GASTON DARBOUX

Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 1 (1872), p. 323-392
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1872_2_1__323_0>

SUR LES RELATIONS

ENTRE LES GROUPES

DE POINTS, DE CERCLES ET DE SPHÈRES

DANS LE PLAN ET DANS L'ESPACE;

PAR M. G. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

La théorie des tétraèdres et des distances mutuelles des points dans le plan et dans l'espace doit à un grand nombre de Géomètres des formules élégantes établissant des relations entre les aires, les volumes, les distances se rapportant aux groupes géométriques considérés. Plusieurs équations importantes, dues à Euler, Legendre, Lagrange, Carnot, Gauss, Joachimsthal, Cayley, Sylvester, V. Staudt, Siebeck, etc., ont été développées et démontrées par M. Baltzer dans son *Traité des déterminants*. Ayant eu à m'occuper d'une question relative à deux tétraèdres, je me suis aperçu qu'il pouvait y avoir, dans bien des cas, avantage à considérer ces formules, en les rattachant à certaines formes homogènes qui se présentent naturellement dans cette théorie.

Par exemple, pour le tétraèdre, cette forme homogène est celle qui, égalée à zéro, représenterait la sphère circonscrite. Pour les questions relatives à deux groupes de points, les formes homogènes contiennent deux séries de variables indépendantes; elles sont de la classe de celles qui, égalées à zéro, définissent la corrélation de deux figures. Alors les équations connues, et d'autres peut-être nouvelles, se déduisent de la considération des invariants et des covariants de ces formes.

Dans la première Partie, j'étudie spécialement les questions relatives à un seul tétraèdre. Quelques développements se rapportent à un triangle remarquable, qui a pour côtés les trois produits des arêtes opposées du tétraèdre. Ce triangle adjoint, qui intervient dans la discussion de tout tétraèdre, a été considéré aussi par Joachimsthal et MM. Baltzer et V. Staudt. Il demeure invariable quand on effectue une transformation par rayons vecteurs réciproques; il est toujours possible, quand le tétraèdre existe, et ne se réduit à une ligne que si la sphère circonscrite au tétraèdre se réduit à un point, comme l'a montré M. Cayley dans un élégant article inséré aux *Annali di Matematica*, t. I (¹).

A la fin de la première Partie, je fais usage d'une importante notion relative aux cercles, et qui me paraît due à M. Chasles. Cet illustre géomètre l'a proposée dans la *Géométrie supérieure* et dans la *Théorie des coniques sphériques homofocales* (*Journal* de M. Liouville, t. V, 2ᵉ série). Employée par M. Cayley, dans l'article déjà cité, reprise dans ces derniers temps par M. Laguerre (*Bulletin de la Société Philomathique*, 1870, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1872), elle me paraît mériter qu'on lui donne la première place dans la théorie géométrique du cercle.

Étant donné un cercle dans l'espace, par ce cercle, on peut toujours faire passer deux sphères de rayon nul A, A′, dont nous appellerons les centres *foyers* du cercle. Il est clair qu'un cercle est déterminé par ses deux foyers. Il suffit, au contraire, d'un seul de ces points pour déterminer un cercle situé dans un plan. Je montre, dans la première Partie, comment la considération des foyers du cercle permet de retrouver la belle solution de Gergonne, et plusieurs autres solutions du problème des contacts des cercles.

Dans la deuxième Partie se trouvent établies les formules relatives à deux groupes de quatre sphères, deux tétraèdres, deux groupes de n sphères ou de n points, n étant quelconque. Peut-être n'avait-on pas eu l'idée de traiter pour les sphères quelques-unes des questions que j'examine : équation de la sphère orthogonale à quatre autres, rayon de cette sphère, relations entre les angles des sphères et des cercles, condition pour que cinq sphères soient orthogonales à une même sphère, etc. Les formules établies pourraient se démontrer directement;

(¹) *Sur le théorème de M. Casey*, par M. Cayley.

il m'a paru intéressant d'en conserver le lien avec la théorie des formes homogènes du second degré.

Dans la troisième Partie se trouvent quelques applications des formules qui ont été données dans les Parties précédentes. Je reprends les constructions géométriques, pour donner des solutions simples des problèmes suivants : construire un cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés; construire un cercle coupant sous des angles égaux quatre cercles donnés ou ayant, avec quatre cercles donnés, une tangente commune de même longueur, etc., et des problèmes analogues relatifs aux sphères. La solution des mêmes problèmes est ensuite donnée analytiquement comme conséquence des formules établies.

Enfin, dans les dernières pages, se trouve établie une formule que j'avais rencontrée incidemment, et qui lie les puissances d'un point par rapport à cinq sphères. Cette équation est homogène et du second degré; j'en ai réservé l'examen et les conséquences pour une étude développée dont j'ai déjà publié, en partie, les résultats, et qui se rapporte à tout système de coordonnées homogènes dans lequel on emploie, pour déterminer un point, cinq coordonnées homogènes liées par une équation du second degré.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Soient x_i, y_i, z_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées des sommets d'un tétraèdre, et supposons que les axes choisis soient rectangulaires, l'origine des coordonnées étant au centre de la sphère circonscrite. Si l'on désigne par R le rayon de cette sphère, et par $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$ les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque de l'espace, l'équation de la sphère sera

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2T^2 = 0; \tag{1}$$

puisque les sommets du tétraèdre sont sur la sphère, on a

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R^2 = 0. \tag{2}$$

Cela posé, effectuons une transformation de coordonnées, et exprimons l'équation de la sphère en coordonnées tétraédriques, en prenant pour tétraèdre de référence précisément celui qui est formé par les quatre points donnés, et auquel se trouve circonscrite la sphère considérée. Mais il faut préciser encore, car le tétraèdre de référence ne suffit pas à la détermination d'un système de coordonnées.

Tous les systèmes de coordonnées homogènes qui correspondent à un même tétraèdre de référence ont entre eux, comme on sait, les rapports les plus étroits. On passe de l'un quelconque de ces systèmes à tous les autres, en multipliant les coordonnées par des nombres quelconques, mais fixes. Parmi tous ces systèmes, en nombre illimité, deux peuvent être considérés comme les plus importants et les plus simples.

L'un, qui est le plus souvent adopté, est celui dans lequel on prend comme coordonnées les perpendiculaires abaissées d'un point sur les quatre faces du tétraèdre (ou plutôt, comme les équations sont homogènes, des quantités quelconques, qui sont dans les mêmes rapports que ces perpendiculaires).

Le second mode de détermination, moins employé que le premier, nous paraît cependant plus propre à faire ressortir la véritable nature des coordonnées homogènes. Utilisé d'abord par Lagrange, dans son Mémoire sur les pyramides, il a surtout été développé par Möbius. Étant donné un point, on peut toujours le considérer comme centre de gravité de quatre masses μ_i placées au sommet du tétraèdre, et dont les rapports seuls sont déterminés. Les coordonnées du point sont alors les quantités μ_i qui sont entre elles comme les volumes des quatre tétraèdres qu'on peut former avec le point variable, et chacune des faces du tétraèdre de référence. Ainsi, dans ce nouveau système, un point est déterminé par les rapports respectifs des volumes affectés de signes de quatre tétraèdres, il est considéré comme centre de gravité de quatre masses μ_i, et la relation qu'a ce mode de détermination avec les théorèmes de la Statique le rend extrêmement précieux, et le place, comme importance, sur le même rang que le système ordinaire, où l'on détermine le point par ses distances aux faces.

