

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Surfaces admettant plusieurs réseaux de translation. Réseaux coniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 55 (1938), p. 83-118

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1938_3_55__83_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SURFACES

ADMETTANT PLUSIEURS RÉSEAUX DE TRANSLATION.

RÉSEAUX CONIQUES

PAR M. BERTRAND GAMBIER.



1. **Introduction.** — La recherche des surfaces qui possèdent plusieurs réseaux de translation constitue un problème difficile.

Sophus Lie, le premier, a résolu la question dans un article publié aux *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab* à Kristiania (actuellement Oslo), 7, 1882, p. 155-176; les calculs sont assez compliqués mais aboutissent à un résultat fort simple, et Sophus Lie retrouve un critérium, nécessaire et suffisant pour qu'un point décrive une courbe algébrique plane de degré donné arbitrairement, critérium donné au même tome de ce recueil par Elling Holst (p. 109-114). Dans une courte Note des *C. R. Acad. Sc.* (119, 1892, p. 277), Sophus Lie fait observer qu'il n'avait pas songé à utiliser le théorème d'Abel ⁽¹⁾; ce théorème fournit, d'une façon évidente, *des* surfaces possédant deux ou ∞^1 réseaux de translation; la question difficile est de montrer que *les* surfaces de cette nature sont *toutes* données par le théorème d'Abel et c'est ce que l'article de 1882 avait établi; Sophus Lie passe ensuite aux surfaces analogues de l'espace à quatre dimensions dans un nouvel article publié aux *Berichte* de Leipzig (49, 1897, p. 181-248).

Poincaré s'est occupé incidemment de la question, à propos des

⁽¹⁾ Il est d'ailleurs assez curieux de lire un nouvel article d'Elling Holst, faisant suite à celui de Sophus Lie (p. 177-178 du même recueil, où Elling Holst montre que ce critérium, exposé pages 109-114, revient au théorème d'Abel).

fonctions abéliennes (*Journal de Mathématiques*, 5^e série, t. 1, 1895, p. 219-314), puis délibérément au *Bulletin de la Société Mathématique*, 29, 1901, p. 61-86; il s'agit pour Poincaré d'aboutir au résultat fondamental trouvé par Sophus Lie : *les surfaces générales de l'espace à trois dimensions admettant deux réseaux de translation fournissent des courbes de translation dont le cône directeur des tangentes est algébrique et du quatrième ordre (le même d'ailleurs pour les quatre systèmes de translation)*. La discussion est présentée sans calculs, et fait appel à des notions assez délicates de la théorie des fonctions, algébriques ou non, mais *analytiques*.

Darboux résout la question par une voie originale; la démonstration est très courte, d'une rigueur parfaite, mais quelque peu mystérieuse (*Théorie des surfaces*, t. I, 2^e édition, p. 151-161); Darboux a eu l'idée de se servir, au moins transitoirement, des deux paramètres définissant les coordonnées tangentiels du plan tangent.

Les méthodes rappelées ne semblent pas pouvoir se généraliser aisément pour les surfaces admettant plusieurs systèmes conjugués formés de lignes *coniques* (courbes de contact d'un cône circonscrit) : une surface peut posséder 0, 1, 2, 3, ∞^1 (et même ∞^4) réseaux de cette espèce. Je vais donc proposer une méthode nouvelle qui s'applique aussi au nouveau problème. Elle consiste, comme celle de Sophus Lie en 1882, à exprimer que deux équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre ont une solution commune à quatre paramètres; la fonction inconnue est l'une des coordonnées cartésiennes; Sophus Lie la détermine en fonction des deux autres coordonnées cartésiennes; dans la méthode proposée ici, les variables indépendantes sont les paramètres curvilignes du premier réseau de translation, puis ceux du second.

J'indiquerai enfin brièvement la façon d'appliquer cette méthode aux réseaux coniques.

2. Systèmes d'équations $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ **ayant une solution commune à quatre paramètres.** — Une surface (z_1, z_2, z_3) , rapportée à un système d'axes rectilignes quelconques, possédant deux réseaux de translation de paramètres curvilignes (x, y) , (u, v) fournit mani-

festement une solution $az_1 + bz_2 + cz_3 + d$ (a, b, c, d constantes quelconques) commune aux deux équations

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$$

et *reciproquement*. Bien entendu, comme la forme d'équation, $s = 0$, ne change pas quand x est remplacé par un nouveau paramètre x_1 , fonction de x , et y par une fonction de y_1 , de y , nous écartons le cas où u serait fonction d'une seule des deux variables (x, y) , v étant fonction de l'autre seule. On doit écarter aussi le cas où u serait fonction de x seul, v étant fonction de x et y simultanément : car la direction de tangente $x = \text{const.}$ coïnciderait avec la direction $u = \text{constante}$; cette direction aurait deux directions conjuguées *différentes* ($y = \text{const.}$, $v = \text{const.}$) de sorte que la surface serait développable; étant de translation, elle est un cylindre, d'ailleurs arbitraire.

Nous écrivons donc

$$(2) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u} + q \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = r \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + s(\dots) + t \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + p \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + q \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}$$

(p, q, r, s, t sont les notations de Monge et d'Ampère; P, Q, R, S, T désigneront les dérivées analogues :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad P = \frac{\partial z}{\partial u}, \quad Q = \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \dots).$$

Nous avons deux problèmes successifs à résoudre :

1° Trouver un système (où ni A ni B ne sont nuls)

$$(4) \quad s = 0, \quad Ar + Bt + Cp + Dq = 0$$

ayant une solution à quatre constantes,

$$az_1 + bz_2 + cz_3 + d.$$

Au lieu d'écrire

$$z_1 = X_1 + Y_1, \quad z_2 = X_2 + Y_2, \quad z_3 = X_3 + Y_3,$$

nous emploierons les notations plus commodes pour la suite

$$(5) \quad z_1 = \int X_1 dx + \int Y_1 dy, \quad z_2 = \int X_2 dx + \int Y_2 dy, \quad z_3 = x + y,$$

de sorte que la courbe de translation (x variable, y constant) admet pour cône directeur de ses tangentes celui qui a pour base dans le plan $z_3 = 1$ la courbe $(X_1, X_2, 1)$. On a

$$(6) \quad \begin{cases} AX'_1 + BY'_1 + C(X_1 - Y_1) = 0 \\ AX'_2 + BY'_2 + C(X_2 - Y_2) = 0 \end{cases} \quad (C + D = 0)$$

et nous pouvons, fixant le coefficient de proportionnalité, écrire

$$(7) \quad \begin{cases} A = Y'_1(X_2 - Y_2) - Y'_2(X_1 - Y_1), \\ B = X'_2(X_1 - Y_1) - X'_1(X_2 - Y_2), \\ C = X'_1 Y'_2 - X'_2 Y'_1. \end{cases}$$

Cette première question est donc immédiate. (Nous remarquerons les identités $C \equiv -A_x \equiv B_y$.)

2° On doit ensuite chercher à particulariser les fonctions inconnues X_1, X_2 de x, Y_1, Y_2 de y , de sorte que l'équation

$$(8) \quad Ar + \lambda(x, y)s + Bt + C(p - q) = 0,$$

où λ est une nouvelle fonction inconnue, soit réductible à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0. \text{ On écrit}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \dots,$$

et l'on obtient aussitôt le système

$$(E) \quad \begin{cases} A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + B \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0, \\ A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C \frac{\partial u}{\partial x} + D \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

$$(E_1) \quad \begin{cases} A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + B \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0, \\ A \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C \frac{\partial v}{\partial x} + D \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Nous évitons un calcul irrationnel en posant

$$(9) \quad h + k = -\frac{\lambda}{A}, \quad hk = \frac{B}{A}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = k \frac{\partial v}{\partial y}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y},$$

de sorte que les deux équations du second ordre qui figurent dans (E), (E₁) se ramènent à la forme simple

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x} - k \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{C}{A} h + \frac{D}{A} = 0, \\ \frac{\partial k}{\partial x} - h \frac{\partial k}{\partial y} + \frac{C}{A} k + \frac{D}{A} = 0. \end{cases}$$

Par addition on a l'équation *rationnelle*

$$(11) \quad \left(\frac{\lambda}{A}\right)_x + \left(\frac{B}{A}\right)_y + \frac{C}{A} \left(\frac{\lambda}{A}\right) - 2 \frac{D}{A} = 0.$$

Il est clair qu'en échangeant les rôles de (x, y) , (A, B) , (C, D) on aurait de même

$$(12) \quad \left(\frac{\lambda}{B}\right)_y + \left(\frac{A}{B}\right)_x + \frac{D}{B} \left(\frac{\lambda}{B}\right) - 2 \frac{C}{B} = 0.$$

D'ailleurs, ces échanges remplacent h par $1/h$ et k par $1/k$; en multipliant les équations (10) respectivement par $1/kh^2$ et $1/hk^2$, puis ajoutant, on obtient (12). En se rappelant $C = -D = -A_x = B_y$, on peut écrire (11), (12) sous l'une des deux formes

$$(11') \quad \lambda_x = \frac{2A_x}{A} \lambda - A \left(\frac{B}{A}\right)_y + 2A_x \quad \text{ou} \quad \lambda_x = \frac{2A_x}{A} \lambda + \frac{B}{A} A_y + 3A_x,$$

$$(12') \quad \lambda_y = \frac{2B_y}{B} \lambda - B \left(\frac{A}{B}\right)_x + 2B_y \quad \text{ou} \quad \lambda_y = \frac{2B_y}{B} \lambda + \frac{A}{B} B_x + 3B_y.$$

Réciproquement, à toute solution éventuelle λ des deux équations (11'), (12') correspond un nouveau réseau de translation $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, dont les courbes sont évidemment les courbes intégrales de l'équation

$$(13) \quad A dy^2 - \lambda dx dy + B dx^2 = 0.$$

Il est important de montrer dès maintenant que ces courbes intégrales s'obtiennent en termes finis quand λ est obtenu. En effet, il est bien clair que u, v peuvent être remplacés chacun par une fonction de x, y , ou v respectivement. Nous pourrions donc écrire, si λ est obtenu, les formules analogues à (5)

$$(5') \quad z_1 = -\int U_1 du - \int V_1 dv, \quad z_2 = -\int U_2 du - \int V_2 dv, \quad z_3 = -u - v,$$

de façon à avoir les relations, de forme symétrique par rapport à chacun des quatre systèmes de translation

$$(14) \quad \begin{cases} \int X_1 dx + \int Y_1 dy + \int U_1 du + \int V_1 dv = 0, \\ \int X_2 dx + \int Y_2 dy + \int U_2 du + \int V_2 dv = 0, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

Un premier avantage est de prouver que les surfaces nouvelles

$$\left(\int X_1 dx + \int U_1 du, \int X_2 dx + \int U_2 du, x + u \right)$$

et

$$\left(\int X_1 dx + \int V_1 dv, \int X_2 dx + \int V_2 dv, x + v \right)$$

sont, elles aussi, dotées de deux réseaux de translation : il est inutile de parler des surfaces telles que

$$\left(\int U_1 du + \int V_1 dv, \int U_2 du + \int V_2 dv, u + v \right),$$

qui dérivent des surfaces signalées par simple symétrie relativement à l'origine. Quand x, y sont donnés, les trois équations (14) aux deux inconnues (u, v) sont compatibles et fournissent (u, v) en fonction de (x, y). En dérivant partiellement en x ou y on obtient

$$1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad 1 + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

