (on pourrait s'affranchir de cette restriction). Bien entendu, nous supposons que certains α_m sont non entiers négatifs, sinon nous serions dans un cas déjà étudié. $m\alpha_m$ est supposé positif, si m n'est pas nul. $\alpha_0 = c_0 = 0$. La détermination de chaque terme $c_m(z - \zeta)^{\alpha_m}$ est définie par cette condition que, sur la demi-perpendiculaire à $\Delta(\theta)$ issue de ζ et située dans $\Delta^+(\theta)$, l'argument de $z - \zeta$ est égal à θ .

Nous supposons la série $\Sigma c_m(z - \zeta)^{\alpha_m}$ absolument convergente dans χ^+ , cercle d'équation $|z - \zeta| < \sigma$. Dans χ^+ diminué de σ , la somme de la série est $A(z - \zeta)$. $g_1(z)$ est donc prolongeable indéfiniment dans χ^+ et toutes ses déterminations sont bornées dans tout cercle $|z - \zeta| \leq \sigma - \varepsilon < \rho$.

Si nous groupions ensemble tous les termes où α_m a une même partie fractionnaire, nous mettrons le développement sous la forme $\Sigma (z - \zeta)^{\beta_k} j_k(z)$. Chacune des fonctions $j_k(z)$ est holomorphe dans χ^+ , sauf au point ζ lui-même si $j_k(z)$ y possède un point essentiel. $j_k(z)$ contiendra une infinité de termes $c_s(z - \zeta)^r$ à exposants entiers positifs [le premier étant non nul, si $j_k(z)$ est holomorphe au point ζ] dans le cas où $(z - \zeta)^{\beta_k} j_k$ est holomorphe dans Q et même dans $Q_1(\zeta, \theta) - \sigma$. Dans la partie commune à \bar{B} et à $\overline{\Delta_1^+(\theta)}$, $j_k(z)$ a au moins une singularité afin de compenser celle du facteur $(z - \zeta)^{\beta_k}$, par exemple, $j_k(z) = (z - \zeta_0)^{-\beta_k} h_k(z)$, h_k étant holomorphe dans $Q_1(\zeta, \theta)$.

33 bis. Soit

$$S_1(z) = \sum_{m < 0} c_m (z - \zeta)^{\alpha_m} \quad \text{et} \quad S_2(z) = \sum_{m > 0} c_m (z - \zeta)^{\alpha_m}.$$

Examinons les conditions de convergence absolue de la série totale $S_1 + S_2$. Posons $a_n = \Sigma |c_m|$ si $n \leq \alpha_m < n + 1$. La somme des

modules de la série $A(z - \zeta)$ est $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n |z - \zeta|^n$, à un facteur près compris entre $|z - \zeta|$ et $\frac{1}{|z - \zeta|}$. Pour $n < 0$, la convergence absolue de S_1 dans tout voisinage de ζ exige $\lim_{n \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Pour $n > 0$, la convergence absolue de S_2 pour $|z - \zeta| < \sigma$ exige $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sigma^{-1}$.

On en conclut, si $|z - \zeta| = \rho < \sigma - \varepsilon < \sigma - \varepsilon_1 < \sigma$,

$$S_2(z) < \sum_1^k c_m (z - \zeta)^{\alpha_m} + o \frac{\mu(\varepsilon_1)}{\varepsilon - \varepsilon_1} \frac{|z - \zeta|^{\alpha_k}}{(\sigma - \varepsilon_1)^{\alpha_k}}$$

quel que soit $k \geq 1$, $\mu(\varepsilon_1)$ étant indépendant de z .

34. Cherchons dans $F(v)$ les contributions de S_1 et de S_2 respectivement.

Dans la formule (34), nous choisissons ainsi la partie du contour d'intégration C située dans $\Delta_1^+(\theta)$. ε étant un nombre positif inférieur au quart de σ , et ε' un autre nombre positif très petit, soit γ le lacet ainsi formé :

1° Le segment σ' obtenu en diminuant σ de ε' à partir de ζ , et de ε à partir de $\Delta_1(\theta)$; donc sur σ' , $z = \zeta - \rho e^{i\theta}$, $\varepsilon' < \rho < \sigma - \varepsilon$. Cette première partie de γ est décrite sur le bord négatif de σ' , $(z - \zeta)^{\alpha_m}$ vaut $\rho^{\alpha_m} e^{i\alpha_m(\theta - \pi)}$;

2° Un cercle c de centre ζ et de rayon ε' infiniment petit décrit dans le sens direct (ce cercle peut être ensuite réduit au point ζ si $m > 0$, d'où $\alpha_m > -1$);

3° σ' parcouru en sens inverse de la première fois, de $\rho = \varepsilon'$ à $\rho = \sigma - \varepsilon$, $(z - \zeta)^{\alpha_m}$ valant $\rho^{\alpha_m} e^{i\alpha_m(\theta + \pi)}$.

On complète γ pour obtenir C : 1° par le segment s parallèle à $\Delta_1(\theta)$ situé dans Δ_1^+ , à la distance ε de Δ_1 , et contenu dans le cercle $|z| \leq R_0 + \varepsilon$, s étant interrompu par γ au point où s rencontre σ ; 2° par la partie du cercle $|z| = R_0 + \varepsilon$ située du côté négatif de s prolongé. La partie de $F(v)$ correspondant à ce trajet complétant γ sur C est inférieure à $m_1(\varepsilon) e^{\lambda[\rho_1(\theta) + \varepsilon]}$, $m_1(\varepsilon)$ étant indépendant de θ . Si nous

divisons cette partie de $F(v)$ par e^{vz} , le quotient est infiniment petit, de l'ordre approximatif de $e^{-\sigma\lambda}$, quand λ croît indéfiniment. Sur le lacet γ , la contribution de $\psi(z)$ est nulle. Tout revient donc à évaluer $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} A(z - \zeta) e^{vz} dz$ pour $v = \lambda e^{-i\theta}$. On a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (z - \zeta)^{\alpha} e^{v(z-\zeta)} dz = \frac{-e^{i\pi\alpha}}{2i\pi} v^{-\alpha-1} \int_{\gamma'} u^{\alpha} e^{-u} du,$$

γ' étant le lacet allant du point $\lambda(\sigma - \varepsilon)$ de l'axe réel (avec l'argument initial 0) pour y revenir après avoir tourné autour de l'origine dans le sens positif, d'après $u = e^{i\pi}(z - \zeta)v = \lambda(z - \zeta)e^{i(\pi-\theta)}$,

$$\frac{-e^{-i\pi\alpha}}{2i\pi} \int_{\gamma'} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[-\Gamma(\alpha + 1) + \int_{\lambda(\sigma-\varepsilon)}^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt \right].$$

1° Soit $\alpha_m < 0$.