Nous supposerons donc ici qu'on ait choisi le système de Lagrange et de Möbius, et nous allons chercher l'équation de la sphère circonscrite en fonction des quantités μ_i.

D'après les formules relatives au centre de gravité, nous obtenons immédiatement les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} X = \Sigma\mu_i x_i, \\ Y = \Sigma\mu_i y_i, \\ Z = \Sigma\mu_i z_i, \\ T = \Sigma\mu_i; \end{cases}$$

en portant ces valeurs de X,..., T dans l'équation de la sphère, on obtiendra, en tenant compte des équations de condition (2),

$$-\Sigma\mu_i\mu_j[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]=0,$$

ou, en désignant par d_{ij} le carré de la distance des deux points i, j,

$$(4)\qquad -\Sigma d_{ij}\mu_i\mu_j = 0.$$

Cette équation de la sphère en coordonnées homogènes est privée des carrés des variables, et ses coefficients ont une forme extrêmement simple, qu'on ne retrouverait pas avec un autre choix de coordonnées.

Cela posé, comme le premier membre de l'équation devient, sans modification, le premier membre de l'équation (4), le hessien de la première équation sera reproduit, multiplié par le carré du déterminant de la substitution (3). En écrivant ce résultat, nous aurons

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{d_{12}}{2} & -\frac{d_{13}}{2} & -\frac{d_{14}}{2} \\ -\frac{d_{21}}{2} & 0 & -\frac{d_{23}}{2} & -\frac{d_{24}}{2} \\ -\frac{d_{31}}{2} & -\frac{d_{32}}{2} & 0 & -\frac{d_{34}}{2} \\ -\frac{d_{41}}{2} & -\frac{d_{42}}{2} & -\frac{d_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = -R^2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Le déterminant de la substitution est égal, d'après une formule connue, à six fois le volume V du tétraèdre considéré; l'équation précédente prendra donc la forme

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = -(24\mathrm{RV})^2,$$

formule due à Carnot, et dont le premier membre a été mis sous la forme d'un déterminant par Joachimsthal.

La considération des contrevariants donne une nouvelle équation. On sait qu'étant donné un polynôme homogène

$$(6)\qquad \Sigma a_{ij} x_i x_j$$

du second degré, et deux polynômes

$$(7)\qquad \Sigma m_i x_i, \quad \Sigma m'_i x_i$$

du premier degré, l'expression

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 & m'_4 & 0 \end{vmatrix}$$

est un contrevariant qui se reproduit multiplié par le carré du déterminant de la substitution. Calculons ce contrevariant :

1° Pour les deux plans coïncidents dont les équations sont

$$\mathrm{T} = 0, \quad \mathrm{T} = 0,$$

et le polynôme

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - \mathrm{R}^2\mathrm{T}^2;$$

2° Pour les polynômes transformés

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 \quad \text{et} \quad \Sigma - d_{ij}\mu_i\mu_j.$$

En appliquant la proposition que nous venons de rappeler, nous obtiendrons l'équation

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix} = 288\,V^2.$$

C'est la formule connue qui donne le volume d'un tétraèdre en fonction des arêtes, et que Euler a publiée dans les *Commentaires de Saint-Pétersbourg*.

Nous ferons remarquer que la manière dont nous l'obtenons indique une définition des volumes analogue à celle que M. Cayley a donnée pour les distances. Le volume serait, à un facteur numérique près, la racine carrée du contrevariant formé avec l'équation (3) de la sphère circonscrite au tétraèdre, et avec celle du plan de l'infini.

II.

Dans son Mémoire sur les pyramides, Lagrange s'était proposé de déterminer le tétraèdre de volume maximum parmi ceux dont les faces ont des aires données. M. Borchardt, qui a repris cette question [1], et qui en donne une solution des plus élégantes [2], a indiqué quelques théorèmes d'analyse que nos formules interprètent et rendent géométriquement évidents. Par exemple le théorème suivant :

Pour qu'un tétraèdre soit possible avec six arêtes $\sqrt{d_{ik}}$, il faut et il suffit que la forme quaternaire

$$\Sigma - d_{ik}\mu_i\mu_k$$

se change en une forme définie positive quand on y élimine une des variables par l'équation

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 0,$$

(1) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1865 et 1866.

(2) *Voir* aussi, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, d'importants travaux antérieurs dus à MM. Painvin, Paul Serret, Lebesgue.

qui a été indiqué par M. Borchardt, résulte naturellement de notre méthode, car la forme quaternaire égalée à zéro représente la sphère circonscrite au tétraèdre. L'équation du premier degré

$$\Sigma \mu_i = 0$$

représente le plan de l'infini, et comme ce plan ne coupe pas la sphère, la forme quaternaire devient une forme définie positive transformée de

$$X^2 + Y^2 + Z^2,$$

par la substitution (3), avec l'hypothèse

$$\Sigma \mu_i = 0.$$

L'équation de la sphère circonscrite se prête bien aussi à l'étude d'une autre question : *recherche des conditions sur lesquelles les arêtes opposées d'un tétraèdre sont perpendiculaires*. Étant données deux droites joignant l'une deux points A_i, A_k, l'autre les deux autres points $A_{i'}$, $A_{k'}$, on démontrera sans peine la formule

$$(10) \qquad \overline{A_i A_k} \times \overline{A_{i'} A_{k'}} \cos\left(\widehat{A_i A_k,\ A_{i'} A_{k'}}\right) = d_{ii'} + d_{kk'} - d_{ik'} - d_{i'k},$$

et, par conséquent, pour que les droites considérées soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$d_{ii'} + d_{kk'} = d_{ik'} + d_{i'k}.$$

Appliquant ces conditions aux arêtes opposées du tétraèdre, on trouvera

$$(11) \qquad d_{12} + d_{34} = d_{13} + d_{24} = d_{14} + d_{23}.$$

On voit qu'il suffit que deux couples d'arêtes opposées soient perpendiculaires pour qu'il en soit de même de celles du dernier couple.

On arrive aux mêmes résultats en exprimant qu'il y a une sphère conjuguée au tétraèdre. En effet, l'équation de toute sphère sera évidemment

$$(12) \qquad \Sigma d_{ik} \mu_i \mu_k - (\Sigma \mu_i)(\Sigma \nu_i \mu_i) = 0;$$

s'il y a une sphère conjuguée au tétraèdre, on pourra disposer des quantités v_i de telle manière que les rectangles disparaissent, et l'on devra avoir par conséquent

$$d_{ik} = v_i + v_k \tag{13}$$

pour toutes les valeurs distinctes de i et de k. Ces formules entraînent les relations (11), et l'équation de la sphère conjuguée au tétraèdre deviendra

$$\Sigma v_i \mu_i^2 = 0. \tag{14}$$

Les formules (13) d'une forme si simple nous conduisent à examiner la question suivante :

Quels sont tous les systèmes de points dans l'espace pour lesquels la distance de deux points i, k s'exprime par les formules (13).

