W. J. TRJITZINSKY

Théorie des fonctions d'une variable complexe définies sur des ensembles généraux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 55 (1938), p. 119-191
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1938_3_55__119_0>

THÉORIE

DES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE DÉFINIES

SUR

DES ENSEMBLES GÉNÉRAUX

Par M. W. J. TRJITZINSKY,

Université d'Illinois, U. S. A.

1. **Introduction.** — Le but de ce Mémoire est de développer une théorie des fonctions du type indiqué dans le titre. Nous supposerons que $f(z)$ est une fonction d'une variable complexe $z(=x+\sqrt{-1}\,y)$, définie sur un ensemble E à deux dimensions, telle que, z_0 désignant un point d'accumulation quelconque de E, on ait

$$(1)\qquad \lim_{z_1 \succ z_0} \frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}=f_1(z_0) \qquad [=f^{(1)}(z_0)] \qquad (z_0 \text{ dans } E),$$

où $f_1(z_0)$ est un nombre fini indépendant de la manière dont z_1 (z_1 dans E) tend vers z_0 (¹). Les points isolés de E sont laissés de côté. Ainsi, ce que nous entendons par fonction d'une variable complexe, c'est une fonction *monogène*, la monogénéité impliquant

(¹) En d'autres termes, $f(z)=u(x,y)+\sqrt{-1}\,v(x,y)$ (u, v étant des fonctions réelles de variables réelles x, y), où u et v ne satisfont pas aux équations différentielles de Cauchy-Riemann, n'est pas une fonction de la variable complexe $z(=x+\sqrt{-1}\,y)$, à notre point de vue.

seulement l'existence d'une limite (1), unique et finie, en chaque point z_0 de l'ensemble E considéré [1].

Sans perte de généralité E peut être pris borné. Nous emploierons les notations suivantes : (K) *désignera une courbe simple rectifiable frontière d'un domaine* K. *L'ensemble* E *sera fermé et contenu dans* $K+(K)$; *de plus*, (K) *fera partie de* E (cette hypothèse n'est pas essentielle). C(E) *désignera l'ensemble* $K+(K)-E$. C'est un ensemble ouvert dans K.

Pour simplifier les développements, les fonctions considérées seront assujetties aux conditions suivantes.

DÉFINITION 1. — *Une fonction* $f(z)=u(x,y)+\sqrt{-1}\,w(x,y)$ *sera appelée fonction monogène générale, pour abréger fonction m. g., dans* E. si [2] :

1° *Les fonctions*

$$(2)\qquad u,\quad w,\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

sont finies et continues dans E; *u est uniforme dans* E;

2° Δ *indiquant l'opération*

$$(3)\qquad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

nous avons $\Delta u=0$ *dans* E; *de plus, w est une conjuguée harmonique* [3]. *de u dans* E.

Dans la définition ci-dessus les rôles de u et w peuvent être échangés. Une fonction m. g. dans E possède une dérivée unique en chaque point de E. Il n'est pas nécessaire qu'une fonction m. g. soit uniforme [4].

---

(1) Il est évident que monogénéité n'implique pas en général analyticité.

(2) Ces conditions peuvent être remplacées par d'autres moins restrictives sans détruire la validité des résultats de ce Mémoire.

(3) En d'autres termes, u et w satisfont dans E aux équations différentielles de Cauchy-Riemann.

(4) $\log(z-a)$ (a dans K) est m. g. (non uniforme) dans l'ensemble E obtenu en soustrayant le domaine $|z-a|<\rho$ (ρ petit) de $K+(K)$; $\sqrt{z-a}$ n'est pas m. g. dans E parce que $\mathcal{R}(\sqrt{z-a})$ et $I(\sqrt{z-a})$ sont toutes deux non uniformes dans E.

En particulier, remarquons que toute fonction uniforme, d'une variable complexe, qui admet des dérivées de tous les ordres est m. g. selon notre définition.

Dans le paragraphe 2 on verra que toute fonction m. g. $f(z)$, définie dans E, peut être représentée sous la forme

$$(4)\qquad 2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + \iint_{C(E)} \log(z-\alpha)\, q(x,y)\, dx\, dy$$

$$[\alpha = a + \sqrt{1}\, b \text{ dans } E - (K)];$$

$h(\alpha)$ est analytique si α est dans K et $q(x,y)$ est une fonction bornée continue dans C(E), nulle sur la frontière de C(E). On verra aussi qu'on a

$$(5)\qquad 2\pi f^{(1)}(\alpha) = h^{(1)}(\alpha) - \iint_{C(E)} \frac{q(x,y)\, dx\, dy}{z-\alpha}$$

pour tous les points α de E — (K).

Ce sont là les formules fondamentales de notre théorie des fonctions m. g. Ces formules sont un instrument puissant pour l'étude de telles fonctions. Naturellement il ne s'agit pas d'essayer d'établir dans cet essai toutes les conséquences importantes de (4) et (5). Nous en établirons seulement un certain nombre.

Supposons que C(E) puisse être couvert par une suite de domaines circulaires

$$(6)\qquad |z - A_i| < \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots; \text{ les } A_i \text{ dans K})$$

tels que tous les points des circonférences $|z - A_i| = \gamma_i$ soient dans K, et que γ_i tende vers zéro quand $i \to \infty$. *La raréfaction de* C(E) *sera mesurée par la rapidité avec laquelle* $\gamma_i \to 0$, *quand* $i \to \infty$.

D'autre part, si ρ *indique la distance du point*, $z = x + \sqrt{-1}\, y$ *dans* C(E) *à la frontière* F *de* C(E), on peut associer à $q(x,y)$ une fonction $b(\rho)$, tendant vers zéro avec ρ_1, telle que

$$(7)\qquad |q(x,y)| \leqq b(\rho).$$

Dès lors, on remarque que les deux principes suivants ont une importance capitale dans l'étude des fonctions m. g.

Principe I. — Les fonctions m. g. possèdent d'autant plus de propriétés (dans un sous-ensemble convenable $\overline{E}$ de E) que C(E) est plus raréfié.

Principe II. — Les fonctions m. g. possèdent d'autant plus de propriétés dans E — (K) (¹) que $b(\rho)$ tend plus rapidement vers zéro avec ρ.

C'est en tenant compte de ces principes que nous traiterons les problèmes suivants.

Problème A. — Il a pour objet de déterminer la rapidité de décroissance de $b(\rho)$, qui assure l'existence, dans E — (K), de la $m^{\text{ième}}$ dérivée $(m \geqq 2)$ de $f(\alpha)$ ou l'existence des dérivées de tous les ordres.

Problème B. — Il a pour objet de déterminer la raréfaction de C(E) impliquant l'existence, dans un sous-ensemble convenable $\overline{E}$ de E, soit de la dérivée $m^{\text{ième}}$ $(m \geqq 2)$ de $f(\alpha)$, soit des dérivées de tous les ordres. Au cours de cette étude, on trouve des représentations à l'aide de certaines séries convergentes dans E et valables pour les fonctions dont il s'agit et pour leurs dérivées premières.

Problème C. — Il a pour objet de déterminer la rapidité de décroissance de $b(\rho)$, telle que $f(\alpha)$ soit représentable, dans E — (K), par une série de fonctions analytiques absolument et uniformément convergente. Problème analogue dans le cas où $f^{(m)}_{(\alpha)}$ existe dans E — (K); théorème de Taylor.

Dans les problèmes B et C les représentations sont possibles à l'aide de séries convergentes de fonctions rationnelles. Toutefois des termes logarithmiques peuvent apparaître dans les représentations de $f(\alpha)$.

Dans les problèmes D, ..., G, formulés ci-dessous, il semble plus commode de s'occuper des fonctions $f^{(1)}_{(\alpha)}$ au lieu de $f(\alpha)$.

Problème D. — Il a pour objet de déterminer la raréfaction de C(E) impliquant l'existence d'un sous-ensemble $\overline{E}$ de E tel que les fonc-

(¹) Si nous définissons $q(x, y)$ dans E par, $q(x, y) = 0$, on voit que les deux principes mentionnés expriment le fait que la distribution (densité) de $|q(x, y)|$ dans K + (K) se réfléchit dans les propriétés des fonctions m. g. correspondantes.

tions $f_{(\alpha)}^{(1)}$ (pour lesquelles on a la raréfaction mentionnée) soient déterminées (uniquement) par leurs valeurs sur un arc γ (dans $\overline{\mathrm{E}}$). L'ensemble $\overline{\mathrm{E}}_\gamma$ dans lequel cette détermination a lieu contient γ et c'est un certain sous-ensemble connexe de $\overline{\mathrm{E}}$.

Puisque la fonction $f_1(z)-f_2(z)$ est m. g. lorsque $f_1(z)$ et $f_2(z)$ le sont, il s'ensuit que le problème D est équivalent à la détermination de la raréfaction de C(E) telle que $f_{(\alpha)}^{(1)}=0$ sur un arc γ (dans $\overline{\mathrm{E}}$) entraîne nécessairement $f_{(\alpha)}^{(1)}=0$ sur tout ensemble $\overline{\mathrm{E}}_\gamma$.

Problème D'. — C'est une modification du problème D obtenu en remplaçant la propriété de la détermination unique des fonctions par leurs valeurs sur un arc γ par celle de la détermination unique par leurs valeurs sur un ensemble non dense situé sur γ.

Problème E. — Il a pour objet de déterminer la rapidité de décroissance de $b(\rho)$ impliquant la détermination unique des fonctions $f_{(\alpha)}^{(1)}$ par leurs valeurs sur un arc γ [dans E — (K)] dans tout sous-ensemble connexe (dans un certain sens) E_γ de E — (K); E_γ contient γ.

Quand on traite des fonctions indéfiniment dérivables, la considération de la propriété de *quasi-analyticité* est d'importance capitale; nous entendons par là *la propriété de détermination unique des fonctions* $f_{(\alpha)}^{(1)}$ *par les valeurs* $f_{(\alpha_0)}^{(\nu)}$ $(\nu=1, 2, \ldots)$ quand α_0 est dans E (ou dans un sous-ensemble convenable $\overline{\mathrm{E}}$ de E) [1].

La détermination sera valable dans tout sous-ensemble connexe (dans un certain sens) $\mathrm{E}(\alpha_0)$ de E [ou $\overline{\mathrm{E}}(\alpha_0)$ de $\overline{\mathrm{E}}$]; $\mathrm{E}(\alpha_0)$ [ou $\overline{\mathrm{E}}(\alpha_0)$] contient α_0.

Problème F. — Il a pour objet de déterminer la raréfaction de C(E) impliquant la quasi-analyticité des fonctions $f_{(\alpha)}^{(1)}$ dans un sous-ensemble $\overline{\mathrm{E}}$ de E.

Problème G. — Il a pour objet de déterminer la vitesse d'annulation

[1] Quelques auteurs appellent *quasi-analyticité* la propriété d'unicité comprise dans les problèmes D et E. Dans ce Mémoire, quasi-analyticité sera entendu seulement dans le sens indiqué.

de $b(\rho)$ qu'implique la quasi-analyticité, dans E — (K), des fonctions $f^{(1)}_{(\alpha)}$.

En traitant les problèmes F et G nous établirons la représentation des fonctions considérées, en fonction des valeurs de la fonction et de ses dérivées de tous les ordres en un point α_0 (dans E ou $\overline{\mathrm{E}}$, selon le cas). Cette *représentation a la forme d'un développement de Mittag-Leffler* (autour de α_0).

D'une manière générale, en résolvant ces divers problèmes, j'ai été principalement influencé par l'extension très importante que M. Borel a donné à la théorie des fonctions analytiques de Cauchy, extension qui mène à certaines fonctions monogènes particulières (*fonctions monogènes de Borel*). Pour ces fonctions on peut généraliser les intégrales curvilignes fondamentales de Cauchy. Elles possèdent la propriété de quasi-analyticité [1]. *L'ouvrage de M. Borel porte sur le problème* F (M. Borel fait usage de la sommation de Mittag-Leffler).

Comme le fait remarquer M. Borel chaque fonction analytique peut être représentée par des intégrales doubles du type que nous considérons par la suite. D'après certaines de ses indications on peut s'attendre à ce que, si l'on considère une intégrale

$$(8) \quad g(\alpha) = \iint_{\mathrm{C(E)}} \frac{\psi(x, y)\,dx\,dy}{z - \alpha} \qquad [\psi(x, y) \text{ continue; } \psi(x, y) = 0 \text{ dans E}]$$

et si $|\psi(x, y)| \to 0$ assez rapidement, quand z s'approche de la frontière de E, la quasi-analyticité [2] de la fonction $g(\alpha)$ soit assurée. De tels résultats ont bien été trouvés dans quelques études très importantes de M. R. Caccioppoli [3]. En tenant compte du fait que les fonctions $f^{(1)}_{(\alpha)}$, dont nous avons parlé en formulant le problème G, sont

---

(1) É. Borel, *Leçons sur les fonctions monogènes*, Paris, 1917. On peut trouver certains développements ultérieurs concernant les fonctions monogènes de Borel dans W. J. Trjitzinsky, *A study of indefinitely differentiable and quasi-analytic functions*, Part I (*Annals of Math.*, 1931, p. 623-658) (en particulier, p. 639-658).

(2) Dans le sens de détermination unique par les valeurs $g^{(\nu)}(\alpha_0)$ ($\nu = 0, 1, \ldots$; α_0 étant un point fixe dans E).

(3) R. Caccioppoli, *Le funzioni monogene generalizzate definite mediante integrali doppi di Cauchy* (*Rendiconti del Sem. Mat. della R. U. di Padova*, 1934, p. 1-26).

représentables sous la forme (5), nous déduisons immédiatement que *les résultats de M. Caccioppoli fournissent une solution à notre problème* G. Pourtant, en employant une méthode différente nous donnerons une autre solution du problème G dans des conditions [concernant $b(\rho)$] moins restrictives que celles de M. Caccioppoli.

2. **Les formules fondamentales.** — Supposons que $\varphi(x, y)$ et $\zeta(x, y)$ soient des fonctions réelles des variables réelles x, y *continues et uniformes, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres*, dans l'ensemble $W_{\alpha,\rho}$, défini comme suit. $W_{\alpha,\rho}$ est la partie de $K+(K)$ (*cf.* § 1) hors du domaine circulaire

$$(1) \qquad |z-\alpha|<\rho \qquad (\alpha=a+\sqrt{-1}\,b \text{ dans } K).$$

$\rho>0$ est pris suffisamment petit pour que la circonférence γ_ρ du cercle $|z-\alpha|\leqq\rho$ soit à l'intérieur de K. L'application de la formule de Green donne la relation

$$(2) \qquad \iint_{W_{\alpha,\rho}} (\varphi\,\Delta\zeta-\zeta\,\Delta\varphi)\,dx\,dy+\int_{(W_{\alpha,\rho})}\left(\varphi\frac{\partial\zeta}{\partial n}-\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds=0,$$

où

$$ds=|dz| \qquad (z=x+\sqrt{-1}\,y),$$

$(W_{\alpha,\rho})$ est la frontière de $W_{\alpha,\rho}$, et $\frac{\partial}{\partial n}$ indique la dérivation suivant la normale dirigée vers l'intérieur du domaine $W_{\alpha,\rho}$.

En particulier, on peut prendre $\zeta(x,y)=\log|z-\alpha|$. Nous avons alors $\Delta\zeta(x,y)=0$ dans $W_{\alpha,\rho}$. Or

$$\int_{(W_{\alpha,\rho})}=\int_{K}-\int_{\gamma_\rho}.$$

De là

$$(3) \qquad \begin{aligned} &-\iint_{W_{\alpha,\rho}} \log|z-\alpha|\,\Delta\varphi(x,y)\,dx\,dy \\ &+\int_{(K)}\left(\varphi\frac{\partial\log|z-\alpha|}{\partial n}-\log|z-\alpha|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds \\ &=\int_{\gamma_\rho}\left(\varphi\frac{\partial\log|z-\alpha|}{\partial n}-\log|z-\alpha|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds. \end{aligned}$$

Supposons que $\varphi(x,y)$ *soit continue et uniforme, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, dans* $K+(K)$. On observe ([1]) alors que

$$(4)\qquad \lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} = -2\pi\varphi(a,b) \qquad (\alpha \text{ dans K}).$$

Par conséquent

$$\lim_{\rho\to 0}\iint_{W_{\alpha,\rho}} = \iint_K$$

existe pour α dans K et l'on obtient

$$(5)\quad 2\pi\varphi(a,b) = H(a,b) + \iint_K \log|z-\alpha|\,\Delta\varphi(x,y)\,dx\,dy \qquad (\alpha \text{ dans K}),$$

où

$$(5a)\qquad H(a,b) = \int_{(K)}\left(\log|z-\alpha|\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\log|z-\alpha|}{\partial n}\right)ds.$$

On remarque que $H(a,b)$ *est harmonique pour* α *dans* K.

Soit $f(z)$ une fonction m. g. définie sur un ensemble parfait E [dans K; E contient (K)]. En écrivant $f(z) = u(x,y) + \sqrt{-1}\,w(x,y)$ [*cf.* Déf. 1 (§ 1)], $u(x,y)$ est uniforme dans E et u, ainsi que ses dérivées des premiers et seconds ordres, sont continues dans E.

Définition 2. — $v(x,y)$ *sera appelée une fonction* « *associée d'extension* » *de* $u(x,y)$, *pour abréger, une fonction* « a. e. », *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1° $v(x,y)$ *est uniforme dans* $K+(K)$; $v(x,y)$ *et ses dérivées des premiers et seconds ordres sont continues dans* $K+(K)$.

2° $$\frac{\partial^{i+j}v(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j} = \frac{\partial^{i+j}u(x,y)}{\partial x^i\,\partial y^j} \qquad (i,j\geqq 0;\ i+j\leqq 2)\quad ([2]).$$

dans E.

L'existence d'une fonction a. e. peut être démontrée et sa construction effectuée de différentes manières ([3]).

([1]) (4) peut être établi exactement par le même raisonnement que celui de É. Goursat (*Cours d'analyse mathématique*, t. III, Paris, 1927, p. 181).

([2]) Une dérivée d'ordre zéro est la fonction elle-même.

([3]) Voir, par exemple, H. Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets* (*Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 36, 1934, p. 63-89).

En conséquence, si $u(x,y) = \mathcal{R} f(z)$ [$f(z)$ m. g. dans E], et si $v(x,y)$ est une fonction a. e. $\Delta v(x,y)$ est continue dans $K + (K)$ et $\Delta u = 0$ dans E entraîne

$$\Delta v(x,y) = 0 \qquad (\text{dans E}). \tag{6}$$

Or (5) a été établi dans l'hypothèse formulée en italiques à la suite de (3), on peut donc prendre $v(x,y)$ pour fonction φ dans (5). Comme

$$v(a,b) = u(a,b) \qquad (\alpha \text{ dans E; Cf. } 2^{\circ} \text{ de Déf. } 2),$$

on déduit de (5)

$$2\pi\, u(a,b) = H(a,b) + \iint_{C(E)} \log|z-\alpha|\, \Delta v(x,y)\, dx\, dy, \tag{7}$$

pour chaque point α dans $E - (K)$ [$H(a, b)$ étant donnée par ($5a$) avec $\varphi = v$].

Considérons l'intégrale

$$I(a,b) = \iint_{C(E)} \arg(z-\alpha)\, \Delta v(x,y)\, dx\, dy. \tag{8}$$

Puisque

$$|\Delta v(x,y)| < b \qquad [\text{dans } C(E)], \tag{9}$$

on voit que $I(a, b)$ est absolument convergente dans E.

Soit $H_1(a, b)$ *une conjuguée harmonique de* $H(a, b)$. Écrivons

$$2\pi\, w_1(a,b) = H_1(a,b) + \iint_{C(E)} \arg(z-\alpha)\, \Delta v(x,y)\, dx\, dy. \tag{10}$$

Puisque $\log|z-\alpha|$ et $\arg(z-\alpha)$ sont des conjuguées harmoniques, il s'ensuit que $w(a, b)$ est une conjuguée harmonique de $u(x, y)$ dans E, si l'on démontre, par exemple, que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial b} \iint_{C(E)} \arg|z-\alpha|\, \Delta v(x,y)\, dx\, dy = -\iint_{C(E)} \frac{(x-a)}{|z-\alpha|^2} \Delta v(x,y)\, dx\, dy \tag{11}$$

dans E. Or, (9) donne

$$(11\,a)\quad \iint_{C(E)} \left| \frac{|z-\alpha|^2}{x-a} \Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy \right|$$
$$= \iint_{K} |\ldots| < b \iint_{K} \frac{|x-a|}{|z-\alpha|^2}\, dx\, dy \leqq b \iint_{|z-\alpha| \leqq L} \frac{|x-a|}{|z-\alpha|^2}\, dx\, dy$$
$$b = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{L} \frac{r\,|\cos\theta\,|}{r^2}\, r\, dr = 4\,L\,b.$$

L est un nombre assez grand. Ainsi (11) est vérifiée (¹).

On peut donc écrire

$$I f(\alpha) = w(a, b) = w_1(a, b).$$

De là, en vertu de (10) et (7),

$$(12)\qquad 2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + \iint_{C(E)} \log(z-\alpha)\, \Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy$$
$$[\alpha \text{ dans } E-(K);\ h(\alpha) \text{ analytique dans } K].$$

En démontrant (11) nous avons établi la formule (²).

$$(13)\quad 2\pi f^{(1)}(\alpha) = h^{(1)}(\alpha) - \iint_{C(E)} \frac{\Delta \varphi(x, y)}{z-\alpha}\, dx\, dy \qquad [\alpha \text{ dans } E-(K)].$$

Théorème I. — *Soit $f(z)$ m. g. dans* E. *Soit $\varphi(x, y)$ une fonction a. e.* (*cf.* Déf. 2) *de $u(x, y) = \mathcal{R} f(z)$. Alors sur* E — (K) *les fonctions $f(\alpha)$, $f^{(1)}(\alpha)$ sont représentables par les formules* (12) *et* (13) (³), *respectivement, $h(\alpha)$ étant analytique dans* K.

Puisque $\Delta\varphi(x, y)$ est continue dans K + (K) et en vertu de (6) on peut dire *qu'il existe une fonction $b(\rho)$ [$\rho =$ distance de (x, y) à la*

(¹) La vérité de (11) dérive des théorèmes sur le passage à la limite sous le signe d'intégration.

(²) La convergence absolue de l'intégrale écrite dans (13) peut être démontrée ainsi :

$$\iint_{C(E)} |\ldots| < b \iint_{|z-\alpha| \leqq L} \left| \frac{dx\, dy}{z-\alpha} \right| = b \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{L} dr\, d\theta.$$

(³) La partie imaginaire n'est pas nécessairement unique.

frontière de C(E) *telle que* $b(\rho)$ *tende vers zéro avec* ρ_0, *et que*

$$|\Delta\varphi(x, y)| \leqq b(\rho) < b \qquad [(x, y) \text{ dans } C(E)]. \tag{14}$$

Remarquons que $\Delta\varphi(x, y)$ est la fonction $q(x, y)$ du paragraphe 1. La fonction $b(\rho)$ sera prise monotone.