équations qui jointes à

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = k \frac{\partial v}{\partial y},$$

donnent sans peine

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k-1}{h-k}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1-h}{h-k}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{h(k-1)}{h-k}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{k(1-h)}{h-k}.$$

On a de même par différentiations de la première (14)

$$U_1 \frac{\partial u}{\partial x} + V_1 \frac{\partial v}{\partial x} + X_1 = 0, \quad U_1 \frac{\partial u}{\partial y} + V_1 \frac{\partial v}{\partial y} + Y_1 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(16) \quad U_1 = \frac{X_1 - kY_1}{1-k}, \quad V_1 = \frac{X_1 - hY_1}{1-h}, \quad U_2 = \frac{X_2 - kY_2}{1-k}, \quad V_2 = \frac{X_2 - hY_2}{1-h}.$$

Donc les courbes $u = \text{const}$ sont obtenues en termes finis par l'équation $X_1 - kY_1 = \rho(1-k)$ où ρ est une constante arbitraire (ou par l'équation $X_2 - kY_2 = \rho'(1-k)$ où ρ' est une constante arbitraire). Quant à u lui-même, il est calculé par une quadrature de différentielle totale, et enfin v est égal à $-(x+y+u)$. En même temps on voit que le point $(U_1, U_2, 1)$ est le point γ qui divise le segment $\alpha\beta$ dans le rapport k ; α est le point $(X_1, X_2, 1)$, β le point $(Y_1, Y_2, 1)$ et $\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = k$; ce fait que les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont en ligne droite est évident, si l'on songe que les tangentes aux quatre courbes de translation issues d'un point de la surface sont dans le plan tangent en ce point, mais nous avons eu en même temps l'interprétation géométrique des expressions h, k .

Voyons donc comment on peut espérer obtenir λ ; si l'on écrit le système (11'), (12') sous la forme abrégée

$$\lambda_x = H\lambda + K, \quad \lambda_y = H_1\lambda + K_1,$$

on a, en égalant $(\lambda_x)_y$ et $(\lambda_y)_x$,

$$(17) \quad (H_y - H_{1x})\lambda + K_y - K_{1x} + HK_1 - H_1K = 0,$$

de sorte que nous avons à discuter deux cas éventuels :

a. le cas d'intégrabilité complète,

$$(18) \quad H_y - H_{1x} = 0, \quad K_y - K_{1x} + HK_1 - H_1K = 0;$$

b. le cas d'intégrabilité restreinte,

cette fois $H_y - H_{1,x}$ n'est pas nul; λ est fourni par l'équation du premier degré (17); en portant cette valeur de λ dans (11') et (12'), nous avons deux équations de condition, nécessaires et suffisantes.

[Les solutions du système (18) sont d'ailleurs des solutions spéciales du nouveau système.]

Conclusion : *une surface de translation porte un, deux, ou ∞^1 réseaux de translation.*

Or, *a priori*, si l'on applique le théorème d'Abel à une courbe plane arbitraire de degré 4, représentée par l'équation entière $f(X_1, X_2) = 0$ et si (X_1, X_2) , (Y_1, Y_2) , (U_1, U_2) , (V_1, V_2) sont les points d'intersection de cette courbe avec *une droite mobile*, nous savons que les équations (14) sont satisfaites en prenant

$$(19) \quad dx = \frac{dX_1}{\frac{\partial f}{\partial X_2}}, \quad dy = \frac{dY_1}{\frac{\partial f}{\partial Y_2}}, \quad du = \frac{dU_1}{\frac{\partial f}{\partial U_2}}, \quad dv = \frac{dV_1}{\frac{\partial f}{\partial V_2}},$$

les intégrales $(\int X_1 dx, \int X_2 dx, \int dx), (Y_1 dy, \int Y_2 dy, \int dy) \dots$ étant calculées en prenant pour limites inférieures $(X_1^0, X_2^0), (Y_1^0, Y_2^0), (U_1^0, U_2^0), (V_1^0, V_2^0)$, quatre points pris sur une même droite fixe; le cas d'une courbe indécomposée ou formée d'une droite et d'une cubique rentre dans le cas d'intégrabilité limitée; le cas où la courbe $f = 0$ se décompose en deux coniques et où $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)$ sont pris sur la même conique rentre dans le cas d'intégrabilité complète, car la seconde conique peut être ensuite remplacée par une conique arbitraire du faisceau ponctuel défini par les deux premières. Mais si (X_1, X_2) est pris sur l'une des deux coniques et (Y_1, Y_2) sur l'autre, nous retrouvons le cas d'intégrabilité restreinte.

Il s'agit de montrer que ces solutions connues sont les seules. Il est important de signaler dès maintenant que ces solutions connues dépendent de *dix-sept paramètres*, car si les quinze coefficients de $f(X_1, X_2) = 0$ sont homogènes, ils cessent de figurer d'une façon homogène dans les deux quadratures qui donnent x et y .

La méthode que nous avons suivie nous amène à discuter deux

équations de la forme $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$, où les ξ_i dépendent de x seul, les η_i de y seul.

3. Cas de ∞^1 réseaux et courbes de translation gauches. — L'équation $H_y - H_{1x} = 0$ donne $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log \left(\frac{A}{B} \right) = 0$, d'où $\frac{A}{B} = \frac{\xi}{\eta}$, où ξ dépend de x seul, η de y seul; ni A , ni B n'étant nuls, il est de même pour ξ^* , η ; nous écrirons donc

$$(20) \quad [Y'_1 X_2 - Y'_2 X_1 + Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1] \eta = [X'_1 Y_2 - Y_1 X'_2 + X_1 X'_2 - X_2 X'_1] \xi.$$

Le premier membre est linéaire en $(X_1, X_2, 1)$, de sorte que, si l'on n'a aucune relation de la forme $aX_1 + bX_2 + c = 0$, a, b, c étant constants), c'est-à-dire si la courbe de translation $\left(\int X_1 dx, \int X_2 dx, x \right)$ n'est pas plane, les équations obtenues en remplaçant dans (20) x successivement par trois valeurs numériques quelconques permettent d'exprimer $Y'_1 \eta$, $Y'_2 \eta$, $(Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1) \eta$, considérées comme inconnues, en fonction linéaire de $(Y_1, Y_2, 1)$ par les formules où a, b, c sont certaines constantes :

$$(21) \quad \begin{cases} Y'_1 \eta = a + b Y_1 + c Y_2, \\ Y'_2 \eta = a_1 + b_1 Y_1 + c_1 Y_2, \\ (Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1) \eta = a_2 + b_2 Y_1 + c_2 Y_2. \end{cases}$$

En remplaçant $Y'_1 \eta$, $Y'_2 \eta$, $(Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1) \eta$ par ces valeurs dans (20), les deux membres doivent être égaux, ce qui fait, pour chaque valeur de x , une relation linéaire en $Y_1, Y_2, 1$; si l'on suppose que la courbe $\left(\int Y_1 dy, \int Y_2 dy, y \right)$ est elle-même gauche et non plane, les coefficients de $Y_1, Y_2, 1$ doivent s'annuler aussi et l'on a

$$(22) \quad \begin{cases} X'_1 \xi = c_2 - c_1 X_1 + c X_2, \\ X'_2 \xi = b_2 - b_1 X_1 + b X_2, \\ (X_1 X'_2 - X_2 X'_1) \xi = a_2 - a_1 X_1 + a X_2. \end{cases}$$

En remplaçant $Y'_1 \eta$, $Y'_2 \eta$ dans la dernière équation (21) par les valeurs tirées des deux premières [et opérant de même sur (22)], on

obtient les équations *en termes finis*

$$(23) \quad \begin{cases} a_2 + (b_2 - a_1)Y_1 + (a + c_2)Y_2 - b_1Y_1^2 + (b - c_1)Y_1Y_2 + cY_2^2 = 0, \\ a_2 + (b_2 - a_1)X_1 + (a + c_2)X_2 - b_1X_1^2 + (b - c_1)X_1X_2 + cX_2^2 = 0. \end{cases}$$

Ceci prouve que le cône directeur des tangentes des courbes (x) ou (y) est du second degré et le même pour les deux courbes. En éliminant η entre les deux premières équations (21) et en différentiant (23), on a

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1Y_1 + c_1Y_2)Y_1' - (a + bY_1 + cY_2)Y_2' &= 0, \\ [(b_1 - a_1) - 2b_1Y_1 + (b - c_1)Y_2]Y_1' + [a + c_2 + (b - c_1)Y_1 + 2cY_2]Y_2' &= 0, \end{aligned}$$

et la comparaison de ces deux équations fournit (puisque $Y_1' Y_2' \neq 0$)

$$(24) \quad b_2 = -a_1, \quad c_1 = -b, \quad c_2 = a,$$

de sorte que le cône directeur a pour équation définitive

$$(25) \quad a_2 - 2a_1Y_1 + 2aY_2 - b_1Y_1^2 + 2bY_1Y_2 + cY_2^2 = 0.$$

Les deux systèmes (21), (22) coïncident, en vertu des relations (24), sauf échange de (Y_1, Y_2, η) avec (X_1, X_2, ξ).

D'autre part, si l'on fait un changement d'axes, la courbe (X_1, X_2, \mathfrak{r}) subit une simple transformation homographique, de sorte que nous pouvons nous borner à la forme d'équation

$$(26) \quad Y_1Y_2 - \mathfrak{r} = 0,$$

substituée à (25), car le cône directeur est supposé non réduit à un plan ni à deux plans; nous avons les résultats simples

$$(27) \quad \begin{cases} Y_2 = \frac{\mathfrak{r}}{Y_1}, & \eta = \frac{Y_1}{Y_1'}, & X_2 = \frac{\mathfrak{r}}{X_1}, \\ \xi = \frac{X_1}{X_1'}, & A = \frac{(X_1 - Y_1)^2}{\eta X_1 Y_1}, & B = \frac{(X_1 - Y_1)^2}{\xi X_1 Y_1}. \end{cases}$$

Nous prenons maintenant les équations ($\mathfrak{r} \mathfrak{r}'$) sous la forme

$$\lambda_x = \frac{2A_x}{A} \lambda - A \left(\frac{B}{A} \right)_y + 2A_x = 2 \frac{A_x}{A} \lambda - A \frac{\eta'}{\xi} + 2A_x,$$

et, en posant $\lambda = \rho A^2$, on obtient

$$\rho = -\frac{2}{A} - \eta\eta' \int \frac{X_1 Y_1 dx}{\xi(X_1 - Y_1)^2} + \eta^2 Y_3,$$

où λ_3 est une fonction inconnue de y ; d'autre part

$$\frac{X_1 dx}{\xi} = X_1' dx = dX_1.$$

On a donc

$$(28) \quad \begin{cases} \rho = -\frac{2}{A} + \frac{\eta\eta' Y_1}{X_1 - Y_1} + \eta^2 Y_3, \\ \lambda = \frac{-2(X_1 - Y_1)^2}{\eta X_1 Y_1} + \frac{\eta' (X_1 - Y_1)^2}{\eta X_1^2 Y_1} + \frac{Y_3 (X_1 - Y_1)^4}{X_1^2 Y_1^2}. \end{cases}$$