Ces formules expriment, évidemment, d'après la remarque faite plus haut, qu'étant donnés deux points i, k, et deux autres points i', k', distincts des premiers, la droite ik sera perpendiculaire à $i'k'$. Donc, si dans le système des points considérés on en isole deux, i, k, toutes les droites joignant les autres points devront être perpendiculaires à la droite ik; il faudra donc que tous les points, moins deux, soient dans un même plan. Donc : 1° le nombre total des points ne pourra dépasser cinq; 2° ces points formeront un système dans lequel chacun d'eux sera le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre formé par les quatre autres. On voit que la symétrie est complète entre ces cinq points.

Si de chacun d'eux comme centre avec un rayon égal à $\sqrt{v_i}$ pour le point i on décrit une sphère, on obtient cinq sphères, et les équations (13) expriment que deux quelconques de ces sphères sont orthogonales. Ainsi les cinq points forment les centres de cinq sphères orthogonales, et d'ailleurs, en exprimant qu'il y a entre leurs distances la relation qui lie cinq points de l'espace, on aura l'équation

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4} + \frac{1}{v_5} = 0, \tag{15}$$

qui a lieu entre les carrés des inverses des rayons des cinq sphères. Cette équation montre que, si les centres des cinq sphères peuvent être réels, quelques-uns des rayons, un au moins, ont leur carré négatif.

III.

Enfin nous ferons des formules précédentes une autre application, et nous chercherons la condition pour qu'un quadrilatère gauche ait ses quatre côtés sur une surface de révolution du second degré. Une surface de révolution étant inscrite à une sphère, l'équation d'une telle surface pourra toujours s'écrire

$$\Sigma d_{ik}\mu_i\mu_k - \Sigma \mu_i(\Sigma v_i\mu_i) + (\Sigma \omega_i\mu_i)^2 = 0. \tag{16}$$

Exprimons que cette surface contient toutes les arêtes du tétraèdre proposé autres que 12 et 34. Dans l'équation (16), les différents termes autres que μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 devront s'annuler, ce qui donne les équations

$$v_i = \omega_i^2, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \quad \text{et} \quad d_{ik} = (\omega_i - \omega_k)^2;$$

on doit excepter dans cette dernière équation les deux systèmes de valeurs

$$i = 1, \quad k = 2,$$
$$i = 3, \quad k = 4;$$

on a donc

$$\pm\sqrt{d_{13}} = \omega_1 - \omega_3, \quad \pm\sqrt{d_{23}} = \omega_2 - \omega_3,$$
$$\pm\sqrt{d_{14}} = \omega_1 - \omega_4, \quad \pm\sqrt{d_{24}} = \omega_2 - \omega_4,$$

et, par conséquent, l'équation de condition entre les longueurs des quatre côtés sera

$$\pm\sqrt{d_{13}} \pm \sqrt{d_{14}} = \pm\sqrt{d_{24}} \pm \sqrt{d_{13}}. \tag{17}$$

Donc :

Pour qu'un quadrilatère gauche ait ses quatre côtés sur une surface de révolution, il faut et il suffit que la somme de deux quelconques de ses côtés soit égale à celle des deux autres.

C'est la même condition que Steiner a donnée pour qu'un quadrilatère plan soit circonscrit à un cercle, et l'on peut d'ailleurs démontrer, par la Géométrie, que cette condition est remplie pour tout quadrilatère gauche situé sur une surface de révolution. Car, si l'on projette les génératrices sur le plan du cercle de gorge, le quadrilatère gauche se projette suivant un quadrilatère circonscrit au cercle de gorge, et comme les côtés de ce quadrilatère sont égaux à ceux du quadrilatère gauche, tous diminués dans la même proportion, la relation démontrée par Steiner pour le quadrilatère plan s'étend au quadrilatère gauche, situé sur la surface de révolution.

La remarque précédente nous amène à compléter une analogie entre les coniques planes et les surfaces de révolution du second degré ayant deux foyers réels.

On sait que les quatre rayons vecteurs qui joignent les deux foyers d'une conique à deux points A, B de cette conique sont tangents à un cercle ayant pour centre le pôle de la droite AB. De même

Les quatre rayons vecteurs qui joignent les deux foyers d'une surface de révolution à deux points A, B *de cette surface sont tangents à une infinité de sphères ayant leurs centres sur la droite polaire de* AB, *et ces sphères enveloppent une surface de révolution ayant pour axe la polaire de* AB, *pour foyers (imaginaires) les points d'intersection de la surface et de cette polaire, et enfin contenant les quatre rayons vecteurs qui joignent les deux foyers aux points* A, B.

Les quadrilatères gauches que nous avons étudiés ici se distinguent des autres par la propriété suivante. En général, étant donné un quadrilatère quelconque, il y a seulement huit sphères tangentes à ses quatre côtés. Les points de contact de ces sphères s'obtiennent sans difficulté, et leurs centres sont à l'intersection des quatre couples de plans bissecteurs des angles du quadrilatère. Les quadrilatères que nous avons rencontrés ici sont, au contraire, tangents à toute une suite de sphères, et ces sphères sont celles qui sont inscrites dans la surface de révolution contenant leurs quatre côtés.

IV.

On connaît les propositions remarquables auxquelles donne lieu, dans un triangle, le cercle des neuf points. Prouhet, dans un article élégant inséré aux *Nouvelles Annales*, 2e série, t. II, p. 132, a donné des théorèmes relatifs à une sphère des douze points, dans le tétraèdre dont les hauteurs se rencontrent. Nous allons indiquer, dans ce tétraèdre, plusieurs sphères analogues au cercle des neuf points. Cherchons la condition pour que les milieux des six arêtes d'un tétraèdre donné soient sur une même sphère. Reprenons l'équation donnée d'une sphère, rapportée à ce tétraèdre,

$$-2\Sigma d_{ik}\mu_i\mu_k + (\Sigma\mu_i)(\Sigma\nu_i\mu_i) = 0;$$

il faut voir si l'on peut déterminer les quatre quantités ν_i, de manière que la sphère contienne les six points milieux. Pour un de ces points on a, par exemple,

$$\mu_1 = \mu_2, \quad \mu_3 = \mu_4 = 0,$$

et, par suite, on aura les équations de condition

$$d_{ik} = \nu_i + \nu_k,$$

qui expriment qu'il doit y avoir une sphère conjuguée au tétraèdre; alors l'équation de la sphère contenant les milieux des six arêtes sera

$$(18) \qquad \Sigma\nu_i\mu_i^2 - \Sigma(\nu_i + \nu_k)\mu_i\mu_k = 0.$$

Cherchons l'intersection de cette sphère avec l'une des arêtes, par exemple avec celle définie par les équations

$$\mu_3 = \mu_4 = 0,$$

on trouve

$$(\mu_1 - \mu_2)(\nu_1\mu_1 - \nu_2\mu_2) = 0:$$

le premier facteur donne le milieu de l'arête; le second représente un plan passant par l'arête opposée et par le centre de la sphère conjuguée, c'est-à-dire le plan mené par l'arête 34 normalement à 12; il coupe donc l'arête 12 au pied de sa plus courte distance avec l'arête opposée. Donc

Les six milieux des arêtes d'un tétraèdre ne sont sur une même sphère que si les hauteurs du tétraèdre se rencontrent, et alors la sphère qui les contient passe aussi au pied des plus courtes distances des arêtes opposées.