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} S_1(z) e^{vz} dz = e^{v\zeta} \left[\sum_{m < 0} \frac{c_m v^{-\alpha_m-1}}{\Gamma(-\alpha_m)} + l_1(v) \right]$$

$$|l_1(v)| < \frac{1}{\pi} \left(\sum_{m < 0} |c_m| \right) e^{-\lambda[\sigma(\theta)-\varepsilon]} \text{ pour } \theta_1 < \theta < \theta_2.$$

2° Soit $\alpha_m > 0$. Certains $a_n = \sum |c_m|$ pour $0 \leq n < \alpha_m < n + 1$ surpassent $(2R_0 + \varepsilon)^{-n}$. Donc, la série $\sum_{m \geq 1} -c_m v^{-\alpha_m-1} \frac{\sin \pi\alpha_m}{\pi} \Gamma(\alpha_m + 1)$

est non absolument convergente quel que soit v , à moins que les α_m ne soient extrêmement voisins d'entiers.

Mais cette dernière série, nécessairement illimitée et divergente, fournit une évaluation asymptotique de la fonction.

α étant positif, la fonction $t^{\alpha} e^{-t}$ croît jusqu'à $t = \alpha$ pour décroître ensuite. Dès lors, l'intégrale figurant dans les calculs $\int_0^{\lambda(\sigma-\varepsilon)} t^{\alpha} e^{-t}$ sera conservée sous cette forme pour $\alpha > \lambda(\sigma - \varepsilon)$, cas où elle est inférieure à $[\lambda(\sigma - \varepsilon)]^{\alpha+1} e^{-\lambda(\sigma-\varepsilon)}$. Pour $\alpha < \lambda(\sigma - \varepsilon)$, la même intégrale sera remplacée par $\Gamma(\alpha + 1) - \int_{\lambda(\sigma-\varepsilon)}^{\infty} t^{\alpha} e^{-t} dt$, le dernier

terme étant inférieur à $[\lambda(\sigma - \varepsilon)]^x e^{-\lambda(\sigma - \varepsilon)}$. On en conclut que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} S_2(z) e^{vz} dz = e^{v\zeta} \left[-\frac{1}{\pi} \sum_{-1 < \alpha_m < \lambda(\sigma - \varepsilon)} c_m v^{-\alpha_m - 1} \sin \pi \alpha_m \Gamma(\alpha_m + 1) + l_2(v) \right],$$

$$|l_2(v)| < \left[\sum_{0 < \alpha_m < \lambda(\sigma - \varepsilon)} |c_m| \lambda^{-1} (\sigma - \varepsilon)^{\alpha_m} + \sum_{\alpha_m \geq \lambda(\sigma - \varepsilon)} |c_m| (\sigma - \varepsilon)^{\alpha_m + 1} \right] e^{-\lambda(\sigma - \varepsilon)}$$

$$< \mu_1(\varepsilon) e^{-\lambda(\sigma - \varepsilon)},$$

$\mu_1(\varepsilon)$ étant indépendant de λ .

Finalement,

$$(36) \quad e^{-v\zeta} F(v) = \sum_{\alpha_m < \lambda(\sigma - \varepsilon)} \frac{c_m v^{-\alpha_m - 1}}{\Gamma(-\alpha_m)} + l(v) = L(v) + l(v),$$

$l(v) e^{\lambda(\sigma - 2\varepsilon)}$ tendant vers 0, si $v = \lambda e^{-i\theta}$, $\sigma = p(\theta) - p_1(\theta)$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, λ infiniment grand.

34 bis. Réciproquement, supposons que $e^{-v\zeta} F(v)$ soit, dans l'intervalle $\theta_1 < \theta < \theta_2$, d'ordre exponentiel nul et évalué asymptotiquement par une formule telle que (36), la suite des c_m rendant convergente la série $\sum |c_m| \rho^m$ pour $0 < \rho < \sigma$ et $l(v)$ étant d'ordre inférieur à $e^{-\lambda(\sigma - \varepsilon)}$ pour $\theta_1 < \theta < \theta_2$, $v = \lambda e^{-i\theta}$. Alors la fonction $g(z)$ donnée par l'intégrale (35) sera de la forme

$$(36 b) \quad g(z) = \sum c_m (z - \zeta)^{\alpha_m} + \psi(z),$$

pour z situé dans $\gamma^+ - \sigma$, $\psi(z)$ étant holomorphe dans $\Delta^+(\theta)$.

En effet, décomposons $L(v)$ en trois sommes $L_{1.1}(v)$, $L_{1.2}(v)$, $L_2(v)$, définies respectivement par $\alpha_m < -1$, $-1 < \alpha_m < 0$, $0 < \alpha_m < \lambda(\sigma - \varepsilon)$. Seul $L_{1.2}(v)$ est infini pour $v = 0$. Il est de l'ordre de $v^{-\alpha_{-1} - 1}$ ($\alpha_{-1} < 0$). L_2 est nul pour $0 < \lambda < \frac{\alpha_1}{\sigma - \varepsilon}$. $l(v)$ devra être infini comme $-L_{1.2}(v)$ pour $v = 0$, de façon que $F(v)$ soit continu à l'origine. Soit $L_1 = L_{1.1} + L_{1.2}$. $|L_1(v)|$ et $|l(v)|$ sont intégrables à l'origine

$$g_1(z) = \int_0^\infty F(v) e^{-vz} dv = \int_0^\infty [L_1(v) + L_2(v) + l(v)] e^{-v(z - \zeta)} dv = I_1(z) + I_2(z) + j(z).$$

Dans le champ d'intégration, $v = \lambda e^{-i\theta}$, λ variant seul. Posons $z - \zeta = e^{i(\theta + \varphi)} = e^{i\theta} (\xi + i\eta)$.

L'intégrale $j(z)$ est définie et holomorphe pour $\xi > -\sigma + \varepsilon$, d'après $|l(v)| < e^{-\lambda(\sigma - \varepsilon)}$.

Posons $u_m(\varphi) = \frac{c_m v^{-\alpha_m-1}}{\Gamma(-\alpha_m)}$ si $v = \lambda e^{-i\theta}$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$ et $p_m(z) = c_m(z - \zeta)$, ($-\pi < \varphi < \pi$).

$I_1(z)$ a un sens pour $\xi > 0$ et vaut $\sum_{m < 0} c_m(z - \zeta)^{\alpha_m}$, développement absolument convergent quel que soit z .