On calculerait de même λ au moyen de (12'), ce qui donnerait, avec une fonction X_3 de x ,

$$(28') \quad \lambda = -\frac{-2(X_1 - Y_1)^2}{\xi X_1 Y_1} + \frac{\xi' (Y_1 - X_1)^2}{\xi X_1 Y_1^2} + \frac{X_3 (X_1 - Y_1)^4}{X_1^2 Y_3^2}.$$

La comparaison de (28) et (28') fournit l'identité

$$(29) \quad \begin{cases} \left[-\frac{2}{\xi} + \frac{\xi'}{\xi} - 2X_3 \right] + \frac{1}{Y_1} \left[X_3 X_1 - \frac{\xi'}{\xi} X_1 \right] + Y_1 \left(\frac{X_3}{X_1} \right) \\ = \left(\frac{-2}{\eta} + \frac{\eta'}{\eta} - 2Y_3 \right) + \frac{1}{X_1} \left[Y_3 Y_1 - \frac{\eta'}{\eta} Y_1 \right] + X_1 \left(\frac{Y_3}{Y_1} \right). \end{cases}$$

Le premier membre est linéaire en Y_1 , $\frac{1}{Y_1}$, de sorte que, en donnant à y trois valeurs arbitraires, on a trois équations fournissant $-\frac{2}{\xi} + \frac{\xi'}{\xi} - 2X_3$, $X_3 X_1 - \frac{\xi'}{\xi} X_1$, $\frac{X_3}{X_1}$ exprimées linéairement au moyen de X_1 , $\frac{1}{X_1}$; les remplaçant par ces expressions, les deux membres de (29) sont linéaires en X_1 , $\frac{1}{X_1}$ et les coefficients homologues sont égaux; on a ainsi $\left(\xi = \frac{X_1}{X_1'}, \eta = \frac{Y_1}{Y_1'} \right)$ avec certaines constantes

numériques a, b, \dots

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_3}{Y_1} = \frac{a}{Y_1} + b + c Y_1, \\ -\frac{Y'_1}{Y_1} - \frac{Y''_1}{Y_1} - 2Y_3 = \frac{a_1}{Y_1} + b_1 + c_1 Y_1, \\ Y_3 Y_1 - Y_1 \left(\frac{Y'_1}{Y_1} - \frac{Y''_1}{Y_1} \right) = \frac{a_2}{Y_1} + b_2 + c_2 Y_1, \\ \frac{X_3}{X_1} = \frac{c_2}{X_1} + c_1 + c X_1, \\ -\frac{X'_1}{X_1} - \frac{X''_1}{X_1} - 2X_3 = \frac{b_2}{X_1} + b_1 + b X_1, \\ X_3 X_1 - X_1 \left(\frac{X'_1}{X_1} - \frac{X''_1}{X_1} \right) = \frac{a_2}{X_1} + a_1 + a X_1. \end{array} \right.$$

On a aussitôt Y_3 en fonction de Y_1 , puis $\frac{Y'_1}{Y_1}$ et $\frac{Y''_1}{Y_1}$ en fonction de Y_1 aussi; on en déduit $2 Y_1 Y'_1$, puis

$$(Y_1 Y'_1)' = \left(\frac{Y'_1}{Y_1} + \frac{Y''_1}{Y_1} \right) Y_1 Y'_1.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} Y_3 &= a + b Y_1 + c Y_1^2, \\ 2 Y_1 Y'_1 &= -a_2 - (a_1 + b_2) Y_1 - (a + b_1 + c_2) Y_1^2 - (b + c_1) Y_1^3 - c Y_1^4, \\ (Y_1 Y'_1)' &= -[a_1 + (2a + b_1) Y_1 + (2b + c_1) Y_1^2 + 2c Y_1^3] Y'_1. \end{aligned}$$

Ces trois équations sont *algébriquement* équivalentes aux équations (30) qui contiennent Y_1, Y_3, y ; on aperçoit aussitôt la condition de compatibilité *différentielle* qui consiste à dériver l'expression $Y_1 Y'_1$ obtenue par ce calcul et à identifier avec la valeur de $(Y_1 Y'_1)'$; on trouve ainsi

$$c_1 = b, \quad c_2 = a, \quad b_2 = a_1,$$

de sorte que les relations qui fournissent Y_1, Y'_1, Y_3 coïncident avec celles qui fournissent X_1, X'_1, X_3 (en remplaçant y par x , sans toucher aux constantes). On a

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_3 = a + b Y_1 + c Y_1^2, \\ dy = \frac{2 Y_1 dY_1}{-c Y_1^4 - 2b Y_1^3 - (b_1 + 2a) Y_1^2 - 2a_1 Y_1 - a_2}. \end{array} \right.$$

Pour nous reconnaître au milieu des éléments *donnés* et des éléments *arbitraires*, nous remplacerons les notations précédentes par les suivantes :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} dy = \frac{2Y_1 dY_1}{\alpha Y_1^4 + 4\beta Y_1^3 + 6\gamma Y_1^2 + 4\delta Y_1 + \varepsilon}, \quad Y_3 = -\mu - 2\beta Y_1 - \gamma Y_1^2, \\ dx = \frac{2X_1 dX_1}{\alpha X_1^4 + 4\beta X_1^3 + 6\gamma X_1^2 + 4\delta X_1 + \varepsilon}, \quad X_3 = -\mu - 2\beta X_1 - \gamma X_1^2, \\ -\lambda = \frac{(X_1 - Y_1)^2}{X_1^2 Y_1^2} [\alpha X_1^2 Y_1^2 + 2\beta X_1 Y_1 (X_1 + Y_1) + 6\gamma X_1 Y_1 \\ \quad + 2\delta (X_1 + Y_1) + \varepsilon + \mu (X_1 - Y_1)^2], \end{array} \right.$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sont des constantes numériques *données*; μ est une constante *variable* et à chaque valeur de μ correspond un réseau (u, v) particulier.

Appelons $f(x)$ le polynôme $\alpha x^4 + 4\beta x^3 + 6\gamma x^2 + 4\delta x + \varepsilon$; la surface que nous avons obtenue est le lieu des milieux des cordes de la courbe gauche Γ

$$(\Gamma) \quad z_1 = 4 \int \frac{X_1^2 dX_1}{f(X_1)}, \quad z_2 = 4 \int \frac{dX_1}{f(X_1)}, \quad z_3 = 4 \int \frac{X_1 dX_1}{f(X_1)}.$$

En remarquant que $X_1 X_2 = 1$ permet d'écrire

$$f(X_1) \equiv X_1^2 (\alpha X_1^2 + 4\beta X_1 + 6\gamma + 4\delta X_2 + \varepsilon X_2^2),$$

on voit que l'on peut remplacer les intégrales Γ par *les intégrales curvilignes*

$$(\Gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 4 \int \frac{X_1 dX_1}{X_1 (\alpha X_1^2 + 4\beta X_1 + 6\gamma + 4\delta X_2 + \varepsilon X_2^2)}, \\ z_2 = 4 \int \frac{X_2 dX_1}{X_1 (\dots)}, \\ z_3 = 4 \int \frac{dX_1}{X_1 (\dots)}, \end{array} \right.$$

étendues au morceau de décomposition $X_1 X_2 - 1 = 0$ de la quartique plane, décomposée en deux coniques,

$$(33) \quad \varphi(X_1, X_2) \equiv (X_1 X_2 - 1) (\alpha X_1^2 + 4\beta X_1 + 6\gamma + 4\delta X_2 + \varepsilon X_2^2),$$

intégrales mises précisément sous la forme normale

$$(34) \quad 4 \int \frac{X_1 dX_1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}\right)}, \quad 4 \int \frac{X_2 dX_1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}\right)}, \quad 4 \int \frac{dX_1}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}\right)}.$$

Écrivons maintenant l'équation $Ak^2 + \lambda k + B = 0$ dont les deux racines sont h, k ; A, λ, B contiennent le facteur commun $\frac{(X_1 - Y_1)^2}{X_1 Y_1}$; on a donc

$$k^2 \frac{Y_1'}{Y_1} - \frac{k}{X_1 Y_1} [\alpha X_1^2 Y_1^2 + \dots + \varepsilon + \mu(X_1 - Y_1)^2] + \frac{X_1'}{X_1} = 0.$$

Le rapport $\frac{X_1'}{X_1}$ peut s'écrire $\frac{1}{2}(\alpha X_1^2 + 4\beta X_1 + 6\gamma + 4\delta X_2 + \varepsilon X_2^2)$; on a donc finalement

$$\begin{aligned} & \alpha X_1^2 + 4\beta X_1 + 6\gamma + 4\delta X_2 + \varepsilon X_2^2 \\ & - 2k[\alpha X_1 Y_1 + 2\beta(X_1 + Y_1) + 6\gamma + 2\delta(X_2 + Y_2) + \varepsilon X_2 Y_2 + \mu(X_1 Y_2 - 2 + X_2 Y_1)] \\ & + k^2[\alpha Y_1^2 + 4\beta Y_1 + 6\gamma + 4\delta Y_2 + \varepsilon Y_2^2] = 0. \end{aligned}$$

Cette équation s'écrit (tenant compte de $X_1 X_2 = 1$ et $Y_1 Y_2 = 1$)

$$\begin{aligned} & \alpha(X_1 - kY_1)^2 + 4\beta(X_1 - kY_1)(1 - k) + 6\gamma(1 - k)^2 + 4\delta(X_2 - kY_2)(1 - k) \\ & + \varepsilon(X_2 - kY_2)^2 + 2\mu[(X_1 - kY_1)(X_2 - kY_2) - (1 - k)^2] = 0. \end{aligned}$$

Elle exprime donc que le point (U_1, U_2) ou $\left(\frac{X_1 - kY_1}{1 - k}, \frac{X_2 - kY_2}{1 - k}\right)$ décrit la conique qui a pour équation

$$(35) \quad \alpha \xi_1^2 + 4\beta \xi_1 + 6\gamma + 4\delta \xi_2 + \varepsilon \xi_2^2 + 2\mu[\xi_1 \xi_2 - 1] = 0.$$

Cette conique appartient au faisceau linéaire ponctuel déterminé par les deux coniques constituant φ par leur ensemble. D'ailleurs il est clair que les intégrales (34) ne changent pas si l'on remplace φ par

$$\psi \equiv (X_1 X_2 - 1)[\alpha X_1^2 + 4\beta X_1 + 6\gamma + 4\delta X_2 + \varepsilon X_2^2 + 2\mu(X_1 X_2 - 1)].$$

D'après le théorème d'Abel, la surface obtenue est aussi le lieu des milieux des cordes des courbes gauches représentées par les intégrales curvilignes

$$(17) \quad -4 \int \frac{X_1 dX_1}{\frac{\partial \psi}{\partial X_1}}, \quad -4 \int \frac{X_2 dX_1}{\frac{\partial \psi}{\partial X_1}}, \quad -4 \int \frac{dX_1}{\frac{\partial \psi}{\partial X_1}}$$

étendues cette fois à la conique $\alpha X_1^2 + \dots + \varepsilon X_2^2 + 2\mu(X_1 X_2 - 1) = 0$. Ces derniers résultats s'obtiendraient aisément par une voie purement géométrique : on sait en effet que *la surface lieu des milieux des cordes d'une courbe gauche Γ est coupée par le plan de l'infini suivant les droites joignant deux à deux les points à l'infini de Γ* ; ces points à l'infini de Γ correspondent aux zéros de $f(X_1)$; on les obtient encore comme points à l'infini des droites joignant l'origine aux points communs aux deux coniques constituant φ ; donc chaque réseau (u, v) , correspondant à une valeur donnée de μ , donne une courbe Γ_μ dont le cône directeur des tangentes est toujours du second degré et contient quatre droites fixes : ces cônes engendrent donc un faisceau linéaire ponctuel. Nous avons ainsi retrouvé tous les résultats classiques. L'équation $A dy^2 - \lambda dx dy + B dx^2 = 0$ tend vers $dx dy = 0$, si μ devient infini, de sorte que, comme de juste, le réseau initial se retrouve bien comme cas particulier des ∞^1 réseaux découverts.