La démonstration géométrique de ces résultats est aussi simple que la démonstration fournie par l'analyse. Nous ne nous y arrêterons pas.

Cherchons de même la sphère contenant les centres de gravité des faces, on trouve sans difficulté

$$(19) \qquad 2\Sigma\nu_i\mu_i^2 - \Sigma(\nu_i + \nu_k)\mu_i\mu_k = 0;$$

cette équation est vérifiée par les valeurs

$$\mu_4 = 0, \quad \nu_2\mu_2 = \nu_3\mu_3 = \nu_1\mu_1,$$

qui conviennent au pied des hauteurs sur chaque face; on trouve aussi que la sphère coupe chaque hauteur en un second point qui est aux deux tiers de la distance de chaque sommet au point de rencontre des hauteurs. C'est la sphère des douze points considérée par Prouhet. Remarquons que

La sphère circonscrite, les deux sphères des douze points, la sphère conjuguée ont un cercle commun, défini par les équations

$$\Sigma \nu_i \mu_i = 0, \quad \Sigma \nu_i \mu_i^2 = 0.$$

En considérant les quatre tétraèdres formés avec le point de rencontre des hauteurs, et trois des premiers points, on aura huit nouvelles sphères des douze points, qui, considérées dans le premier tétraèdre, donneraient lieu à de nouveaux énoncés. Par exemple, il y a une sphère contenant le cercle des neuf points d'une face, les pieds des hauteurs sur les trois autres faces, ainsi que les milieux de ces portions de hauteurs comprises entre leur point de rencontre et le sommet correspondant, etc. Nous n'insisterons pas, d'autant plus que l'étude de ces questions est plus facile avec un système de coordonnées faisant intervenir, d'une manière symétrique, le point de rencontre des hauteurs et les sommets du tétraèdre.

V.

En se reportant aux formules (5) et (9), on reconnaît que le déterminant (5) est le mineur du déterminant (9), obtenu en supprimant la première ligne et la première colonne. On peut trouver les valeurs de tous les mineurs des deux déterminants de la manière suivante :

Considérons le contrevariant

$$(20) \qquad \begin{vmatrix} 0 & -\frac{d_{12}}{2} & -\frac{d_{13}}{2} & -\frac{d_{14}}{2} & \alpha_1 \\ -\frac{d_{21}}{2} & 0 & -\frac{d_{23}}{2} & -\frac{d_{24}}{2} & \alpha_2 \\ -\frac{d_{31}}{2} & -\frac{d_{32}}{2} & 0 & -\frac{d_{34}}{2} & \alpha_3 \\ -\frac{d_{41}}{2} & -\frac{d_{42}}{2} & -\frac{d_{43}}{2} & 0 & \alpha_4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{H}',$$

obtenu en adjoignant au polynôme

$$(21)\qquad \Sigma - d_{ik}\mu_i\mu_k$$

les deux polynômes du premier degré

$$(22)\qquad \begin{cases} \Sigma\alpha_i\mu_i = m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + p\mathrm{Z} + q\mathrm{T}, \\ \Sigma\alpha'_i\mu_i = m'\mathrm{X} + n'\mathrm{Y} + p'\mathrm{Z} + q'\mathrm{T}. \end{cases}$$

Le même contrevariant peut aussi être calculé sur la forme

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2 - \mathrm{R}^2\mathrm{T}^2,$$

dont la forme (21) est, comme nous avons vu, la transformée par la substitution

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \Sigma\mu_i x_i, \\ \mathrm{Y} = \Sigma\mu_i y_i, \\ \mathrm{Z} = \Sigma\mu_i z_i, \\ \mathrm{T} = \Sigma\mu_i; \end{cases}$$

alors le contrevariant a pour expression

$$\mathrm{R}^2(mm' + nn' + pp') - qq',$$

et l'on a, par conséquent, en se rappelant que le contrevariant actuel se reproduit multiplié par le carré du déterminant de la substitution, la formule

$$(24)\qquad \mathrm{H}' = (6\mathrm{V})^2[\mathrm{R}^2(mm' + nn' + pp') - qq'].$$

Dans cette équation, le premier membre H′, défini plus haut, contient les quantités α_i, α'_i, le second m, m',.... Mais, puisque ces variables sont transformées les unes des autres, et qu'on a

$$\Sigma\alpha_i\mu_i = m\mathrm{X} + n\mathrm{Y} + p\mathrm{Z} + q\mathrm{T},$$
$$\Sigma\alpha'_i\mu_i = m'\mathrm{X} + n'\mathrm{Y} + p'\mathrm{Z} + q'\mathrm{T},$$

on déduira de ces identités, en faisant usage des équations (23), les formules

$$(25)\qquad \begin{cases} \alpha_i = mx_i + ny_i + pz_i + q, \\ \alpha'_i = m'x_i + n'y_i + p'z_i + q', \end{cases}$$

qui définissent la substitution inverse.

Enfin, en résolvant ces dernières équations par rapport aux variables $m, n, p, q; m', n', p', q'$, on obtiendra, d'après les formules les plus simples relatives aux déterminants,

$$m(x_i\ y_i\ z_i\ 1) = (\alpha_i\ y_i\ z_i\ 1),$$
$$n(x_i\ y_i\ z_i\ 1) = (x_i\ \alpha_i\ z_i\ 1),$$
$$p(x_i\ y_i\ z_i\ 1) = (x_i\ y_i\ \alpha_i\ 1),$$
$$q(x_i\ y_i\ z_i\ 1) = (x_i\ y_i\ z_i\ \alpha_i).$$

Pour abréger, nous représentons par

$$(x_i\ y_i\ z_i\ 1)$$

le déterminant dont on aurait les quatre lignes en donnant à i les valeurs de 1, 2, 3, 4. On aurait des expressions toutes pareilles pour m', n', p', q'.

Cela posé, désignons par S_i l'aire de la face opposée au sommet i, par a_i, b_i, c_i les angles qu'elle fait avec les plans coordonnés, et appelons V_i le volume du tétraèdre ayant pour base la face S_i et pour sommet le centre de la sphère circonscrite. Les formules précédentes prendront la forme

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} 3mV &= \Sigma\alpha_i S_i \cos a_i,\\ 3nV &= \Sigma\alpha_i S_i \cos b_i,\\ 3pV &= \Sigma\alpha_i S_i \cos c_i,\\ qV &= \Sigma\alpha_i V_i, \end{aligned}\right.$$

et de même, pour obtenir m', n', p', q', il suffira d'accentuer les quantités α_i; alors, en substituant les expressions de $m, m', \ldots$, l'identité (24) prend la forme

$$(27)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \alpha_1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & \alpha_2 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & \alpha_3 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & \alpha_4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & 0 \end{vmatrix} = -32\Sigma\alpha_i\alpha'_j\left[R^2 S_i S_j \cos\left(\widehat{S_i, S_j}\right) - 9V_iV_j\right].$$

On aurait de même, en employant un contrevariant double,

$$(28)\qquad \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & 1 & \alpha_1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & 1 & \alpha_2 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & 1 & \alpha_3 \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & 1 & \alpha_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4^2 \Sigma \alpha_i \alpha'_j S_i S_j \cos(S_i, S_j).$$

Ces équations nous donnent un grand nombre de formules.