Pour étudier $I_2(z)$, supposons d'abord $\varphi = \eta = 0$, $0 < \xi = \rho < \sigma - \varepsilon$.

$$I_2(z) = \int_0^\infty \sum_{0 < \alpha_m < \lambda(\sigma - \varepsilon)} u_m(\varphi) e^{-v(z - \zeta)} dv = \sum_{m > 0} \frac{p_m(z)}{\Gamma(-\alpha_m)} \int_{\frac{\rho \alpha_m}{\sigma - \varepsilon}}^\infty t^{-\alpha_m-1} e^{-t} dt.$$

Soit Π un lacet contenu dans le cercle $|u| < 1$ et décrit de 1 à 1 avec les arguments initial 0 et final 2π . $a\Pi$ sera le même lacet obtenu en multipliant par a tous les points de Π .

$$\begin{aligned} \int_a^\infty t^{-\alpha-1} e^{-t} dt - \Gamma(-\alpha) &= \frac{1}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} \int_a^\infty t^{-\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{a^{-\alpha}}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} \int_\Pi u^{-\alpha-1} e^{-au} du. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(z) &= \sum_{m > 0} p_m(z) + \sum_{m > 0} c_m(\sigma - \varepsilon)^{\alpha_m} e^{i\theta + \pi i \alpha_m} \\ &\Rightarrow \frac{2i}{\pi} \Gamma(\alpha_m + 1) \alpha_m^{-\alpha_m} \int_\Pi u^{-\alpha_m-1} e^{-\frac{z-\zeta}{\sigma-\varepsilon} \alpha_m e^{-i\theta}} du. \end{aligned}$$

Soit $j_2(z)$ la seconde série. D'après $\Gamma(\alpha + 1)\alpha^{-\alpha} < e^{-(1+\varepsilon)\alpha}$ ($\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \varepsilon_\alpha = 0$), le terme général de la série $j_2(z)$ est en module inférieur à $c_m(\sigma - \varepsilon)^{\alpha_m}$ si $\xi > -\sigma + \varepsilon$, m assez grand. Donc dans la région $\xi > -\sigma + \varepsilon$, la série converge uniformément et $j_2(z)$ y est holomorphe. Posant $\psi = j + j_2$, nous avons montré que l'identité (36 b) est satisfaite sur le rayon $z - \zeta = \rho e^{i\theta}$, $0 < \rho < \sigma - \varepsilon$. Elle est donc vraie dans la partie commune à χ^+ et à Q . En outre $\psi(z)$ indépendant de ε est holomorphe pour $\xi > -\sigma + \varepsilon$, donc dans $\Delta_1^+(\theta)$.

35. On pourrait plus généralement considérer le cas où, dans la région $Q'_r(\zeta, \theta)$, $g_1(z)$ se prolongerait en une fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (z - \zeta)^\alpha d\nu(\alpha) + \psi(z),$$

ψ étant comme toujours holomorphe dans $\Delta_1^+(\theta)$, $\nu(\alpha)$ étant à variation totale bornée dans le champ $-\infty, +\infty$ et continu pour α entier positif. En outre, si

$$\int_n^{n+1} |d\nu(\alpha)| = a_n,$$

$\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ quand n tend vers $-\infty$ et $\lim \sqrt[n]{a_n} \leq \sigma^{-1}$ pour $n = +\infty$. On trouvera encore pour $F(\nu)$ une forme caractéristique

$$(37) \quad e^{-\nu\zeta} F(\nu) = \int_{-\infty}^{\lambda(\sigma-\varepsilon)} \frac{\nu^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} d\nu(\alpha) + l(\nu),$$

$\nu, \lambda, \theta, \sigma, l$ prêtant aux mêmes stipulations que pour la formule (36).

La représentation de la fonction $g(z)$ dans le cercle χ^+ ou $|z - \zeta| < \sigma$ sera plus précise si l'on pose $z - \zeta = e^{-w+i\theta}$, $w = s + it$ et $t = 0$ sur la demi-droite d'argument θ issue de ζ . Par hypothèse

$$g(z) = G(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-aw} d\nu_1(\alpha), \quad s > -\log \sigma.$$

La fonction $\nu_1(\alpha)$ se calcule au moyen de $G(w)$ supposé connu et susceptible de recevoir cette représentation. Supposons zéro intérieur à la bande de convergence absolue $s_1 < s < s_2$ de l'intégrale ($\sigma > 1$).

Si $\int_{-i\infty}^{i\infty} G(w) \frac{e^{bw}}{w} dw$ désigne la vraie valeur de l'intégrale, obtenue par l'exclusion des intervalles $|w| < \eta$ et $|w| > K$ de l'axe imaginaire, η et K tendant ensuite le premier vers zéro, le second vers l'infini, alors la variation de cette intégrale entre b et b' n'est autre que $\nu_1(b') - \nu_1(b)$. [Les points de discontinuité sont rendus de première espèce.]

C'est à cette expression de $g(z)$ que correspond l'expression asymptotique de $e^{-\nu\zeta} F(\nu)$ que nous avons trouvée pour $\nu = \lambda e^{-i\theta}$.

Si $g_1(z) = (z - \zeta)^\alpha \gamma(z)$, $\gamma(z)$ étant holomorphe au point ζ , la fonction que nous avons appelée $F_\alpha(\nu, \zeta)$ est entière en ν avec un ordre exponentiel négatif, tandis que $e^{-\nu\zeta} F(\nu)$ possède pour $\nu = \lambda e^{-i\theta}$ un développement asymptotique divergent, dont la détermination toute-

fois n'offre pas la même simplicité théorique que celle des coefficients de la fonction entière $F_\alpha(\nu, \zeta)$ (1).

III. — Singularités du prolongement dans l'étoile de Mittag-Leffler.

36. Soit (A) l'étoile de Mittag-Leffler rayonnant rectilignement dans toutes les directions à partir de l'origine et relative à l'élément

$$(1) \quad f_0(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

(A) est l'ensemble des segments Om sur lesquels $f_0(z)$ est prolongeable en une fonction holomorphe (cette dernière fonction est holomorphe dans un domaine ouvert contenant à son intérieur le segment Om , mais s'écartant de celui-ci aussi peu qu'il est nécessaire). Soit $f(z)$ le prolongement de $f_0(z)$ dans (A). $f(z)$ est uniforme dans (A). Soit U la frontière de (A). En général, U contient des segments s finis ou infinis dont le prolongement passe à l'origine. L'extrémité d'un segment s la plus proche de l'origine est un point singulier pour $f(z)$. Il en est de même pour l'extrémité la plus éloignée de s si cette extrémité est à distance finie.