4. **Courbes de translation planes des surfaces à ∞^1 réseaux.** — *Le cône directeur C_μ se décompose en deux plans pour trois valeurs de μ (du moins si le faisceau ponctuel des cônes C_μ a quatre génératrices de base distinctes, c'est-à-dire si la courbe Γ a quatre points à l'infini distincts); pour un tel cône dégénéré, les courbes $u = \text{const.}$ sont des courbes planes dans des plans parallèles entre eux, et de même les courbes $v = \text{const.}$ Si donc nous avons choisi comme réseau (x, y) un tel réseau de courbes planes, nous nous serions trouvés dans le cas réservé au paragraphe précédent. Il est néanmoins utile de vérifier que cette hypothèse $(X_1, X_2, 1)$ liés par une relation linéaire à coefficients constants) ne conduit à aucun type ayant échappé à l'analyse précédente; et en même temps cela nous donnera des indications précieuses pour le cas d'intégrabilité restreinte. D'ailleurs, remarquons que les solutions trouvées au paragraphe précédent nous ont donné une surface $(\int X_1 dx + \int Y_1 dy, \int X_2 dx + \int Y_2 dy, x + y)$ à ∞^1 réseaux, et en même temps une surface*

$$\left(\int X_1 dx + \int U_1 du, \int X_2 dx + \int U_2 du, x + u \right)$$

qui a deux réseaux, et n'en a que deux, puisque les points (X_1, X_2) ,

(U_1, U_2) ne décrivent pas la même conique (bien que chacun décrive une conique).

De même le réseau formé de courbes planes que nous allons indiquer ici (qui finalement se rapporte aux mêmes surfaces que celles du numéro précédent) nous conduit à certaines surfaces ayant simplement deux réseaux de translation, chacun de ces réseaux contenant une famille de courbes planes. Or Sophus Lie aussi, dans son premier Mémoire, a déterminé ces surfaces spéciales à deux réseaux, qui lui ont donné des indications précieuses sur les surfaces générales à deux réseaux (¹).

Nous supposons donc que nous devons discuter l'équation (20) déjà écrite

$$(20) \quad [Y'_1 X_2 - Y'_2 X_1 + Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1] \eta = [X'_1 Y_2 - X'_2 Y_1 + X_1 X'_2 - X_2 X'_1] \xi,$$

en supposant qu'il y ait une certaine relation $aX_1 + bX_2 + c = 0$.

Un déplacement d'axes permet de réduire cette relation à la forme $X_2 = 0$; B se réduit à $X'_1 Y_2$, de sorte que Y_2 n'est pas nul (non plus que X'_1). On a donc

$$(36) \quad [-Y'_2 X_1 + (Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1)] \eta = X'_1 Y_2 \xi,$$

et, en donnant à γ une valeur numérique quelconque, on a

$$X'_1 \xi = aX_1 + b,$$

où a, b sont constants; ξ n'est déterminé qu'à un facteur constant près, de sorte que si a n'est pas nul, c'est-à-dire si Y'_2 n'est pas nulle, on peut supposer $a = 1$, $X'_1 \xi = X_1 + b$; or en remplaçant z_1 par $z_1 - bz_3$ on réduit b à zéro, et, au lieu de (36), on a

$$(37) \quad X'_1 \xi = X_1, \quad -Y'_2 \eta = Y_2, \quad Y_1 Y'_2 - Y_2 Y'_1 = 0.$$

On a donc $Y_1 = aY_2$, où a est une nouvelle constante; mais rem-

(¹) Pour ce point spécial, Sophus Lie a rencontré une équation de la forme $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$, mais il a préféré discuter cette équation par une autre méthode lui faisant prévoir ce que l'on doit obtenir pour les surfaces générales.

plaçant z_1 par $z_1 - az_2$ on réduit a à zéro. On a donc

$$(38) \quad A = -Y_2' X_1, \quad B = X_1' Y_2, \quad C = X_1' Y_2';$$

$$(39) \quad \begin{cases} \lambda_x = \frac{2X_1'}{X_1} \lambda + X_1' \left(\frac{Y_2 Y_2''}{Y_2'} - 3Y_2' \right), \\ \lambda_y = \frac{2Y_2'}{Y_2} \lambda + Y_2' \left(3X_1' - \frac{X_1 X_1''}{X_1'} \right). \end{cases}$$

Par intégration de chacune des équations (39), on a

$$(40) \quad \lambda = X_1 \left(3Y_2' - \frac{Y_2 Y_2''}{Y_2'} \right) + Y_2 X_1^2 = Y_2 \left(\frac{X_1'' X_1}{X_1'} - 3X_1' \right) + X_2 Y_2^2,$$

où X_3, Y_3 sont certaines fonctions de x ou y seul; X_1 et X_1^2 sont linéairement indépendants ($X_1' \neq 0$), Y_2 et Y_2^2 aussi, donc on a

$$(41) \quad \begin{cases} 3Y_2' - \frac{Y_2 Y_2''}{Y_2'} = -2aY_2 - b_2 Y_2^2, & \frac{X_1'' X_1}{X_1'} - 3X_1' = -2aX_1 - b_1 X_1^2, \\ Y_3 = -b_1 Y_2 + \mu Y_2^2, & X_3 = -b_2 X_1 + \mu X_1^2, \end{cases}$$

où a, b_1, b_2, μ sont des constantes convenables; X_3 et Y_3 sont ainsi connues explicitement; les équations en X_1 et Y_2 s'intègrent aisément et donnent

$$(42) \quad X_1' = aX_1 + b_1 X_1^2 + c_1 X_1^3, \quad Y_2' = -aY_2 - b_2 Y_2^2 - c_2 Y_2^3.$$

La surface obtenue est

$$(43) \quad \begin{cases} z_1 = \int \frac{dX_1}{a + b_1 X_1 + c_1 X_1^2}, \\ z_2 = -\int \frac{dY_2}{a + b_2 Y_2 + c_2 Y_2^2}, \\ z_3 = \int \frac{dX_1}{aX_1 + b_1 X_1^2 + c_1 X_1^3} - \int \frac{dY_2}{aY_2 + b_2 Y_2^2 + c_2 Y_2^3}. \end{cases}$$

On reconnaît les intégrales abéliennes classiques

$$(44) \quad \int \frac{X_1 dX_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}}, \quad \int \frac{X_2 dX_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}}, \quad \int \frac{dX_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial X_2}}$$

étendues au morceau $X_2 = 0$ de la quartique dégénérée

$$(45) \quad \varphi(X_1, X_2) \equiv X_1 X_2 (a + b_1 X_1 + b_2 X_2 + c_1 X_1^2 + c_2 X_2^2)$$

et les intégrales *équivalentes* relatives au morceau $X_1 = 0$

$$(46) \quad \int \frac{-X_1 dX_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}}, \quad \int \frac{-X_2 dX_1}{\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}}, \quad \int \frac{-dX_2}{\frac{\partial \varphi}{\partial X_1}},$$

qui fournissent respectivement les deux courbes de translation

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \frac{dX_1}{a + b_1 X_1 + c_1 X_1^2}, \quad 0, \quad \int \frac{dX_1}{a X_1 + b_1 X_1^2 + c_1 X_1^3}, \\ 0, \quad - \int \frac{dY_2}{a + b_2 Y_2 + c_2 Y_2^2}, \quad - \int \frac{dY_2}{a Y_2 + b_2 Y_2^2 + c_2 Y_2^3} \end{array} \right.$$

qui engendrent la surface. Comme plus haut, on écrit l'équation

$$A k^2 + \lambda k + B = 0$$

ou

$$(a + b_2 Y_2 + c_2 Y_2^2) k^2 + (\mu X_1 Y_2 - b_1 X_1 - b_2 Y_2 - 2a) k + a + b_1 X_1 + c_1 X_1^2 = 0,$$

qui exprime que le point $(U_1 = \frac{X_1}{1-k}, U_2 = \frac{-k Y_2}{1-k})$ décrit la conique qui a pour équation

$$(48) \quad a + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 + c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2 - \mu \xi_1 \xi_2 = 0.$$

On a donc retrouvé une surface du type obtenu au paragraphe précédent; le réseau formé de courbes planes est simplement un réseau *accidental* parmi les ∞^1 réseaux de translation.

Pour être complet, il faut revenir à (36) où l'on supposerait $Y_2 = 0$; on peut, Y_2 n'étant pas nul, supposer $Y_2 = 1$; on a

$$A = -Y_1', \quad B = X_1', \quad X_2 = 0, \quad Y_2 = 1,$$

puis

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_x = X_1' \frac{Y_1''}{Y_1'}, \quad \lambda_y = -Y_1' \frac{X_1''}{X_1'}, \\ \lambda = X_1' \frac{Y_1''}{Y_1'} + Y_3 = -Y_1' \frac{X_1''}{X_1'} + X_3; \end{array} \right.$$

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_3 = b_2 X_1 + \mu, \quad \frac{X_1''}{X_1'} = -2a X_1 - b_1, \quad X_1' = -a X_1^2 - b_1 X_1 - c_1, \\ Y_3 = b_1 Y_1 + \mu, \quad \frac{Y_1''}{Y_1'} = 2a Y_1 + b_2, \quad Y_1' = a Y_1^2 + b_2 Y_1 + c_2. \end{array} \right.$$

La surface est

$$(51) \quad \begin{cases} z_1 = - \int \frac{X_1 dX_1}{aX_1^2 + b_1X_1 + c_1} + \int \frac{Y_1 dY_1}{aY_1^2 + b_2Y_1 + c_2}, \\ z_2 = \int \frac{dY_1}{aY_1^2 + b_2Y_1 + c_2}, \\ z_3 = z_2 - \int \frac{dX_1}{aX_1^2 + b_1X_1 + c_1}. \end{cases}$$

On peut remplacer cette surface par la surface $(z_1, z_2, z_3 - z_2)$ puis faire le changement de variables $X_1 = \frac{x}{\xi}$, $Y_1 = \frac{y}{\eta}$, et l'on voit que la surface coïncide, sauf notations, avec la surface (43).