Les plus simples sont celles qu'on déduit de la formule (28).

Par exemple, en égalant dans les deux membres de l'équation (28) les coefficients de $\alpha_4 \alpha'_4$, on a

$$(29)\qquad (4S)^2 = - \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & 1 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 1 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

S désignant la surface du triangle 123. C'est l'expression connue de la surface d'un triangle en fonction des trois côtés. De même, le premier terme de l'égalité (27) nous donne

$$(30)\qquad + \begin{vmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & 0 & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & 0 \end{vmatrix} = 2 d_{12} d_{13} d_{23} = 2(4rS)^2,$$

r étant le rayon du cercle circonscrit au triangle 123; car, en appelant p_i la distance du centre de la sphère circonscrite à la face i, et R_i le rayon du cercle circonscrit, on a

$$V_i = \frac{1}{3} S_i p_i, \quad R^2 - p_i^2 = R_i^2,$$

et par conséquent

$$S_i^2 - 9V_i^2 = (S_i R_i)^2,$$

ce qui donne la formule (30). Plus généralement on a

$$R^2 S_i S_j \cos \widehat{S_i S_j} - 9 V_i V_j = S_i S_j (R^2 \cos \widehat{S_i S_j} - p_i p_j).$$

On reconnait sans difficulté que l'expression entre parenthèses est égale à $R_iR_j \cos U_{ij}$, U_{ij} désignant l'angle des deux cercles circonscrits aux faces i et j. On a donc

$$2(4R_iS_i)(4R_jS_j)\cos U_{ij} = \Delta_{ij},$$

Δ_{ij} désignant le déterminant obtenu en supprimant la ligne i et la colonne j dans le déterminant qui donne le volume. Par exemple

$$(31) \qquad 2(4R_1S_1)(4R_2S_2)\cos U_{12} = \begin{vmatrix} 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{43} & 0 \end{vmatrix};$$

en développant et remplaçant R_1S_1, R_2S_2 par leurs valeurs tirées des équations (30), on a

$$(32) \qquad \cos U_{12} = \frac{d_{14}d_{23} + d_{24}d_{13} - d_{12}d_{34}}{2\sqrt{d_{14}d_{23}d_{24}d_{13}}};$$

cette formule nous montre que

$$\cos U_{12} = \cos U_{34}.$$

Ainsi, étant donnés deux des quatre cercles circonscrits aux faces, l'angle sous lequel ils se coupent est égal à l'angle sous lequel se coupent les deux autres.

Les autres formules que nous obtiendrions, au moyen des identités (27) et (28), sont comprises comme cas particuliers dans d'autres, plus symétriques et plus générales, que nous donnons plus loin. Nous ferons seulement deux remarques : d'abord l'équation

$$(33) \qquad \Sigma S_i\alpha_i S_j\alpha'_j \cos\widehat{S_iS_j} = 0$$

exprime que les deux plans α_i, α'_i sont perpendiculaires, et par conséquent l'équation tangentielle

$$(34) \qquad U = \Sigma S_i\alpha_i S_j\alpha_j \cos\widehat{S_iS_j} = 0$$

représente le cercle imaginaire à l'infini. On déduit de là que l'équation tangentielle de toute sphère est

$$U = (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4\alpha_4)^2.$$

Par exemple, les différentes équations

$$U = (S_1\alpha_1 \pm S_2\alpha_2 \pm S_3\alpha_3 \pm S_4\alpha_4)^2 \tag{35}$$

représentent les sphères inscrites au tétraèdre.

En second lieu, l'équation *tangentielle*

$$\Sigma\alpha_i\alpha_j(S_iR_i)(S_jR_j)\cos U_{ij} = 0 \tag{36}$$

représente la sphère circonscrite au tétraèdre.

VI.

La comparaison de la formule (29), qui donne la surface d'un triangle à l'équation (5), conduit à des résultats qui méritent d'être développés. La formule (5) peut, en effet, s'écrire

$$-36(4VR)^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{d_{12}d_{34}} & \sqrt{d_{13}d_{24}} \\ 1 & \sqrt{d_{12}d_{34}} & 0 & \sqrt{d_{23}d_{14}} \\ 1 & \sqrt{d_{13}d_{24}} & \sqrt{d_{23}d_{14}} & 0 \end{vmatrix};$$

cela résulte des propriétés les plus élémentaires des déterminants. En comparant à la formule (29), et en se rappelant qu'un triangle est toujours possible avec trois côtés réels quand sa surface est positive, on est conduit à l'élégante proposition qui suit :

Étant donné un tétraèdre, on peut toujours former un triangle avec les trois produits des couples d'arêtes opposées, et la surface de ce triangle est égale à six fois le produit du volume du tétraèdre par le rayon de la sphère circonscrite.

Cette proposition a d'abord été donnée par M. Baltzer (*Journal de Crelle*, t. LIV, p. 162); j'y avais été conduit par l'étude d'une question importante relative aux tétraèdres [1], et, comme le triangle auxiliaire joue un grand rôle dans la discussion de tout tétraèdre, j'indiquerai quelques propriétés de ce triangle, qu'on pourrait appeler *adjoint* ou *invariable*.

---

[1] *Voir* l'étude *Sur les théorèmes d'Ivory, relatifs aux surfaces homofocales*. Paris, Gauthier-Villars.

C'est un fait bien connu, depuis les belles recherches de M. Liouville, qu'on peut remplacer une série de transformations par rayons vecteurs réciproques par une seule de ces transformations. D'après cela, étant donné un polyèdre P quelconque, et ses transformés P′, P″, P‴ par différentes transformations, si l'on transforme tous ces polyèdres, en prenant pour pôle dans chacun d'eux le sommet homologue à un sommet fixe A de P, tous ces polyèdres se transforment en de nouveaux polyèdres Q, Q′, Q″ ayant un sommet de moins que P, *tous semblables* et même égaux si l'on choisit convenablement le module de chaque transformation.

On sait aussi que, pour transformer toute relation de longueur, il faut remplacer une ligne telle que AB par $\frac{K^2 AB}{OA.OB}$, O étant le pôle, K^2 le module de la transformation, et, par suite, les rapports tels que

$$\frac{d_{12}}{d_{13}}\frac{d_{34}}{d_{24}} = \frac{d_{12}}{d_{13}} : \frac{d_{41}}{d_{43}},$$

qu'on pourrait appeler *des rapports anharmoniques* de distance, demeurent invariables dans toute suite de transformations.

Ainsi, dans un tétraèdre, les trois produits

$$\sqrt{d_{12}d_{34}},\quad \sqrt{d_{14}d_{24}},\quad \sqrt{d_{14}d_{23}}$$

des arêtes opposées conservent des rapports invariables, et, par conséquent, le *triangle formé avec ces trois produits conserve une forme invariable*.

Une formule, que nous avons donnée plus haut, explique ce résultat. Il suit, en effet, de la formule (32), que les angles du triangle adjoint sont ceux que nous avons appelés

$$U_{12} = U_{34},\quad U_{13} = U_{24},\quad U_{14} = U_{23}.$$

Nous avons vu que deux cercles circonscrits à deux faces se coupent toujours sous le même angle que les deux autres. Pris deux à deux, ils ne donnent donc lieu qu'à trois angles différents, et ce sont ces angles qui sont ceux du triangle invariable, comme cela résulte de la formule (32). Ces résultats s'établissent d'ailleurs géométriquement avec la plus grande facilité; il suffit de transformer le tétraèdre en prenant pour pôle un des sommets A. Trois des cercles circonscrits aux faces deviennent des droites, et ces droites forment le triangle invariable.