3. **Problème A.** — Considérons maintenant la *partie non analytique*, $M(\alpha)$, d'une fonction $f(\alpha)$ m. g. En vertu de la représentation (12) (§ 2), on entend par là l'intégrale double

$$M(\alpha) = \iint_{C(E)} \log(z-\alpha)\,\Delta\varphi(x, y)\,dx\,dy \qquad (\alpha \text{ dans } E), \tag{1}$$

où $\varphi(x, y)$ est une fonction a. e. [*cf.* Déf. 2 (§ 2)] de $f(\alpha)$. Si la fonction $b(\rho)$ [*cf.* (14), § 2] tend vers zéro assez rapidement avec ρ, nous pouvons nous attendre à l'existence de la dérivée $m^{\text{ième}}$ $(m \geqq 2)$ dans E. Formellement

$$\frac{-M^{(m)}(\alpha)}{(-1)!} = \iint_{C(E)} \frac{\Delta\varphi(x, y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}. \tag{2}$$

Soit α un point *fixé* de E et soit G_i la partie de C(E) pour laquelle $|z-\alpha| > \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. On a [1]

$$G_1 < G_2 < \ldots < G_\nu < \ldots \tag{3}$$

et

$$C(E) = G_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (G_{i+1} - G_i). \tag{4}$$

Ainsi (pourvu que certaines conditions de convergence soient satisfaites)

$$\frac{-M^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} = g'_m(\alpha) + \sum_{i=1}^{\infty} g_{m,i}(\alpha), \tag{5}$$

où

$$g'_m(\alpha) = \iint_{G_1} \frac{\Delta\varphi(x, y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}, \qquad g_{m,i}(\alpha) = \iint_{G_{i+1}-G_i} \frac{\Delta\varphi(x, y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}. \tag{5a}$$

---

(1) $G' < G''$ signifie que l'ensemble G' est contenu dans l'ensemble G''.

En vertu de (14) (§ 2) et puisque

$$|z-\alpha|^{-m} < 1 \qquad (z \text{ dans } G_1),$$

on déduit que [1]

(6) $$|g'_m(\alpha)| < b \text{ mes.} G_1 \leqq b \text{ mes.} C(E) = g'.$$

Supposons que z soit dans $G_{i+1} - G_i$. On a alors

(7) $$\frac{1}{i+1} < |z-\alpha| \leqq \frac{1}{i}.$$

Si α est un point frontière de C(E), on voit que la distance de z à la frontière de C(E) est $\leqq \frac{1}{i}$. Sinon il existe un cercle de centre α de rayon $r > 0$ à l'intérieur duquel il n'y a pas de points de C(E). Soit $\bar{r}$ la borne supérieure des nombres r. Nécessairement $\bar{r} < |z-\alpha|$.

A l'intérieur du cercle $\bar{C}$ (centre α, rayon $\bar{r}$) il n'y a pas de points de C(E). Sur la circonférence de $\bar{C}$, il y aura un point frontière de C(E).

La distance ρ de z à la frontière de C(E) ne dépassera pas en ce cas

$$|z-\alpha| + \bar{r} < 2|z-\alpha| \leqq \frac{2}{i}.$$

Ainsi, quand z est dans $G_{i+1} - G_i$, (7) sera valable et

(7a) $$\rho < \frac{2}{i};$$

il suit de (7a)

(8) $$|\Delta v(x, y)| \leqq b(\rho) \leqq b\left(\frac{2}{i}\right) \qquad [(x, y) \text{ dans } G_{i+1} - G_i;\ i = 1, 2, \ldots].$$

Alors, en vertu de (5a), (7) et (8),

(9) $$|g_{m,i}(\alpha)| < (i+1)^m b\left(\frac{2}{i}\right) \text{mes.}(G_{i+1} - G_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Or

$$\text{mes.}(G_{i+1} - G_i) \leqq \pi\left[\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+1)^2}\right] < \frac{g_1}{(i+1)^3}.$$

---

(1) Ici et dans ce qui suit « mes. G » indique « la mesure de l'ensemble G ».

Donc

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{\infty} |g_{m,i}(\alpha)| \leqq \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^{m-3} b\left(\frac{2}{i}\right) g_1 = g_1 S_m.$$

Si la série S_m ci-dessus converge, en vertu de (5) et (6) on a

$$(10a)\qquad |M^{(m)}(\alpha)| < (m-1)!\, g'' S_m \qquad (\alpha \text{ dans } E).$$

Puisque $b(\rho) < b$, on voit que la série S_1 converge sans aucune hypothèse concernant la vitesse d'annulation de $b(\rho)$.

THÉORÈME II. — *Si pour une valeur de $m \geqq 2$ la série S_m, du second membre de* (10), *converge, les fonctions m. g. correspondantes* $[2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + M(a)]$ *seront dérivables m fois dans* E — (K). *De plus,*

$$(11)\qquad 2\pi f^{(\nu)}(\alpha) = h^{(\nu)}(\alpha) - (\nu - 1)! \iint_{C(E)} \frac{\Delta\varphi(x, y)\, dx\, dy}{(z-\alpha)^{\nu}}$$
$$[\alpha \text{ dans } E - (K);\ \nu = 1, 2, \ldots, m].$$

Dans E *les inégalités* (10*a*) *seront valables*

$$|M^{(\nu)}(\alpha)| < (\nu - 1)!\, g'' S_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m).$$

COROLLAIRE 1. — *Si pour une valeur de $m \geqq 2$*

$$(12)\qquad b(\rho) < g_m \rho^{m-2+\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0;\ \rho_0 \geqq \rho > 0);$$

les fonctions m. g. correspondantes $f(\alpha)$ posséderont m dérivées dans E — (K) *et les relations* (11) *seront valables* (1).

En effet, (12) implique la convergence de S_m. En vertu de (12), S_m sera majorée par la série convergente

$$\Gamma_m = \sum_{i=1}^{\infty} (i+1)^{m-3} g'_m \left(\frac{2}{i}\right)^{m-2+\varepsilon} \leqq \bar{g}_m \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1+\varepsilon}}.$$

COROLLAIRE 2. — *L'existence dans* E — (K) *des dérivées de tous les ordres et la validité des formules* (11) ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) *sont assurées*

(1) Les inégalités (12) ont été données à cause de leur simplicité. On peut les remplacer par certaines inégalités plus précises.

quand on a

(13) $$b(\rho) \sim 0 \quad \text{pour} \quad \rho_0 \geqq \rho > 0 \quad (^1).$$

Ainsi, par exemple, l'existence dans E — (K) des dérivées de tous les ordres est assurée quand $b(\rho)$ est moindre que l'une ou l'autre des expressions suivantes :

(13 a) $$e^{-\frac{1}{\rho^\varepsilon}}, \quad e^{-\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\rho}\right)} \quad (\varepsilon > 0).$$

4. **Problème B.** — Supposons que C(E) soit couvert par une suite de domaines circulaires $\mathcal{D}_i$,

(1) $$|z - A_i| < \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots; \text{ les } A_i \text{ dans K}).$$

Soit S_i la circonférence $|z - A_i| = \gamma_i$; les $\mathcal{D}_i$ sont choisis de manière que $\mathcal{D}_i + S_i$ n'ait aucun point en commun avec (K) ($i = 1, 2, \ldots$). Sans perte de généralité on peut supposer qu'aucun $\mathcal{D}_j$ n'est complètement contenu dans aucun $\mathcal{D}_i (i \neq j)$ [2].

Soit Q_1 la partie de C(E) intérieure à $\mathcal{D}_1$. Soit Q_2 la partie de C(E) intérieure à $\mathcal{D}_2$, et sans point commun avec Q_1. En général, ayant construit

$$Q_1, \quad Q_1, \quad \ldots, \quad Q_{\nu-1},$$

Q_ν est défini comme la partie de C(E) intérieure à $\mathcal{D}_\nu$ et n'ayant aucun point commun avec $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{\nu-1}$. Ainsi

(2) $$Q_i < \mathcal{D}_i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

(2 a) $$Q_i Q_j = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots),$$

(2 b) $$C(E) = Q_1 + Q_2 + \ldots.$$

On a

(3) $$\text{mes.}\, Q_i \leqq \pi \gamma_i^2 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

---

(1) Le symbole $\sim$ signifie « asymptotique ». Quand on dit que $b(\rho) \sim a_0 + a_1\rho + \ldots$ on veut dire que, quel que soit $\nu \geqq 1$,

$$b(\rho) = a_0 + a_1\rho + \ldots + a_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + b_\nu(\rho)\rho^\nu \qquad [\,|b_\nu(\rho)| \leqq b_\nu \quad \text{pour} \quad \rho_0 \geqq \rho > 0].$$

Ainsi la relation (13) signifie que $b(\rho) \sim 0 + 0\rho + \ldots$.

(2) Si $\mathcal{D}_j$ était contenu dans $\mathcal{D}_i$ on laisserait $\mathcal{D}_j$ de côté.

DÉFINITION 3. — *Couvrons* C(E) *par les domaines* $\mathcal{O}_i$. *Soit* σ_i *tel que* $\sigma_i > \gamma_i (i = 1, 2, \ldots)$. $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ *indiquera l'ensemble obtenu en enlevant à* K + (K) *les points des domaines circulaires*

$$|z - A_i| < \sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Nous avons $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)] < \mathrm{E}$. *Supposons que*

$$\gamma = \Sigma \gamma_i^2 \log\left(\frac{1}{\gamma_i}\right) \tag{5}$$

converge. En vertu de (2*b*) et (3), on a alors

$$\text{mes.}\, C(E)) \leqq \pi \gamma', \qquad \text{où} \quad \gamma' = \Sigma \gamma_i^2.$$

Nous prendrons

$$\sigma_i = \lambda \gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots; \ \lambda > 1). \tag{6}$$

Avec γ' assez petit et λ pas trop grand on peut certainement assurer l'inégalité

$$\text{mes.}\, \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)] > 0.$$

Considérons la partie non analytique $M(\alpha)$ [*cf*. (1), § 3]. En notant que

$$\log(z - \alpha) = \log(A_i - \alpha) + \log\left(1 - \frac{A_i - z}{A_i - \alpha}\right),$$

il ressort de (2*b*) que

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{Q_i} \left[\log(A_i - \alpha) + \log\left(1 - \frac{A_i - z}{A_i - \alpha}\right)\right] \Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy. \tag{7}$$

Pour α dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ et z dans Q_i

$$|z - A_i| < \gamma_i, \qquad |A_i - \alpha| \geqq \lambda \gamma_i. \tag{8}$$

D'où

$$\left|\frac{A_i - z}{A_i - \alpha}\right| < \frac{1}{\lambda} < 1 \qquad [\alpha \text{ dans } \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)],\ z \text{ dans } Q_i]. \tag{8a}$$

De là nous concluons que l'intégrale figurant dans (7) est exprimable dans la forme

$$\iint_{Q_i} \ldots = \lambda_1 \log(A_i - \alpha) + \sum_{\nu = i}^{\infty} \frac{\lambda_{i,\nu}}{(A_i - \alpha)^{\nu}} \qquad [\alpha \text{ dans } \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]], \tag{9}$$

où

$$(9a)\quad \lambda_i = \iint_{Q_i} \Delta v(x, y)\, dx\, dy, \qquad \lambda_{i,\nu} = -\frac{1}{\nu} \iint_{Q_i} (A_i - z)^\nu \Delta v(x, y)\, dx\, dy.$$

En vertu de (3) et [(14), § 2]

$$(9b)\qquad |\lambda_i| < \pi b \gamma_i^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

En vertu de (2) et puisque $\mathcal{O}_i$ est défini par (1), on peut déduire de (9a) que

$$(9c)\quad |\lambda_{i,\nu}| < \frac{b}{\nu} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\gamma_i} r^\nu (r\, dr\, d\theta) = 2\pi b \frac{\gamma_i^{\nu+2}}{\nu(\nu+2)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Supposons maintenant qu'on laisse α varier seulement dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_i)]$ *afin que*

$$(10)\qquad -\mathrm{B} < \arg(\mathrm{A}_i - \alpha) < \mathrm{B} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

En remarquant que, à cause de (8),

$$\mathrm{L} \geqq |\mathrm{A}_i - \alpha| \geqq \lambda \gamma_i \qquad [\text{dans } \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]]$$

on observe que, dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$,

$$|\log(\mathrm{A}_i - \alpha)| < \sqrt{\log^2\left(\frac{1}{\lambda\gamma_i}\right) + \mathrm{B}^2} \leqq \mathrm{B}_1 \log\left(\frac{1}{\lambda\gamma_i}\right)$$

quand $|\mathrm{A}_j - \alpha| \leqq 1$, et aussi que

$$|\log(\mathrm{A}_i - \alpha)| < \sqrt{\log^2 \mathrm{L} + \mathrm{B}^2} = \mathrm{B}_2$$

quand $|\mathrm{A}_i - \alpha| > 1$ (dans ce dernier cas on a $\mathrm{L} > 1$). Puisque $\gamma_i \to 0$ quand $i \to \infty$, nous pouvons donc affirmer que, pourvu que (10) soit vérifiée,

$$(11)\quad |\log(\mathrm{A}_i - \alpha)| < \mathrm{B}' \log\left(\frac{1}{\lambda\gamma_i}\right) \qquad [\alpha \text{ dans } \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)];\ i = 1, 2, \ldots].$$

De (9b) et (11) il suit que la série

$$(12)\qquad \mathrm{M}_1(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \log(\mathrm{A}_i - \alpha)$$

est majorée, dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ [*cf.* (6)], par la série convergente en vertu de (5),

$$(12a) \qquad \sum \pi b \mathrm{B}' \gamma_i^2 \log\left(\frac{1}{\lambda\gamma_i}\right).$$

Ainsi $\mathrm{M}_1(\alpha)$ *converge absolument et uniformément dans* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ [sous l'hypothèse (10)].

A cause de (8) et (9c) la série qui se trouve dans (9) est majorée, dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_i)]$, par la série, convergente puisque $\lambda > 1$,

$$(13) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\pi b \frac{\gamma_i^{\nu+2}}{\nu(\nu+2)} \frac{1}{(\lambda\gamma_i)^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\pi b \gamma_i^2 \frac{\lambda^{-\nu}}{\nu(\nu+2)} = \mathrm{S}_{2,i}.$$

On en conclut que la série double

$$(14) \qquad \mathrm{M}_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{i,\nu}}{(\mathrm{A}_i - \alpha)^\nu}$$

est majorée dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ par

$$(14a) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\pi b \gamma_i^2 \frac{\lambda^{-\nu}}{\nu(\nu+2)} = \mathrm{S}_2.$$

S_2 converge puisque

$$\Sigma \gamma_i^2$$

converge [par suite de la convergence de la série (5)]. Donc $\mathrm{M}_2(\alpha)$ *converge absolument et uniformément dans* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$.

En tenant compte de ce dernier résultat et de celui qui suit (12a), des relations (9) et (7) il est possible de formuler le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soit* C(E) *ayant le caractère indiqué au début de ce paragraphe. Soit* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)][<\mathrm{E};\ \sigma_i = \lambda\gamma_i;\ \lambda > 1]$ *l'ensemble spécifié par la définition* 3. *Supposons que la série* (5) *converge. Chaque fonction m. g.* $f(\alpha)$, *pour laquelle les conditions ci-dessus sont vérifiées, peut* *s'exprimer dans* $\bar{E}[(\sigma_j)] - (K)$ *sous la forme*

$$(15) \quad 2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + M_1(\alpha) + M_2(\alpha) \qquad [h(\alpha) \text{ analytique dans } k],$$

$$(15a) \qquad M_1(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \log(A_i - \alpha),$$

$$(15b) \qquad M_2(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda_{i,\nu}}{(A_i - \alpha)^\nu}.$$

Les λ_i, $\lambda_{i,\nu}$ *sont donnés par* (9*a*) *et ils satisfont aux inégalités* (9*b*), (9*c*). *Les séries* $M_1(\alpha)$, $M_2(\alpha)$ *convergent absolument et uniformément si* α *est dans* $\bar{E}[(\sigma_j)]$ *quand* [(10) *est vérifiée*].

Définition 4. — *Un ensemble* G *de mesure nulle, situé dans* K, *sera dit complètement régulier si, les points* A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *étant dans* K,

$$G = G_1 G_2 \ldots,$$

où $G_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ *est la somme de domaines circulaires*

$$|z - A_i| < \gamma_i^{(\nu)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Les $\gamma_i^{(\nu)}$ $(i, \nu = 1, 2, \ldots)$ *sont des nombres satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Les séries*

$$(16) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{(\nu)2} \log\left(\frac{1}{\gamma_i^{(\nu)}}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

convergent;

$$2° \qquad \gamma_i^{(\nu+1)} < \gamma_i^{(\nu)}, \qquad \gamma_i^{(\nu)} \to 0 \quad \text{quand} \quad \nu \to \infty.$$

Nous disons que $f(\alpha)$ est *m. g. presque partout dans* K + (K), c'est-à-dire m. g. dans

$$K + (K) - O,$$

où $O(< K)$ est un ensemble de mesure nulle, si $f(\alpha)$ est m. g. (Déf. 1, § 1), dans chaque ensemble

$$E_\nu = K + (K) - O_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

les O_ν étant des ensembles ouverts contenant O, tels que

$$O_1 > O_2 > \ldots, \qquad O = O_1, O_2, \ldots.$$

Si dans la définition 4 on remplace la condition 1° par celle moins exigeante de la convergence des séries

$$\sum_i (\gamma_i^{(\nu)})^2 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

l'ensemble G (de mesure nulle) s'appelle régulier (¹). *Le théorème fondamental de M. Borel* concernant les ensembles de mesure nulle est que tout ensemble de mesure nulle est un sous-ensemble d'un ensemble régulier.

Le théorème III est applicable aux fonctions m. g. presque partout dans $K + (K)$, *c'est-à-dire m. g. dans* $K + (K) - O$ (O *de mesure nulle*), *toutes les fois que l'ensemble* O *est complètement régulier selon la définition* 4. La question suivante nous paraît dès lors d'importance. Peut-on étendre le théorème de M. Borel, mentionné ci-dessus, c'est-à-dire, tout ensemble de mesure nulle est-il un sous-ensemble d'un ensemble complètement régulier? La possibilité d'une telle extension implique que le théorème III est applicable à *toutes* les fonctions $f(\alpha)$ m. g. presque partout dans $K + (K)$. Nous laissons cette question de côté.

THÉORÈME IV. — $C(E)$, $\overline{E}[(\sigma_j)]$ *et les* σ_j *ayant la même signification que dans le théorème III. Supposons que la série*

$$\Sigma\gamma_i \tag{17}$$

converge. La dérivée de toute fonction m. g. pour laquelle les conditions ci-dessus sont vérifiées, est exprimable dans $\overline{E}[(\sigma_j)] - (K)$ *sous la forme*

$$2\pi f^{(1)}(\alpha) = h^{(1)}(\alpha) + M^{(1)}(\alpha) \tag{18}$$

$h(\alpha)$ *est la fonction figurant dans* (15),

$$M^{(1)}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\lambda'_{i,\nu}}{(A_i - \alpha)^\nu}, \tag{18a}$$

(¹) E. BOREL, *loc. cit.*, p. 89.

où

$$(18b)\qquad \lambda'_{i,\nu} = -\iint_{Q_i} (A_i - z)^{\nu-1}\,\Delta\, v(x, y)\,dx\,dy, \qquad |\lambda'_{i,\nu}| < 2\pi b\,\frac{\gamma_i^{\nu+1}}{\nu+1}$$
$$(i, \nu = 1, 2, \ldots).$$

La série (18*a*) *converge absolument et uniformément si* α *est dans* $\overline{E}[(\sigma_j)]$.

Pour démontrer ce théorème nous employons la relation (2*b*). On a

$$(19)\qquad M^{(1)}(\alpha) = \iint_{C(E)} \frac{-\Delta\, v(x, y)\,dx\,dy}{z-\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} m_i(\alpha),$$

$$(19a)\qquad m_i(\alpha) = \iint_{Q_i} \frac{-\Delta\, v(x, y)\,dx\,dy}{z-\alpha}.$$

En vertu de (8*a*)

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{(A_i-\alpha)} : \left(1 - \frac{A_i - z}{A_i - \alpha}\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(A_i - z)^{\nu-1}}{(A_i - \alpha)^{\nu}}$$

quand z est dans Q_i et α est dans $\overline{E}[(\sigma_j)]$. Alors (19*a*) peut s'écrire

$$(20)\qquad m_i(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda'_{i,\nu}}{(A_i-\alpha)^{\nu}} \qquad [\alpha \text{ dans } \overline{E}[(\sigma_j)]],$$

où les $\lambda'_{i,\nu}$ sont donnés par (18*b*). De plus

$$|\lambda'_{i,\nu}| < b \iint_{Q_i} |A_i - z|^{\nu-1}\,dx\,dy \leqq b \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\gamma_i} r^{\nu-1}(r\,dr\,d\theta) = 2\pi b\,\frac{\gamma_i^{\nu+1}}{\nu+1}.$$

Or, quand α est dans

$$\overline{E}[(\sigma_j)], \qquad |A_i - \alpha| \geqq \sigma_i \qquad (i = 1, 2 \ldots).$$

La série (20) est alors majorée par

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} 2\pi b\,\frac{\gamma_i^{\nu+1}}{\nu+1}\,\frac{1}{\sigma_i^{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\pi b\,\gamma_i\,\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu+1} = s_i.$$

La série s_i converge puisque $\lambda > 1$. La série double du second membre de (18*a*) est majorée par la série

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} 2\pi b\,\gamma_i\,\frac{\lambda^{-\nu}}{\nu+1} = s\left(= b' \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_i\right)$$

qui converge par suite de l'hypothèse concernant la série (17). Le théorème est donc démontré.

Nous examinerons maintenant l'existence de la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fonction m. g. $f(\alpha)$. *Les* $\sigma_i(>\gamma_i;\ i=1, 2, \ldots)$ *ne seront plus nécessairement de la forme* (6). Formellement

$$(21)\qquad \frac{-\mathrm{M}^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!}=\iint_{\mathrm{C(E)}}\frac{\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}=\sum_{i=1}^{\infty}\iint_{\mathrm{Q}_i}\frac{\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}.$$

Quand z est dans Q_i, $|z-\mathrm{A}_i|<\gamma_i$ et quand α est dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$, $|\alpha-\mathrm{A}_i|\geqq\sigma_i$. Ainsi pour z et α dans les ensembles indiqués,

$$|z-\alpha|>\sigma_i-\gamma_i.$$

D'où l'on conclut

$$\left|\iint_{\mathrm{Q}_i}\frac{\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}\right|<\pi b\frac{\gamma_i^2}{(\sigma_i-\gamma_i)^m}\qquad [i=1, 2\ldots;\ \alpha \text{ dans } \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]].$$

Donc *la série du dernier membre de* (21) *est majorée, dans* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$, *par*

$$(22)\qquad s_m=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\pi b\gamma_i^2}{(\sigma_i-\gamma_i)^m}.$$

THÉORÈME V. — $\mathrm{C(E)}$ et $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ *satisfaisant aux conditions énoncées au début de ce paragraphe. Supposons que la série* (22) *converge*, $m\geqq 2$. *Toute fonction m. g. correspondante* $f(\alpha)$ *possède dans* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]-(\mathrm{K})$ *les dérivées*

$$f^{(\nu)}(\alpha)\qquad (\nu=1, 2, \ldots, m);$$

de plus,

$$(23)\qquad 2\pi f^{(\nu)}(\alpha)=h^{(\nu)}(\alpha)-(\nu-1)!\iint_{\mathrm{C(E)}}\frac{\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^\nu}\qquad (\nu=1, 2, \ldots, m)$$

quand α *est dans* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]-(\mathrm{K})$ (¹).