Ce calcul, entre autres avantages, rappelle l'existence du *paraboloïde comme surface ∞^1 fois de translation* : dans les formules (43), en supposant $a = b_1 = b_2 = 0$, on a la surface $\left(\frac{-1}{c_1 X_1}, \frac{1}{c_2 Y_2}, \frac{-1}{2c_1 X_1^2} + \frac{1}{2c_2 Y_2^2}\right)$ qui est un paraboloïde; *la quartique est alors dégénérée en 4 droites concourantes* : c'est le seul cas où toutes les courbes des divers réseaux sont planes.

Un autre avantage du calcul de ce paragraphe est de nous prouver qu'une surface de translation prise au hasard n'a qu'un réseau de translation : la surface obtenue en prenant

$$X_1 = 2x, \quad X_2 = 0, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 = 2y$$

nous donne en effet

$$A = -4x, \quad B = 4y,$$

et le système incompatible

$$\lambda_x = \frac{2\lambda}{x} - 12, \quad \lambda_y = \frac{2\lambda}{y} + 12;$$

c'est une surface unicursale de degré 4, $(x^2, y^2, x + y)$, d'équation

$$z_3^4 - 2z_2^2(z_1 + z_2) + (z_1 - z_2)^2 = 0.$$

5. Surfaces ayant exactement deux réseaux de translation. Première méthode. — Cette fois $\frac{A}{B}$ n'est plus de la forme $\frac{\xi}{\eta}$; les deux

équations fondamentales

$$(11') \quad \lambda_x = \frac{2A_x}{A} \lambda + 3A_x + \frac{BA_y}{A},$$

$$(12') \quad \lambda_y = \frac{2B_y}{B} \lambda + 3B_y + \frac{AB_x}{B}$$

ne peuvent plus s'intégrer séparément avec des formules dégagées de tout signe de quadrature; nous calculons λ par comparaison de $(\lambda_x)_y$, $(\lambda_y)_x$, ce qui donne

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{N}{\Delta}, \\ N = 3(A-B)_{xy} + \left(\frac{BA_y}{A}\right)_y \\ \quad - \left(\frac{AB_x}{B}\right)_x + \frac{2A_x}{A} \left(3B_y + \frac{AB_x}{B}\right) - \frac{2B_y}{B} \left(3A_x + \frac{BA_y}{A}\right), \\ \Delta = 2 \left[\frac{1}{B} B_{xy} - \frac{1}{B^2} B_x B_y - \frac{1}{A} A_{xy} + \frac{1}{A^2} A_x A_y \right]. \end{array} \right.$$

Par substitution dans (11'), (12') on a

$$(53_1) \quad \Delta N_x - N \Delta_x = \frac{2A_x}{A} N \Delta + 3A_x \Delta^2 + \frac{B}{A} A_y \Delta^2,$$

$$(53_2) \quad \Delta N_y - N \Delta_y = \frac{2B_y}{B} N \Delta + 3B_y \Delta^2 + \frac{A}{B} B_x \Delta^2.$$

Indiquons les ordres différentiels en x ou y de A, B, A_x, \dots ,

	A.	A _x .	A _y .	A _{xx} .	A _{xy} .	A _{yy} .	B.	B _x .	B _y .	B _{xx} .	B _{xy} .	B _{yy} .
$x \dots \dots$	0	1	0	2	1	0	1	2	1	3	2	1
$y \dots \dots$	1	1	2	1	2	3	0	0	1	0	1	2

N contient des dérivées d'ordre 3 de (X_1, X_2) et aussi de (Y_1, Y_2) ; Δ contient des dérivées d'ordre 2 de (X_1, X_2) et aussi de (Y_1, Y_2) ; donc l'équation (53₁) contient des dérivées d'ordre 4 de X_1, X_2 d'ailleurs linéairement et des dérivées d'ordre 3 de Y_1, Y_2 ; c'est l'inverse pour (53₂). N et Δ contiennent des dénominateurs A^2 ou B^2 ; $N_x, N_y, \Delta_x, \Delta_y$ des dénominateurs A^3 et B^3 ; on constate par un calcul simple que les termes de dénominateur A^5 ou B^5 se détruisent au premier membre de (53₁) ou (53₂), et aussi aux seconds membres; donc, en multipliant

par $A^4 B^4$, chaque équation (53₁), ou (53₂) ne contient plus de dénominateurs (1) et fournit une relation de la forme

$$\sum_1^h \xi_i \eta_i = 0, \quad \sum_1^h \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0;$$

ces deux relations s'échangent entre elles en même temps que (x, y) , (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) . Une identité importante doit être signalée : on a, pour $\lambda = \frac{N}{\Delta}$, les identités

$$(54) \quad \begin{cases} \Delta^2 A^4 B^4 \left[\lambda_x - \frac{2A_x}{A} \lambda - 3A_x - \frac{B}{A} A_y \right] \equiv \Sigma \xi_i \eta_i, \\ \Delta^2 A^4 B^4 \left[\lambda_y - \frac{2B_y}{B} \lambda - 3B_y - \frac{A}{B} B_x \right] \equiv \Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i, \end{cases}$$

valables quelles que soient les fonctions (X_1, X_2) de x et (Y_1, Y_2) de y . Donc en dérivant la première en y , la seconde en x et retranchant, on a, d'après la signification même de $\frac{N}{\Delta}$, l'identité fondamentale

$$(55) \quad \frac{(\Delta^2 A^4 B^4)_y}{\Delta^2 A^4 B^4} (\Sigma \xi_i \eta_i) - \frac{(\Delta^2 A^4 B^4)_x}{\Delta^2 A^4 B^4} \Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i \equiv \Sigma \xi_i \eta'_i - \Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}'_i.$$

En un point *quelconque* (x, y) , ni Δ , ni A , ni B ne sont nuls. Le problème est ramené à trouver comment choisir (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) pour avoir $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$, $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$, *quels que soient* x et y . Nous savons, d'après le théorème d'Abel, qu'il existe au moins une solution à 17 paramètres de ce problème (fin du § 2). *Les solutions précises du problème sont nécessairement contenues parmi les systèmes* (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) *qui annulent* $\Sigma \xi_i \eta_i$ et $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i$ *pour* y *constant, égal à* y_0 *et* x *arbitraire, et aussi pour* x *constant, égal à* x_0 *et* y *arbitraire* : or la solution de ce problème *réduit* dépend de 17 paramètres, comme nous allons le

(1) On pourrait se contenter de dire : il existe un multiplicateur $\Delta^2 A^p B^p$ qui assure les identités (54), où p est un entier positif au plus égal à 5; la valeur précise de p importe peu. Le raisonnement employé dans ce paragraphe s'appliquerait d'ailleurs presque sans modification, aux cas de ∞^1 réseaux; $\Delta = 0$ donne une équation $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$ contenant les dérivées d'ordre 2 des X et des Y ; $N = 0$ donne une équation $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$ contenant les dérivées d'ordre 3. Le problème *réduit* donne une solution à 13 constantes au plus et le théorème d'Abel donne une solution à 13 constantes du problème *général*.

voir : il suffit donc de traiter ce problème réduit pour obtenir la solution du problème général et la solution générale est celle que fournit le théorème d'Abel.

En effet, posant

$$\Sigma \xi_i \eta_i \equiv f_1(x, y), \quad \Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i \equiv f_2(x, y),$$

nous avons à résoudre les équations

$$f_1(x, y_0) = 0, \quad f_2(x, y_0) = 0, \quad f_1(x_0, y) = 0, \quad f_2(x_0, y) = 0,$$

Si nous nous donnons, pour $y = y_0$, les dix valeurs numériques $(Y_1)_0, (Y_2)_0, (Y'_1)_0, \dots, (Y''_2)_0$, les deux équations $f_1(x, y_0) = 0, f_2(x, y_0) = 0$ sont deux équations différentielles, explicitement connues, l'une d'ordre 4 [et contenant X_1^v, X_2^v au premier degré], l'autre d'ordre 3 en X_1, X_2 , fonctions de x ; l'intégrale générale dépend alors de 7 constantes arbitraires qui sont $(X_1)_0, (X_2)_0, (X'_1)_0, (X'_2)_0, (X''_1)_0, (X''_2)_0, (X'''_1)_0$ pour $x = x_0$; l'équation $f_2(x_0, y_0) = 0$ ou $\Sigma(\bar{\xi}_i)_0(\bar{\eta}_i)_0 = 0$ fournit $(X''_2)_0$ et les équations $\Sigma(\xi_i)_0(\eta_i)_0 = 0, \Sigma(\bar{\xi}_i)_0(\bar{\eta}_i)_0 = 0$ fournissent $(X''_1)_0, (X''_2)_0$. Prenant maintenant ces valeurs numériques $(X_1)_0, (X_2)_0, \dots, (X''_2)_0$, les équations $f_1(x_0, y) = 0, f_2(x_0, y) = 0$ vont être étudiées de même en échangeant les rôles de x et y ; nous avons deux équations différentielles pour déterminer Y_1, Y_2 en fonction de y ; nous prenons pour valeurs initiales les nombres $(Y_1)_0, (Y_2)_0, (Y'_1)_0, (Y'_2)_0, (Y''_1)_0, (Y''_2)_0$ déjà choisis; $\Sigma(\xi_i)_0(\eta_i)_0 = 0$ donne pour $(Y''_2)_0$ la valeur déjà adoptée et les deux équations $\Sigma(\xi_i)_0(\eta'_i)_0 = 0, \Sigma(\bar{\xi}_i)_0(\bar{\eta}_i)_0 = 0$ à résoudre en $(Y''_1)_0, (Y''_2)_0$ donnent les valeurs déjà choisies, parce que l'identité (55) permet de remplacer $\Sigma(\xi_i)_0(\eta'_i)_0 = 0$ par l'équation déjà employée $\Sigma(\bar{\xi}_i)_0(\bar{\eta}_i)_0 = 0$.

Le seul point délicat à élucider est de savoir si l'on peut résoudre en X_1^v, X_2^v les deux équations $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$ et $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$: ces équations sont linéaires en X_1^v, X_2^v ; si ces équations étaient de la forme

$$\alpha X_1^v + \beta X_2^v + \gamma = 0, \quad \alpha_1 X_1^v + \beta_1 X_2^v + \gamma_1 = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = 0,$$

on remplacerait $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$ par $\alpha \gamma_1 - \alpha_1 \gamma = 0$, par exemple, et l'on aurait ainsi une équation toujours du type $\Sigma \Xi_j H_j = 0$ ne contenant plus que les dérivées de X_1, X_2 qu'à l'ordre maximum 3; cette équation

tion serait jointe à $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$, et l'on recommencerait le même raisonnement, avec ces deux équations; cette fois nous aurions simplement 18 constantes numériques liées par deux équations et la solution générale du problème *réduit* dépendrait de moins de 17 constantes, donc aussi celle du problème général: donc cette circonstance ne se produit pas (1). A l'extrême rigueur, il faut s'assurer aussi que les équations $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$, $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$ ne sont pas automatiquement vérifiées l'une et l'autre, ou du moins qu'elles ne se réduisent pas à une seule. Les raisonnements faits pour la seconde méthode lèvent ces objections: on a *deux équations effectives et distinctes*.