Un tel segment s peut être frontière de (A) unilatéralement ou

(1) On trouvera dans ma Note déjà citée (*Comptes rendus*, 204, 1937, p. 1613) quelques indications non développées dans le présent article. Certaines concernent la configuration géométrique de H au voisinage de C_0 , déduite de $R(\theta, h)$ pour h infiniment petit. D'autres ont trait aux expressions analogues à la fonction $d_n(u)$ de M. Mandelbrojt et susceptibles de lui être substituées.

La fonction la plus générale n'ayant dans le plan d'autres points singuliers que 1 et ∞ est $H[-\log(1-x)]$, $H(u) = \sum \alpha_n u^n$ étant une fonction entière quelconque de u . Si, pour $|x| < 1$, $H[-\log(1-x)] = \sum \beta_n x^n$, la fonction $\sum \frac{\alpha_n \beta_n}{z^n}$, d'après le célèbre théorème de M. Hadamard, les mêmes points singuliers non nuls que $\sum \frac{\alpha_n}{z^n}$, en général tout au moins. S'il en est ainsi, on peut remplacer dans les formules de M. Mandelbrojt α_n par $\alpha_n \beta_n$.

L'expression générale des β_n est $\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{p=n} \alpha_p p! S_{n-1}^p$, sous la seule condition que $\sqrt[n]{\alpha_p}$ tende vers zéro quand p croît. S_{n-1}^p est la somme des produits p à p des inverses des $(n-1)$ premiers nombres entiers; $S_k^0 = 1$ ($k \geq 0$).

bilatéralement (sur une de ses parties tout au moins). Dans le second cas, un point du segment s , sauf son extrémité la plus proche de zéro, peut être pour $f(z)$ un point bilatéralement régulier ou encore une singularité simplement unilatérale. Si ce point est bilatéralement singulier, $f(z)$ peut présenter au voisinage de ce point des caractères analytiques différents suivant le côté de s où l'on aborde ce point. Nous dirons que le point singulier ζ de $f(z)$ est *principal*, si $f(z)$ est holomorphe sur l'intervalle $O\zeta$, ou si ζ est point d'accumulation de points singuliers de l'espèce précédente.

Nous nous proposons de donner des formules analogues à celles de M. Mandelbrojt et fournissant l'ensemble H des points singuliers principaux de $f(z)$.

37. Rappelons d'abord un théorème connu de la théorie des séries trigonométriques. Soit

$$k(\omega) \sim \mu_0 + \mu_1 e^{i\omega} + \dots + \mu_n e^{in\omega} + \dots$$

le développement en série trigonométrique sur le segment $0 \leq \omega \leq 2\pi$ d'une fonction continue $k(\omega)$ de période 2π . Il résulte des théorèmes de W. H. Young et de ses continuateurs que si la dérivée $\frac{dk}{d\omega}$ existe en tout point, sauf au plus en un ensemble dénombrable de points, et si $\left| \frac{dk}{d\omega} \right|^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) est sommable sur le segment $0, 2\pi$, la série $\Sigma |\mu_n|^{\frac{1}{1+\alpha}}$ converge. *A fortiori*, la série $\Sigma |\mu_n|$ converge, et son reste quand on la limite à son terme de rang n est de l'ordre de $\frac{1}{\alpha n^\alpha}$.

Soit $t(\tau)$ une fonction analytique de τ , holomorphe et univalente dans le cercle $|\tau| < 1$, nulle avec τ , continue sur la circonférence γ , savoir $\tau = e^{i\omega}$ ($0 \leq \omega \leq 2\pi$), ayant sur γ une dérivée continue sauf en un nombre fini de points, et telle que $\left| \frac{dt}{d\tau} \right|^{1+\alpha}$ ($\alpha > 0$) soit, si $\tau = e^{i\omega}$, sommable en ω dans le champ $0 < \omega < 2\pi$. Alors, si

$$t = \mu_1 \tau + \dots + \mu_n \tau^n + \dots \quad (|\tau| < 1),$$

la série $\Sigma |\mu_n|^{\frac{1}{1+\alpha}}$ est convergente et par suite la série exprimant t

en τ converge normalement (ses termes sont inférieurs en valeur absolue à ceux d'une série convergente à termes positifs, indépendants de τ) dans l'ensemble formé par γ et sa région finie. Quand τ décrit le domaine fini $|\tau| < 1$, t décrit un domaine ouvert S avec correspondance uniforme et continue dans les deux sens de t et de τ ainsi que de leurs frontières. S est limité par une courbe simple de Jordan C possédant une tangente dont la direction présente au plus un nombre fini de discontinuités.

Supposons enfin que pour $\tau = 1$, le point t correspondant soit également 1 . z étant un point du plan, considérons la fonction

$$f(zt) = L(\tau, z)$$

de τ . Elle est holomorphe en τ à l'origine. Donc, pour $|\tau|$ assez petit,

$$(43, a) \quad f(tz) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z) \tau^n,$$

$\mu_n(z)$ étant un polynome en z . Pour que la série du second membre converge pour $|\tau| < 1$, il faut et il suffit que dans le domaine zS obtenu en multipliant tout nombre de S par z , $f(u)$ soit holomorphe en u . Car u est holomorphe et univalent en τ pour $|\tau| < 1$. Considérons la convergence sur la circonférence $|\tau| = 1$. On a

$$\frac{\partial L}{\partial \tau} = f'(u) z \frac{dt}{d\tau}.$$

Si donc, non seulement $f(u)$ est continu sur la frontière zC de zS , mais si $|f'(u)|$ y est bornée, la série $\sum |\mu_n(z)|^{\frac{1}{1+\alpha}}$ converge et *a fortiori* aussi $\sum |\mu_n(z)|$. Faisant $\tau = 1$, on trouve

$$f(z) = \sum \mu_n(z),$$

la série $\sum |\mu_n(z)|$ étant convergente. D'ailleurs, la borne $M_1(z)$ de $|f'(u)|$ sur la frontière de zG fournira une borne supérieure de l'erreur commise en arrêtant le développement de $f(z)$ au terme de rang n . Cette erreur est inférieure à $\frac{kM_1(z)}{\alpha n^\alpha}$, k ne dépendant que de $t(\tau)$ et non pas de $f(z)$. Nous admettrons ces points, qui, en l'état actuel de la théorie des séries trigonométriques, n'offrent aucune difficulté de démonstration.