Lorsque les conditions du théorème ci-dessus sont satisfaites, on a

$$(24)\qquad |\mathrm{M}^{(\nu)}(\alpha)|<(\nu-1)!\,s_\nu\qquad [\textit{Cf.}\ (22)]$$

pour α dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ et $\nu=1, 2, \ldots, m$.

(¹) Comme nous l'avons déjà établi, (23) est valable pour $\nu=1$ dans $\overline{\mathrm{E}}-(\mathrm{K})$, même sans les hypothèses particulières du théorème V.

Si, pour $i \geqq i_0$, on a $\frac{\gamma_i}{\sigma_i} \leqq \lambda_1 < 1$, la convergence de la série s_m, donnée par (22), sera assurée par celle de la série

$$\bar{s}_m = \sum_i \frac{\gamma_i^2}{\sigma_m^i}.$$

Applications. — Soit c un nombre tel que

$$(25) \qquad 0 < c < \left(\frac{\frac{k}{\pi}}{1+\frac{k}{\pi}}\right)^{\frac{m}{4}} \qquad (k = \text{mes. K}).$$

Écrivons

$$(25a) \qquad \gamma_i \leqq c_i, \qquad \sigma_i = c_1^i \qquad \left[c^{\frac{2}{m}} < c_1 < \left(\frac{\frac{k}{\pi}}{1+\frac{k}{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} = k_1\right].$$

Alors le théorème V sera applicable et $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ ne sera pas un ensemble de mesure nulle; en effet, puisque $c_1 < k_1$ nous aurons

$$\text{mes.}\,\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)] \geqq \text{mes. K} - \pi\sum_{i=1}^{\infty} c_1^{2i} = k - \frac{\pi c_1^2}{1 - c_1^2} > 0.$$

En d'autres termes, *l'existence de la dérivée $m^{\text{ième}}$ est assurée dans un ensemble de mesure positive quand $\gamma_i \leqq c^i (i = 1, 2, \ldots)$ et que c satisfait à* (25).

Soit

$$(26) \qquad \gamma_i \leqq c^{i\Phi(i)} \qquad [0 < c < k_1;\ cf.\ (25a)],$$

$$(26a) \qquad \sigma_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

où $\Phi(i)\,(> 1)$ augmente indéfiniment. Nous avons alors l'inégalité

$$\bar{s}_m \leqq \sum_i c^{i[2\Phi(i) - m]}.$$

La série converge évidemment pour $m = 1, 2, \ldots$. D'autre part, puisque $c < k_1$,

$$\text{mes.}\,\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)] \geqq k - \pi \sum_{i=1}^{\infty} c^{2i} > 0.$$

Ainsi *l'existence des dérivées de tous les ordres est assurée dans l'ensemble* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)] - (\mathrm{K})$ (*de mesure positive*) *toutes les fois que les* γ_i *satisfont à* (26) [les σ_i sont alors donnés par (26 a)].

5. **Problème C.** — *Soit* O_i *l'ensemble des points de* C(E) *pour lesquels* $\rho > \frac{1}{i}$. Comme auparavant ρ désigne la distance de z à la frontière F de C(E). Nous avons

$$\mathrm{C(E)} = \mathrm{O}_1 + (\mathrm{O}_2 - \mathrm{O}_1) + (\mathrm{O}_3 - \mathrm{O}_2) + \ldots. \tag{1}$$

Formellement, l'intégrale (1) (§ 3) peut s'exprimer par la série

$$\mathrm{M}(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{A}_\nu(\alpha), \tag{2}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}_1(\alpha) = \iint_{\mathrm{O}_1} \log(z-\alpha)\,\Delta\varphi(x,y)\,dx\,dy,\\ &\mathrm{A}_\nu(\alpha) = \iint_{\mathrm{O}_\nu - \mathrm{O}_{\nu-1}} \log(z-\alpha)\,\Delta\varphi(x,y)\,dx\,dy\\ &\qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

Soit α dans E. Pour z dans O_ν par définition de O_ν nous avons

$$|z - \alpha| > \frac{1}{\nu}.$$

En prenant

$$-\mathrm{B} < \arg(z-\alpha) < \mathrm{B} \qquad [z \text{ dans C(E)};\ \alpha \text{ dans E}], \tag{3}$$

on obtient

$$|\log(z-\alpha)| < \sqrt{\log^2|z-\alpha| + \mathrm{B}^2} < \mathrm{B}_1 \log\frac{1}{|z-\alpha|} < \mathrm{B}_1 \log\nu \tag{4}$$
$$(z \text{ dans } \mathrm{O}_\nu;\ \alpha \text{ dans E}),$$

pourvu que $|z-\alpha| \leqq 1$. Dans le cas contraire

$$1 < |z-\alpha| \leqq \mathrm{L} \qquad \text{et} \qquad |\log(z-\alpha)| < \mathrm{B}'.$$

Ainsi, B′ étant suffisamment grand,

$$(5)\qquad |\log(z-\alpha)| < B'\log\nu \qquad (z \text{ dans } O_\nu;\ \alpha \text{ dans } E;\ \nu \geqq 2),$$

$$(5a)\qquad |\log(z-\alpha| < B' \qquad (z \text{ dans } O_1;\ \alpha \text{ dans } E).$$

L'inégalité (14) (§ 2) nous donne quand z est dans $O_\nu - O_{\nu-1}$ ou, plus généralement, quand z est dans $C(E) - O_{\nu-1}$

$$(6)\qquad |\Delta v(x,y)| \leqq b(\rho) \leqq b\left(\frac{1}{\nu-1}\right)$$

car alors $\rho \leqq \dfrac{1}{\nu-1}$.

Puisque (5) et (6) sont toutes deux vérifiées dans $O_\nu - O_{\nu-1}$ ($\nu = 2, 3, \ldots$), (2a) nous donne

$$(7)\quad |A_\nu(\alpha)| < B'\log\nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) \quad (\nu = 2, 3, \ldots;\ \alpha \text{ dans } E)$$

et puisque $|\Delta v(x,y)| < b$, et que (5a) est vérifiée

$$(7a)\qquad |A_1(\alpha)| < bB' \text{ mes.} O_1 \qquad (\alpha \text{ dans } E).$$

Donc, si

$$(8)\qquad \log\nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) < B'' \qquad (\nu = 2, 3, \ldots),$$

la série (2) convergera absolument et uniformément dans E car elle sera alors majorée dans E par la série convergente

$$(8a)\qquad s = bB' \text{ mes.} O_1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} B'B'' \text{ mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}).$$

Si c est le plus grand des nombres bB', $B'B''$,

$$s \leqq c \text{ mes.} C(E).$$

La condition (8) équivaut à la suivante :

$$(9)\qquad b(\rho) < \frac{b'}{\log\left(\frac{1}{\rho}\right)} \qquad (1 > \rho_0 \geqq \rho > 0).$$

Soit maintenant $m > 0$ et *supposons que*

$$(10)\qquad b(\rho) < b'_m \rho^m \qquad (\rho_0 \geqq \rho > 0).$$

Formellement

$$M^{(m)}(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{(m)}(\alpha), \tag{11}$$

où

$$A_\nu^{(m)}(\alpha) = -(m-1)! \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \frac{\Delta v(x, y)\, dx\, dy}{(z-\alpha)^m} \tag{11a}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots;\ O_0,\ \text{ensemble vide}).$$

On voit que

$$\frac{1}{|z-\alpha|^m} < \nu^m \qquad (z \text{ dans } O_\nu;\ \alpha \text{ dans E};\ \nu = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

et que, pour α dans $C(E) - O_{\nu-1}$, à cause de (10), nous avons

$$|\Delta v(x, y)| \leqq b(\rho) \leqq b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) < \frac{b'_m}{(\nu-1)^m} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots). \tag{12a}$$

En particulier, les inégalités (12), (12a) seront vérifiées pour z dans $O_\nu - O_{\nu-1}$. D'où, en vertu de (11a),

$$\begin{aligned} |A_\nu^{(m)}(\alpha)| &< (m-1)!\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\nu^m \,\text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) \\ &< (m-1)!\, b'_m \left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^m \text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) \\ &\qquad (\alpha \text{ dans E};\ \nu = 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{13}$$

et

$$|A_1^{(m)}(\alpha)| < (m-1)!\, b \,\text{mes.}\, O \qquad (\alpha \text{ dans E}). \tag{13a}$$

Or $\frac{\nu}{(\nu-1)} \leqq 2$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$. De là, *on conclut que b_m indiquant le plus grand des nombres b et $b'_m 2^m$*,

$$|A_\nu^{(m)}(\alpha)| < (m-1)!\, b_m \,\text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) = l_{m,\nu} \tag{14}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots;\ O_0 = \text{l'ensemble vide};\ \alpha \text{ dans E}).$$

Alors (11) nous donne

$$|M^{(m)}(\alpha)| < (m-1)!\, b_m \,\text{mes.}\, C(E) \qquad (\alpha \text{ dans E}); \tag{15}$$

car la série du second membre de (11) est majorée dans E par la série

$$\sum l_{m,\nu} \qquad [cf.\ (14)]$$

et par conséquent elle est absolument et uniformément convergente dans E.

Écrivons

$$(16)\qquad W_\nu(\alpha)=A_1(\alpha)+\ldots+A_\nu(\alpha)=\iint_{O_\nu}\log(z-\alpha)\,\Delta v(x,y)\,dx\,dy,$$

$$(16a)\qquad R_\nu(\alpha)=M(\alpha)-W_\nu(\alpha)=\iint_{C(E)-O_\nu}\log(z-\alpha)\,\Delta v(x,y)\,dx\,dy,$$

(7) donne, par suite de (3) et (9),

$$(17)\qquad |R_\nu(\alpha)|<B'\sum_{j=\nu+1}^{\infty}\log j\, b\left(\frac{1}{j-1}\right)\text{mes.}(O_j-O_{j-1})\qquad (\alpha \text{ dans } E).$$

D'autre part, quand pour une valeur $m>0$ (10) est vérifiée, il suit de (13) que

$$(17a)\qquad |R^{\nu}_{(m)}(\alpha)|<(m-1)!\sum_{j=\nu+1}^{\infty}j^m\, b\left(\frac{1}{j-1}\right)\text{mes.}(O_j-O_{j-1})$$
$$(\alpha \text{ dans } E;\ \nu=1,2,\ldots).$$

Théorème VI. — *Soient les ensembles* $O_\nu(\nu=1,2,\ldots)$ (*définis comme il est indiqué précédemment*). *Supposons que* (9) *et* (3) *soient vérifiées. Les fonctions m. g. correspondantes* $2\pi f(\alpha)=h(\alpha)+M(\alpha)$ [$h(\alpha)$ *analytique dans* K] *sont telles que* $M(\alpha)$ *est représentable par une série absolument et uniformément convergente dans* E,

$$(18)\qquad M(\alpha)=\sum_{\nu=1}^{\infty}A_\nu(\alpha).$$

Les fonctions $A_\nu(\alpha)$ *sont majorées par* (2a); *elles sont donc analytiques* (*non uniformes*) *en chaque point extérieur à* $O_\nu-O_{\nu-1}$ (¹).

(O_0 *ensemble vide*). *Si pour une valeur* $m>0$ (10) *est vérifiée* [(3) *ne l'étant pas nécessairement*], *la représentation* (18) *peut être différentiée terme à terme m fois, les séries obtenues étant absolument et uniformément convergentes dans* E. *De plus, en écrivant* (16), (16a), *on observe que, sous les conditions* (9) *et* (3), *le « reste »* $R_\nu(\alpha)$ *satisfait dans* E *à* (17); *d'autre part, quand la condition* (10) *est vérifiée* (*pour une*

(¹) C'est-à-dire, dans un ensemble contenant E.

valeur $m > 0$), *le reste correspondant* $R_\nu^{(m)}(\alpha)$ *satisfait dans* E *à l'inégalité* (17*a*).

Ce théorème sera utile dans les problèmes E et G. Occupons-nous maintenant des développements ayant quelque ressemblance avec ceux de l'œuvre classique de Runge concernant la représentation des fonctions analytiques par des séries de fractions rationnelles. Mentionnons à ce sujet une étude très importante de M. J. Wolff (¹).

Enfermons $K + (K)$ dans un carré S dont les côtés sont parallèles à l'axe réel et à l'imaginaire. Soit l la longueur d'un côté. Par des lignes parallèles aux côtés de S nous subdivisons S en n^2 carrés, $s_{n,i} (i = 1, \ldots, n^2)$, la longueur d'un côté de $s_{n,i}$ étant $\frac{l}{n}$. Soit

$$P_i^{\nu,n} \qquad (i = 1, 2, \ldots; m_{n,\nu} \leqq n^2) \tag{19}$$

l'ensemble de ces $s_{n,i} (i = 1, \ldots, n^2)$ qui ont des points communs avec $O_\nu - O_{\nu-1}$. La partie de $O_\nu - O_{\nu-1}$ située dans P_i sera désignée par $G_i^{\nu,n}$. Ainsi

$$O_\nu - O_{\nu-1} = \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} G_i^{\nu,n} \qquad \left(\text{mes.}\, G_i^{\nu,n} \leqq \frac{l^2}{n^2}\right). \tag{19a}$$

Enfin, soit $z_i^{\nu,n}$ un point quelconque dans $G_i^{\nu,n}$.

(2*a*) nous donne

$$A_\nu(\alpha) = \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} \iint_{G_i^{\nu,n}} \log(z - \alpha)\, \Delta v(x, y)\, dx\, dy. \tag{20}$$

En utilisant la définition de l'intégrale de Riemann on peut écrire

$$A_\nu(\alpha) = \lim_n R^{\nu,n}(\alpha) \qquad (\alpha \text{ dans } E), \tag{21}$$

où

$$R^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} \log(z_i^{\nu,n} - \alpha)\, \Delta v(z_i^{\nu,n})\, \text{mes.}\, G_i^{\nu,n} \quad (^2). \tag{21a}$$

(¹) J. Wolff, *Sur les séries* $\sum \frac{A_K}{z - \alpha_K}$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 173, 1921, p. 1327-28). Runge et Wolff s'occupent tous deux des fonctions analytiques et intégrales curvilignes.

(²) $v(z_i^{\nu,n}) = v(x_i^{\nu,n}, y_i^{\nu,n})$ où $z_i^{\nu,n} = x_i^{\nu,n} + \sqrt{-1}\, y_i^{\nu,n}$.

En observant que

$$\text{mes. } G_i^{\nu,n} = \iint_{G_i^{\nu,n}} dx\,dy,$$

il s'ensuit que

$$(22) \qquad A_\nu(\alpha) - R^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} \iint_{G_i^{\nu,n}} T_i^{\nu,n}(z,\alpha)\,dx\,dy,$$

où

$$(22a) \qquad T_i^{\nu,n}(z,\alpha) = \log(z-\alpha)\,\Delta v(x,y) - \log(z_i^{\nu,n}-\alpha)\,\Delta v(z_i^{\nu,n}).$$

Nous allons obtenir maintenant une inégalité relative à cette fonction. Certaines inégalités auxiliaires seront d'abord établies. On a

$$(23) \qquad |z - z_i^{\nu,n}| \leqq \sqrt{2}\,\frac{l}{n} \qquad (z \text{ dans } G_i^{\nu,n}).$$

Écrivons

$$(24) \qquad \Delta v(x,y) = \Delta v(z_i^{\nu,n}) + h_i^{\nu,n},$$

$$(24a) \qquad \log(z-\alpha) = \log(z_i^{\nu,n}-\alpha) + g_i^{\nu,n}.$$

Puisque $\Delta v(x,y)$ est continue dans la région fermée $K+(K)$

$$(25) \qquad |h_i^{\nu,n}| < \varepsilon_n \qquad [\text{conséquence de } (23);\ \varepsilon_n \to 0 \text{ quand } n\to\infty],$$

ε_n est indépendant de z, i, ν. Puisque $z_i^{\nu,n}$ est dans $O_\nu - O_{\nu-1}$ et par conséquent est aussi dans O_ν, nous obtenons, d'après la définition de O_ν,

$$|z_i^{\nu,n} - \alpha| > \frac{1}{\nu} \qquad (\alpha \text{ dans } E;\ i=1,\ldots,m_{n,\nu});$$

il suit alors de (23) que

$$(25a) \qquad \left|\frac{z_i^{\nu,n}-z}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right| < \sqrt{2}\,l\,\frac{\nu}{n} \qquad (z \text{ dans } G_i^{\nu,n};\ \alpha \text{ dans } E).$$

Prenons n assez grand de sorte que

$$\sqrt{2}\,l\,\frac{\nu}{n} \leqq \lambda < 1.$$

On peut alors exprimer la fonction $g_i^{\nu,n}$ [de $(24a)$] sous la forme

$$g_i^{\nu,n} = \log\left[1 - \frac{z_i^{\nu,n}-z}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right] = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\left(\frac{z_i^{\nu,n}-z}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right)^r$$

(z dans $G_i^{\nu,n}$; α dans E). (25a) et les inégalités suivantes nous donnent

$$(25b)\qquad |g_i^{\nu,n}| < \left|\frac{z_i^{\nu,n}-z}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right|\lambda' < \sqrt{2}\,l\lambda'\frac{\nu}{n}.$$

(z dans $G_i^{\nu,n}$; α dans E.)

D'autre part, puisque $z_i^{\nu,n}$ est dans C(E) — $O_{\nu-1}$, c'est-à-dire puisque la distance de $z_i^{\nu,n}$ à la frontière de C(E) est $\leqq \frac{1}{\nu-1}$, on a

$$(25c)\qquad |\Delta v(z_i^{\nu,n})| \leqq b(\rho_i^{\nu,n}) \leqq b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) \qquad (i=1, \ldots, m_{n,\nu}) \quad (^1).$$

Enfin, en vertu de l'inégalité suivant (25) on a, si (3) est vérifiée

$$(25d)\qquad |\log(z_i^{\nu,n}-\alpha)| < \lambda''\log(\nu+1) \qquad (\alpha \text{ dans E}).$$

La substitution de (24') et (24a) dans (22a) donne

$$(26)\qquad T_i^{\nu,n}(z,\alpha) = \log(z_i^{\nu,n}-\alpha)h_i^{\nu,n} + \Delta v(z_i^{\nu,n})g_i^{\nu,n} + g_i^{\nu,n}h_i^{\nu,n}.$$

D'où, en conséquence de (25d), (25), (25c) et (25b),

$$(26a)\qquad |T_i^{\nu,n}(z,\alpha)| < l_{\nu,n} = \lambda''\log(\nu+1)\varepsilon_n + b\left(\frac{1}{\nu-1}\right)\sqrt{2}\,l\lambda'\frac{\nu}{n} + \sqrt{2}\,l\lambda'\frac{\nu}{n}\varepsilon_n$$
$$(i=1, 2, \ldots, m_{n,\nu};\ z \text{ dans } G_i^{\nu,n};\ \alpha \text{ dans E});$$

$l_{\nu,n}$ est *indépendant* de i, z, α et

$$(26b)\qquad \lim_n l_{\nu,n} = 0;$$

il suit de (26a) et (22) que, pour α dans E,

$$|A_\nu(\alpha) - R^{\nu,n}(\alpha)| < \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} l_{\nu,n}\iint_{G_i^{\nu,n}} dx\,dy = l_{\nu,n}\,\text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) = l'_{\nu,n}.$$

Par suite de (26b) il existe une valeur $n = n_\nu$ telle que

$$l'_{j,n} \leqq \frac{1}{\nu^2} \qquad (j=1, \ldots, \nu).$$

Ainsi

$$(27)\qquad |A_j(\alpha) - R^{j,n_\nu}(\alpha)| < \frac{1}{\nu^2} \qquad (j=1, \ldots, \nu;\ \alpha \text{ dans E}).$$

---

(1) Ici $\rho_i^{\nu,n}$ indique la distance de $z_i^{\nu,n}$ à la frontière de C(E).

Écrivons

(28) $$\Gamma_\nu(\alpha) = R^{1,n_\nu}(\alpha) + R^{2,n_\nu}(\alpha) + \ldots + R^{\nu,n_\nu}(\alpha).$$

On a alors [*cf.* (16)]

(29) $$|W_\nu(\alpha) - \Gamma_\nu(\alpha)| \leqq \sum_{j=1}^{\nu} |A_j(\alpha) - R^{j,n_\nu}(\alpha)| < \frac{1}{\nu} \qquad (\alpha \text{ dans } E).$$

(16*a*) et (17) donnent, si (9) et (3) sont vérifiées,

$$|M(\alpha) - W_{\nu(i)}(\alpha)| < \frac{1}{i} \qquad (\alpha \text{ dans } E;\ \nu(i) \to \infty, \text{ comme } i \to \infty).$$

Par suite

(30) $$|M(\alpha) - \Gamma_{\nu(i)}(\alpha)| \leqq |M(\alpha) - W_{\nu(i)}(\alpha)| + |W_{\nu(i)}(\alpha) - \Gamma_{\nu(i)}(\alpha)| < \frac{1}{i} + \frac{1}{\nu(i)}$$
$$(\alpha \text{ dans } E).$$

$M(\alpha)$ est donc la limite de la suite $\{\Gamma_{\nu(i)}(\alpha)\}$, convergeant uniformément dans E [pourvu que (9) et (3) soient vérifiées].