Nous avons donc complètement épuisé la question: *il n'existe pas d'autre solution que celle fournie par le théorème d'Abel*. Nous n'avons eu besoin de faire aucun calcul; nous eussions même pu à la rigueur ne pas traiter le cas d'intégrabilité complète, c'est-à-dire des surfaces à ∞^1 réseaux. C'était peut-être préférable de traiter ce cas spécial directement (surtout si l'on songe à l'extension aux réseaux coniques). Remarquons aussi que l'identité de deux solutions résulte bien du dénombrement des constantes, parce que les équations

$$\Sigma \xi_i \eta_i = 0, \quad \Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$$

(1) La dérivation des équations

$$\begin{aligned} f_1(x, y_0) \equiv 0, \quad f_2(x, y_0) \equiv 0, \quad f_1(x_0, y) \equiv 0, \\ f_2(x_0, y) \equiv 0, \quad \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 \equiv \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}, \end{aligned}$$

où λ_1, λ_2 sont deux fonctions finies de (x, y) montre que l'on a

$$\frac{\partial^\alpha f_1}{\partial x^\alpha}(x, y_0) \equiv 0, \quad \frac{\partial^\alpha f_2}{\partial x^\alpha}(x, y_0) \equiv 0, \quad \frac{\partial^\beta f_1}{\partial y^\beta}(x_0, y) \equiv 0, \quad \frac{\partial^\beta f_2}{\partial y^\beta}(x_0, y) \equiv 0$$

et numériquement en (x_0, y_0)

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0 \partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_0 \partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial^{\alpha+1} f_1}{\partial x_0^\alpha \partial y_0} = 0, \quad \frac{\partial^{\beta+1} f_2}{\partial x_0 \partial y_0^\beta} = 0;$$

mais à priori nous ne pouvions affirmer la nullité des autres dérivées, qui sont nulles pourtant, puisque f_1 et f_2 , en définitive, seront *identiquement* nulles. En dérivant deux fois en x ou y l'équation $\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 \equiv \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}$ on peut simplement affirmer la nullité des expressions $\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial x^2 \partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 f_2}{\partial x^2 \partial y}\right)_0$ et $\left(\frac{\partial^3 f_2}{\partial x \partial y^2}\right)_0$.

sont *linéaires* l'une en $X_1^{\alpha}, X_2^{\alpha}$, l'autre en $Y_1^{\alpha}, Y_2^{\alpha}$, de sorte que la solution du problème réduit ne peut comprendre plusieurs espèces de solutions toutes générales (au contraire la recherche des courbes gauches de degré 4 conduit à des courbes dépendant de 16 paramètres, mais réparties en deux familles essentiellement distinctes).

6. **Surfaces ayant deux réseaux. Deuxième méthode.** — Nous reprenons la question à partir du moment où nous avons formé les deux relations

$$\Sigma \xi_i \eta_i = 0, \quad \Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$$

[voir identités (54)]. Ces deux relations s'échangent l'une en l'autre par échanges de x avec y , X_1 avec Y_1 , X_2 avec Y_2 ; l'entier i varie de 1 jusqu'à une certaine valeur h entière, que nous ne déterminerons pas de façon précise, mais qui est assez élevée. Pour résoudre la première de ces deux relations, nous devons établir un certain nombre h_1 de relations linéaires et homogènes à coefficients constants indéterminés entre les ξ_i , et il en résulte, entre les η_i , $h - h_1$ relations linéaires et homogènes analogues, faisant intervenir les constantes déjà employées. On a ainsi, pour chaque choix de h_1 , des équations différentielles du type

$$(56) \quad \begin{cases} F(X_1, X_2, X_1', X_2', X_1'', X_2'', X_1''', X_2''', X_1^{IV}, X_2^{IV}, a, b, c, \dots) = 0, \\ \Phi(Y_1, Y_2, Y_1', Y_2', Y_1'', Y_2'', Y_1''', Y_2''', Y_1^{IV}, Y_2^{IV}, a, b, c, \dots) = 0, \end{cases}$$

en nombre h_1 pour les X , en nombre $h - h_1$ pour les Y , chaque expression F ou Φ étant un *polynome entier* par rapport aux arguments (X_1, X_2 et leurs dérivées, a, b, \dots ; Y_1, Y_2 et leurs dérivées) qui y entrent. On recommence les opérations semblables pour $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$, avec un entier h_2 qui n'est peut-être pas le même que h_1 et l'on a un système analogue (h_2 relations entre les Y , $h - h_2$ entre les X), contenant certaines constantes a', b', c', \dots

$$(57) \quad \begin{cases} F'(Y_1, Y_2, Y_1', Y_2', Y_1'', Y_2'', Y_1''', Y_2''', Y_1^{IV}, Y_2^{IV}, a', b', c', \dots) = 0, \\ \Phi'(X_1, X_2, X_1', X_2', X_1'', X_2'', X_1''', X_2''', X_1^{IV}, X_2^{IV}, a', b', c', \dots) = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations les dérivées d'ordre 4 entrent au premier degré.

Un premier résultat important est de montrer que, pour une surface

éventuelle, solution de notre problème précis étudiée ici (deux réseaux et deux seulement), les entiers h_1, h_2 coïncident et que les systèmes (56), (57) se déduisent l'un de l'autre par échange des X et Y , sans toucher aux constantes a, b .

En reprenant les notations (14), on remarque, en effet, que la surface $(\int X_1 dx + \int U_1 du, \int X_2 dx + \int U_2 du, x + u)$ a elle aussi deux réseaux (et deux seulement) et donne les relations $\Sigma \xi_i \eta_i = 0$, $\Sigma \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i = 0$ déduites de celles déjà écrites, en laissant tranquilles les x et X , remplaçant les y et Y par u et U ; mais alors les ξ_i (qui sont les mêmes que plus haut) sont liés par les h_i relations écrites déjà, de sorte que les U vérifient les équations Φ indiquées en (56), avec les mêmes a, b, c, \dots ; de même pour (57), de sorte que les Y satisfont exactement aux mêmes équations Φ et Φ' que les U ; dans les couples (1)

$$(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (U_1, U_2), (V_1, V_2)$$

marchant ensemble, on voit donc que deux quelconques satisfont aux mêmes équations, et cela établit notre proposition. Cela entraîne que, pour chaque choix de h_1 , nous avons simplement à discuter le système différentiel

$$(56') \quad \begin{cases} F(X_1, X_2, X'_1, X'_2, X''_1, X''_2, X'''_1, X'''_2, X''''_1, X''''_2, a, b, c, \dots) = 0, \\ \Phi(X_1, X_2, X'_1, X'_2, X''_1, X''_2, X'''_1, X'''_2, Y''_2, a, b, c, \dots) = 0, \end{cases}$$

composé de h relations au total (dont h_1 du premier degré en X'_1, X''_2) déduit de (56) en remplaçant les Y par les X dans les équations Φ ; ensuite (Y_1, Y_2) est une autre intégrale du même système.

Comme l'on connaît à priori la solution donnée par le théorème d'Abel, on sait que l'un au moins des systèmes tels que (56') (dépendant du choix précis de h_1) est compatible avec une solution contenant au moins 16 paramètres [car il s'agit simplement d'une intégrale X_1, X_2 et non d'un système de deux intégrales (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2)]. De

(1) Si la surface $(\int X_1 dx + \int Y_1 dy, \int X_2 dx + \int Y_2 dy, \int dx + \int dy)$ est à ∞^1 réseaux, la surface $(\int X_1 dx + \int U_1 du, \int X_2 dx + \int U_2 du, \int dx + \int du)$ n'en a que deux et notre raisonnement, fait de même façon, prouve que les U et V vérifient le même système, que les X et les Y vérifient le même système différent du précédent; c'est ce que nous avons obtenu directement et cela est une vérification précieuse de la méthode employée.

plus toute solution éventuelle X_1, X_2 est *analytique* en x (dans son travail, Poincaré le suppose implicitement, mais n'en donne pas de démonstration).

Aucun des systèmes que l'on rencontre ne peut être vérifié quelles que soient $X_1(x), X_2(x)$, sinon toute surface de translation aurait deux réseaux : or nous avons vu que la surface $(x^2, y^2, x+y)$ n'a qu'un réseau.

Dans *le* ou *les* systèmes qui sont compatibles, le nombre total d'équations distinctes qui restent (après avoir obtenu les relations nécessaires et suffisantes entre a, b, c, \dots pour la compatibilité, ce qui se fait uniquement par des calculs de différentiation et élimination), est donc *un* ou *deux*. L'hypothèse d'une seule équation est impossible, car, si cela était, on pourrait prendre l'une des fonctions X_2 arbitrairement en fonction de X_1 , et il resterait entre X_1, x une équation différentielle ordinaire donnant X_1 ; on opèrerait de même pour Y_1 et Y_2 ; or on constate aisément que $X_2=0, Y_2=Y_1^4$ ne réussit pas ⁽¹⁾. Donc (X_1, X_2) satisfont exactement à deux équations

(1) On a, en effet, dans ce cas

$$A = Y_1' Y_1^3 (3Y_1 - 4X_1), \quad B = X_1' Y_1^4;$$

écrivait (11') ou (12') sous leur seconde forme et posant

$$\lambda = \rho A^2 \quad \text{ou} \quad \lambda = \sigma B^2,$$

on a

$$\rho_x = \frac{3A_x}{A^2} + \frac{B}{A^3} A_y, \quad \sigma_y = \frac{3B_y}{B^2} + \frac{A}{B^3} B_x$$

d'où

$$\rho = -\frac{3}{A} + \frac{3}{8Y_1' Y_1^2} \frac{1}{(4X_1 - 3Y_1)^2} - \frac{Y_1'' Y_1 + 3Y_1'^2}{4Y_1'^3 Y_1^3} \frac{1}{4X_1 - 3Y_1} + Y_3,$$

$$\sigma = -\frac{3}{B} - \frac{X_1''}{X_1'^3 Y_1^3} + \frac{X_1'' X_1}{X_1'^3} \frac{1}{Y_1^4} + \frac{X_2}{Y_1^8},$$

où Y_3, X_3 sont des fonctions de y ou x à déterminer de sorte que ρA^2 et σB^2 soient égales. On constate aisément que ce choix est impossible; d'ailleurs la meilleure méthode pour le voir est de chercher à déterminer X_3 de sorte que σB^2 vérifie (11'); on a une équation différentielle du premier ordre pour déterminer X_3 en fonction de x , équation dont les coefficients ne sont pas indépendants de y . Les calculs ici sont devenus simples parce que l'on a pu intégrer (11') ou (12') directement, sans signe de quadrature; on n'a donc pas eu à suivre la méthode générale qui consiste à dériver (11') en y et (12') en x , circonstance qui rend les calculs si longs dans le cas général.

différentielles d'ordre 4 au maximum et (Y_1, Y_2) satisfont aux mêmes équations.