37 bis. Le développement en série de polynomes que nous obtenons rappellera immédiatement au lecteur les développements très généraux définis par P. Painlevé (1). Mais celui que nous utilisons présente une différence essentielle du point de vue des applications. Painlevé effectuait la représentation conforme $t(\tau)$ de l'intérieur d'une circonférence γ' , de rayon supérieure à 1, dans le plan des τ sur un domaine du plan t , soit S' , ouvert, à connexion simple, contenant (à son intérieur) les points 0 et 1, conservés dans la représentation. Aussi pour $\tau = 1$, Painlevé était-il assuré de la convergence absolue de la série (43 a). Mais en admettant les points $\tau = 1$, $t = 1$, sur les frontières respectives des deux domaines, nous aurons l'avantage d'obtenir des formes arithmétiques simples et précises pour les coefficients des polynomes $\mu_n(z)$.

38. ε étant un nombre réel donné entre 0 et 1, soit, pour

$$(38) \quad \begin{aligned} |\tau| \leq 1 \quad \text{et} \quad \tau &= |\tau| e^{i\omega} \quad (0 \leq \omega \leq 2\pi), \\ t &= 1 - (1 - \tau)^\varepsilon. \end{aligned}$$

Si τ décrit γ , $t = 1 - 2^\varepsilon \sin^{\frac{\varepsilon\omega}{2}} e^{i\varepsilon \frac{\omega - \pi}{2}}$. Le point t décrit une boucle C_ε entourant l'origine, symétrique par rapport à l'axe réel, présentant au point $t = 1$ une pointe dirigée vers la partie positive de l'axe réel, l'angle des deux branches de la pointe avec la direction négative de l'axe réel étant en valeur absolue $\frac{\varepsilon\pi}{2}$ (pour $\varepsilon = 1$, $t = \tau$, C_1 est égal à γ).

Dans la région finie $|\tau| < 1$ du cercle γ , la détermination de t nulle à l'origine (et réelle avec τ) réalise la représentation conforme de l'intérieur de γ sur la région G_ε intérieure (finie) de la boucle C_ε . Le développement de t suivant les puissances de τ pour $|\tau| < 1$ est

$$(39) \quad \begin{aligned} t &= \varepsilon\tau - \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{2} \tau^2 + \dots \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1) \dots (\varepsilon - r + 1)}{r!} \tau^r = \sum (-1)^{r-1} C_\varepsilon^r \tau^r, \end{aligned}$$

(1) Note en addition aux *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* (Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris).

la notation C_ε^r ayant le sens défini par cette égalité et déjà rencontré.

La série trigonométrique obtenue en faisant $\tau = e^{i\omega}$ dans l'égalité (39) est *absolument convergente*, parce que, d'après $\frac{dt}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{(1-\tau)^{1-\varepsilon}}$, $\left| \frac{dt}{d\tau} \right|^{1+\varepsilon}$ est sommable sur le segment $0 \leq \omega \leq 2\pi$.

Calculons pour cette fonction $t(\tau)$ les polynomes $\mu_n(z)$ et d'abord les puissances entières t^p . Posons

$$t^p = \sum_n \gamma_{p,n}(\varepsilon) \tau^n.$$

Évidemment

$$\gamma_{p,0} = \gamma_{p,1} = \dots = \gamma_{p,p-1} = 0, \quad \gamma_{p,p} = \varepsilon^p.$$

On peut donc supposer $n \geq p$.

$$(40) \quad t^p = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k C_p^k (1-\tau)^{k\varepsilon} = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k C_p^k \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n C_{k\varepsilon}^n \tau^n.$$

D'où

$$(41) \quad \gamma_{p,n}(\varepsilon) = (-1)^n \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k C_p^k C_{k\varepsilon}^n,$$

$\gamma_{p,n}(\varepsilon)$ est un polynome de degré p en ε .

On peut donner à $\gamma_{p,n}(\varepsilon)$ une seconde forme mettant mieux en évidence l'existence dans $\gamma_{p,n}(\varepsilon)$ du facteur ε^p indépendant de n .

Dans la puissance p^e d'une fonction

$$t = \mu_1 t + \mu_2 t^2 + \dots + \mu_r t^r + \dots,$$

le coefficient de τ^n est

$$\sum \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_s!} \mu_{r_1}^{\lambda_1} \mu_{r_2}^{\lambda_2} \dots \mu_{r_s}^{\lambda_s},$$

la sommation étant étendue à toutes les suites associées r_i, λ_i ainsi conditionnées : les r_i, λ_i sont des entiers *positifs*,

$$r_1 < r_2 < \dots < r_s, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s = p, \quad \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_s r_s = n.$$

Si $\mu_r = (-1)^{r-1} C_\varepsilon^r$, on en conclut

$$\begin{aligned}
 (42) \quad \gamma_{p,n}(\varepsilon) &= \sum_{r,\lambda} (-1)^{n-p} \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_s!} (C_\varepsilon^{r_1})^{\lambda_1} (C_\varepsilon^{r_2})^{\lambda_2} \dots (C_\varepsilon^{r_s})^{\lambda_s} \\
 &= \sum_{r,\lambda} (-1)^{n-p} \frac{p!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_s!} \left[\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)\dots(\varepsilon-r_1+1)}{1 \cdot 2 \dots r_1} \right]^{\lambda_1} \\
 &\quad \times \left[\frac{(\varepsilon-r_1)\dots(\varepsilon-r_2+1)}{(r_1+1)\dots r_2} \right]^{\lambda_2} \dots \\
 &\quad \times \left[\frac{(\varepsilon-r_{s-1})\dots(\varepsilon-r_s+1)}{(r_{s-1}+1)\dots r_s} \right]^{\lambda_{s-1}} \dots \lambda_s.
 \end{aligned}$$

Évidemment, pour $n = p$, $s = 1$, $r_1 = 1$, $\lambda_1 = p$, $\gamma_{p,p} = \varepsilon^p$. Cette seconde forme de $\gamma_{p,n}(\varepsilon)$ met en évidence le diviseur ε^p .

38 bis. Les coefficients $\gamma_{p,n}(\varepsilon)$ étant suffisamment étudiés pour notre objet, formons $f(zt)$.

$$\begin{aligned}
 (43) \quad f\{z[1 - (1-\tau)^\varepsilon]\} &= a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p z^p t^p \\
 &= a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p z^p \sum_{n=p}^{\infty} \gamma_{p,n}(\varepsilon) \tau^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(z, \varepsilon) \tau^n.
 \end{aligned}$$

et

$$(44) \quad \mu_n(z, \varepsilon) = \gamma_{1,n}(\varepsilon) a_1 z + \gamma_{2,n}(\varepsilon) a_2 z^2 + \dots + \gamma_{n,n}(\varepsilon) a_n z^n.$$

$\mu_n(z, \varepsilon)$ est un polynôme en z et en ε de degré n par rapport à chacune des deux variables.