Supposons maintenant que (10) soit vérifiée pour une valeur $m > 0$. Nous employons encore la notation introduite par (19), (19*a*); (11*a*) donne

(31) $$A_\nu^{(m)}(\alpha) = -(m-1)! \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} \iint_{G_i^{\nu,n}} \frac{\Delta\varphi(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)^m}.$$

En employant la définition de l'intégrale de Riemann,

(32) $$A_\nu^{(m)}(\alpha) = \lim_n R_m^{\nu,n}(\alpha) \qquad (\alpha \text{ dans } E),$$

(32*a*) $$R_m^{\nu,n}(\alpha) = -(m-1)! \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} \frac{\Delta\varphi(z_i^{\nu,n})}{(z_i^{\nu,n}-\alpha)^m} \text{ mes.}\, G_i^{\nu,n}.$$

La comparaison de (21*a*) et (32*a*) nous montre que

(33) $$R_m^{\nu,n}(\alpha) = \frac{d^m}{d\alpha^m} R^{\nu,n}(\alpha).$$

De plus

(34) $$A_\nu^{(m)}(\alpha) - R_m^{\nu,n}(\alpha) = \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} \iint_{G_i^{\nu,n}} T_{i,m}^{\nu,n}(z,\alpha)\,dx\,dy,$$

(34*a*) $$T_{i,m}^{\nu,n}(z,\alpha) = -(m-1)! \left[\frac{\Delta\varphi(x,y)}{(z-\alpha)^m} - \frac{\Delta\varphi(z_i^{\nu,n})}{(z_i^{\nu,n}-\alpha)^m}\right].$$

Au lieu de $(24a)$ nous écrivons [1].

$$(35)\qquad \frac{-(m-1)!}{(z-\alpha)^m} = \frac{-(m-1)!}{(z_i^{\nu,n}-\alpha)^m} + g_{i,m}^{\nu,n}.$$

Comme auparavant supposons que n soit assez grand pour que l'inégalité qui suit $(25a)$ soit vérifiée. En conséquence de $(25a)$ on a alors, si z est dans $G_i^{\nu,n}$ et α dans E,

$$\begin{aligned}(z-\alpha)^{-m} &= (z_i^{\nu,n}-\alpha)^{-m}\left[1-\left(\frac{z_i^{\nu,n}-z}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right)\right]^{-m}\\ &= (z_i^{\nu,n}-\alpha)^{-m}\sum_{j=0}^{\infty} C_j^{-m}\left(\frac{z-z_i^{\nu,n}}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right)^j\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&(z-\alpha)^{-m}-(z_i^{\nu,n}-\alpha)^{-m}\\ &\quad= (z_i^{\nu,n}-\alpha)^{-m}\left(\frac{z-z_i^{\nu,n}}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right)\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma!}\,m(m+1)\ldots(m+\sigma-1)\left(\frac{z_i^{\nu,n}-z}{z_i^{\nu,n}-\alpha}\right)^{\sigma-1}.\end{aligned}$$

Ainsi la valeur absolue de la fonction (36) est moindre que

$$|z_i^{\nu,n}-\alpha|^{-m}\sqrt{2}\,l\,\frac{\nu}{n}\,g_m(\lambda)\qquad (z \text{ dans } G_i^{\nu,n};\ \alpha \text{ dans E}).$$

Par l'emploi de l'inégalité qui suit (25) on obtient donc

$$(36)\qquad |(z-\alpha)^{-m}-(z_i^{\nu,n}-\alpha)^{-m}| < g_m(\lambda)\sqrt{2}\,l\,\frac{\nu^{m+1}}{n}\qquad (z \text{ dans } G_i^{\nu,n};\ \alpha \text{ dans E}).$$

(35) et (36) entraînent

$$(37)\qquad |g_{i,m}^{\nu,n}| < g'_m\,\frac{\nu^{m+1}}{n}\qquad \left[g'_m = (m-1)!\,\sqrt{2}\,l\,g_m(\lambda)\right]$$

si z est dans $G_i^{\nu,n}$ et α dans E.

En substituant (24) et (35) dans $(34a)$, il vient

$$(38)\qquad T_{i,m}^{\nu,n}(z-\alpha) = \frac{-(m-1)!}{(z_i^{\nu,n}-\alpha)^m}\,h_i^{\nu,n} + \Delta\varphi(z_i^{\nu,n})\,g_{i,m}^{\nu,n} + g_{i,m}^{\nu,n}h_i^{\nu,n}.$$

---

(1) On a $g_{i,m}^{\nu,n} = \dfrac{d^m}{d\alpha^m}\,g_i^{\nu,n}$.

Or $|z_i^{\nu,n} - \alpha|^{-m} < \nu^m$ (α dans E); il suit alors de (25), (25c) et (37)

$$(38a)\qquad |T_{i,m}^{\nu,n}(z,\alpha)| < l_{\nu,n,m} = (m-1)!\,\nu^m \varepsilon_n + b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) g'_m \frac{\nu^{m+1}}{n} + g'_m \frac{\nu^{m+1}}{n}\varepsilon_n$$
$$(i = 1, \ldots, m_{n,\nu};\ z \text{ dans } G_i^{\nu,n};\ \alpha \text{ dans E}).$$

On peut voir immédiatement que

$$(38b)\qquad \lim_n l_{\nu,n,m} = 0.$$

(34) et (38a) entraînent pour α dans E,

$$(39)\quad |A_\nu^{(m)}(\alpha) - R_m^{\nu,n}(\alpha)| < \sum_{i=1}^{m_{n,\nu}} l_{\nu,n,m} \iint_{G_i^{\nu,n}} dx\,dy = l_{\nu,n,m}\,\text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) = l'_{\nu,n,m}.$$

En employant la relation (33) et un raisonnement analogue au précédent portant sur les relations (27), ..., (30), nous arrivons à la conclusion que, dans le cas où (10) est vérifiée, nous avons

$$(40)\qquad |M^{(m)}(\alpha) - \Gamma_{\nu(i)}^{(m)}(\alpha)| < \varepsilon_{m,i} \qquad \left(\alpha \text{ dans E};\ \lim_i \varepsilon_{m,i} = 0\right).$$

THÉORÈME VII. — *Soient les ensembles* $O_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ *définis comme il a été indiqué. Supposons que* (9) *et* (3) *soient vérifiées. Toute fonction m. g. correspondante* $2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + M(\alpha)$ [$h(\alpha)$ *analytique dans* K] *aura sa partie* $M(\alpha)$ *représentable, dans* E, *comme la limite d'une suite de fonctions uniformément convergente.*

$$(41)\qquad T_\nu(\alpha) = \sum_{j=1}^{m_\nu} \lambda_{\nu,j} \log(A_{\nu,j} - \alpha) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots);$$

les $\lambda_{\nu,j}$ *sont réels; les* $A_{\nu,j}$ *dans* C(E).

Supposons que pour une valeur $m > 0$, (10) *soit vérifiée. Alors*

$$(42)\qquad T_\nu^{(m)}(\alpha) \to M^{(m)}(\alpha) \qquad (\alpha \text{ dans E};\ \nu \to \infty)$$

uniformément.

Note. — Si $b(\rho) \sim 0\ (\rho_0 \geqq \rho > 0)$ dans le sens spécifié précédemment, la représentation (42) sera valable pour $m = 1, 2, \ldots$. On doit aussi remarquer qu'un examen de l'origine des $\lambda_{\nu,j}$ [*cf.* (21a) et (28)] nous mène à l'inégalité

$$(43) \qquad \sum_{j=1}^{m_\nu} |\lambda_{\nu,j}| < b \operatorname{mes.} C(E) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Bien entendu une recherche plus précise sur les représentations du théorème VII est possible, mais nous ne la ferons pas ici.

Supposons maintenant que (10) soit vérifiée avec $m \geqq 2$. En écrivant

$$z - \alpha = (z - \alpha_0)\left[1 - \frac{\alpha - \alpha_0}{z - \alpha_0}\right]$$

on obtient

$$\frac{1}{z - \alpha} = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{(\alpha - \alpha_0)^i}{(z - \alpha_0)^{i+1}} + \frac{(\alpha - \alpha_0)^{m-1}}{(z - \alpha_0)^{m-1}(z - \alpha)}.$$

Supposons α et α_0 dans E. Nous avons

$$(44) \quad M^{(1)}(\alpha) = -\iint_{C(E)} \frac{\Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy}{z - \alpha}$$
$$= \sum_{i=1}^{m-2} -(\alpha - \alpha_0)^i \iint_{C(E)} \frac{\Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy}{(z - \alpha_0)^{i+1}} + (\alpha - \alpha_0)^{m-1} r_{m-1}(\alpha),$$

où

$$(44a) \qquad r_{m-1}(\alpha) = -\iint_{C(E)} \frac{\Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy}{(z - \alpha_0)^{m-1}(z - \alpha)}.$$

Or, à cause de (10),

$$-\iint_{C(E)} \frac{\Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy}{(z - \alpha_0)^{i+1}} = \frac{M^{(i+1)}(\alpha_0)}{i!} \qquad (i = 0, \ldots, m - 2).$$

Ainsi

$$(45) \qquad M^{(1)}(\alpha) = \sum_{i=0}^{m-2} \frac{M^{(i+1)}(\alpha_0)}{i!} (\alpha - \alpha_0)^i + r_{m-1}(\alpha)(\alpha - \alpha_0)^{m-1}.$$

Bornons $|r_{m-1}(\alpha)|$. Écrivons

$$r_{m-1}(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} r_{m,\nu}(\alpha), \qquad r_{m,\nu}(\alpha) = \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \frac{-\Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy}{(z - \alpha_0)^{m-1}(z - \alpha)}$$

(O_0, ensemble vide). En tenant compte de (12) et (12a) et de la remarque qui suit on déduit que, α et α_0 étant dans E,

$$(46)\qquad \frac{1}{|z-\alpha_0|} < \nu, \qquad \frac{1}{|z-\alpha|} < \nu \qquad (z \text{ dans } O_\nu - O_{\nu-1};\ \nu = 1, 2, \ldots),$$

$$(46a)\qquad |\Delta v(x, y)| < b'_m(\nu - 1)^{-m} \qquad (z \text{ dans } O_\nu - O_{\nu-1};\ \nu = 2, 3, \ldots).$$

De là

$$|r_{m,\nu}(\alpha)| < b'_m\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^m \text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots)$$

et

$$|r_{m,1}(\alpha)| < b \text{ mes.} O_1 \qquad (\alpha \text{ dans } E).$$

Ainsi pour α dans E

$$(47)\qquad |r_{m-1}(\alpha)| < b_m \text{ mes.} C(E) \qquad [b_m = \max.(b, b'_m 2^m)].$$

Le fait suivant est donc établi.

Si pour une valeur $m \geqq 2$ (10) *est vérifiée et si* $2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + M(\alpha)$ [$h(\alpha)$ *analytique dans* K] *est une fonction m. g. correspondante quelconque*, $M^{(1)}(\alpha)$ *sera représentable dans* E *par* (45), α_0 *désignant un point fixe de* E; *le reste satisfait à l'inégalité* (47).

Dans le cas $b(\rho) \sim 0$ (au sens ordinaire, c'est-à-dire avec une infinité de termes), $M(\alpha)$ est indéfiniment dérivable dans E, et

$$(48)\qquad M^{(1)}(\alpha) \sim \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(M^{(i+1)}\alpha_0)}{i!}(\alpha - \alpha_0)^i \qquad (\text{dans } E),$$

avec une infinité de termes [1]. Quand $b(\rho) \sim 0$ avec m termes ($m \geqq 2$), c'est-à-dire quand $|b(\rho)| < b'_m \rho^m$, (48) est valable avec $m - 1$ termes [ce n'est qu'une autre manière d'exprimer que (45) et (47) sont valables]. De plus, il est intéressant de noter qu'il y a un rapport étroit entre la borne supérieure du reste de (45) [*cf.* (47)] et la constante b'_m figurant dans la condition (10) [2]; b'_m entre aussi dans une inégalité relative à $|M^{(m)}(\alpha)|$ [*cf.* (15)]. Cette dernière circonstance peut s'exprimer ainsi.

---

(1) La série figurant dans (48), dans le cas d'une fonction indéfiniment dérivable, est généralement divergente.

(2) b'_m est, bien entendu, une borne supérieure pour le reste (après m termes) dans la relation asymptotique $b(\rho) \sim 0 = 0 + 0,\ \rho + \ldots$ (à m termes).

Soit $K(b'_1, b'_2, \ldots)$ la classe de $b(\rho)$ de sorte que (10; $m=1, 2, \ldots$) soit vérifiée. Soit $C(\beta_1, \beta_2, \ldots)$ la classe de $M(\alpha)$ telle que

$$|M^{(m)}(\alpha)| < (m-1)!\,\lambda^m \beta_m \qquad (\alpha \text{ dans } E;\ m=1, 2, \ldots),$$

où λ peut être différent pour les diverses fonctions $M(\alpha)$ de la même classe. *Si $b(\rho)$ appartient à $K(b'_1, b'_2, \ldots)$ les fonctions m. g. correspondantes $2\pi f(\alpha) = h(\alpha) + M(\alpha)$ ont leur $M(\alpha)$ de la classe $C(b'_1, b'_2, \ldots)$.*

6. **Problème D.** — Nous employons la notation introduite au commencement du paragraphe 4. En particulier, rappelons que $\overline{E}[(\sigma_j)]$ est un sous-ensemble de E satisfaisant à la définition 3 (§ 4). Tout d'abord supposons que

$$(1) \qquad \sum_i \gamma_i \text{ converge};\ \sigma_i = \lambda\gamma_i \qquad (\lambda > 1;\ i=1, 2, \ldots).$$

Soit E' faisant partie de E tel que $|z - A_i| \geqq \sigma'_i$. Ainsi $E' = \overline{E}[(\sigma'_i)]$. Ici $\Sigma(\sigma'_i)^2$ converge, tandis que

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\sigma_i}{\sigma'_i} \leqq \sigma' < \dfrac{2}{\pi} & (i=1, 2, \ldots); \\[2ex] \dfrac{\gamma_{\nu+1}}{\sigma_\nu \sigma_{\nu+1}} \to 0 & (\text{quand } \nu \to \infty). \end{cases}$$

De plus

$$(2a) \qquad \sum_{i=\nu+1}^{\infty} \frac{\gamma_i}{\sigma'_i} < s' \frac{\gamma_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \quad (^1).$$

Soit $\widehat{AB}$ un arc dans E'. Soit α_0 sur $\widehat{AB}$ et ζ_0 un point dans E tel que tous les points du segment rectiligne (ζ_0, α_0) soient dans E'. Ceci, en général, n'est pas nécessairement vrai pour tous les points α_0 de $\widehat{AB}$. Le point représenté par ζ_0 sera désigné par C.

A chaque entier $\nu > 0$ on peut associer des segments CB'_ν, CA'_ν [B'_ν, A'_ν sont sur $\widehat{AB}$, de part et d'autre de α_0], de sorte que les points A, A'_ν, α_0, B'_ν, B sont sur $\widehat{AB}$ dans l'ordre indiqué [A (ou B)

---

(1) C'est-à-dire, la série $\sum \frac{\gamma_i}{\sigma'_i}$ converge assez rapidement.

pouvant coïncider avec A'_ν (ou B'_ν)] et que l'angle $\widehat{A'_\nu C B'_\nu}$ soit le plus grand angle [contenant (ζ_0, α_0) à l'intérieur] ne contenant à l'intérieur aucun point des régions

$$(3) \qquad |z - A_i| \leqq \sigma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Un tel angle existe puisque, par (2), $\sigma'_i > \sigma_i (i = 1, 2, \ldots)$ et que (ζ_0, α_0) est dans E'.

Si CB'_ν est dans $\bar{E}[(\sigma_j)]$ le point B'_ν sera désigné par B_ν. Dans le cas contraire CB'_ν coupera au moins une des circonférences $S_i(\sigma)$,

$$(4) \qquad |z - A_i| = \sigma_i \qquad (i > \nu).$$

Soient $S_{i_r}(\sigma)(i_r > \nu;\, r = 1, 2, \ldots)$ l'ensemble de *toutes ces* $S_i(\sigma)(i > \nu)$ pour lesquelles les deux conditions suivantes sont satisfaites simultanément :

1° $S_i(\sigma)$ a des points dans la région ouverte Γ'_ν limitée par $B'_\nu C \alpha_0 B'_\nu$.

2° Si CQ (Q sur l'arc $\widehat{\alpha_0 B'_\nu}$) désigne un segment quelconque pouvant être tangent à une ou plusieurs des circonférences $S_{i_r}(\sigma)$ mais ne coupant aucune d'elles, il n'y a pas de $S_{i_r}(\sigma)$ dans la partie de Γ'_ν située entre CQ et $C\alpha_0$.

Nous définissons alors CB_ν (B_ν à l'intérieur de l'arc $\widehat{\alpha_0 B'_\nu}$) comme le segment, issu de C, qui est tangent à une ou plusieurs des circonférences $S_{i_r}(\sigma)(r = 1, 2, \ldots)$ mais qui n'en coupe aucune [1]. *Or* CB_ν *est nécessairement dans* $\bar{E}$. En effet, par suite de la manière dont la construction de Γ'_ν a été faite, CB_ν ne coupe aucune $S_i(\sigma)$ $(i \leqq \nu)$, puisque ces circonférences sont extérieures à Γ'_ν. Si CB_ν coupe une $S_{i'}(\sigma)[i' > \nu;\, i' \neq i_r\ (r = 1, 2, \ldots)]$, par définition même de l'ensemble $\{S_{i_r}(\sigma)\}$ $(r = 1, 2, \ldots)$, $S_{i'}(\sigma)$ lui appartient; ceci est contraire à la condition $i' \neq i_r (r = 1, 2, \ldots)$. Ainsi CB_ν est dans $\bar{E}$; de plus, *parmi tous les segments issus de* C (*dans* Γ'_ν) *et situés dans* $\bar{E}$, CB_ν *est celui faisant le plus petit angle avec* CB'_ν.

Considérons un cercle $|z - A_i| = \sigma_i$. Le point C est à l'extérieur du

---

(1) L'existence et l'unicité de CB_ν seront établies par la suite.

cercle $|z - A_i| = \sigma'_i > \sigma_i$ ou sur sa circonférence. L'angle sous lequel le premier cercle se voit de C est inférieur ou égal à l'angle ψ_i, sous lequel on voit le cercle $|z - A_i| = \sigma_i$ d'un point de la circonférence de $|z - A_i| = \sigma'_i$. On a

$$\psi_i = 2 \arcsin\left(\frac{\sigma_i}{\sigma'_i}\right) < \pi \frac{\sigma_i}{\sigma'_i}. \tag{5}$$

La série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi \frac{\sigma_i}{\sigma'_i} = \bar{s} \tag{6a}$$

converge par suite de ($2a$). *Supposons* $\bar{s} < 2\pi$; alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} \psi_i < \bar{s} < 2\pi.$$

Cela assure l'existence de segments issus de C et situés dans $\bar{E}$ quand C est dans E'. En employant (5) nous déduisons que

$$\widehat{B_\nu C B'_\nu} \leqq \sum_{r=1}^{\infty} \psi_{i_r} \leqq \sum_{i>\nu} \psi_i < \pi \sum_{i>\nu} \frac{\sigma_i}{\sigma'_i}.$$

Ainsi, par suite de (1) et ($2a$)

$$\widehat{B_\nu C B'_\nu} < \pi s' \frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Considérons maintenant l'angle $\widehat{\alpha_0 C B'_\nu}$. *Il existe une circonférence* $|z - A_i| = \sigma_i (i \leqq \nu)$ *qui est tangente à* CB'_ν. La droite ($C\alpha'_0$) est tangente ou extérieure à $|z - A_i| = \sigma'_i (> \sigma_i)$. Nous avons

$$\widehat{\alpha_0 C B'_\nu} \geqq \psi, \tag{8}$$

où ψ est l'angle formé par CB'_ν et la tangente issue de C à $|z - A_i| = \sigma$ de sorte que

$$\psi = \arcsin \frac{\sigma'_i}{|A_i - \zeta_0|} - \arcsin \frac{\sigma_i}{|A_i - \zeta_0|} > \frac{\sigma'_i}{|A_i - \zeta_0|} - \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_i}{|A_i - \zeta_0|} \tag{8a}$$

$$= \frac{1}{|A_i - \zeta_0|} \sigma'_i \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_i}{\sigma'_i}\right) \geqq \frac{\sigma'_i \lambda'}{|A_i - \zeta_0|} \qquad \left[\lambda' = 1 - \frac{\pi}{2} \sigma' > 0;\ cf.\ (2)\right].$$

L indiquant le diamètre de K, il suit de (8) et (8a)

(8b) $$\widehat{\alpha_0 C B'_\nu} > \lambda_1 \sigma'_i \qquad \left(\lambda_1 = \frac{\lambda'}{L};\ \text{quelque } i \leqq \nu\right).$$

D'où, en vertu de (7) et (8b),

$$\widehat{\alpha_0 C B_\nu} = \widehat{\alpha_0 C B'_\nu} - \widehat{B_\nu C B'_\nu} > \lambda_1 \sigma'_i - \pi s' \frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} \geqq \lambda_1 \sigma''_\nu - \pi s' \frac{\sigma_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}}$$

($\sigma''_\nu =$ le plus petit des nombres $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_\nu$).

Pour simplifier (mais ceci n'est pas essentiel) supposons que la suite σ'_i soit monotone pour $i \geqq i_0$. On peut prendre alors $\sigma''_\nu = \sigma'_\nu$ (pour ν assez grand). En tenant compte de (2), il vient

(9) $$\widehat{\alpha_0 C B_\nu} > \sigma'_\nu \left[\lambda_1 - \pi s' \frac{\sigma_{\nu+1}}{(\sigma'_\nu \sigma'_{\nu+1})}\right] > h_1 \sigma'_\nu = l_\nu$$

pour $\nu \geqq \nu_0$ (ν_0 assez grand).

De même, il y a un segment CA_ν dans $\bar{E}[(\sigma_j)]$ entre $C\alpha_0$ et CA'_ν tel que

(9a) $$\widehat{\alpha_0 C A_\nu} > h_1 \sigma'_\nu \qquad (\nu \geqq \nu_0).$$

Soit CD_ν (D_ν *sur* $\widehat{AB}$) *la bissectrice de l'angle* $\widehat{A_\nu C B_\nu}$. Supposons, par exemple, que CD_ν coïncide avec $C\alpha_0$ ou se trouve entre $C\alpha_0$ et CB_ν (¹). *Soit* φ_ν l'argument de CD_ν. Quand α est sur $C\alpha_0$ [c'est-à-dire sur (ζ_0, α_0)], on a

$$\arg\{(\alpha - \zeta_0)\, e^{-\sqrt{-1}\,\varphi_\nu}\} = \widehat{D_\nu C \alpha_0} = \widehat{D_\nu C A_\nu} - \widehat{\alpha_0 C A_\nu}.$$

Écrivons

(10) $$\widehat{B_\nu C A_\nu} = \pi K_\nu.$$

Nous avons alors

$$\widehat{D_\nu C A_\nu} = \frac{1}{2} \pi K_\nu;$$

et, en tenant compte de (9a),

(11) $$\arg\{(\alpha - \xi_0)\, e^{-\sqrt{-1}\,\varphi_\nu}\} < \frac{\pi K_\nu}{2} - h_1 \sigma'_\nu \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)].$$

(¹) Pour fixer les idées nous supposerons que l'angle de CB avec $C\alpha$ est moins que celui de CA.

Une inégalité analogue sera valable quand CD_ν se trouve entre $C\alpha_0$ et CA_ν. D'où

$$(11a) \qquad \left|\arg\left\{(\alpha-\zeta_0)\,e^{-\sqrt{-1}\,\varphi_\nu}\right\}^{\frac{1}{K_\nu}}\right| < \frac{\pi}{2} - \frac{h_1\sigma'_\nu}{K_\nu} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)].$$

Désignant par $\varphi_{\alpha,\nu}$ l'angle du premier membre de ($11a$), on obtient (pour $\nu \geqq \nu_0$; ν_0 assez grand)

$$(12) \quad \cos\varphi_{\alpha,\nu} > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{h_1\sigma'_\nu}{K_\nu}\right) = \sin\frac{h_1\sigma'_\nu}{K_\nu} > \frac{2}{\pi}\,\frac{h_1\sigma'_\nu}{K_\nu} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)].$$

Considérons maintenant la fonction $q_\nu(\alpha)$ du type employé par M. T. Carleman [1] dans son étude des séries de la forme $\sum \frac{\lambda_i}{z - A_i}$.

$$(13) \qquad q_\nu(\alpha) = e^{[(\alpha-\zeta_0)\,e^{-\sqrt{-1}\,\varphi_\nu}]^{\frac{1}{K_\nu}}} \qquad [cf.\ (10)].$$

Dans le cas de M. Carleman il était possible d'employer une seule fonction de la forme (13). Dans le problème actuel la fonction (13) varie avec ν.