Nous arrivons donc, *uniquement par des éliminations et des différentiations*, à réduire les h relations (56') à deux seulement, nécessaires et suffisantes

$$(58) \quad \begin{cases} f_1(X_1, X_2, X'_1, \dots, a, b, \dots) = 0, \\ f_2(X_1, X_2, X'_1, \dots, a, b, \dots) = 0, \end{cases}$$

où f_1, f_2 sont des polynomes entiers par rapport aux X et aux a . Si f_1 contient les dérivées jusqu'à l'ordre p_1 , et f_2 jusqu'à l'ordre p_2 ($0 \leq p_1 \leq 4, 0 \leq p_2 \leq 4$), l'intégrale (X_1, X_2) dépend de $p_1 + p_2$ constantes autres que a, b, \dots , l'une de ces constantes étant attachée additivement à x , de sorte que, par élimination de x , nous aurions une relation entre X_1, X_2 dépendant de a, b, \dots et de $p_1 + p_2 - 1$ autres constantes arbitraires.

A partir de ce moment, il serait difficile, par ce procédé direct, de donner des conclusions rigoureuses : le résultat important est de montrer que f_1 , par exemple, ne contient plus de dérivées, et que f_2 ne contient de dérivées qu'à l'ordre 1 : autrement dit la courbe (X_1, X_2) est algébrique et l'on démontre aussitôt qu'elle est d'ordre 4 et que l'on a $\frac{dX_1}{dx} = \frac{\partial f_1}{\partial X_2}$, f_1 étant le polynome général d'ordre 4 en X_1, X_2 , qui sont liés par $f_1(X_1, X_2) = 0$.

Bien entendu, le calcul brutal, s'il avait été moins long, eût donné tous ces résultats, comme il les a donnés pour le cas de ∞^1 réseaux. Je cite quelques raisons de vraisemblance; les h relations (56') entre les 10 quantités X_1, X_2, \dots, X_2^n sont en nombre supérieur à 10; elles sont compatibles, algébriquement, et même au point de vue différentiel; elles laissent au point (X_1, X_2, \dots, X_2^n) de l'espace à 10 dimensions la possibilité de varier : le cas le plus normal est donc qu'elles se réduisent à neuf distinctes; on forme donc, par élimination de huit d'entre elles, une équation résolvante $f_1(X_1, X_2) = 0$ qui est algébrique et ensuite X'_1, X'_2, \dots, X_2^n s'expriment rationnellement en X_1, X_2 . Une seconde raison : la courbe (X_1, X_2) dépend, outre a, b, \dots , de $p_1 + p_2 - 1$ constantes arbitraires; donc, négligeant une translation, la courbe $(\int X_1 dx, \int X_2 dx, \int dx)$ dépend de a, b, \dots et de ces $p_1 + p_2 - 1$ arbitraires; comme la courbe $(\int Y_1 dy, \int Y_2 dy, \int dy)$ fait

intervenir aussi $p_1 + p_2 - 1$ valeurs différentes de ces $p_1 + p_2 - 1$ arbitraires, la surface de translation dépend de a, b, \dots et de $2(p_1 + p_2 - 1)$ arbitraires; A, B, λ, h, k se calculent explicitement, puis $(U_1, U_2), (V_1, V_2)$ par les formules données $\left(U_1 = \frac{X_1 - kY_1}{1 - k}, \dots\right)$, de sorte que la courbe (U_1, U_2) , intégrale de (58), doit dépendre de a, b, \dots et de $p_1 + p_2 - 1$ arbitraires, tandis que si on l'obtient par les formules $U_1 = \frac{X_1 - kY_1}{1 - k}, \dots$, elle semble dépendre de a, b, \dots et de $2(p_1 + p_2 - 1)$ autres arbitraires; la conclusion n'est pas absolue, car $2(p_1 + p_2 - 1)$ variables peuvent, dans certains cas, être fonctions de $(p_1 + p_2 - 1)$ combinaisons convenables des paramètres indépendants; mais il y a tout de même probabilité pour que $p_1 + p_2 - 1$ soit nul ($p_1 = 0, p_2 = 1$). Voici maintenant une *troisième raison* : si $p_1 + p_2 - 1$ n'est pas nul, nous avons 4 courbes $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2), (U_1, U_2), (V_1, V_2)$ analytiques, distinctes, telles que la droite joignant un point arbitraire de la première à un point arbitraire de la seconde, donc *droite à deux paramètres*, ait, parmi ses points communs avec (U_1, U_2) et (V_1, V_2) , un couple déterminé *analytiquement*, et ceci est assez probant pour affirmer, suivant Poincaré, que les 4 courbes sont les branches d'une même courbe algébrique, indécomposée ou non, de degré 4; mais Poincaré n'avait pas démontré que les courbes sont *analytiques*, résultat évident d'après les équations différentielles algébriques que nous avons indiquées.

Il nous a semblé que ce problème a attiré assez souvent l'attention de géomètres illustres (et même à plusieurs reprises, dans un intervalle de 15 ans, celle de Sophus Lie) pour que nous faisons cet exposé synthétique et que le lecteur ne nous en reproche pas la longueur.

Si maintenant nous songeons à la démonstration de la première méthode, nous avons vu que la courbe (Y_1, Y_2) est exactement la même que (X_1, X_2) : donc $p_1 + p_2 = 1, p_1 = 0, p_2 = 1$; nous avons ainsi prévu le résultat du calcul, sans avoir été obligé de le faire.

Quel est donc l'avantage de cette seconde méthode sur la première? La première nous oblige à intégrer le système formé d'une équation différentielle d'ordre 4 et d'une autre d'ordre 3 : *il reste donc 7 intégrales premières à trouver*. Dans la seconde méthode *l'intégration est*

poussée jusqu'au bout (ou du moins réduite à une quadrature unique pour avoir X_1, X_2 en fonction de x) : on n'a eu que des différentiations et éliminations à effectuer ⁽¹⁾.

On doit remarquer que si, par un moyen quelconque, on a démontré que la courbe (X_1, X_2) est *algébrique* et que $(Y_1, Y_2), (U_1, U_2), (V_1, V_2)$ sont la même courbe que (X_1, X_2) , *cette courbe est nécessairement de degré 4*, car le plan réunissant l'origine à la droite joignant les points $(X_1, X_2, 1), (Y_1, Y_2, 1)$ est parallèle au plan tangent au point (x, y) de la surface et cela prouve que (U_1, U_2) et (V_1, V_2) sont en ligne droite avec (X_1, X_2) et (Y_1, Y_2) ; au couple $(X_1, X_2), (Y_1, Y_2)$ correspond un seul couple $(U_1, U_2), (V_1, V_2)$, de sorte que la courbe est de degré 4; on peut ensuite démontrer directement que l'on a

$$\frac{dX_1}{dx} = \frac{\partial f}{\partial X_2},$$

si $f(X_1, X_2) = 0$ est l'équation entière de la courbe. En effet, on a, employant les coordonnées homogènes $(X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3), (U_1, U_2, U_3)$,

$$0 = f(U_1, U_2, U_3) = f(X_1 - kY_1, X_2 - kY_2, X_3 - kY_3).$$

Cela donne, en développant et supprimant le facteur k ,

$$(59) \quad Y_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial X_2} + Y_3 \frac{\partial f}{\partial X_3} - \frac{k}{2} \left(Y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \dots \right) + k^2 \left(X_1 \frac{\partial f}{\partial Y_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial Y_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial Y_3} \right) = 0.$$

Cette équation doit avoir les mêmes racines k que

$$(60) \quad B + \lambda k + A k^2 = 0.$$

⁽¹⁾ Une exception *apparente* est fournie par le système (41) où il s'agit du cas de ∞^1 réseaux, déduits d'un premier réseau connu formé de courbes planes; mais, dans ce cas, si l'on revient aux surfaces à *deux* réseaux qui apparaissent, on voit que l'intégration se fait automatiquement.

D'autre part

$$\begin{aligned} B &= X'_2(X_1 - Y_1) - X'_1(X_2 - Y_2) = \frac{-X'_1}{\frac{\partial f}{\partial X_2}} \left[\frac{\partial f}{\partial X_2}(X_2 - Y_2) + \frac{\partial f}{\partial X_1}(X_1 - Y_1) \right] \\ &= \frac{X'_1}{\frac{\partial f}{\partial X_2}} \left[Y_1 \frac{\partial f}{\partial X_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial X_2} + Y_3 \frac{\partial f}{\partial X_3} \right] \end{aligned}$$

et de même, échangeant les X et les Y,

$$A = \frac{Y'_1}{\frac{\partial f}{\partial Y_2}} \left[X_1 \frac{\partial f}{\partial Y_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial Y_2} + X_3 \frac{\partial f}{\partial Y_3} \right].$$

L'équation (60) reproduit donc (59) multipliée soit par $\frac{X'_1}{\frac{\partial f}{\partial X_2}}$ soit par $\frac{Y'_1}{\frac{\partial f}{\partial Y_2}}$. Ces deux multiplicateurs sont égaux, et comme l'un ne

dépend que de x , l'autre que de y , les paramètres x, y étant indépendants, ces deux multiplicateurs sont égaux à une même constante, que l'on peut supposer égale à 1, en multipliant éventuellement f par une constante convenable (ce qui en réalité fait disparaître l'homogénéité des 15 coefficients de f). On a donc

$$X'_1 = \frac{\partial f}{\partial X_2}, \quad Y'_1 = \frac{\partial f}{\partial Y_2}, \quad X'_2 = -\frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad Y'_2 = -\frac{\partial f}{\partial X_2},$$

puis

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{2} \left[Y_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + 2Y_1Y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} + Y_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} \right. \\ &\quad \left. + 2Y_1 \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_3} + 2Y_2 \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_3} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_3^2} \right]. \end{aligned}$$

Cette expression est du second degré séparément en (X_1, X_2) et en (Y_1, Y_2) .