39. Appliquant les résultats généraux exposés précédemment, étudions le rayon de convergence de la série (43). Posons

$$(45) \quad \rho(z, \varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\mu_n(z, \varepsilon)}.$$

- 1° Si $f(u)$ possède un point singulier intérieur à zS_ε , $\rho(z, \varepsilon) > 1$.
- 2° Si $f(u)$ est holomorphe à l'intérieur de zS_ε , $\rho(z, \varepsilon) \leq 1$. Ce cas se subdivise.

Si $f(u)$ possède sur zC_ε frontière de zS_ε , un point singulier distinct de z , on a $\rho(z, \varepsilon) = 1$.

Si $f(u)$ est régulier sur zC_ε , sauf éventuellement au point z lui-même, on a encore $\rho(z, \varepsilon) = 1$, à l'exception de la circonstance très particulière suivante : Si autour de ζ (et précisément sur le rayon $O\zeta$)

$f(z) = \Sigma \alpha_n \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{n}{\varepsilon}}$, $\sqrt[n]{|\alpha_n|}$ étant borné, $f(\zeta t)$ sera holomorphe pour $\tau = 1$, et alors le contour ζC_ε ne passant par aucun point singulier de $f(u)$ (qui par hypothèse n'en a aucun dans ζS_ε), le rayon de convergence de (1) surpasse 1 pour $z = \zeta$. Nous désignerons par ζ_ε un point ζ de cette nature relatif à cette valeur de ε . Un même point ζ ne peut convenir qu'à un nombre fini de valeurs de ε qui sont les multiples de la plus petite d'entre elles. Les diverses valeurs ζ_ε correspondant à toutes les valeurs possibles de ε sont isolées, si elles existent. Elles forment un ensemble vide ou dénombrable.

Si $f(u)$ est holomorphe sur la frontière zC_ε de zS_ε la série $a_0 + \Sigma \mu_n(z, \varepsilon)$ est absolument convergente et sa somme est $f(z)$ (même si z n'est pas un point ζ_ε). L'ensemble des points z vérifiant la condition que $f(u)$ soit holomorphe dans zS_ε et sur sa frontière forment un ensemble ouvert (A_ε) . On voit aisément que si z' est intérieur à zS_ε , $z'S_\varepsilon$ et sa frontière sont intérieurs à zS_ε . Si z' est sur zC_ε , la frontière $z'C_\varepsilon$ de $z'S_\varepsilon$ est aussi intérieure à zS_ε , sauf par le seul point z' lui-même. (A_ε) contient donc zS_ε s'il contient z_ε . Il suit de là que la frontière U_ε de (A_ε) est une courbe simple rencontrée en un point et en un seul par tout rayon $z = Re^{i\theta}$ issu de l'origine. (A_ε) est la région finie de cette courbe, région contenant l'origine. (A_ε) est un domaine étoilé. Les ζ_ε ne sont pas dans (A_ε) .

Sur tout ensemble fermé intérieur à (A_ε) , la série $\Sigma \mu_n(z, \varepsilon)$ converge normalement, le reste de la série arrêtée au $n^{\text{ième}}$ terme étant inférieur en module à $\frac{M'}{\varepsilon n^\varepsilon}$, M' ne dépendant que de la distance de l'ensemble fermé à U_ε .

Pour tout point z de U_ε , $f(u)$ est holomorphe dans le domaine zS_ε , mais non pas sur zC_ε . Les ζ_ε , s'ils existent, sont sur U_ε .

Finalement, l'ensemble des points où $\rho(z, \varepsilon) = 1$ est identique à l'ensemble $(A_\varepsilon) + U_\varepsilon = (\overline{A_\varepsilon})$, éventuellement diminué de l'ensemble dénombrable des points ζ_ε , où $\rho(\zeta, \varepsilon) > 1$.

Pour conclure, U_ε est la frontière de l'ensemble $\rho(z, \varepsilon) = 1$.

39 bis. Considérons encore l'ensemble $E_n(\varepsilon)$ des points z où

$$|\mu_n(z, \varepsilon)| < 1.$$

$E_n(\varepsilon)$ est limité par une courbe algébrique $\gamma_n(\varepsilon)$ dont $E_n(\varepsilon)$ forme une région (ou plusieurs régions). Soit $E(\varepsilon)$ l'ensemble limite restreint (au sens de Borel) des E_n , c'est-à-dire l'ensemble des points z dont chacun appartient à partir d'une valeur $n(z)$ de n à tous les $E_n(\varepsilon)$. Si z est intérieur à (A_ε) , la série $\Sigma |\mu_n(z, \varepsilon)|$ étant convergente (*a fortiori* si z est un ζ_ε), z est dans $E(\varepsilon)$. Si, au contraire, z est extérieur à (A_ε) , zS_ε contient un point singulier de $f(u)$, $\rho(z, \varepsilon) > 1$ et $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(z, \varepsilon)| = \infty$; z est étranger à $E(\varepsilon)$. Donc les deux ensembles $A(\varepsilon)$ et $E(\varepsilon)$ ont mêmes points intérieurs et mêmes points extérieurs. U_ε est donc la frontière de $E(\varepsilon)$, dont la définition analytique est relativement simple.

39 ter. Faisons varier ε . Soit $\varepsilon' < \varepsilon$. Alors, de même que la boucle frontière $C_{\varepsilon'}$ de $S_{\varepsilon'}$ est intérieure à S_ε , sauf par le point $t = 1$, de même la frontière de $zS_{\varepsilon'}$ est intérieure à zS_ε sauf par le point z .

Si $f(u)$ est holomorphe sur le segment rectiligne Oz , il existe toujours une valeur minimum $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z) \leq 1$, telle que pour $\varepsilon < \varepsilon_0(z)$, z soit dans A_ε . z appartient à U_{ε_0} et la frontière de zC_{ε_0} contient un point singulier de $f(u)$, ce point singulier n'étant pas z .

L'étoile (A) est donc la réunion des régions (A_ε) pour $0 < \varepsilon \leq 1$, (A_1) étant l'intérieur du cercle de convergence de la série (1 bis), ce que nous appelions précédemment (A_0) . Il suit de là que si z est dans (A), la série $\Sigma \mu_n(z, \varepsilon)$ convergera absolument pour $\varepsilon < \varepsilon_0(z)$ (et divergera pour $\varepsilon > \varepsilon_0$). Elle convergera normalement pour $\varepsilon < \varepsilon_0(E)$ si z est situé dans un ensemble fermé borné E intérieur à l'étoile (A).