Pour abréger nous désignerons par Γ_ν *le domaine ouvert limité par* $A_\nu CB_\nu A_\nu$. *Le contour limitant* Γ_ν *sera indiqué par* (Γ_ν).

On remarque que $q_\nu(\alpha)$ est analytique dans Γ_ν. De plus,

$$\arg(\alpha - \zeta_0) = \varphi_\nu \pm \frac{1}{2}\pi K_\nu \qquad (\alpha \text{ sur } CA_\nu,\ CB_\nu).$$

D'où

$$(14) \qquad |q_\nu(\alpha)| = 1 \qquad (\alpha \text{ sur } CA_\nu,\ CB_\nu),$$

et

$$(14a) \qquad |q_\nu(\alpha)| \leqq e^{c_\nu} \qquad \left(c_\nu = R^{\frac{1}{K_\nu}};\ \alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}\right),$$

---

[1] T. CARLEMAN, *Sur les séries* $\sum \frac{A_\nu}{z - \alpha_\nu}$ (*C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 588-591).

R désignant la plus grande distance de C à $\widehat{AB}$; de plus, (12) entraîne

$$(14b)\qquad |q_\nu(\alpha)| = e^{|\alpha-\zeta_0|^{\frac{1}{K_\nu}}\cos\varphi_{\alpha,\nu}} > e^{a_\nu} \qquad \left(a_\nu = \frac{2h_1}{\pi}\frac{\sigma'_\nu}{K_\nu}|\alpha-\zeta_0|^{\frac{1}{K_\nu}}\right)$$

pour α sur (ζ_0, α_0).

Nous avons, pour α dans $\overline{E}[(\sigma_j)]$ [*cf.* le théorème IV, § 4],

$$(15)\qquad M^{(1)}(\alpha) = \iint_{C(E)} \frac{-\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{z-\alpha} = B_\nu(\alpha) + R_\nu(\alpha),$$

ou

$$(15a)\qquad \begin{cases} B_\nu(\alpha) = \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu} \iint_{Q_i} \frac{-\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{z-\alpha}, \\ R_\nu(\alpha) = \displaystyle\sum_{i>\nu} \iint_{Q_i} \frac{-\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{z-\alpha}. \end{cases}$$

Ici Q_i est une certaine partie C(E) à l'intérieur de $|z - A_i| = \gamma_i$; $Q_iQ_j = 0\ (i \neq j)$; $C(E) = Q_1 + Q_2 + \ldots$. Quand z est dans Q_i et α dans $\overline{E}[(\sigma_j)]$,

$$|z - A_i| < \gamma_i, \qquad |\alpha - A_i| \geqq \sigma_i$$

et

$$(16)\qquad |z-\alpha| > \sigma_i - \gamma_i = (\lambda - 1)\gamma_i.$$

De (15a) et (1) nous concluons alors pour α dans $\overline{E}[(\sigma_j)]$,

$$(17)\qquad |R_\nu(\alpha)| < b\sum_{i>\nu}\iint_{Q_i}\left|\frac{dx\,dy}{z-\alpha}\right| < \frac{b}{\lambda-1}\sum_{i>\nu}\frac{1}{\gamma_i}\,\text{mes.}\,Q_i < \frac{\pi b}{\lambda-1}\sum_{i>\nu}\gamma_i$$

puisque mes. $Q_i \leqq \pi\gamma_i^2$. Or la série (1) converge plus rapidement que

$$\sum \frac{\gamma_i}{\sigma'_i}.$$

En vertu de (2a) le dernier membre de (17) est moindre que $b'\gamma_{\nu+1}$. *Ainsi*

$$(17a)\qquad |R_\nu(\alpha)| < b'\gamma_{\nu+1} \qquad \{\alpha \text{ dans } \overline{E}[(\sigma_j)]\}.$$

Or, $\widehat{AB}$ est situé dans E′ et par conséquent dans $\overline{E}[(\sigma_j)]$. Le contour (Γ_ν) est dans $\overline{\mathrm{E}}$. D'où

$$(18)\qquad |\alpha - \mathrm{A}_i| \geqq \sigma_i \qquad [i = 1, 2, \ldots; \alpha \text{ sur } (\Gamma_\nu)].$$

Puisque les circonférences $\mathrm{S}_i(\sigma)$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ sont à l'extérieur (¹) de Γ_ν, on déduit de (18) que

$$(18a)\qquad |\alpha - \mathrm{A}_i| \geqq \sigma_i \qquad [i = 1, 2, \ldots, \nu; \alpha \text{ dans } \Gamma_\nu + (\Gamma_\nu)].$$

Nous obtenons une inégalité semblable à (16),

$$(19)\qquad |z - \alpha| > (\lambda - 1)\gamma_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

pour z dans Q_i et α dans $\Gamma_\nu + (\Gamma_\nu)$. D'où [*cf.* (15*a*)]

$$(20)\qquad |\mathrm{B}_\nu(\alpha)| < b \sum_{i=1}^{\nu} \iint_{\mathrm{Q}_i} \left| \frac{dx\,dy}{z - \alpha} \right| < \frac{\pi b}{\lambda - 1} \sum_{i=1}^{\nu} \gamma_i < \frac{\pi b}{\lambda - 1} \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i = \mathrm{A}$$
$$[\alpha \text{ dans } \Gamma_\nu + (\Gamma_\nu)];$$

(20) *est aussi valable pour* α *dans* $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ [*cf.* (16)].

Supposons que $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha) = 0$ *sur* $\widehat{\mathrm{AB}}$ (15) et (17*a*) nous donnent

$$(21)\qquad |\mathrm{M}^{(1)}(\alpha) - \mathrm{B}_\nu(\alpha)| = |\mathrm{R}_\nu(\alpha)| < b'\gamma_{\nu+1} \qquad \{\alpha \text{ dans } \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]\}.$$

Si α est dans $\mathrm{E}'\{=\overline{\mathrm{E}}[(\sigma)'_j)]\}$ nous obtenons au lieu de (16)

$$(22)\qquad |z - \alpha| > \sigma'_i - \gamma_i \geqq \sigma''\sigma'_i \qquad (\sigma'' > 0;\ z \text{ dans } \mathrm{Q}_i),$$

et une inégalité analogue à (17),

$$|\mathrm{R}_\nu(\alpha)| < b \sum_{i>\nu} \frac{\pi\gamma_i^2}{\sigma''\sigma'_i} \qquad (\text{dans } \mathrm{E}').$$

(2*a*) donne *a fortiori* (²).

$$(23)\qquad |\mathrm{R}_\nu(\alpha)| < b'' \frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}} \qquad (\alpha \text{ dens } \mathrm{E}').$$

En particulier, avec $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha) = 0$, sur $\widehat{\mathrm{AB}}$ et $\widehat{\mathrm{AB}}$ dans E', on a comme

---

(¹) Quelques-unes des $\mathrm{S}_i(\sigma)(i \leqq \nu)$ peuvent être tangentes à (Γ_ν).

(²) Puisque $\dfrac{\gamma_i^2}{\sigma'_i} \to 0$ (quand $i \to \infty$) plus vite que $\dfrac{\gamma_i}{\sigma'_i}$.

conséquence de (15)

$$(24) \qquad |B_\nu(\alpha)| = |R_\nu(\alpha)| < b'' \frac{\Upsilon^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} \qquad (\alpha \text{ dans } \widehat{AB}).$$

Formons la fonction (*comparer avec la méthode de M. Carleman*)

$$(25) \qquad W_\nu(\alpha) = B_\nu(\alpha)\, q_\nu^\sigma(\alpha) \qquad [\sigma \text{ réel; } cf.\ (13)].$$

$W_\nu(\alpha)$ *est analytique dans* Γ_ν *et continue dans* $\Gamma_\nu + (\Gamma_\nu)$. De plus, à cause de (20) et (14), puis de (24) et (14*a*)

$$(26) \qquad |W_\nu(\alpha)| < A \qquad (\alpha \text{ sur } CA_\nu,\ CB_\nu);$$

$$(26a) \qquad |W_\nu(\alpha)| < b'' \frac{\Upsilon^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} e^{\sigma c_\nu} \qquad \left[\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu};\ cf.\ (14a)\right].$$

D'où l'on déduit que, pour α dans Γ_ν,

$$(26b) \qquad |W_\nu(\alpha)| < A + b'' \frac{\Upsilon^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} e^{\sigma c_\nu}.$$

Par suite, en vertu de (25) et (14*b*),

$$(27) \qquad |B_\nu(\alpha)| < \left[A + b'' \frac{\Upsilon^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} e^{\sigma c_\nu}\right] e^{-\sigma c_\nu} \qquad [cf.\ (14a),\ (14b)]$$

si α est sur le segment (ζ_0, α_0). Or, $\sigma > 0$ est arbitraire.

Si la condition (30) ci-dessous est vérifiée,

$$(27a) \qquad a_\nu \geqq a_{\nu,0} = \frac{2h_1}{\pi} \frac{\sigma'_\nu}{K_\nu} g_0^{\frac{1}{K_\nu}}, \qquad e^{-\sigma a_\nu} \leqq e^{-\sigma a_{\nu,0}} \qquad \left(g_0 = \frac{R}{g^1};\ \sigma > 0\right).$$

Définissons $\sigma = \sigma_\nu$ de manière que $e^{-\sigma a_{\nu,0}} = \frac{1}{\varphi(\nu)}$ où $\varphi(\nu) \to \infty$ avec ν. Alors

$$e^{\sigma_\nu c_\nu} = [\varphi(\nu)]^{\frac{c_\nu}{a_{\nu,0}}},$$

Il suit alors de (27)

$$(28) \qquad \lim_\nu B_\nu(\alpha) = M^{(1)}(\alpha) = 0$$

quand

$$(29) \qquad \frac{\Upsilon^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} [\varphi(\nu)]^{\frac{c_\nu}{a_{\nu,0}}} < B' \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

pourvu que α soit sur la partie de (ζ_0, α_0) vérifiant

(30) $$1 \leqq \left| \frac{R}{\alpha - \zeta_0} \right| \leqq g'.$$

(14a) et (27a) entraînent

$$\frac{c_\nu}{a_{\nu,0}} = \frac{a'' K_\nu}{\sigma'_\nu} \left(\frac{R}{g_0} \right)^{\frac{1}{K_\nu}} < \frac{a'}{\sigma'_\nu} (g')^{\frac{1}{K_\nu}}$$

puisque $K_\nu \leqq \overline{K}$. En conséquence de (10), (9) et (9a), il vient

$$\pi K_\nu = \widehat{\alpha_0 CB_\nu} + \widehat{\alpha_0 CA_\nu} > 2 h_1 \sigma'_\nu$$

et

$$\frac{1}{K_\nu} < \frac{K'}{\sigma'_\nu}.$$

De là

$$\frac{c_\nu}{a_{\nu,0}} < \frac{a'}{\sigma'_\nu} g^{\frac{1}{\sigma'_\nu}} \qquad [g = (g')^{K'}]$$

Ainsi (29) est valable si

(31) $$\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}} [\varphi(\nu)]^{\frac{a'}{\sigma'_\nu} g^{\frac{1}{\sigma'_\nu}}} < B \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Soit $m(\nu)$ *une fonction positive telle que*

(32) $$m = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{m^2(\nu)}$$

converge et $\pi m <$ mes. K. Alors en assujettissant les σ'_ν à la condition

(32a) $$\sigma'_\nu \geqq \frac{1}{m(\nu)},$$

des ensembles $E' = \overline{E}[(\sigma_j)]$ peuvent être construits de sorte que mes. $E' > 0$.

En vertu de (32a) le premier membre de (31) est égal ou inférieur à

$$\gamma_{\nu+1}^2 \, m(\nu + 1) \, \varphi(\nu)^{a' m(\nu) g^{m(\nu)}}.$$

Ainsi, une inégalité de la forme (31) est satisfaite quand

(33) $$\gamma_{\nu+1} < b_0 m^{-\frac{1}{2}}(\nu + 1) \, \psi(\nu)^{-m(\nu)} g^{m(\nu)} \qquad \left[\psi(\nu) = \varphi(\nu)^{\frac{a'}{2}} \right];$$

(33) *impliquera donc* (28), *pourvu qu'une inégalité du type* (30) *soit vérifiée.*

$\widehat{AB}$ étant dans $E' = \overline{E}[(\sigma'_j)]$, soit α_0 un point quelconque sur $\widehat{AB}$ tel qu'il existe un segment (α_0, ζ_0), *situé dans* E', *qui soit limite, des deux côtés, des segments* (ζ_0, β) $(\beta$ sur $\widehat{AB})$ *qui se trouvent dans* $\overline{E}[(\sigma_j)]$. R désignant max. $|\zeta_0 - \beta|$, soit (α_0, β_0) la partie de (α_0, ζ_0) sur laquelle (30) est vérifiée. *L'ensemble des points* α (*nécessairement dans* E'), *appartenant à quelque segment* (α_0, β_0) *de la nature ci-dessus, s'appellera un ensemble* g'*-connexe du premier ordre contenant* $\widehat{AB}$. Prenons un segment quelconque (α_0, β_0) de l'ensemble ci-dessus et faisons-lui jouer le rôle de $\widehat{AB}$. Soit α'_0 un point quelconque sur (α_0, β_0) tel qu'il existe un segment (α'_0, ζ'_0), dans E', limite, des deux côtés, des segments (ζ'_0, β') [β' sur (α_0, β_0)] qui se trouvent dans $\overline{E}[(\sigma_j)]$; soit $R^{(1)} = \text{max.}\,|\zeta'_0 - \beta'|$ et désignons par (α'_0, β'_0) la partie de (α'_0, ζ'_0) pour laquelle

$$\left|\frac{R^{(1)}}{\alpha - \zeta'_0}\right| \leqq g' \qquad [\text{quand } \alpha \text{ est sur } (\alpha'_0, \beta'_0)].$$

Tous les points α *qui appartiennent à un segment* (α_0, β_0) *ou à un segment* (α'_0, β'_0), *seront dits constituer un ensemble* g'*-connexe de second ordre contenant* $\widehat{AB}$.

Nous définissons donc, pas à pas, les g'-connexité d'ordres 1, 2, ..., pour les ensembles contenant $\widehat{AB}$.

Définition 5. — *Un ensemble* $F_{\widehat{AB}}$ *contenu dans* $E' = \overline{E}[(\sigma'_j)]$ [*cf.* Déf. 3 (§ 4); $\sigma'_{j1} > \sigma_j$] *s'appellera un ensemble* g'*-connexe contenant* $\widehat{AB}$ *si pour chaque point* α *de* $F_{\widehat{AB}}$ *on peut affirmer ce qui suit. Il existe* α_0 *sur* $\widehat{AB}$ *et une ligne polygonale dont les sommets successifs sont*

$$\alpha_0, \quad \alpha'_0, \quad \alpha^2_0, \quad \alpha^3_0, \quad \ldots, \quad \alpha^\nu_0, \quad \beta^\nu_0,$$

le point α *étant sur le segment* $(\alpha^\nu_0, \beta^\nu_0)$. (α_0, α'_0) *est un sous-segment d'un segment* (α_0, β_0) *appartenant à un ensemble* g'*-connexe du premier ordre;* (α'_0, α^2_0) *est un sous-segment d'un segment* (α'_0, β'_0) *appartenant à un ensemble* g'*-connexe du second ordre, etc. Enfin,* $(\alpha^\nu_0, \beta^\nu_0)$ *est un segment d'un ensemble* g'*-connexe de* ν*-ième ordre.*

Note. — La g'-connexité est définie par rapport à deux ensembles, $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma'_j)]$ et $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$.

Nous pouvons dès lors formuler le théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — *Supposons que* C(E) *soit couvert par un ensemble de domaines* [1 ; § 4] *avec*

$$\gamma_{\nu+1} < b_0 m^{-\frac{1}{2}}(\nu+1)\,\psi(\nu)^{-m(\nu)} g^{m(\nu)} = t(\nu), \tag{34}$$

où $m(\nu)$ *est une fonction de la nature spécifiée par* (32) *et* $\psi(\nu) \geqq 1$ *tend vers l'infini avec* ν, *mais lentement. Cette raréfaction de* C(E) (*cf.* § 1) *est suffisante pour assurer la détermination unique de la dérivée première* $f^{(1)}(\alpha)$ *d'une fonction m. g. par les valeurs de* $f^{(1)}(\alpha)$ *sur un arc* $\widehat{\mathrm{AB}}$ *dans* $\mathrm{E}' = \overline{\mathrm{E}}[(\sigma'_j)]$ [*cf.* Déf. 3 (§ 4)] ; *ici* $\sigma'_\nu = \frac{1}{m(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. *La détermination unique aura lieu dans chaque sous-ensemble* $\mathrm{F}_{\widehat{\mathrm{AB}}}$ *de* E', g'*-connexe contenant* $\widehat{\mathrm{AB}}$ (*cf.* Déf. 5). *Ici* g' (>1) *dépend de* g.

Note. — Nous n'avons pas donné de méthode « effective » permettant de construire la dérivée d'une fonction m. g., dans $\mathrm{F}_{\widehat{\mathrm{AB}}}$, à l'aide des valeurs de cette dérivée sur un arc $\widehat{\mathrm{AB}}$. Le théorème doit être entendu au sens suivant. Parmi les fonctions m. g. $f(\alpha)$, pour lesquelles C(E) satisfait, aux conditions du théorème 8, il n'existe aucune paire de fonctions, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, pour lesquelles on ait $f_1^{(1)}(\alpha) = f_2^{(1)}(\alpha)$ sur $\widehat{\mathrm{AB}}$, tandis que $f_1(\alpha) \neq f_2(\alpha)$ sur $\mathrm{F}_{\widehat{\mathrm{AB}}}$.

7. **Problème D'.** — Nous employons les notations du paragraphe 6. Considérons encore un arc $\widehat{\mathrm{AB}}$ dans $\mathrm{E}' = \overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ et supposons-le rectifiable. Si nous voulons trouver la raréfaction de C(E) qui entraîne la détermination unique de $f^{(1)}(\alpha)$ (dans un certain sous-ensemble connexe de E') par les valeurs de $f^{(1)}(\alpha)$ sur un ensemble Λ situé sur $\widehat{\mathrm{AB}}$, nous sommes ramenés au problème D, toutes les fois que Λ est partout dense sur quelque sous-arc de $\widehat{\mathrm{AB}}$. Par conséquent nous supposerons que Λ *est fermé et non dense sur* AB *et de plus qu'il* contient au moins une infinité dénombrable de points. Soit $\mathrm{C}(\Lambda) = \widehat{\mathrm{AB}} - \Lambda$.

$C(\Lambda)$ comprend une infinité dénombrable de sous-arcs de $\widehat{AB}$, ouverts non empiétants et partout dense sur $\widehat{AB}$. Les points isolés de Λ sont extrémités communes d'arcs adjacents de $C(\Lambda)$. Les autres points de Λ se divisent en deux espèces.

1° *Points intérieurs*. Ce sont ceux qui ne sont pas extrémité d'arc de $C(\Lambda)$, mais qui sont points limites d'extrémités des deux côtés.

2° *Points semi-intérieurs*. Ce sont ceux qui sont extrémité d'un arc de $C(\Lambda)$ et limites, d'un seul côté, d'extrémités d'arcs de $C(\Lambda)$.

On pourrait traiter le problème D′ par une méthode différente de celle employée dans le paragraphe 6. Nous ne le ferons pas et il conviendra d'introduire la définition suivante :

La borne supérieure des longueurs des arcs de $C(\Lambda)$ *s'appellera « norme » de l'ensemble* Λ, *non dense sur* $\widehat{AB}$.

Il n'est pas difficile de voir que, *étant donné* $\varepsilon\,(>0)$ (*si petit soit-il*), *il existe des ensembles non denses* Λ *dont la norme est* $\leqq \varepsilon$. Les ensembles Λ peuvent être dénombrables ou de mesure positive ou nulle.

Soit α_0, sur $\widehat{AB}$, (*cf.* § 6) supposé point « intérieur » de Λ. A_i *et* B_i, *sur* $\widehat{AB}$, *ayant la signification indiquée dans le paragraphe* 6, $\widehat{A_{\nu+1}B_{\nu+1}}$ est à l'intérieur de $\widehat{A_\nu B_\nu}$ $(\nu=\nu_0, \nu_0+1, \ldots)$ $\left(\widehat{A_{\nu_0}B_{\nu_0}} \text{ dans } \widehat{AB}\right)$; tous les arcs $\widehat{A_\nu B_\nu}$ $(\nu \geqq \nu_0)$ contiennent α_0 à l'intérieur et la longueur de $\widehat{A_\nu B_\nu} \to 0$, quand $\nu \to \infty$.

Définition 6. — *La subdivision de* $\widehat{AB}$ *ci-dessus sera désignée par le symbole* $\mathcal{D}(\alpha_0, \widehat{AB})$. *D'autre part,* $C_\nu(\Lambda)$ *indiquera la partie de* $C(\Lambda)$ *située dans l'arc ouvert* $\widehat{A_\nu B_\nu}$ $(\nu \geqq \nu_0)$ [1].

Définition 7. — *Soit* λ_ν *la borne supérieure des longueurs des arcs*

[1] Pour être précis nous prenons ν_0 aussi petit que possible.

de $C_\nu(\Lambda)$ (1) $(\nu = \nu_0, \nu_0+1, \ldots)$. *Soit* λ_{ν_0-1} *la norme de* Λ, *dans* $\widehat{AB}$ [*c'est-à-dire la borne supérieure des longueurs de tous les arcs de* $C(\Lambda)$]. *Les nombres* λ_i $(i = \nu_0 - 1, \nu_0, \nu_0+1, \ldots)$ *s'appelleront les « nombres caractéristiques » de* Λ, *par rapport à* $\mathcal{D}(\alpha_0, \widehat{AB})$.