7. Surfaces ayant plusieurs réseaux conjugués coniques. — Le problème des surfaces ayant deux réseaux de translation a attiré suffisamment l'attention de géomètres illustres (et même à trois reprises, en 15 ans, l'attention de Sophus Lie) pour nous autoriser à passer en

revue divers modes d'attaquer cette question. Et surtout nous songions à voir si ces diverses méthodes pourraient s'appliquer au problème qui généralise le précédent d'une façon naturelle : *trouver une surface possédant plusieurs réseaux conjugués coniques*. Les sommets des cônes circonscrits le long des courbes du réseau décrivent, pour un premier réseau conjugué conique, deux courbes L_1, L_2 ; pour le second réseau on trouve de même deux lignes L_3, L_4 ; si toutes ces courbes sont planes et dans un même plan, il suffit de faire une transformation homographique de l'espace, de façon que ce plan devienne le plan de l'infini pour retrouver les surfaces de translation à plusieurs réseaux. *Nous écartons donc ce cas.*

Nous considérons une surface $(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3 + Y_3, x + y)$ rapportée à un réseau conique conjugué; si elle admet un second réseau de cette espèce, on aura, avec une certaine fonction $\rho(x, y)$,

$$(1) \quad \begin{cases} \rho(X_1 + Y_1) = U_1 + V_1, & \rho(X_2 + Y_2) = U_1 + V_2, \\ \rho(X_3 + Y_3) = U_3 + V_3; & \rho(x + y) = u + v. \end{cases}$$

Chaque grande lettre est une fonction de la variable représentée par la même petite lettre. L'expression (a, b, c, d constantes)

$$(2) \quad z = a(X_1 + Y_1) + b(X_1 + Y_2) + c(X_3 + Y_3) + d(x + y)$$

est une solution, à quatre paramètres arbitraires, commune aux deux équations

$$(3) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 (\rho z)}{\partial u \partial v} = 0.$$

On a donc deux problèmes successifs à résoudre :

1° Trouver deux équations

$$(4) \quad s = 0, \quad Ar + Bt + Cp + Dq + Ez = 0$$

qui aient une solution commune à quatre paramètres. Ceci se résout aussitôt; la solution $x + y$ donne l'identité $C + D + E(x + y) \equiv 0$;

les autres solutions donnent

$$(5) \quad \begin{cases} AX_1'' + BY_1'' + C\left(X_1' - \frac{X_1 + Y_1}{x + y}\right) + D\left(Y_1' - \frac{X_1 + Y_1}{x + y}\right) = 0, \\ AX_2'' + BY_2'' + C\left(X_2' - \frac{X_2 + Y_2}{x + y}\right) + D\left(Y_2' - \frac{X_2 + Y_2}{x + y}\right) = 0, \\ AX_3'' + BY_3'' + C\left(X_3' - \frac{X_3 + Y_3}{x + y}\right) + D\left(Y_3' - \frac{X_3 + Y_3}{x + y}\right) = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, choisissant le coefficient de proportionnalité, nous pouvons prendre A, B, C, D égaux aux coefficients de α , β , γ , δ dans le développement du déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ X_1'' & Y_1'' & X_1' - \frac{X_1 + Y_1}{x + y} & Y_1' - \frac{X_1 + Y_1}{x + y} \\ X_2'' & Y_2'' & X_2' - \frac{X_2 + Y_2}{x + y} & Y_2' - \frac{X_2 + Y_2}{x + y} \\ X_3'' & Y_3'' & X_3' - \frac{X_3 + Y_3}{x + y} & Y_3' - \frac{X_3 + Y_3}{x + y} \end{vmatrix}.$$

Cette première partie est donc résolue aussitôt;

2° A, B, C, D, E ayant les valeurs qui viennent d'être données, comment doit-on particulariser (X_1, X_2, X_3) , (Y_1, Y_2, Y_3) , de façon à pouvoir trouver deux fonctions nouvelles $\lambda(x, y)$, $\rho(x, y)$ telles que, si l'on pose $z = \rho Z$, l'équation

$$(6) \quad Ar + Bt + Cp + Dq + Ez + \lambda s = 0$$

se transforme en

$$(7) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = 0,$$

où u, v sont des fonctions convenables de x, y (le produit $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}$ doit être non nul). Gardant d'abord les variables x, y , l'équation (6)

devient

$$(8) \quad A\rho \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \lambda\rho \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + B\rho \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial Z}{\partial x} \left[2A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \rho}{\partial y} + C\rho \right] + \frac{\partial Z}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2B \frac{\partial \rho}{\partial y} + D\rho \right] \\ + Z \left[A \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + C \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial \rho}{\partial y} + E\rho \right] = 0.$$

On écrit maintenant

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial Z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial Z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

On trouve donc les équations de condition, nécessaires et suffisantes,

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} A \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + B \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad A \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \lambda \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + B \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0, \\ A\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda\rho \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + B\rho \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial u}{\partial x} \left(2A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \rho}{\partial y} + C\rho \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2B \frac{\partial \rho}{\partial y} + D\rho \right) = 0, \\ A\rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda\rho \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B\rho \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial v}{\partial x} \left(2A \frac{\partial \rho}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \rho}{\partial y} + C\rho \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \rho}{\partial x} + 2B \frac{\partial \rho}{\partial y} + D\rho \right) = 0, \\ A \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + C \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial \rho}{\partial y} + E\rho = 0. \end{array} \right.$$

Comme plus haut, nous posons

$$(10) \quad \frac{\lambda}{A} = -(h+k), \quad \frac{B}{A} = hk, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = h \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = k \frac{\partial v}{\partial y}$$

et nous obtenons, comme plus haut,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} - k \frac{\partial h}{\partial y} + h \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho A} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{C}{A} \right) + \frac{\lambda}{\rho A} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2B}{A} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{D}{A} &= 0, \\ \frac{\partial k}{\partial x} - h \frac{\partial k}{\partial y} + k \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho A} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{C}{A} \right) + \frac{\lambda}{\rho A} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{2B}{A} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{D}{A} &= 0. \end{aligned}$$

Par addition nous obtenons une équation faisant intervenir A, B rationnellement; ensuite nous transformons cette équation en échangeant (x, y) , (A, B) , (C, D) et nous obtenons le système nécessaire et suffisant

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B}{A} \right) + \frac{\lambda}{A} \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\lambda}{\rho A} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{C}{A} \right) \\ \quad - \frac{2\lambda}{\rho A} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{4B}{A} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{2D}{A} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{B} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A}{B} \right) + \frac{\lambda}{B} \left(\frac{2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\lambda}{\rho B} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{D}{B} \right) \\ \quad - \frac{2\lambda}{\rho B} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{4A}{B} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{2C}{B} &= 0, \\ A \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + C \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial \rho}{\partial y} + E &= 0. \end{aligned} \right.$$

On a trois équations pour les deux inconnues λ, ρ . Si ces équations sont compatibles, on a h, k , puis u, v par les équations (10).

Les deux premières équations (11) sont de la forme

$$(12) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial x} = H\lambda^2 + K\lambda + L, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = H_1\lambda^2 + K_1\lambda + L_1.$$

Par différentiation en x ou y , on obtient

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} \lambda^2 + \frac{\partial K}{\partial y} \lambda + \frac{\partial L}{\partial y} + (2H_1\lambda + K_1)(H\lambda^2 + K\lambda + L) \\ = \frac{\partial H_1}{\partial x} \lambda^2 + \frac{\partial K_1}{\partial x} \lambda + \frac{\partial L_1}{\partial x} + (2H\lambda + K)(H_1\lambda^2 + K_1\lambda + L). \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré en λ ; si donc on peut déterminer

$(X_1, X_2, X_3), (Y_1, Y_2, Y_3)$ et ρ de façon à satisfaire aux équations

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H_1}{\partial x} + HK_1 - KH_1 = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial K_1}{\partial x} + 2HL_1 - 2H_1L = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial L_1}{\partial x} + KL_1 - K_1L = 0, \\ A \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 \rho}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + C \frac{\partial \rho}{\partial x} + D \frac{\partial \rho}{\partial y} + E = 0; \end{array} \right.$$

la surface aura ∞^1 réseaux coniques (H, K, L, H_1, K_1, L_1) contiennent à la fois les X , les Y et ρ . Si même les X, Y étant fixés, ρ pouvait prendre plusieurs valeurs, on aurait plusieurs séries de ∞^1 réseaux coniques.

Si cela n'a pas lieu, il faut voir si une ou deux racines de l'équation (13), qui n'est plus indéterminée, peuvent satisfaire aux équations (11), par un choix convenable de ρ .

On voit que les résultats sont beaucoup moins précis : *en général une surface peut avoir 0, 1, 2, 3, ∞^1 réseaux coniques conjugués.* Mais il faudrait, à la rigueur, envisager le cas où il y aurait plusieurs choix de ρ pour une même surface, donnant chacun un ou deux réseaux coniques nouveaux, sans que l'équation (13) soit indéterminée.

On se heurte, dès de début, à des difficultés de calcul presque insurmontables; nous n'avons pas le secours d'une solution, à plusieurs paramètres, connue a priori, comme pour le théorème d'Abel appliqué aux quartiques. Nous n'avons pas non plus la possibilité de faire jouer le même rôle aux courbes $(X'_1, X'_2, X'_3, 1), (Y'_1, Y'_2, Y'_3, 1), (U'_1, U'_2, U'_3, 1), (V'_1, V'_2, V'_3, 1)$ qui sont les lieux des sommets des cônes circonscrits, et cela à cause du facteur ρ . Il y aurait lieu de chercher à résoudre cette question difficile.

Je ne connais qu'un travail sur cette question; on sait que la suite de Laplace relative à un réseau conjugué jouit de propriétés importantes, au point de vue ponctuel et tangentiel; si le réseau conjugué est conique, le cas où *le lieu des sommets des cônes circonscrits est une ligne plane est un cas de simplification importante; le cas précis où cette courbe est une droite est encore plus intéressant.* C'est ce qui a conduit

le géomètre russe, J. Blank, à étudier les surfaces qui admettent deux réseaux conjugués coniques du type de Peterson, c'est-à-dire doublement de Kœnigs : les courbes d'une famille du premier réseau sont planes et leurs plans pivotent autour d'une droite D_1 , tandis que le long de chacune il y a un cône circonscrit dont le sommet décrit une droite Δ_1 ; il en résulte que les courbes conjuguées sont les sections de la surface par les plans pivotant autour de Δ_1 , les cônes circonscrits correspondants ayant leurs sommets sur D_1 ; D_1 et Δ_1 sont ainsi réciproques vis-à-vis de la surface. M. Blank s'est proposé de trouver des surfaces pour lesquelles il y a deux réseaux de Peterson et il a trouvé trois réseaux pour lesquels les axes sont les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre.

Le Mémoire, rédigé en allemand, est inséré aux *Communications de la Société Mathématique de Kharkoff*, 4^e série, t. XI, 1935, p. 55-68.

L'auteur a trouvé les types suivants réduits, par homographie, à leur plus simple expression

$$1^{\circ} \quad x^k + y^k + z^k + t^k = 0,$$

$$2^{\circ} \quad x^\alpha y^\beta = z^\gamma t^\delta \quad (\alpha + \beta = \gamma + \delta),$$

$$3^{\circ} \quad x^k + y^k + z t^{k-1} + t^k = 0,$$

$$4^{\circ} \quad e^{\frac{z}{t}} = \left(\frac{x}{t}\right)^m \left(\frac{y}{t}\right)^n,$$

$$5^{\circ} \quad (x^2 + y^2) e^{\mu \operatorname{arctg} \frac{t}{z}} = (z^2 + t^2) e^{\lambda \operatorname{arctg} \frac{y}{x}},$$

et enfin les quadriques (rentrant dans le type 1) mais admettant ∞^4 réseaux de Peterson. On peut remarquer que l'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$(x + iy)^{1 - \frac{\lambda}{2i}} (x - iy)^{1 + \frac{\lambda}{2i}} = (z + it)^{1 - \frac{\mu}{2i}} (z - it)^{1 + \frac{\mu}{2i}},$$

de sorte que l'on trouve un cas particulier du type (2).