Les angles de ce triangle peuvent encore être définis autrement. Avec un des dièdres AB du tétraèdre, et les angles plans opposés à AB, on peut former un trièdre : la troisième face de ce trièdre est l'un des angles du triangle adjoint. Elle reste la même quand on effectue la construction avec deux dièdres opposés.

Les remarques qui précèdent s'appliquent aussi au quadrilatère. On peut même dire que, dans ce cas, la considération du triangle adjoint est très-ancienne : ce triangle est celui que Ptolémée a construit quand il a démontré son théorème, comme on s'en assurera aisément, la démonstration de Ptolémée ayant été conservée dans la plupart des traités de Géométrie élémentaire.

Nous sommes ainsi conduits à rechercher dans quel cas le triangle invariable se réduit à une ligne droite, sa surface devenant nulle. Puisque cette surface est 6VR, il faudra que V ou R devienne nul. Si V est nul, le tétraèdre se réduit à un quadrilatère ABCD, mais le rayon R devient infini, et le produit VR demeure en général fini. L'un des angles du triangle invariable étant égal à l'angle des cercles ABC, ABD, il faut, pour que le triangle se réduise à une ligne droite, que cet angle devienne nul ou égal à π. Donc les quatre points ABCD sont sur un cercle.

Donc si l'on a

$$\sqrt{d_{12}d_{34}} \pm \sqrt{d_{13}d_{24}} \pm \sqrt{d_{14}d_{23}} = 0, \tag{37}$$

le quadrilatère est inscriptible. C'est la réciproque du théorème de Ptolémée.

Mais si les quatre points forment un tétraèdre, il suffira que le rayon de la sphère circonscrite soit nul pour que la relation précédente soit satisfaite. Et comme cette hypothèse comprend la précédente (puisque, lorsque quatre points sont sur un cercle, ils sont sur deux sphères de rayon nul), on peut énoncer la proposition suivante :

Quand la somme (algébrique) des produits des arêtes opposées d'un tétraèdre est nulle, les sommets du tétraèdre sont sur une sphère de rayon nul.

En se bornant aux figures réelles, on a le droit de conclure la réciproque du théorème de Ptolémée, énoncée dans les traités de Géométrie; mais la proposition précédente est la seule exacte si l'on admet l'intervention des imaginaires en Géométrie. J'ai déjà indiqué qu'elle avait été rencontrée par l'illustre M. Cayley, et démontrée d'une manière différente dans un article inséré aux *Annali di Matematica*, t. I, 2e série.

On doit compter, au nombre des tétraèdres que nous considérons, tous les quadrilatères tracés dans un plan tangent au cercle de l'infini. Un tel plan complète, en effet, avec le plan de l'infini, une sphère de rayon nul. Ainsi le théorème de Ptolémée se vérifie pour tout quadrilatère situé dans un plan tangent au cercle de l'infini. On conçoit bien, du reste, comment cela a lieu. Dans un de ces plans, une conique sera un cercle dès qu'elle contiendra le point de contact avec le cercle de l'infini; elle pourra donc satisfaire à quatre autres conditions, comme celle de passer par les quatre sommets d'un quadrilatère. Ainsi, dans ces plans exceptionnels, tous les quadrilatères sont inscriptibles.

Il sera peut-être bon de montrer, dès à présent, en développant une application, due à M. Cayley, des propositions précédentes, qu'elles sont loin d'avoir un intérêt purement théorique, et qu'elles permettent de résoudre des questions se rapportant à des éléments géométriques entièrement réels.

Supposons, par exemple, qu'on ait à étudier, dans un plan, une question relative à plusieurs cercles. Si, par chaque cercle C tracé dans le plan on fait passer une série de sphères, les tangentes menées d'un point quelconque du plan à toutes ces sphères auront évidemment la même longueur, celle de la tangente menée du point considéré au cercle C. Or, au nombre de ces sphères, il y en a deux qui se réduisent à des points, et ces points A, A′ s'obtiennent en élevant au centre du cercle et de chaque côté du plan une perpendiculaire égale à $R\sqrt{-1}$ (R désignant le rayon du cercle). Ces deux points A, A′ sont réels si le carré du rayon est négatif; ils sont, au contraire, imaginaires si le cercle C existe; mais, dans tous les cas, la tangente menée d'un point quelconque du plan au cercle C est égale à la distance de ce même point à l'un quelconque des deux points A, A′.

Si, dans le plan des xy, un cercle est défini par l'équation

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0,$$

les deux points A, A′ auront pour coordonnées

$$\alpha,\ \beta,\ R\sqrt{-1};\quad \alpha,\ \beta,\ -R\sqrt{-1}.$$

Le cercle sera en quelque sorte représenté par ces deux points. On voit que cette représentation effectue le dédoublement d'un cercle : l'un des points pourrait correspondre sans ambiguïté à une valeur positive, l'autre à une valeur négative du rayon.

Étant donnés deux points B, B' représentant un autre cercle

$$B(\alpha', \beta', R'\sqrt{-1}), \quad B'(\alpha', \beta', -R'\sqrt{-1}),$$

on aura évidemment

$$\overline{AB}^2 = \overline{A'B'}^2 = (\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2 - (R-R')^2,$$
$$\overline{AB'}^2 = \overline{A'B}^2 = (\alpha-\alpha')^2 + (\beta-\beta')^2 - (R+R')^2;$$

AB est donc égal à la tangente commune extérieure, AB' à la tangente intérieure. On voit que, lorsqu'on prend deux points représentant les cercles dont les rayons sont pris avec le même signe, la distance de ces deux points est la tangente commune extérieure. C'est l'inverse quand les rayons des deux cercles sont pris avec des signes différents. Donc la distance AB sera nulle toutes les fois que les deux cercles seront tangents intérieurement; si les cercles sont tangents extérieurement, ce sera, au contraire, AB' qui sera nul. En général, si l'on appelle φ l'angle des deux cercles, c'est-à-dire celui des deux rayons allant au point commun, on a

$$(38)\qquad \begin{cases} AB = 2\sqrt{RR'}\sin\dfrac{\varphi}{2}, \\[2ex] AB' = 2\sqrt{-RR'}\cos\dfrac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

La seconde formule se réduirait de la première, en changeant la direction d'un rayon et en donnant à ce rayon un signe opposé.

D'après cela, si l'on veut mener un cercle tangent à trois autres, représentés par les couples de points (A, A'), (B, B'), (C, C'), il faudra trouver un point M à une distance nulle : soit de A, B, C; soit de A', B, C; soit de A, B', C; soit de A, B, C'. Ces quatre combinaisons se traitent évidemment de la même manière. Considérons la première ABC.