On remarque que

$$(1) \qquad \lambda_{\nu_0-1} \geqq \lambda_{\nu_0} \geqq \lambda_{\nu_0+1} \geqq \ldots; \qquad \lim_{\nu} \lambda_\nu = 0.$$

Lemme. — *Étant donnée une subdivision* $\mathcal{D}(\alpha_0, \widehat{AB})$ (*cf.* Déf. 6) *et une suite non croissante de nombres tendant vers zéro,*

$$(2) \qquad \varepsilon_{\nu_0-1} \geqq \varepsilon_{\nu_0} \geqq \varepsilon_{\nu_0+1} \geqq \ldots \qquad (\varepsilon_\nu > 0;\ \nu = \nu_0 - 1,\ \nu_0,\ \nu_0+1, \ldots),$$

il existe des ensembles non denses Λ (*de mesure positive si l'on veut*), *pour lesquels* α_0 *est un point « intérieur » et pour lesquels les nombres caractéristiques* (*cf.* Déf. 7) λ_ν *par rapport à* $\mathcal{D}(\alpha_0, \widehat{AB})$, *satisfont aux inégalités*

$$(3) \qquad \lambda_\nu \leqq \varepsilon_\nu \qquad (\nu \geqq \nu_0 - 1).$$

Soient Λ'_{ν_0-1}, Λ''_{ν_0-1} des ensembles non denses sur $\widehat{AA_{\nu_0}}$, $\widehat{BB_{\nu_0}}$ respectivement, dont les normes sont inférieures ou égales à ε_{ν_0-1}. Plus généralement nous construisons les ensembles

$$(4) \qquad \Lambda'_\nu, \quad \Lambda''_\nu \qquad (\nu = \nu_0, \nu_0+1, \ldots),$$

non denses sur $\widehat{A_\nu A_{\nu+1}}$ et $\widehat{B_\nu B_{\nu+1}}$ respectivement (de mesure positive, si l'on veut; ou formés d'un nombre fini de points), dont *les normes sont égales ou inférieures à* ε_ν $(\nu = \nu_0, \nu_0+1, \ldots)$.

L'ensemble

$$(5) \qquad \Lambda = \sum_{\nu=\nu_0-1}^{\infty} [\Lambda'_\nu + \Lambda''_\nu]$$

sera non dense sur $\widehat{AB}$. On peut s'arranger pour que α_0 soit un point « intérieur » de Λ et pour que Λ soit fermé. Si chacun des ensembles

---

(1) Ainsi λ_ν est la norme de la partie de Λ située dans $\widehat{A_\nu B_\nu}$.

[(4); $\nu \geqq \nu_0 - 1$] est formé d'un nombre fini de points, l'ensemble Λ sera non dense et dénombrable, avec α_0 comme seul point limite (α_0 sera un point intérieur de l'ensemble).

$C_{\nu_0-1}(\Lambda)$ indiquant l'ensemble de tous les arcs de $C(\Lambda)$ dans $\widehat{AB}$, on voit que la borne supérieure des longueurs des arcs (ou des portions des arcs) de $C_{\nu_0-1}(\Lambda)$, qui sont dans $\widehat{A_\nu A_{\nu+1}}$ et dans $\widehat{B_\nu B_{\nu+1}}$ est inférieure ou égale à ε_ν; et cela, pour $\nu = \nu_0 - 1, \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots$ (¹) [conséquence de la propriété des normes de (4)]. La borne supérieure des longueurs de tous les arcs de $C_{\nu_0-1}(\Lambda)$ n'excède pas le plus grand des ε_i; donc

(6) $$\lambda_{\nu_0-1} \leqq \varepsilon_{\nu_0-1} \qquad [cf. \text{ Déf. 7 et } (2)].$$

En général, on voit que la borne supérieure des longueurs des arcs de $C_\nu(\Lambda)$ n'excède pas le plus grand des nombres $\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\nu+1}, \varepsilon_{\nu+2}, \ldots$; c'est-à-dire,

(6a) $$\lambda_\nu \leqq \varepsilon_\nu \qquad (\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots),$$

Le lemme est donc établi.

$$\alpha_0, \quad \widehat{AB}, \quad \Lambda, \quad A_i, \quad B_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ayant la signification indiquée avant la définition 6, *supposons que*

(7) $$M^{(1)}(\alpha) = 0 \qquad (\text{quel que soit } \alpha \text{ dans } \Lambda);$$

et de plus, *que les nombres caractéristiques* (*cf.* Déf. 7) λ_ν, *par rapport à* Λ *et* $\mathcal{D}\left(\alpha_0, \widehat{AB}\right)$ (*cf.* Déf. 6), *satisfassent aux inégalités*

(8) $$\lambda_\nu \leqq g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

En vertu du lemme il est certain que de tels ensembles Λ existent, quelle que soit la fonction $g > 0$ tendant vers zéro avec u.

Supposons que la série

(9) $$s = \sum_i \frac{\gamma_i^2}{(\sigma'_i - \gamma_i)^2}$$

(¹) A_{ν_0-1}, B_{ν_0-1} dénotent A et B, respectivement.

converge. Pour α et α' sur $\widehat{AB}$ $\{$donc dans $E' = \overline{E}[(\sigma'_j)]\}$ nous avons

$$(10) \qquad M^{(1)}(\alpha) - M^{(1)}(\alpha') = \iint_{C(E)} -\Delta v(x,y)\left[\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\alpha'}\right] dx\,dy$$
$$= (\alpha - \alpha')\, m(\alpha, \alpha'),$$

où (1),

$$(10a) \qquad |m(\alpha,\alpha')| = \left|\iint_{C(E)} \frac{\Delta v(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha)(z-\alpha)}\right| \leqq \sum_i \left|\iint_{Q_i} \cdots\right| < \pi b s = s_1.$$

Si α est sur $\widehat{A_\nu B_\nu}$ et se trouve dans Λ nous avons $M^{(1)}(\alpha) = 0$, par hypothèse. Si α est sur $\widehat{A_\nu B_\nu}$ mais n'est pas un point de Λ, alors α est un point intérieur (au sens ordinaire) à un arc γ de l'ensemble $C_\nu(\Lambda)$.

Soit $\alpha' = \alpha'(\alpha)$ une extrémité de γ (à l'intérieur de $\widehat{A_\nu B_\nu}$). Nécessairement $|\alpha - \alpha'(\alpha)|$ sera moindre que la borne supérieure des longueurs des arcs définissant $C_\nu(\Lambda)$; donc, (Déf. 7),

$$(11) \qquad |\alpha - \alpha'(\alpha)| < \lambda_\nu \qquad \left(\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}, \text{ non dans } \Lambda\right).$$

Alors (8) donne

$$(11a) \qquad |\alpha - \alpha'(\alpha)| < g\left(\frac{\gamma^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}}\right)$$

$\alpha'(\alpha)$ étant un point de Λ, en vertu de (7) on peut affirmer que

$$|M^{(1)}(\alpha) - M^{(1)}[\alpha'(\alpha)]| = |M^{(1)}(\alpha)| \qquad \left(\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}, \text{ non dans } \Lambda\right).$$

Par (10), (10a) et (11a), on a donc

$$(12) \quad |M^{(1)}(\alpha)| = |\alpha - \alpha'(\alpha)|\,|m(\alpha,\alpha')| < s_1\,|\alpha - \alpha'(\alpha)| < s_1\, g\left(\frac{\gamma^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}}\right)$$

pour tous les α sur $\widehat{A_\nu B_\nu}$.

En continuant à supposer vérifiées les relations [(1), § 6], [(2), § 6], [(2a), § 6] et en *répétant les raisonnements du paragraphe* 6 *jusqu'à la relation* (20) *incluse*, mais en supposant ensuite que $M^{(1)}(\alpha) = 0$ sur $\widehat{AB}$ [relation (7)], les relations ultérieures du paragraphe 6 sont

(1) Pour α, α' sur E' et z dans Q_i (c'est-à-dire $|z - A_i| < \gamma_i$), on a $|z-\alpha| > \sigma'_i - \gamma$ et $|z - \alpha'| > \sigma'_i - \gamma_i$.

valables jusqu'à [(24), § 6]. En vertu de [(15), § 6] et de (12), au lieu de [(24), § 6] on obtient alors

$$(13)\quad |B_\nu(\alpha)| = |M^{(1)}(\alpha) - R_\nu(\alpha)| \leqq M^{(1)}(\alpha)| + |R_\nu(\alpha)| < s_1 g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right) + |R_\nu(\alpha)|$$
$$\left(\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}\right).$$

Puisque [(23), § 6] est vérifiée dans E′ et que $\widehat{A_\nu B_\nu}$ est dans E′, on déduit en tenant compte de (13),

$$(13a)\qquad |B_\nu(\alpha)| < s_1 g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right) + b''\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}} \qquad \left(\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}\right).$$

Cette inégalité remplace [(24), § 6]. Le texte qui suit [(24), § 6] n'est pas changé jusqu'à [(26*a*), § 6]. En vertu de (13*a*) nous remplaçons [(26*a*), § 6] par

$$(14)\qquad |W_\nu(\alpha)| < \left[s_1 g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right) + b''\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right] e^{\sigma c_\nu} \qquad \left(\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}\right).$$

Les développements suivants [(26*a*), § 6] sont modifiés conformément à (14). *On conclut alors* {comparer avec [(28), § 6], [(29), § 6]},

$$(15)\qquad \lim_\nu B_\nu(\alpha) = M^{(1)}(\alpha) = 0 \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)],$$

quand

$$(16)\quad \left[s_1 g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right) + b''\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right][\varphi(\nu)]^{\frac{c_\nu}{a_{\nu,0}}} < B \qquad [\nu = 1, 2, \ldots; \textit{cf.}\ (14a)\ \S\ 6].$$

De l'hypothèse [(30), § 6)], on déduit ce qui va être dit au lieu de [(31), § 6]. $M^{(1)}(\alpha) = 0$ *pour* α *sur* (ζ_0, α_0) *si*

$$(16a)\qquad \left[s_1 g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right) + b''\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right][\varphi(\nu)]^{\frac{a'}{\sigma'_\nu} g^{\frac{1}{\sigma'_\nu}}} < B$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots;\ g > 1;\ g > 1;\ g \text{ dépend de } g').$$

$$\textit{cas I.} - g(u) \leqq e' u \qquad (u_0 \geqq u > 0).$$
$$\textit{cas II.} - u \leqq e'' g(u) \qquad (u_0 \geqq u > 0).$$

En vertu de (16*a*) *on trouve que* $M^{(1)}(\alpha) = 0$, *pour* α *sur* (ζ_0, α_0), *dans le cas* I *pourvu que*

$$(17)\qquad \gamma_{\nu+1} < t(\nu) \qquad [\textit{cf.}\ (34)\ \S\ 6;\ \nu = 1, 2, \ldots].$$

Dans le cas II *on voit que* $M^{(1)}(\alpha) = 0$ *pour* α *sur* (ζ_0, α_0) *si*

$$g\left(\frac{\gamma_{\nu+1}^2}{\sigma'_{\nu+1}}\right)[\varphi(\nu)]^{\frac{a'}{\sigma'_\nu} g^{\frac{1}{\sigma'_\nu}}} < B \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

En conséquence de [(32), §6] et si l'on prend $\sigma'_\nu = \dfrac{1}{m(\nu)}$, on remarque que (18) est vérifiée (pour une valeur B indépendante de ν) si

$$g[m(\nu+1)\gamma_{\nu+1}^2] < b_0\,\psi_1(\nu)^{-m(\nu) g^{m(\nu)}} \qquad [\psi_1(\nu) = \varphi(\nu)^{a'}]. \tag{18a}$$

Or (18 a) [dépendant de la fonction $g(u)$] implique que γ_ν tend vers zéro (quand $\nu \to \infty$) aussi vite ou plus vite que dans le cas I. γ_ν *doit tendre vers zéro avec* $\frac{1}{\nu}$ *d'autant plus vite que* $g(u)$ *y tend plus lentement afin d'obtenir l'annulation de* $M^{(1)}(\alpha)$ *quand* α *est sur* (ζ_0, α_0) {sujet à l'inégalité [(30), §6]}.

THÉORÈME IX. — *Supposons que les conditions du théorème* VIII (§6) *soient vérifiées. On peut alors affirmer que la dérivée première* $f^{(1)}(\alpha)$, *de toute fonction m. g. correspondante, est déterminée uniquement* {*dans un certain sous-ensemble connexe de* $E' = \overline{E}[(\sigma'_j)]$ $\left[\sigma'_j = \dfrac{1}{m(j)}\right]$ *contenant l'arc rectifiable* $\widehat{AB}$} *par ses valeurs sur un certain ensemble* Λ *non dense sur* $\widehat{AB}$ (*dénombrable, si l'on veut*). *Plus précisément : soit* α *un point de* $\widehat{AB}$ *tel qu'il existe un segment* (ζ_0, α_0), *dans* $E' = \overline{E}[(\sigma'_j)]$ $\left[\sigma'_j = \dfrac{1}{m(j)} > \sigma_j\right]$ *qui soit limite des deux côtés des segments* (ζ_0, β) $\left(\beta \text{ sur } \widehat{AB}\right)$ *situés dans* $\overline{E}[(\sigma_j)]$ $(\sigma_j = \lambda\gamma_j;\ \lambda > 1)$. *Soit* α_0 *un point « intérieur » de* Λ. *Selon la construction du paragraphe* 6 *nous obtenons une division* $\mathcal{D}\left(\alpha_0, \widehat{AB}\right)$ (*cf.* Déf. 6) [1]. *Alors* Λ *est un ensemble quelconque, non dense sur* AB *dont* α_0 *est un point d'accumulation* (*des deux*

---

(1) Le caractère de cette division (excepté pour quelques propriétés établies dans le paragraphe 6 et communes à toutes les divisions de ce genre) dépendra en général de α_0 et ζ_0. Le théorème VIII (§ 6) ne tient pas compte de cette circonstance.

côtés); *de plus*, Λ *a la propriété* [1]

$$\lambda_\nu < \lambda' \frac{\gamma^2_{\nu+1}}{\sigma'_{\nu+1}} \qquad [= \lambda' m(\nu+1)\gamma^2_{\nu+1};\ \nu = 1, 2, \ldots], \tag{19}$$

où les λ_ν *sont les nombres caractéristiques* (*cf.* Déf. 7) *par rapport à* Λ *et* $\mathcal{D}\big(\alpha_0, \widehat{\mathrm{AB}}\big)$. *Le sous-ensemble de* E′ *dans lequel* $f^{(1)}(\alpha)$ *est déterminée uniquement est du même type que dans le théorème* VIII (§ 6).

Théorème IX′. — *Supposons que* $g(u)$ *soit une fonction positive tendant vers zéro quand* u *diminue indéfiniment, telle que*

$$u \leqq e^u g(u) \qquad (u_0 \geqq u > 0).$$

Supposons que C(E) *soit couvert par un ensemble de domaines* [(1), § 4] *et que*

$$g[m(\nu+1)\gamma^2_{\nu+1}] < b_0 \psi(\nu)^{-m(\nu)g^{m(\nu)}} \qquad [\psi(\nu) \geqq 1;\ g > 1]; \tag{20}$$

que $m(\nu)$ *vérifie la condition en rapport avec* [(32), § 6] *et que* $\psi(\nu)$ *augmente indéfiniment avec* ν, *mais lentement. La dérivée première* $f^{(1)}(\alpha)$ *de toute fonction m. g. correspondante est déterminée uniquement par les valeurs de* $f^{(1)}(\alpha)$ *sur un ensemble quelconque* Λ (*dénombrable, si l'on veut*) *non dense sur un arc rectifiable* $\widehat{\mathrm{AB}}$ *dans* $\mathrm{E}' = \overline{\mathrm{E}}[(\sigma'_j)]$ $\left[\sigma'_j = \frac{1}{m(j)}\right]$, *et possédant les propriétés suivantes :* α_0 *et* $\mathcal{D}\big(\alpha_0, \widehat{\mathrm{AB}}\big)$ *ayant la signification indiquée au théorème* IX, Λ *a* α_0 *pour point « intérieur » et les nombres caractéristiques par rapport à* Λ *et* $\mathcal{D}\big(\alpha_0, \widehat{\mathrm{AB}}\big)$ *satisfont à*

$$\lambda_\nu < \lambda' g[m(\nu+1)\gamma^2_{\nu+1}] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Le sous-ensemble de E′ *dans lequel* $f^{(1)}(\alpha)$ *est déterminée uniquement contient* AB *et il est du même type que dans le théorème* VIII (§ 6).

Note. — Faisons les remarques suivantes concernant le sous-ensemble $\mathrm{E}'\left[= \mathrm{E}[(\sigma'_j)];\ \sigma'_j = \frac{1}{m(j)}\right]$ qui contient $\widehat{\mathrm{AB}}$ et dans lequel $f^{(1)}(\alpha)$ est déterminée uniquement par ses valeurs sur Λ

---

(1) *Voir* le cas I et (8).

$\left(\mathrm{A} \text{ sur } \widehat{\mathrm{AB}}\right)$. Désignons par $\{\alpha_0\}$ l'ensemble de tous les points α_0 de $\widehat{\mathrm{AB}}$ à chacun desquels on peut associer un ensemble de points $\{\zeta_0\}_{\alpha_0}$ tel que le segment (ζ_0, α_0) (ζ_0 de $\{\zeta_0\}_{\alpha_0}$) soit dans E′ et soit limite de deux côtés des segments (ζ_0, β) $\left(\beta \text{ sur } \widehat{\mathrm{AB}}\right)$ dans $\overline{\mathrm{E}}[(\sigma_j)]$ $(\sigma_j = \lambda\gamma_j;\ \lambda > 1)$; à un segment (ζ_0, α_0) nous associons une division $\mathrm{D}\left(\alpha_0, \widehat{\mathrm{AB}}\right)$, dépendant de ζ_0 (*cf.* Déf. 6). Si les nombres caractéristiques par rapport à α_0 et $\mathrm{D}\left(\alpha_0, \widehat{\mathrm{AB}}\right)$ (pour un ζ_0 de $\{\zeta_0\}_{\alpha_0}$) satisfont à (19) (cas du théorème IX) ou à (21) (cas du théorème IX′), la partie du segment (ζ_0, α_0), pour laquelle [(30), § 6] est vérifiée [1], appartiendra à $\mathrm{F}'_{\widehat{\mathrm{AB}}}$. Les points de $\mathrm{F}'_{\widehat{\mathrm{AB}}}$ ainsi obtenus formeront un ensemble coïncidant avec $\mathrm{F}'_{\widehat{\mathrm{AB}}}$, ou un sous-ensemble de l'ensemble g'-connexe du premier ordre contenant AB {*cf.* texte à la suite de [(33), § 6]}. L'ensemble $\mathrm{F}'_{\widehat{\mathrm{AB}}}$ sera défini de la même manière que l'ensemble $\mathrm{F}_{\widehat{\mathrm{AB}}}$ de la définition 5 (§ 6), avec *la seule modification suivante. Le segment* (α_0, α'_0) *de la ligne polygonale de la définition* 5 (§ 6) *est un segment de* $\mathrm{F}'_{\widehat{\mathrm{AB}}}$ [2]. Pour le voir il suffit d'observer que, dans les théorèmes IX et IX′, $\gamma_\nu \to 0$ avec $\frac{1}{\nu}$, aussi vite ou plus vite que dans le théorème VIII (§ 6).

8. **Problème E.** — Nous supposons d'abord que l'inégalité [(10), § 5] est vérifiée pour $m = 1$. A l'aide des notations du paragraphe 5 et du théorème VI (§ 5), on peut affirmer que

$$\mathrm{M}^{(1)}(\alpha) - \mathrm{W}_\nu^{(1)}(\alpha) = \mathrm{R}_\nu^{(1)}(\alpha) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

où

$$\mathrm{W}_\nu^{(1)}(\alpha) = \iint_{\mathrm{O}_\nu} \frac{-\Delta v(x, y)\, dx\, dy}{z - \alpha} \tag{1a}$$

et [*cf.* (17*a*) $m = 1$; (§ 5)]

$$|\mathrm{R}_\nu^{(1)}(\alpha)| < \sum_{j=\nu+1}^{\infty} j\, b\left(\frac{1}{j-1}\right) \text{mes.}(\mathrm{O}_j - \mathrm{O}_{j-1}) = r(\nu) \qquad (\alpha \text{ dans E}). \tag{1b}$$

(1) $g' > 1$ et dépend de g.

(2) C'est-à-dire (α_0, α'_0) appartient à un ensemble particulier (au lieu d'un ensemble quelconque) g'-connexe du premier ordre, ensemble contenant $\widehat{\mathrm{AB}}$.

Ici O_ν *est l'ensemble des points de* $C(E)$ *qui se trouvent à une distance* $> \frac{1}{\nu}$ *de la frontière* F *de* $C(E)$.

Soit $\widehat{AB}$ un arc dans E. Soit α_0 un point quelconque sur $\widehat{AB}$ jouissant de la propriété suivante. Il y a un point ζ_0 (dans E) tel que le segment (α_0, ζ_0) soit dans E et soit limite des deux côtés des segments (ζ_0, β) $\left(\beta \text{ sur } \widehat{AB}\right)$ situés dans E.

Soit N_ν l'ensemble des points dont la distance au segment ci-dessus (α_0, ζ_0) est égale ou inférieure à $\frac{1}{\nu}$. Il n'y aura aucun point de O_ν dans N_ν. Pour ν assez grand la frontière de N_ν coupera $\widehat{AB}$ en des points $A'_\nu B'_\nu$; A'_ν est sur $\widehat{A\alpha_0}$ et B'_ν est sur $\widehat{\alpha_0 B}$. Désignons par Γ'_ν, Γ''_ν les régions fermées limitées respectivement par les contours

$$B'_\nu \zeta_0, \quad \alpha_0 B'_\nu, \qquad A'_\nu \zeta_0, \quad \alpha_0 A'_\nu,$$

Parmi les segments (ζ_0, β) $\left(\beta \text{ sur } \widehat{\alpha_0 B'_\nu}\right)$ de E, situés dans Γ'_ν, il y en a un, (ζ_0, B_ν) $\left(B_\nu \text{ sur } \widehat{\alpha_0 B'_\nu}\right)$, pour lequel l'angle $\widehat{\beta\zeta_0\alpha_0}$ est maximum. De même, parmi les segments (ζ_0, β) $\left(\beta \text{ sur } \widehat{\alpha_0 A'_\nu}\right)$, qui se trouvent dans la partie commune à Γ''_ν et E, il y a un segment $(\zeta_0 A_\nu)$ pour lequel $\widehat{\beta\zeta_0\alpha_0}$ est maximum.

Soit Γ_ν *le domaine ouvert dont la frontière* (Γ_ν) *est* $B_\nu \zeta_0 A_\nu B_\nu$ (1).