40. Le polynome

$$P_n(z, \varepsilon) = \mu_0(z, \varepsilon) + \mu_1(z, \varepsilon) + \dots + \mu_n(z, \varepsilon)$$

se met sous une forme simple. Posons

$$P_n(z, \varepsilon) = a_0 + a_1 \beta_{1,n}(\varepsilon) z + a_2 \beta_{2,n}(\varepsilon) z^2 + \dots + a_n \beta_{n,n}(\varepsilon) z^n.$$

$P_n(z, \varepsilon)$ est ce que l'on obtient quand, dans le développement

de $f[z[1 - (1 - \tau)^\varepsilon]]$ suivant les puissances croissantes de τ , on supprime tous les termes ayant en facteur τ^{n+1} et, dans la partie restante, on remplace τ par 1. $B_{p,n}(\varepsilon)$ est donc ce qui reste de

$$[1 - (1 - \tau)^\varepsilon]^p = t^p,$$

quand on effectue sur cette dernière fonction les opérations précédentes. Mais, d'après l'égalité, exacte quelle que soit la fonction convenablement dérivable sur l'intervalle 0, 1

$$g(0) + g'(0) + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!} = g(1) - \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - \tau)^n g^{(n+1)}(\tau) d\tau,$$

on trouve

$$\alpha_{p,n}(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{n!} \int_0^1 (1 - \tau)^n \frac{d^{n+1} t^p}{d\tau^{n+1}} d\tau.$$

Or,

$$t^p = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_p^k (1 - \tau)^{k\varepsilon},$$

$$\frac{1}{n!} (1 - \tau)^n \frac{d^{n+1} t^p}{d\tau^{n+1}} = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+n} C_p^k \frac{k\varepsilon(k\varepsilon - 1) \dots (k\varepsilon - n) (1 - \tau)^{k\varepsilon - 1}}{1 \cdot 2 \dots n}.$$

Posons

$$\sigma_n(x) = (1 - x) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n}\right).$$

Il vient

$$\beta_{p,n}(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k C_p^k \sigma_n(k\varepsilon).$$

(On vérifie que, pour p et ε invariables, n croissant indéfiniment, $\beta_{p,n}(\varepsilon)$ tend vers 1). Finalement

$$(46) \quad P_n(z, \varepsilon) = \alpha_0 + \sum_{p=1}^{p=n} \alpha_p \left[\sum_{k=0}^{k=p} (-1)^k C_p^k \sigma_n(k\varepsilon) \right] z^p$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \sigma_n(k\varepsilon) \sum_{p=k}^{p=n} C_p^k \alpha_p z^p$$

et, à la condition nécessaire et suffisante que z soit dans la région (A_ε) ,

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z, \varepsilon).$$

41. Ces préliminaires analytiques étant traités, passons à la détermination des points singuliers de $f(z)$ par l'application du principe géométrique initial.

Posons $z = Re^{i\theta}$ ($R > 0$, θ réel), et soit $C(\theta, \varepsilon, R)$ la boucle zC_ε de sommet $Re^{i\theta}$ formant la frontière de zS_ε . C étant décrit dans le sens positif par le point $z\tau$ en même temps que τ décrit γ dans le sens des ω croissants, O est dans la région positive et finie $S(\theta, \varepsilon, R)$ de C . $S + C$ est croissant en R , θ et ε restant invariables. S est croissant en ε , R et θ restant invariables. Mais $S + C$ n'est pas croissant en ε , puisque $S + C$ renferme le point invariable $z = Re^{i\theta}$.

La théorie générale s'applique donc aux courbes $C(\theta, \varepsilon, R)$, où θ a une valeur invariable, ce qui fait déplacer le point z sur une demi-droite $O\Delta$ fixe, axe de symétrie commun des $C(\theta, \varepsilon, R)$ et lieu des sommets anguleux de ces courbes. ε et R correspondent respectivement aux paramètres a et b de la théorie générale.

Pour chaque valeur de θ et de ε , soit $R = R(\theta, \varepsilon) = \psi(\varepsilon) \geq \frac{1}{R_0}$, le maximum des nombres positifs R tels que $\rho(Re^{i\theta}, \varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\mu_n(Re^{i\theta}, \varepsilon)|} = 1$.

Sur le segment $o, \psi(\varepsilon)$ de $O\Delta$, $\rho = 1$ sauf au plus en un point où $\rho > 1$. Soit $\Gamma(\theta, \varepsilon)$ la boucle correspondant à $\rho = \psi(\varepsilon)$, $H(\theta, \varepsilon)$ ou simplement $H(\varepsilon)$ l'ensemble des points singuliers de $f(z)$ situés sur $\Gamma(\theta, \varepsilon)$. Il est évident que chacun de ces points ζ est tel que l'intervalle rectiligne $O\zeta$ est tout entier dans (A_ε) , *a fortiori* dans (A) . Au contraire, si un point singulier ζ' de $f(z)$ est tel qu'il existe sur l'intervalle $O\zeta'$ un point singulier de $f(z)$, ζ' ne sera jamais sur la frontière d'un $\Gamma(\theta, \varepsilon)$, quels que soient θ et ε . L'application de la méthode ne donnera jamais directement un de ces points ζ' . Tout au plus pourront-ils apparaître comme points d'accumulation de points de la première sorte. Donc la méthode ne conduira jamais qu'à des points de H .

Pour chaque valeur de ε , $\psi'(\varepsilon + 0)$ et $\psi'(\varepsilon - 0)$ existent et sont respectivement le rang minimum et le rang maximum (en raison de ce que la région S croissant avec R est la région positive de C) des

points de $H(\varepsilon)$ sur $\Gamma(\theta, \varepsilon)$. Sur $C(\theta, \varepsilon, R)$, un point est défini par l'argument ω du point correspondant de γ décrit par $\tau = e^{i\omega}$. Le rang d'un point de $C(\theta, \varepsilon, R)$ est une fonction de ω , $q = q(\theta, \varepsilon, R, \omega)$. Étant donné θ invariable, puis une valeur choisie pour ε , enfin $R = \psi(\theta, \varepsilon)$, les équations

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}(\varepsilon + 0) = q[\theta, \varepsilon, \psi(\varepsilon), \omega_1] \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}(\theta, \varepsilon - 0) = q[\theta, \varepsilon, \psi(\varepsilon), \omega_2]$$

ont respectivement pour racines tous les nombres ω_1 et tous les nombre ω_2 définissant les premiers le point initial de $H(\varepsilon)$ et tous ses conjugués, les seconds le point terminal de $H(\varepsilon)$ et tous ses conjugués.