Soient A, B, C trois points représentant trois cercles, et soit D un quatrième point représentant un quatrième cercle tangent au même cercle que les trois premiers. Numérotons ces points 1, 2, 3, 4; leurs distances seront les tangentes communes aux quatre cercles qu'ils représentent. Ces cercles étant tangents à un cinquième, il faudra que les quatre points A, B, C, D soient à une distance nulle d'un cinquième point M, c'est-à-dire que la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ait son rayon nul. On devra donc avoir, en se rappelant la condition indiquée plus haut,

$$t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{24} \pm t_{14}t_{23} = 0. \tag{39}$$

Ainsi, *pour que quatre cercles soient tangents à un cinquième, il faut et il suffit qu'il y ait entre les longueurs de leurs tangentes communes la relation indiquée par le théorème de Ptolémée.*

On déduit facilement, de ce théorème général, les équations de M. Casey pour les couples de cercles tangents à trois autres. Il suffit de supposer, dans l'équation précédente, que le cercle (4) se réduise à un point; il devra se trouver alors sur le cercle tangent aux trois autres, et, par suite, en appelant S_1, S_2, S_3 les carrés des tangentes menées d'un point aux trois points donnés, l'équation

$$t_{23}\sqrt{S_1} \pm t_{13}\sqrt{S_2} \pm t_{12}\sqrt{S_3} = 0 \tag{40}$$

représentera deux cercles d'un même couple tangents aux trois cercles donnés.

Les autres couples s'obtiendront en prenant successivement chaque rayon négatif, ce qui donne

$$\left\{\begin{aligned} t_{23}\sqrt{S_1} \pm t'_{13}\sqrt{S_2} \pm t'_{12}\sqrt{S_3} &= 0,\\ t'_{23}\sqrt{S_1} \pm t_{13}\sqrt{S_2} \pm t'_{12}\sqrt{S_3} &= 0,\\ t'_{23}\sqrt{S_1} \pm t'_{13}\sqrt{S_2} \pm t_{12}\sqrt{S_3} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

Dans ces équations, les tangentes intérieures sont distinguées par un accent.

Les cercles de chaque couple sont d'ailleurs inverses ou réciproques par rapport au centre radical; en général, toute équation homogène

$$f(S_1, S_2, S_3) = 0$$

représente une figure anallagmatique par rapport au centre radical des trois cercles S_1, S_2, S_3.

Nous n'étudierons pas les relations des huit cercles entre eux, mais nous ferons remarquer que l'équation fondamentale (36) peut être transformée de manière à ne contenir que les angles.

Si l'on appelle φ l'angle de deux cercles, t, t' les deux tangentes communes, R, R' les rayons, on a les formules

$$t = 2\sqrt{RR'}\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$t' = 2\sqrt{-RR'}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Cette seconde formule se déduit de la première, en changeant le sens et le signe d'un rayon. En nous bornant donc à la première, et en appelant α_{ik} les angles définis avec précision de deux cercles, la formule (39) deviendra

$$\sin\frac{\alpha_{12}}{2}\sin\frac{\alpha_{34}}{2} \pm \sin\frac{\alpha_{13}}{2}\sin\frac{\alpha_{24}}{2} \pm \sin\frac{\alpha_{14}}{2}\sin\frac{\alpha_{23}}{2} = 0. \tag{42}$$

Il y a donc une relation qui doit avoir lieu, entre les angles, pour que quatre cercles soient tangents à un cinquième, et cette relation est exprimée par la formule précédente.

VII.

Les mêmes méthodes s'appliquent évidemment à des cercles tracés sur une sphère S. Par tout cercle C on peut faire passer deux sphères de rayon nul dont les centres A, A' représenteront le cercle. Un deuxième cercle C' étant représenté par B, B', on obtiendra, sans qu'il soit nécessaire de les développer, les formules suivantes.

Désignons par t, t' les deux tangentes communes aux deux sphères S', S'' orthogonales à la sphère S, sur laquelle sont tracés les cercles C, C'. Soient a, b les rayons des sphères S', S'', α l'angle des deux cercles. Les tangentes communes t, t' sont les cordes des arcs tangents communs aux deux cercles T, T', en sorte qu'on ait

$$t = 2\sin\frac{T}{2}, \quad t' = 2\sin\frac{T'}{2};$$

on aura les formules suivantes :

$$\overline{AB}^2 = \frac{4ab\sin^2\frac{\alpha}{2}}{OA'.O'B},$$

$$\overline{A'B'}^2 = \frac{4ab\sin^2\frac{\alpha}{2}}{OA.OB},$$

$$\overline{AB'}^2 = -\frac{4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}}{OA'.OB},$$

$$\overline{A'B}^2 = -\frac{4ab\cos^2\frac{\alpha}{2}}{OA.OB'},$$

$$t = 2\sqrt{ab}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad t' = 2\sqrt{ab}\cos\frac{\alpha}{2},$$

et, par suite, on trouvera, comme pour le plan, les deux équations de condition

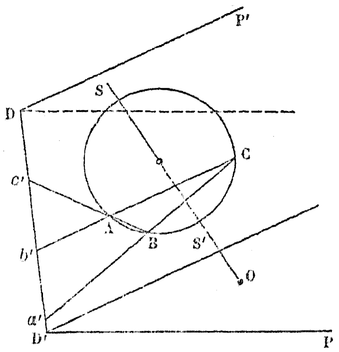
$$(43)\quad \begin{cases} \sin\frac{T_{12}}{2}\sin\frac{T_{34}}{2} \pm \sin\frac{T_{13}}{2}\sin\frac{T_{24}}{2} \pm \sin\frac{T_{14}}{2}\sin\frac{T_{23}}{2} = 0, \\ \sin\frac{\alpha_{12}}{2}\sin\frac{\alpha_{34}}{2} \pm \sin\frac{\alpha_{13}}{2}\sin\frac{\alpha_{24}}{2} \pm \sin\frac{\alpha_{14}}{2}\sin\frac{\alpha_{23}}{2} = 0, \end{cases}$$

qui expriment que quatre cercles sont tangents à un même cercle.

Nous allons maintenant déduire des principes développés ici la belle construction que Gergonne a donnée, et qui permet d'obtenir le cercle tangent à trois autres situés dans un plan.

Soient A, B, C les trois points représentant les trois cercles donnés situés dans le plan P. Les cercles tangents que nous cherchons sont représentés par un point M, à une distance nulle des trois points A, B, C; il faudra donc faire passer par le cercle ABC deux sphères de rayon nul S, S', qui seront sur l'axe du cercle, et qui représenteront les deux cercles tangents cherchés. Il reste à déduire de là une construction n'employant que des éléments réels, et ne devenant impossible qu'avec le problème proposé.

Fig. 1.



Il est à peu près évident que les droites AC, AB, BC vont couper le plan P en trois points a', b', c', qui sont les centres de similitude des trois cercles, pris deux à deux. Comme d'ailleurs ces trois droites sont dans un même plan ABC, que nous appellerons P', on voit que les trois centres de similitude sont en ligne droite sur DD', qui est un *axe de similitude*.

Cela posé, soient S, S' les centres des sphères de rayon nul passant par le cercle ABC, ces sphères couperont le plan P suivant deux cercles tangents aux cercles donnés, car S et S' sont à une distance nulle tous les deux de A, de B et de C.

D'ailleurs la ligne SS' vient couper le plan P en un point O, qui est à une distance égale des trois points A, B, C, et par conséquent les tangentes menées de ce point O aux trois cercles sont égales; en d'autres termes, le point O est le *centre radical* des trois cercles donnés.