Posons

$$(2) \qquad \widehat{B_\nu \zeta_0 A_\nu} = \pi K_\nu.$$

On remarque que

$$(2a) \qquad 0 < K_\nu < \frac{a'}{\nu} \qquad (a' \text{ est indépendant de } \nu) \quad (2).$$

Nous formons de nouveau la fonction

$$(3) \qquad q_\nu(\alpha) = e^{\left[(\alpha-\zeta_0)e^{-\sqrt{-1}\varphi_\nu}\right]^{\frac{1}{K_\nu}}}$$

(1) Bien entendu, Γ_ν est à l'intérieur de (Γ_ν).
(2) Ceci est une conséquence du fait que Γ_ν est dans N_ν.

où φ_ν est l'argument de la bissectrice $\zeta_0 \mathcal{D}_\nu$ de $\widehat{B_\nu \zeta_0 A_\nu}$. En remarquant que, pour α sur (ζ_0, α_0), on a $\left(\text{si } \mathcal{D}_\nu \text{ est sur } \widehat{\alpha_0 B_\nu}\right)$

$$(4)\qquad \begin{aligned}\varphi^{\alpha,\nu} &= \left|\arg[(\alpha-\zeta_0)\,e^{-\sqrt{-1}\,\varphi_\nu}]\right| = \widehat{D_\nu \zeta_0 \alpha_0} \\ &= \widehat{D_\nu \zeta_0 A_\nu} - \widehat{\alpha_0 \zeta_0 A_\nu} = \frac{1}{2}\widehat{B_\nu \zeta_0 A_\nu} - \widehat{\alpha_0 \zeta_0 A_\nu}.\end{aligned}$$

Par (4) et (2)

$$(5)\qquad \varphi_{\alpha,\nu} = \left|\arg[(\alpha-\zeta_0)\,e^{-\sqrt{-1}\,\varphi_\nu}]^{\frac{1}{K_\nu}}\right| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{K_\nu}\widehat{\alpha_0 \zeta_0 A_\nu} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)].$$

De même, quand $\mathcal{D}_\nu$ est sur $\widehat{\alpha_0 A_\nu}$,

$$(5a)\qquad \varphi_{\alpha,\nu} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{K_\nu}\widehat{\alpha_0 \zeta_0 B_\nu} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)].$$

Soit $t(\nu)$ une fonction telle que

$$(6)\qquad \widehat{\alpha_0 \zeta_0 A_\nu} \geqq t(\nu), \qquad \widehat{\alpha_0 \zeta_0 B_\nu} \geqq t(\nu).$$

On a alors $2t(\nu) \leqq \pi K_\nu$. (5), (5a) et (6) entraînent

$$(7)\qquad \varphi_{\alpha,\nu} \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{t(\nu)}{K_\nu} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)]$$

et

$$(7a)\qquad \cos\varphi_{\alpha,\nu} \geqq \cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{t(\nu)}{K_\nu}\right] > \frac{2}{\pi}\,\frac{t(\nu)}{K_\nu} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0);\ \nu \geqq \nu_0].$$

Ainsi, en vertu de (3), (5) et (7a)

$$(8)\qquad |q_\nu(\alpha)| > e^{|\alpha-\zeta_0|^{\frac{1}{K_\nu}}\lambda(\nu)} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)],$$

où

$$(8a)\qquad \lambda(\nu) = \frac{2\,t(\nu)}{\pi K_\nu} \qquad [cf.\ (6) \text{ et } (2)].$$

Supposons maintenant que $M^{(1)}(\alpha) = 0$ sur $\widehat{AB}$. (1) nous donne

$$(9)\qquad |W_\nu^{(1)}(\alpha)| = |M^{(1)}(\alpha) - R_\nu^{(1)}(\alpha)| = |R_\nu^{(1)}(\alpha)| < r(\nu) \qquad \left[\alpha \text{ sur } \widehat{AB};\ cf.\ (1b)\right].$$

Puisque $(\zeta_0 A_\nu)$, $(\zeta_0 B_\nu)$ sont dans E, on déduit que

$$(10)\qquad |W_\nu^{(1)}(\alpha)| < W \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0 A_\nu),\ (\zeta_0 B_\nu)].$$

Considérons la fonction

$$(11)\qquad T_\nu(\alpha) = W_\nu^{(1)}(\alpha)\, q_\nu^\sigma(\alpha) \qquad (\sigma > 0).$$

$T_\nu(\alpha)$ est analytique dans Γ_ν et

$$(12)\qquad |T_\nu(\alpha)| < W \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0 A_\nu),\ (\zeta_0 B_\nu)].$$

(9) donne

$$(13)\qquad |T_\nu(\alpha)| < r(\nu)\, e^{\sigma R^{\frac{1}{K_\nu}}} \qquad \left[\alpha \text{ sur } \widehat{A_\nu B_\nu}\right],$$

R désigne $\max|\zeta_0 - \beta|\big(\beta \text{ sur } \widehat{AB}\big)$. Ainsi

$$(14)\qquad |T_\nu(\alpha)| < W + r(\nu) e^{\sigma R^{\frac{1}{K_\nu}}} \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)].$$

En vertu de (11), (8) et (14)

$$(15)\qquad |W_\nu^{(1)}(\alpha)| < \left[W + r(\nu) e^{\sigma R^{\frac{1}{K_\nu}}}\right] e^{-\sigma|\alpha - \zeta_0|^{\frac{1}{K_\nu}}\lambda(\nu)},$$

quand α est sur (z, α_0). Si la condition (20) ci-contre est vérifiée, on a

$$(15a)\qquad e^{-\sigma|\alpha-\zeta_0|^{\frac{1}{K_\nu}}\lambda(\nu)} \leqq e^{-\sigma\lambda(\nu) g_0^{\frac{1}{K_\nu}}} \qquad \left(g_0 = \frac{R}{g'}\right).$$

Définissons σ de manière que

$$e^{-\sigma\lambda(\nu) g_0^{\frac{1}{K_\nu}}} = \frac{1}{\varphi(\nu)} \leqq 1,$$

où $\varphi(\nu)$ augmente indéfiniment avec ν. Substituant cette valeur de σ dans le second membre de (15), on trouve que, grâce à (15a),

$$(16)\qquad \lim_\nu W_\nu^{(1)}(\alpha) = M^{(1)}(\alpha) = 0 \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0)]$$

quand

$$(17)\qquad r(\nu)\,\varphi(\nu)^{\lambda''(\nu)} \leqq B_1 \qquad [\nu = 1, 2, \ldots;\ cf.\ (1b)],$$

$$(17a)\qquad \lambda''(\nu) = \frac{1}{\lambda(\nu)} (g')^{\frac{1}{K_\nu}}.$$

A cause de (17) *et* (1 b) *on voit que* (16) *est certainement vérifiée quand* $b(\rho)$ *tend vers zéro assez rapidement, avec* ρ. Des résultats plus précis sont cependant à désirer.

Supposons que $\dfrac{b(\rho)}{\rho}$ *tende vers zéro avec* ρ *et que* $\dfrac{b(\rho)}{\rho}$ *soit une fonction monotone, ou plus généralement que*

$$\frac{b\left(\frac{1}{\nu+r}\right)(\nu+r+1)}{b\left(\frac{1}{\nu}\right)(\nu+1)} \leqq \bar{b} \qquad (r=1, 2, \ldots). \tag{18}$$

En conséquence de la condition ci-dessus

$$r(\nu) < \beta_1 \nu\, b\left(\frac{1}{\nu}\right) \text{mes.}[\mathrm{C(E)} - \mathrm{O}_\nu] \leqq \beta \nu\, b\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{19}$$

Supposons α *sur la partie de* (α_0, ζ_0) *pour laquelle*

$$\frac{\mathrm{R}}{|\alpha - \zeta_0|} \leqq g' \qquad (g' > 1). \tag{20}$$

En vertu de (19) et (17a) l'inégalité (17) est vérifiée (pour B convenable) si

$$\nu\, b\left(\frac{1}{\nu}\right) \varphi(\nu)^{(g')^{\frac{1}{\mathrm{K}_\nu}} \frac{1}{\lambda(\nu)}} \leqq \mathrm{B}' \qquad [cf.\ (8a)]. \tag{21}$$

En vertu de l'inégalité suivant (6)

$$\frac{1}{\mathrm{K}_\nu} \leqq \frac{\pi}{2\, t(\nu)}$$

et, en vertu de (8a) et (2a),

$$\frac{1}{\lambda(\nu)} = \frac{\pi \mathrm{K}_\nu}{2\, t(\nu)} < \frac{a''}{\nu\, t(\nu)}, \qquad (g')^{\frac{1}{\mathrm{K}_\nu}} \frac{1}{\lambda(\nu)} < a'' \frac{1}{\nu\, t(\nu)} g^{\frac{1}{t(\nu)}} \tag{22}$$
$$\left(g = g' \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, pour obtenir (16), il suffit d'avoir

$$\nu\, b\left(\frac{1}{\nu}\right) \psi_1(\nu)^{l(\nu)} \leqq \mathrm{B}'', \tag{22a}$$

où

$$l(\nu) = \frac{1}{\nu\, t(\nu)} g^{\frac{1}{t(\nu)}}, \qquad \psi_1(\nu) = \varphi^{a''}(\nu).$$

Posons $\rho = \frac{1}{\nu}$ et

$$(23) \qquad t\left(\frac{1}{\rho}\right) = h(\rho), \qquad \psi(\rho) = \psi_1\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Bien entendu

$$\lim_{\rho=0} h(\rho) = 0, \qquad \lim_{\rho=0} \frac{1}{\psi(\rho)} = 0.$$

En substituant $\rho = \frac{1}{\nu}$ dans (22a), on observe que la relation (16) [sous la condition (20)] est impliquée par

$$(24) \qquad b(\rho) < B\rho\,\psi(\rho)^{-\frac{\rho}{h(\rho)} g^{\frac{1}{h(\rho)}}} \qquad [\rho_0 \geqq \rho > 0;\ cf.\ (22)].$$

Théorème X. — *Soit* $\widehat{AB}$ *un arc dans* $E - (K)$. *Soit* α_0 *un point quelconque sur* $\widehat{AB}$ *tel qu'il y ait un segment* (ζ_0, α_0) *dans* $E - (K)$ *limite des deux côtés des segments* (ζ_0, β) $(\beta$ *sur* $\widehat{AB})$ *situés dans* E. *Soient* A_ν *et* B_ν *des points sur* $\widehat{\alpha_0 A}$ *et* $\widehat{\alpha_0 B}$, *respectivement, tels que l'angle* $\widehat{A_\nu \zeta_0 B_\nu}$ *soit maximum sous les conditions suivantes :*

1° *Les côtés de l'angle* (1) *sont des segments situés dans* E;

2° *Le domaine limité par* $A_\nu \zeta_0 B_\nu A_\nu$ *se trouve dans la région* N_ν *ensemble des points dont la distance au segment* (ζ_0, α_0) *est* $\leqq \frac{1}{\nu}$ (2).

Soit $t(\nu)\,(>0)$ *une fonction* (3) *telle que* (6) *soit vérifiée pour* $\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \ldots$.

Considérons les fonctions $f^{(1)}(z)$ $[f(z)$ *m. g. dans* E] *pour lesquelles* (24) *est vérifiée, la fonction* $\Psi(\rho) \geqq 0$, *augmentant indéfini-*

---

(1) Les côtés d'un angle, dans ce paragraphe, sont toujours des segments joignant le sommet à l'arc $\widehat{AB}$.

(2) Nous prenons $\nu \geqq \nu_0$ (ν_0 assez grand).

(3) Cette fonction est définie pour tous les $\nu \geqq \nu_0$. On peut prendre $t(\nu)$ égal au moindre des deux angles (6), quand ν est un nombre entier ($\geqq \nu_0$).

ment avec $\frac{1}{\rho}$, *g étant supérieur à* $\frac{\pi}{2}$ *et* $h(\rho)$ *égalant* $t\left(\frac{1}{\rho}\right)$ ([1]). *Alors, quand* $f^{(1)}_{(z)} = 0$ *sur* $\widehat{AB}$, *on a nécessairement* $f^{(1)}(z) = 0$ *sur la partie du segment* (ζ_0, α_0) *pour laquelle* (20) *est vérifiée* $\left(g' = \frac{2g}{\pi}\right)$.

Note. — Le résultat ci-dessus signifie que dans les conditions indiquées, les valeurs de $f^{(1)}(z)$ sur $\widehat{AB}$ déterminent $f^{(1)}(z)$ uniquement sur la partie spécifiée du segment (ζ_0, α_0). Ce théorème nous donne, pour ainsi dire, un appareil relatif à un type de prolongement analytique au moyen d'une ligne polygonale. C'est un procédé du genre décrit dans le paragraphe 6. On passe de $\widehat{AB}$ au premier segment (comme il est indiqué dans le théorème) et du premier segment à un autre, etc., en faisant jouer chaque fois au dernier segment précédemment employé le rôle de l'arc $\widehat{AB}$ du théorème. Bien entendu, il faut constamment faire attention à satisfaire aux conditions du théorème, afin de pouvoir obtenir les valeurs de la fonction sur le segment suivant. En particulier, il faut faire attention à ce que les inégalités du type (6) $\left[\text{avec } t\left(\frac{1}{\rho}\right) = h(\rho)\right]$ soient vérifiées à chaque étape; de plus, l'extension n'est valable que pour un segment pour lequel une inégalité du type (20) est vérifiée. On peut préciser sans difficulté le procédé.

9. **Problème F.** — Dans cette section ainsi que dans la suivante nous emploierons certains résultats, dus à M. Borel ([2]), de la théorie des développements de Mittag-Leffler. *Énonçons d'abord ces résultats* [*cf.* texte en rapport avec (1), ..., (4*a*)].

Soit $S(R, r)$, où $R > 1$ et $r < 1$, la région fermée obtenue comme il suit. De l'origine O traçons les tangentes OA″, OB″ au cercle

$$|z - 1| = r. \tag{1}$$

Désignons par A′, B′ les points de contact, les points A″, B″ étant

---

([1]) B et $\Psi(\rho)$ peuvent être différents pour les diverses fonctions $f(z)$.

([2]) É. Borel, *Sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles* (*Acta Math.*, vol. 24, p. 309-382; en particulier, p. 354-358).

sur la circonférence

$$(2) \qquad |z| = \mathrm{R}.$$

$\mathrm{S}(\mathrm{R}, r)$ est la région connexe contenant O et limitée par les segments A′A″, B′B″, par le plus grand arc A″B″ de (2) et par le plus petit arc A′B′ de (1). Écrivons

$$(3) \qquad g_n(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{n^4} \sum_{\lambda_2=0}^{n^8} \cdots \sum_{\lambda_n=0}^{n^{4n}} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)!}{\lambda_1!, \ldots, \lambda_n!} \left(\frac{z}{n}\right)^{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n},$$

$$(3a) \qquad \mathrm{G}_0(z) = g_0(z) = 1, \qquad \mathrm{G}_n(z) = g_n(z) - g_{n-1}(z) = \sum_{r=0}^{\alpha_n} g_{n,r} z^r$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

On a alors

$$(4) \qquad \frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{G}_n(z),$$

où

$$(4a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\mathrm{G}_n(z)| < \mathrm{M}(\mathrm{R}, r) = \mathrm{R}^{\left(\frac{8\mathrm{R}}{r}\right)^{\frac{32\mathrm{R}}{r}}} + 2$$

si z est dans $\mathrm{S}(\mathrm{R}, r)$. La série figurant dans (4a) converge uniformément.

Cherchons raréfaction de C(E) qui permet le développement M. L. de $f^{(1)}(z)$ [$f(z)$ m. g. dans E − (K)]. Il suffit d'opérer sur $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha)$. Nous avons

$$(5) \qquad \mathrm{M}^{(1)}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{M}_i^{(1)}(\alpha), \qquad \mathrm{M}_i^{(1)}(\alpha) = \iint_{\mathrm{Q}_i} \frac{-\Delta v(x, y)\, dx\, dy}{z - \alpha},$$

ici, comme précédemment, Q_i est une partie certaine de C(E) à l'intérieur de $|z - \mathrm{A}_i| < \gamma_i$ et α est dans $\mathrm{E}' = \overline{\mathrm{E}}[(\sigma'_j)]$ (*cf.* Déf. 3, § 4) avec

$$(5a) \qquad \sigma'_j > \lambda \gamma_j \qquad \left(j = 1, 2, \ldots; \lambda \geqq \frac{\pi}{2}\right).$$

Soit (ζ_0, α_0) *un segment situé dans* E′. Pour z dans Q_i on a

$$(6) \qquad |z - \alpha_0|, \qquad |z - \alpha| > \sigma'_i - \gamma_i \qquad [\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0);\ i = 1, 2, \ldots].$$

Or, en vertu de (4)

$$(7)\qquad \frac{1}{z-\alpha}=\frac{1}{z-\alpha_0}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right)}\right]=\frac{1}{z-\alpha_0}\sum_{n=0} G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-z_0}\right).$$

En conséquence de (5) et (7)

$$(8)\qquad M_i^{(1)}(\alpha)=\iint_{Q_i}\frac{-\Delta\varphi(x,y)}{z-\alpha_0}\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right)dx\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}H_{n,i}(\alpha-\alpha_0),$$

où

$$(8a)\qquad H_{n,i}(\alpha-\alpha_0)=\iint_{Q_i}\frac{-\Delta\varphi(x,y)}{(z-\alpha_0)}G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right)dx\,dy$$

est un polynome du type M. L. (pour le point α_0). Nous avons, sous des conditions convenables de convergence (à mentionner plus tard),

$$(9)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}|H_{n,i}(\alpha-\alpha_0|\leqq\iint_{Q_i}\left|\frac{\Delta\varphi(x,y)}{z-\alpha_0}\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left|G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right)\right|dx\,dy,$$

Prenons une valeur de R telle que le point n,

$$(10)\qquad n=\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0},$$

soit dans $S\left(R,\frac{1}{R}\right)$ quand z est dans Q_i et le segment (α_0,α) dans E'; on peut prendre,

$$(11)\qquad R=\frac{a'}{\sigma_i'},$$

a' ayant une valeur convenable.

Pour le démontrer notons d'abord que, par

$$(5a)\ \sigma_i'-\gamma_i>\sigma_i'\lambda'\qquad\left(\lambda'=1-\frac{1}{\lambda}>0\right);$$

ainsi, en vertu de (6) et puisque $|\alpha-\alpha_0|\leqq L$,

$$(12)\qquad \left|\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right|<\frac{L}{\sigma_i'\lambda'}\qquad (z \text{ dans } Q_i;\ \alpha,\alpha_0 \text{ dans } E').$$

$|u|$ est donc inférieur à R si

$$(13) \qquad a' \geqq \frac{L}{\lambda'}.$$

De même en vertu de (6) et (5) et puisque $|z-\alpha_0| \leqq L$

$$|u-1| = \left|\frac{\alpha - z}{z-\alpha_0}\right| > \frac{\sigma'_i - \gamma_i}{|z-\alpha_0|} \geqq \frac{\sigma'_i - \gamma_i}{L} > \frac{\sigma'_i \lambda'}{L}$$

pour z dans Q_i et α, α_0 dans E. Nous avons $|u-1| > \frac{1}{R}$ si

$$\frac{\sigma'_i \lambda'}{L} \geqq \frac{1}{R} = \frac{\sigma'_i}{a'};$$

c'est la condition (13). Soit $\theta (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ l'angle formé par les segments (α_0, α), (α_0, z) [α sur (α^0, ζ^0)]. Quand $\mathrm{R}u > 0$, θ ou $2\pi - \theta$ est moindre que $\frac{\pi}{2}$, *Il reste à assurer l'inégalité*

$$(14) \qquad \sin\left(\frac{1}{2}\widehat{B''OA''}\right) = \frac{1}{R} < |\sin\theta|$$

pour u tel que

$$(14a) \quad OA' = \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}} \leqq |u|, \qquad \mathrm{R}u > 0 \qquad [z \text{ dans } S_i(\gamma);\ (\alpha, \alpha_0) \text{ dans } E'].$$

Or z est à l'intérieur du cercle $S_i(\gamma)$, de centre A_i et de rayon γ_i. Le segment (α_0, α) est extérieur ou tangent au cercle $S_i(\sigma')$, de centre A_i et de rayon σ'_i. Il est clair que θ et $2\pi - \theta$ sont $\geqq \theta_{\alpha_0}$, où θ_{α_0} est l'angle formé par les tangentes menées de α_0 à $S_i(\gamma)$ et $S_i(\sigma')$, l'angle en question ne contenant pas A_i. En calculant cet angle on obtient

$$(15) \qquad \theta > \arcsin\frac{\sigma'_i}{|A_i - \alpha_0|} - \arcsin\frac{\gamma_i}{|A_i - \alpha_0|} > \frac{{}_1a\sigma'_i}{|A_i - \alpha_0|} \geqq a_1\sigma'_i$$
$$\left(a_1 = \frac{{}_1a}{L}\right) \quad (^1)$$

puisque $|A_i - \alpha_0| \leqq L$. Si θ est le plus petit des deux angles formés par les segments (α_0, α), (α_0, z), alors, puisque $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ on a $\theta < \frac{\pi}{2}$

---

(1) Ceci est établi en employant l'inégalité $\lambda \geqq \frac{\pi}{2}$ de (5a).

pour $\mathrm{R}u > 0$. En vertu de (15) nous avons alors $\sin\theta > \bar{a}\sigma'_i$. Pour $\bar{a}$ convenable cette dernière inégalité sera valable pour les deux angles θ si nous remplaçons $\sin\theta$ par $|\sin\theta|$. Ainsi, dans tous les cas,

$$(15a) \qquad |\sin\theta| > \bar{a}\sigma'_i \qquad [\mathrm{R}u > 0;\ z \text{ dans } \mathrm{S}_i(\gamma);\ (\alpha_0, \alpha) \text{ dans } \mathrm{E}'].$$

Donc, en vertu de (11) on observe que (14) est vérifiée si

$$\bar{a}\sigma'_i \geqq \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{\sigma'_i}{a'},$$

c'est-à-dire si

$$(15b) \qquad a' \geqq \frac{1}{\bar{a}}.$$

Il est donc établi que *le point u représenté par* (10), *est dans* $\mathrm{S}\left(\mathrm{R}, \frac{1}{\mathrm{R}}\right)$, R *étant donné par* (11) *avec a' assez grand* [pour satisfaire à (13) et (15 b)].

En tenant compte de ce qu'on vient d'établir, et en conséquence de (9) et du résultat (4a) de M. Borel, nous déduisons que

$$(16) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\mathrm{H}_{n,i}(\alpha - \alpha_0)| \leqq \mathrm{M}\left(\mathrm{R}_i, \frac{1}{\mathrm{R}_i}\right) \iint_{\mathrm{Q}_i} \left| \frac{\Delta\varphi(x, y)\, dx\, dy}{z - \alpha_0} \right|$$
$$\left[\mathrm{R}_i = \frac{a'}{\sigma'_i};\ \text{segment } (\alpha_0, \alpha) \text{ dans } \mathrm{E}'\right].$$

D'où, en vertu de (6) et de l'inégalité à la suite de (11),

$$(16a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\mathrm{H}_{n,i}(\alpha - \alpha_0)| < b' \frac{\gamma_i^2}{\sigma'_i} \mathrm{M}\left(\mathrm{R}_i, \frac{1}{\mathrm{R}_i}\right) \qquad [(\alpha_0, \alpha) \text{ dans } \mathrm{E}'].$$

En conséquence de (5), (8) et (16 a), il vient alors

$$(17) \qquad |\mathrm{M}^{(1)}(\alpha)| \leqq \sum_i \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_{n,i}(\alpha - \alpha_0) \right| < \sum_i b' \frac{\gamma_i^2}{\sigma'_i} \mathrm{M}\left(\mathrm{R}_i, \frac{1}{\mathrm{R}_i}\right) = \Gamma$$
$$[\alpha \text{ sur } (\zeta_0, \alpha_0);\ (\zeta_0, \alpha_0) \text{ sur } \mathrm{E}],$$

où la série Γ *majore la série du second membre* [1].

---

[1] Cette dernière série majore la série (5) représentant $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha)$.