42. Appliquons la méthode à une infinité dénombrable partout dense de demi-droites $O\Delta_n$ d'arguments θ_n . Je dis que l'ensemble des points singuliers mis ainsi en évidence, complété par ses points d'accumulation, comprend la totalité de H .

Soit ζ un point singulier de première espèce de $f(z)$, c'est-à-dire tel que $f(z)$ soit holomorphe sur l'intervalle $O\zeta$. Soit c un cercle de centre ζ et de rayon aussi petit qu'on le veut; 2η étant positif inférieur au rayon de c , considérons un rectangle α limité par deux parallèles à la droite $O\zeta$ ou Δ , à la distance η de part et d'autre de Δ , et par deux perpendiculaires à Δ d'abscisses, comptées parallèlement à Δ , égales à $-\eta$ et à $|\zeta| + \eta$. Soit r la région de ce rectangle α étrangère à c . La frontière de r comprend un arc c_1 de c . Soit c'_1 l'arc de c ayant même milieu que c_1 et une longueur moitié moindre, β l'angle indéfini de sommet O formé par les rayons issus de O et rencontrant c'_1 , enfin r' la région de β intérieure à c . r' est limité par deux segments rectilignes situés sur les côtés de β et par deux arcs c'_1 et c'_2 de c (*fig. 5*).

$f(z)$ étant holomorphe sur l'intervalle $O\zeta$, on peut choisir η assez petit pour que $f(z)$ soit holomorphe dans r (c étant supposé fixé). Soit z un point quelconque de r' . On peut choisir ε_1 assez petit pour que, si $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, la partie de zS_ε extérieure à c soit dans r . Donc si un point z de r' est tel que $f(u)$ soit holomorphe dans zG_ε mais, non pas sur sa frontière, tous les points singuliers de $f(u)$ situés sur cette frontière sont intérieurs à c .

D'ailleurs c'_1 est intérieur à (A_{ε_1}) et *a fortiori* à (A) . Considérons les

demi-droites $O\Delta_n$ intérieures à β . Comme elles sont partout denses dans β , il est évident que si, z variant sur l'ensemble ν des points de rencontre des $O\Delta_n$ avec c'_2 , la région zS_ε était toujours dans (A_ε) , le point ζ lui-même serait dans (A_ε) , contrairement à notre hypothèse. Il y a donc sur ν au moins un point z étranger à (A_ε) . Soit $O\Delta_n$ la demi-

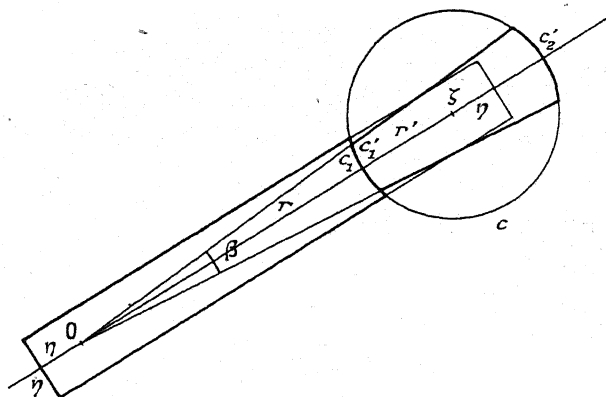


Fig. 5.

droite contenant ce point. Comme le point de $O\Delta_m$ situé sur c'_1 est intérieur à (A_ε) , il existe sur la partie de Δ_m intérieure à r' un point frontière de (A_ε) . A ce point $z_m = \psi(\theta_m, \varepsilon)e^{i\theta_m}$ correspond un ensemble $H(\theta_m, \varepsilon)$ situé sur la frontière de $z_m S_\varepsilon$. Cet ensemble est entièrement dans c , comme nous l'avons dit. L'application de la méthode à la demi-droite $O\Delta_m$ donnera par la considération de $\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}(\theta_m, \varepsilon + 0)$, $\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}(\theta_m, \varepsilon - 0)$ au moins un point ζ_m intérieur à c et de la première espèce. Il est à remarquer que ceci se produira dès $\varepsilon = \varepsilon_1$ et pour toute valeur de ε inférieure à ε_1 .

En donnant au rayon de c une suite de valeurs décroissantes tendant vers zéro, on voit que ζ sera ou bien fourni lui-même par une infinité de demi-droites $O\Delta_m$ tendant vers $O\zeta$, ou bien obtenu comme point d'accumulation de points fournis par l'utilisation d'une telle suite de droites.

Finalement, la méthode appliquée à la famille $O\Delta_n$ donne la totalité de H et nul autre point singulier de $f(z)$.

43. Indiquons le calcul du rang q d'un point z sur la courbe $C(\theta, \varepsilon, R)$. Pour une valeur de ω donnée, ce rang est indépendant de θ , dont la variation revient à une simple rotation d'axes de référence. Considérons donc la courbe $C(0, \varepsilon, R)$, savoir

$$z = R[1 - (1 - \tau)^\varepsilon] = R \left[1 - 2^\varepsilon \sin^\varepsilon \frac{\omega}{2} e^{i\varepsilon \frac{\omega - \pi}{2}} \right].$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial R} &= \frac{z}{R}, & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} &= R(1 - \tau)^\varepsilon \log(1 - \tau) = R(1 - \tau)^\varepsilon \left[\log 2 \sin \frac{\omega}{2} + i \frac{\omega - \pi}{2} \right], \\ & & \frac{\partial z}{\partial \omega} &= \varepsilon R i (1 - \tau)^{\varepsilon-1} e^{i\omega}. \end{aligned}$$

Le lecteur déduira de là l'expression de

$$q(\varepsilon, R, \omega) = - \frac{\mathcal{J} \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial \omega} \right)}{\mathcal{J} \left(\frac{\partial z}{\partial R} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \omega} \right)}.$$

C'est une fonction assez compliquée de ε, R, ω . Il est probable qu'elle varie dans un sens constant avec $\cos \omega$, sans que la preuve en soit immédiate.

On peut faire varier simultanément ε et l'orientation θ de la courbe limite $\Gamma(\theta, \varepsilon)$ (n° 16). On remplace dans les formules ci-dessus écrites R par $R e^{i\theta}$, ce qui donne $q_\varepsilon = q(\varepsilon, R, \omega)$ indépendamment de θ ; q_ε se calculera en faisant intervenir $\frac{\partial z}{\partial \theta} = iz$.

On pourrait enfin chercher les points singuliers sur le cercle $|\tau| = 1$, mais à partir du point $\tau = -1$, par la méthode de M. Mandelbrojt pour le cercle.