Supposons que Γ *converge*. On peut l'assurer de la façon suivante. Posons

$$(18) \qquad \sigma'_i = \frac{1}{m(i)}, \qquad \sum_i \frac{1}{m^2(i)} < \text{mes.}\,\mathrm{K} \quad (^1).$$

Alors $\mathrm{R}_i = a' m(i)$ et en vertu de $(4\,a)$

$$(19) \quad \mathrm{M}\left(\mathrm{R}_i, \frac{1}{\mathrm{R}_i}\right) = [a'\, m(i)]^{[8(a')^2 m^2(i)]^{[32(a')^2 m^2(i)]}+2} < [(\sigma\, m(i)]^{[\sigma^2 m^2(i)]^{[\sigma^2 m^2(i)]}}.$$

Si donc nous prenons $\sigma > 0$ assez grand, *la convergence de* Γ *est assurée quand*

$$(20) \quad \gamma_i^2 < s_i \frac{1}{m(i)} [\sigma\, m(i)]^{-[\sigma^2 m^2(i)]^{[\sigma^2 m^2(i)]}} \qquad (i = 1, 2, \ldots;\ \Sigma s_i \text{ convergente}) \quad (^2).$$

Sous la condition (20) *la série formelle de Taylor, autour de* α_0, *de* $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha)$ *est sommable M. L. sur chaque segment* (α_0, ζ_0) *dans* E'. Pour établir cela nous observons d'abord que la série double

$$(21) \qquad \mathrm{M}^{(1)}(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_{n,i}(\alpha - \alpha_0) \qquad [cf.\ (5),\ (8)]$$

est absolument convergente [sur (α_0, ζ_0)]; cela est une conséquence de (17). En groupant les termes dans (21), on obtient

$$(22) \qquad \mathrm{M}^{(1)}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n\ (\alpha - \alpha_0),$$

$$(22\,a) \qquad \mathrm{H}_n(\alpha - \alpha_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{H}_{n,i}(\alpha - \alpha_0).$$

La série (22) converge sur (α_0, ζ_0). Puisque $\mathrm{C(E)} = \mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 + \ldots$, on conclut, en vertu de $(22\,a)$ et $(8\,a)$

$$(23) \quad \mathrm{H}_n(\alpha - \alpha_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \iint_{\mathrm{Q}_i} \cdots = \iint_{\mathrm{C(E)}} \frac{-\Delta\,\varphi(x, y)}{(z - \alpha_0)} \mathrm{G}_n\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{z - \alpha_0}\right) dx\, dy.$$

---

(1) Nous avons alors mes. E' > 0.

(2) A l'aide de (19) on peut obtenir une inégalité un peu plus précise.

De plus, en vertu de (3 a)

$$(23a) \quad H_n(\alpha - \alpha_0) = \sum_{r=0}^{\alpha_n} g_{n,r} \left[\iint_{C(E)} \frac{-\Delta \varphi(x, y)\, dx\, dy}{(z - \alpha_0)^{r+1}} \right] (\alpha - \alpha_0)^r$$

$$= \sum_{r=0}^{\alpha_n} g_{n,r} \frac{M^{(r+1)}(\alpha_0)}{r!} (\alpha - \alpha_0)^r \qquad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Ici, les $g_{n,r}$ sont les constantes figurant dans (3 a), fixées une fois pour toutes. Ainsi $H_n(\alpha - \alpha_0)$ est bien un polynome M. L. et (22) est une représentation M. L. de $M^{(1)}(\alpha)$ en fonction des valeurs

$$M^{(r+1)}(\alpha_0) \qquad (r = 0, 1, \ldots),$$

cette représentation étant valable sur tout segment (α_0, ζ_0) dans E'. En particulier, si $M^{(r+1)}(\alpha_0) = 0$ $(r = 0, 1, \ldots)$ pour un point α_0 dans E', $M^{(1)}(\alpha) = 0$ sur tout segment (α_0, ζ_0) dans E'. La manière d'opérer le prolongement analytique (plus exactement, quasi analytique), rattachée au procédé dont nous avons parlé, est facile à voir.

Or la dérivée $f^{(1)}(\alpha)$ d'une fonction m. g. est représentable par

$$2\pi f^{(1)}(\alpha) = h^{(1)}(\alpha) + M^{(1)}(\alpha) \qquad [\alpha \text{ dans } E - (K)],$$

où $h(\alpha)$ est analytique dans K. Si nous ajoutons au développement M. L. (autour de α_0) de $M^{(1)}(\alpha)$ le développement correspondant de $h^{(1)}(\alpha)$, nous obtenons le développement M. L. (autour de α_0) de $2\pi f^{(1)}(\alpha)$, valable sur tous les segments (α_0, ζ_0) situés dans E' — (K).

Théorème XI. — *Supposons que* C(E) *soit couvert par un ensemble de domaines* [(1), § 4] *les* γ_ν *satisfaisant à* (20), *et les* $m(i)$ *à* (18). *Les dérivées premières* $f^{(1)}(\alpha)$ *des fonctions m. g. correspondantes seront alors quasi analytiques dans*

$$E' - (K), \qquad E' = \hat{E}[(\sigma_{i'})] \qquad \left[(cf.\ \text{Déf. 3, § 4}); \text{ ici } \sigma'_i = \frac{1}{m(i)};\ i = 1, 2, \ldots \right],$$

c'est-à-dire qu'il y aura détermination unique par les valeurs

$$(24) \qquad f^{(r+1)}(\alpha_0) \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

[α_0 *point fixé quelconque dans* $E' - (K)$]. *L'ensemble* F_{α_0} *sur lequel la détermination unique est certaine est de la forme*

$$F_{\alpha_0} = F_{\alpha_0,1} = F_{\alpha_0,2} + \ldots$$

où $F_{\alpha_0,1}$ *est l'ensemble de tous les segments* (α_0, ζ_0) *dans* $E' - (K)$, $F_{\alpha_0,2}$ *est l'ensemble de tous les segments* $(\alpha_{0,1}, \zeta_{0,1})$ *dans* $E' - (K)$ *qui peuvent être formés en prenant* $\alpha_{0,1}$ *sur* $F_{\alpha_0,1}$, $F_{\alpha_0,3}$ *est l'ensemble de tous les segments* $(\alpha_{0,2}, \zeta_{0,2})$ *dans* $E' - (K)$ *qui peuvent être formés en prenant* $\alpha_{0,2}$ *sur* $F_{\alpha_0,2}$, *etc. De plus,* $f^{(1)}(\alpha)$ *peut être représentée effectivement en fonction des valeurs* (24) *sur l'ensemble* F_{α_0}. *Cette représentation peut être effectuée à l'aide d'applications successives de la sommation M. L. (de séries formelles de Taylor convenables).*

10. **Problème G.** — Comme dans la section 9, (α_0, ζ_0) *indiquera un segment dans* E. Nous voulons trouver des conditions à imposer à $b(\rho)$ [*cf.* (14), § 2] pour qu'un développement M. L., autour de α_0, soit valable pour $M^{(1)}(\alpha)$, quand α est sur (α_0, ζ_0). Supposons d'abord que [(10), § 5] soit vérifiée pour $m = 1$. Alors le théorème VI (§ 5) donne

$$M^{(1)}(\alpha) = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{(1)}(\alpha) \qquad (\alpha \text{ dans E}), \tag{1}$$

où

$$A_\nu^{(1)}(\alpha) = \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \frac{-\Delta\varphi(x, y)\,dx\,dy}{z - \alpha}. \tag{2}$$

Soit

$$u = \frac{\alpha - \alpha_0}{z - \alpha_0}. \tag{3}$$

Nous désirons trouver des valeurs R_ν, r_ν telles que le point u soit dans la région $S(R_\nu, r_\nu)$ (définie comme dans le paragraphe 9) quand on a

$$z \text{ dans } O_\nu - O_{\nu-1}, \quad \alpha \text{ sur } (\alpha_0, \zeta_0), \quad (\alpha_0, \zeta_0) \text{ dans E}. \tag{4}$$

Tout d'abord

$$|z - \alpha_0| \leqq L, \qquad |\alpha - \alpha_0| \leqq L, \tag{5}$$

et *lorsque l'hypothèse* (4) est vérifiée

$$|z - \alpha| > \frac{1}{\nu}, \qquad |z - \alpha_0| > \frac{1}{\nu}. \tag{5a}$$

D'où

$$|u| < L\nu.$$

On aura

(6) $$|u| < R_\nu \quad [\text{sous les conditions } (4)]$$

si R_ν est pris tel que

(6 *a*) $$R_\nu \geqq L\nu.$$

D'autre part, (5 *a*) et (5) entraînent

$$|u - 1| = \left|\frac{\alpha - z}{z - \alpha_0}\right| > \frac{1}{\nu|z - \alpha_0|} \geqq \frac{1}{\nu L}.$$

Ainsi, quand R_ν satisfait à (6 *a*), on a aussi

(7) $$|u - 1| > \frac{1}{R_\nu}.$$

Soit $\theta (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ l'angle formé par les segments (α_0, α), (α_0, z) [α sur (α_0, ζ_0)]. Quand $|u| \geqq 1$, de sorte que

(8) $$|\alpha_0 - \alpha| \geqq |\alpha_0 - z|,$$

et $Ru > 0$, on a

(8 *a*) $$|\sin\theta| > \frac{1}{L\nu}.$$

C'est une conséquence des considérations suivantes. Du point z on peut abaisser une perpendiculaire sur le segment (α_0, α). Nécessairement θ ou $2\pi - \theta$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ (puisque $Ru > 0$). Ainsi, en vertu de (8), le pied α' de la perpendiculaire sera sur (α_0, α), entre α_0 et α. Le segment (α_0, α) étant dans E et z dans O_ν, la distance de z à un point quelconque de (α_0, α) sera $> \frac{1}{\nu}$. En particulier,

(9) $$|z - \alpha'| > \frac{1}{\nu}.$$

En vertu de (5) et (9), quand $Ru > 0$ on a

$$|\sin\theta| = \left|\frac{z - \alpha'}{\alpha_0 - z}\right| > \frac{1}{\nu|\alpha_0 - z|} \geqq \frac{1}{\nu L} \quad [\text{sous les conditions } (4) \text{ et } (8)].$$

Ceci démontre bien le résultat (8 a). On peut l'interpréter, ainsi que (6) et (7), de la manière suivante :

Sous l'hypothèse (4), *u représente un point d'une certaine région* Γ_ν,

$$\Gamma_\nu = S_\nu - S_{\nu,1} - P_\nu. \tag{10}$$

S_ν et $S_{\nu,1}$ sont les régions

$$|u'| < L\nu, \qquad |u' - 1| \leqq \frac{1}{L\nu}, \tag{10a}$$

respectivement. P_ν est l'ensemble des points u' pour lesquels

$$-\arc\sin\left(\frac{1}{L\nu}\right) \leqq \arg u' \leqq \arc\sin\left(\frac{1}{L\nu}\right), \qquad 1 \leqq |u'| \leqq L\nu.$$

On remarque que les segments rectilignes limitant P_ν sont les portions interceptées par les cercles

$$|u'| = 1, \qquad |u'| = L\nu,$$

sur les tangentes (issues de $u' = 0$) au cercle

$$|u' - 1| = \frac{1}{L\nu}. \tag{11}$$

Traçons la droite joignant $u' = 0$ à un des points d'intersection des cercles $|u'| = 1$ et (11). Soit r_ν la distance de $u' = 1$ à cette droite. Un calcul simple montre que

$$\frac{1}{L\nu} > r_\nu \geqq \frac{r'}{L\nu} \qquad (1 > r' > 0), \tag{12}$$

où r' est indépendant de ν.

La région $S(L\nu, r_\nu)$ [*cf.* commencement du § 9 et (12)] est contenue dans Γ_ν [*cf.* (10)]. *Ainsi u représente un point dans* $S(L_\nu, r_\nu)$, *pourvu que les conditions* (4) *soient vérifiées.*

En vertu de [(4), § 9]

$$\frac{1}{z - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha_0}\,\frac{1}{1 - u} = \frac{1}{z - \alpha_0}\sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{z - \alpha_0}\right). \tag{13}$$

En conséquence de (4 a, § 9) et de l'affirmation ci-dessus,

$$(13a) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left| G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right) \right| < M(L\nu, r_\nu) = (L\nu)^{[8L\nu/r_\nu]^{[32L\nu/r_\nu]}+2}$$

toujours quand l'hypothèse (4) est vérifiée. En vertu de (12)

$$(13b) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left| G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right) \right| < (L\nu)^{(l\nu^2)^{l\nu^2}} = K(\nu)$$

pour $l > 0$ convenable. Donc la fonction A_ν de la relation (2) peut être développée comme il suit :

$$(14) \qquad A_\nu^{(1)}(\alpha) = \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \frac{-\Delta\varphi(x,y)}{(z-\alpha_0)} \sum_{n=0}^{\infty} G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right) dx\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n,\nu}(\alpha-\alpha_0),$$

où

$$(14a) \qquad H_{n,\nu}(\alpha-\alpha_0) = \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \frac{-\Delta\varphi(x,y)}{(z-\alpha_0)} G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right) dx\,dy,$$

Notons que

$$|\Delta\varphi(x,y)| \leqq b\left(\frac{1}{\nu-1}\right),$$

quand z est dans $C(E) - Q_{\nu-1}$ (donc aussi dans $O_\nu - O_{\nu-1}$) et que (5 a) est vérifiée pour z dans $O_\nu - O_{\nu-1}$ (c'est vrai pour z dans O_ν). D'où, en vertu de (4 a),

$$(15) \qquad |H_{n,\nu}(\alpha-\alpha_0)| < \nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \left| G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right) \right| dx\,dy$$

quand le segment (α_0, α) est dans E. D'où, en tenant compte de (13 b),

$$(16) \qquad \sum_{n=0} |H_{n,\nu}(\alpha-\alpha_0)| < \nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) \iint_{O_\nu - O_{\nu-1}} \sum_n \left| G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right) \right| dx\,dy$$

$$< \nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) k(\nu)\, \text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) \qquad [(\alpha_0, \alpha) \text{ dans } E].$$

Supposons maintenant que la décroissance de $b(\rho)$ soit assez rapide pour que la série

$$(17) \qquad S = \sum_\nu \nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right) k(\nu)\, \text{mes.}(O_\nu - O_{\nu-1}) \qquad [cf.\ (13b)]$$

converge. On peut alors affirmer que la série double

$$(18) \qquad M^{(1)}(\alpha)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} H_{n,\nu}(\alpha-\alpha_0) \qquad [(\alpha_0,\,\alpha) \text{ dans E}]$$

[*cf.* (1) et (14)] converge absolument. *On peut donc écrire*

$$(19) \qquad M^{(1)}(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty} H_n(\alpha-\alpha_0),$$

la série étant convergente quand le segment $(\alpha_0,\,\alpha)$ *est dans* E; à cause de (14 *a*),

$$(19a) \quad H_n(\alpha-\alpha_0)=\sum_{\nu=0}^{\infty} H_{n,\nu}(\alpha-\alpha_0)$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\iint_{O_\nu-O_{\nu-1}}\cdots=\iint_{C(E)}\frac{-\Delta\,\varphi(x,y)}{(z-\alpha_0)}\,G_n\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{z-\alpha_0}\right)dx\,dy.$$

D'où, en conséquence de (3 *a*, § 9),

$$(20) \qquad H_n(\alpha-\alpha_0)=\sum_{r=0}^{\alpha_n} g_{n,r}\left[\iint_{C(E)}\frac{-\Delta\,\varphi(x,y)\,dx\,dy}{(z-\alpha_0)^{r+1}}\right](\alpha-\alpha_0)^r$$
$$=\sum_{r=0}^{\alpha_n} g_{n,r}\frac{M^{(r+1)}(\alpha_0)}{r!}(\alpha-\alpha_0)^r.$$

C'est un polynome M. L. pour le développement de $M^{(1)}(z)$ *autour de* α_0.

C'est-à-dire, la convergence de la série de (17) entraîne la possibilité de développement (19) de Mittag-Leffler.

La convergence de la série (17) sera certainement assurée quand

$$(21) \qquad \nu\, b\left(\frac{1}{\nu-1}\right)k(\nu)<B' \qquad [cf.\ (13b)].$$

En effet, on a alors

$$S<\sum_{\nu} B' \operatorname{mes.}(O_\nu-O_{\nu-1})=B'\,C(E).$$

Or, pour $\nu\geqq 2$, $\nu<(\nu-1)\,h_1$ $(h_1>1)$. D'où en vertu de (13 *b*), si l'on pose $\rho = \frac{1}{\nu - 1}$,

$$(22) \qquad k(\nu) < \left(\frac{c'}{\rho}\right)^{\left(\frac{c}{\rho^2}\right)^{\left(\frac{c}{\rho^2}\right)}} \qquad (c' = \mathrm{L}h_1;\ c = lh_1^2).$$

Nous voyons qu'il suffit d'avoir

$$(23) \qquad b(\rho) < \mathrm{B}\rho\left(\frac{c'}{\rho}\right)^{-\left(\frac{c}{\rho^2}\right)^{\left(\frac{c}{\rho^2}\right)}} = \omega(\rho) \qquad (\rho_0 \geqq \rho > 0),$$

où c', c sont des nombres positifs convenables, indépendants de α_0, ζ_0 (1).

L'inégalité (23) entraîne la sommabilité M. L. pour la série formelle de Taylor de la fonction $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha)$ autour de tout point α_0 de E. Le procédé de sommations, représenté par (19) [où $\mathrm{H}_n(\alpha - \alpha_0)$ est un polynome (20)], sert à représenter $\mathrm{M}^{(1)}(\alpha)$ pour tous les points α des segments (α_0, ζ_0) situés dans E. La représentation est effectuée seulement en fonction des nombres

$$(24) \qquad \mathrm{M}^{(r+1)}(\alpha_0) \qquad (r = 0, 1, \ldots)$$

et peut être prolongée sur un ensemble F_{α_0} défini comme suit. Nous avons

$$(25) \qquad \mathrm{F}_{\alpha_0} = \mathrm{F}_{\alpha_{0,1}} + \mathrm{F}_{\alpha_{0,2}} + \ldots$$

$\mathrm{F}_{\alpha_0,1}$ est l'ensemble de tous les segments (α_0, ζ_0) dans E; $\mathrm{F}_{\alpha_0,2}$ est l'ensemble de tous les segments $(\alpha_{0,1}, \zeta_{0,1})$, dans E, qui peuvent être formés en prenant $\alpha_{0,1}$ sur $\mathrm{F}_{\alpha_0,1}$; $\mathrm{F}_{\alpha_0,3}$ est la totalité de tous les segments $(\alpha_{0,2}, \zeta_{0,2})$ dans E, pour lesquels $\alpha_{0,2}$ est un point quelconque de $\mathrm{F}_{\alpha_0,2}$; et ainsi de suite.

Théorème XII. — *Supposons que* $|\Delta v(x, y)| \leqq b(\rho)$ [*z dans* C(E); ρ *désignant la distance de z à la frontière de* C(E) *et* $b(\rho)$, *satisfaisant à* (23). *La classe des fonctions formée par les dérivées premières* $f^{(1)}(\alpha)$, *des*

(1) En tenant compte des développements de cette section il n'est pas difficile de les obtenir.

fonctions m. g. correspondantes sera quasi analytique (1) *dans les ensembles*

$$\mathrm{F}_{\alpha_0} - (\mathrm{K}), \tag{26}$$

formés pour chaque point α_0 *dans* $\mathrm{E} - (\mathrm{K})$. F_{α_0} *est défini par* (25). *De plus, chaque fonction* $f^{(1)}(\alpha)$ *de ce type peut être effectivement représentée dans* $\mathrm{F}_{\alpha_0} - (\mathrm{K})$ (*au moyen d'applications répétées de la sommation de Mittag-Leffler*) *en fonction des valeurs* $f^{(r+1)}(\alpha_0)$ $(r = 0, 1, \ldots)$. *Il en est de même pour chaque point* α_0 *dans* $\mathrm{E} - (\mathrm{K})$.

Note. — Appliquant les résultats de M. R. Caccioppoli (2) à nos fonction m.g. on voit que pour assurer la quasi-analyticité il suffit d'avoir

$$b(\rho) < e^{-e^{\rho^{-2-\varepsilon}}} = \bar{\omega}(\rho) \qquad (\rho_0 \geqq \rho > 0), \tag{27}$$

où $(\varepsilon > 0)$ peut être pris arbitrairement petit. Il est intéressant de comparer l'inégalité (27) de M. Caccioppoli avec la nôtre (23). On peut vérifier sans difficulté que

$$\omega(\rho) > \bar{\omega}(\rho) \qquad (\rho_0 \geqq \rho < 0)$$

pour ρ_0 assez petit. Ainsi, *notre condition est moins restrictive que celle de M. Caccioppoli.*

Une inégalité moins bonne que (23) (3), mais un peu plus simple, est

$$b(\rho) < \mathrm{B} e^{-e^{\frac{1}{\rho^2} a \log\left(\frac{1}{\rho}\right)}} = \omega_1(\rho), \tag{28}$$

où a est un nombre $> 2c_1$. (28) est une inégalité encore moins restrictive que celle de M. Caccioppoli. On le voit en comparant la rapidité

---

(1) Dans le sens de détermination unique par les valeurs des dérivées

$$f^{(r+1)}(\alpha_0) \quad (r = 0, 1, \ldots);$$

α_0 point fixe quelconque dans $\mathrm{E} - (k)$.

(2) R. Caccioppoli, *loc. cit.*

(3) C'est-a-dire, $\omega_1(\rho) < \omega(\rho)$ $(\rho_0 \geqq \rho > 0$; ρ_0 assez petit).

avec laquelle les fonctions

$$a \log\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \frac{1}{\rho^{\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0)$$

augmentent indéfiniment avec $\frac{1}{\rho}$.

11. Remarques générales. — Toutes les recherches ci-dessus, où nous affirmons que les fonctions m. g., pour lesquelles on a $|\Delta\varphi(x, y)| \leqq b(\rho)$ (1), possèdent certaines propriétés, dépendant de la rapidité d'annulation de $b(\rho)$ avec ρ, peuvent aussi être interprétées comme il suit. Considérons des intégrales de la forme

$$\iint_{C(E)} \psi(x, y) \log(z - \alpha)\, dx\, dy, \tag{1}$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction réelle, continue dans $K + (K)$ et nulle dans E. On a alors

$$|\psi(x, y)| \leqq b(\rho) \qquad [\rho = \text{distance de } z \text{ à la frontière de } C(E)]. \tag{1a}$$

Les propriétés des fonctions représentées par (1) dépendant de la rapidité d'annulation de $b(\rho)$ sont étudiées. L'importance de ce dernier point de vue vient surtout du fait déjà établi que, excepté pour une fonction analytique additive, toute fonction m. g. (*cf.* Déf. 1, § 1) est représentable par une intégrale de la forme (1).

La méthode et la théorie développées dans ces pages peuvent être appliquées de multiples façons à l'étude des fonctions analytiques. En particulier, les théorèmes des paragraphes 6 et 9 portent directement sur les problèmes de prolongement d'une fonction analytique au delà d'une courbe ou d'une aire singulières. Plus exactement, ces théorèmes nous donnent des conditions de raréfaction des singularités, qui permettent un tel prolongement. La formulation précise de ces conditions peut être faite sans difficulté.

(1) $\varphi(x, y)$ est une fonction correspondante « a. e. » [*cf.* Déf. 2 (§ 2)].