En second lieu, les distances d'un point quelconque de l'axe de similitude DD' aux deux points S, S' sont égales, et, par conséquent, les tangentes menées des points de DD' aux deux cercles tangents que représentent S et S' sont égales; en d'autres termes, *l'axe de similitude* DD' *est l'axe radical des deux cercles tangents.*

Enfin il suffit de remarquer que, les cercles (S) et (A) étant tangents, les deux sphères de rayon nul S et A seront tangentes en tous les points de la droite SA. *Les points de contact du cercle* A *avec les cercles* S, S' *se trouveront dans le plan passant par* A, SS' *et* O.

Il ne reste plus qu'un mot à ajouter pour obtenir la belle solution de Gergonne. Le plan SAS′ contient le centre radical O; il contient en outre la perpendiculaire au plan P′ élevée en A. Or cette perpendiculaire est la polaire de l'axe DD′ par rapport à la sphère de rayon nul A. Cette droite, et par conséquent le plan SAS′ qui la contient, iront donc passer dans le plan P par le pôle a_1 de l'axe de similitude par rapport au cercle (A); d'où résulte la construction suivante :

On construira l'axe de similitude des trois autres cercles donnés (A), (B), (C), *on prendra les pôles* a_1, b_1, c_1 *de cet axe par rapport aux trois cercles, et l'on joindra ces pôles au centre radical* O; *les droites* Oa_1, Ob_1, Oc_1 *couperont respectivement les trois cercles* (A), (B), (C) *aux points de contact des deux cercles tangents d'une même série.*

La marche suivie nous indique d'ailleurs un grand nombre de propriétés et de constructions très-simples du même problème.

La sphère, ayant son centre en O et contenant les centres A, B, C, coupe évidemment le plan P des trois cercles suivant leur cercle radical ou orthogonal. On voit donc que le cercle orthogonal coupera l'axe de similitude DD′ en deux points appartenant aux deux cercles tangents. Le problème sera donc ramené au suivant :

Faire passer par l'intersection de l'axe de similitude DD′ *et du cercle radical les deux cercles tangents à l'un quelconque des trois cercles donnés.*

Nous donnons plus loin les solutions et les constructions géométriques d'autres problèmes relatifs aux cercles.

DEUXIÈME PARTIE.

VIII.

La méthode que nous avons suivie s'étend à la solution de la question suivante, qui donne une formule nouvelle. Proposons-nous le problème suivant :

Étant données quatre sphères de centre et de rayon, trouver l'équation de la sphère qui les coupe orthogonalement.

Pour résoudre cette question, nous aurons à considérer pour deux sphères un élément équivalent à la distance de deux points, et qu'on peut définir de la manière suivante :

Soient deux sphères de rayons R, R′, ayant d pour distance des centres. L'expression

$$d^2 - R^2 - R'^2$$

se réduit au carré de la distance quand les sphères se réduisent à des points. Elle est nulle quand les deux sphères sont orthogonales. Comme, lorsqu'une des deux sphères se réduit à un point, l'élément précédent devient la puissance de ce point par rapport à l'autre sphère, nous l'appellerons *puissance commune* des deux sphères.

Une formule remarquable, relative aux distances de quatre points, est la suivante :

$$(44) \qquad d_{12} + d_{24} - d_{13} - d_{24} = 2\sqrt{d_{13}}\,\sqrt{d_{24}}\cos\left(\widehat{\sqrt{d_{13}}, \sqrt{d_{41}}}\right);$$

en d'autres termes,

$$\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AC}.\overline{BD}\cos\left(\widehat{AC, BD}\right).$$

Cette formule (44) s'étend aussi aux puissances communes de deux sphères, et en appelant k_{ij} la puissance commune, on aura

$$k_{12} + k_{34} - k_{13} - k_{24} = 2\sqrt{d_{13}}\,\sqrt{d_{24}}\cos\left(\widehat{\sqrt{d_{13}}, \sqrt{d_{24}}}\right).$$

Cela posé, considérons l'équation

$$(45) \qquad \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu_j = 0,$$

où le signe Σ est étendu à toutes les valeurs de i et de j,

$$\frac{i}{j} = 1, 2, 3, 4,$$

et où k_{ij} désigne la puissance commune de deux sphères i et j. L'équation (45) est analogue à l'équation (4), et se réduirait à celle-ci si les quatre sphères (i) se réduisaient à des points. Voyons ce que représente ici l'équation (45).

Supposons qu'on ait pris des axes rectangulaires ayant pour origine le centre de la sphère orthogonale aux quatre sphères données. Soient x_i, y_i, z_i, R_i les coordonnées du centre et le rayon de la sphère (i); soit R le rayon de la sphère orthogonale, on aura

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} R_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R^2,\\ k_{ij} &= (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - R_i^2 - R_j^2\\ &= 2(R^2 - x_i x_j - y_i y_j - z_i z_j),\end{aligned}\right.$$

et, par suite, en substituant ces expressions dans la formule (45), on aura l'identité

$$\tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu_j = (\Sigma x_i\mu_i)^2 + (\Sigma y_i\mu_i)^2 + (\Sigma z_i\mu_i)^2 - R^2(\Sigma\mu_i)^2,$$

ou, en posant

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \Sigma x_i\mu_i,\\ Y &= \Sigma y_i\mu_i,\\ Z &= \Sigma z_i\mu_i,\\ T &= \Sigma\mu_i,\end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$(48)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu_j = X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2T^2.$$

Ces formules mettent en évidence ce fait, que l'équation (45) est celle de la sphère orthogonale aux quatre sphères, rapportée *au tétraèdre des quatre centres*, et, par suite, en écrivant les deux équations relatives au discriminant et au contrevariant, on aura, d'après les principes exposés au § I,

$$(49)\qquad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34}\\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}\end{vmatrix} = -(24RV)^2,$$

$$(50)\qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14}\\ 1 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24}\\ 1 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34}\\ 1 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44}\end{vmatrix} = 288V^2.$$

Dans ces formules, V désigne le sixième du déterminant de la substitution (47), qui est le volume du tétraèdre formé par les centres des quatre sphères données. La formule (50) se déduira de la formule (9) par l'emploi des propriétés les plus élémentaires des déterminants. Quant à l'équation (49), peut-être est-elle nouvelle; elle donnera le rayon de la sphère orthogonale aux quatre sphères données.

Il est digne de remarque que les formules précédentes ne contiennent qu'un seul élément, la *puissance commune*.

En employant une notation commode des déterminants, due à M. Kronecker, on pourrait écrire la première

$$|\, k_{ij} \,| = -(24\,\mathrm{RV})^2, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

et par conséquent l'équation

$$|\, k_{ij} \,| = 0 \tag{51}$$

est la condition pour que quatre sphères passent par un même point.

Remarquons enfin que la puissance commune

$$d^2 - \mathrm{R}^2 - \mathrm{R}'^2$$

de deux sphères s'exprime aussi par la formule

$$-2\,\mathrm{RR}'\cos\varphi,$$

où φ est l'angle de deux sphères, et par conséquent l'équation (51) peut s'écrire

$$|\cos\alpha_{ij}\,| = 0, \tag{52}$$

α_{ij} étant l'angle des sphères i et j. Cette relation (52) entre les angles de quatre sphères passant en un même point convient aussi évidemment aux angles que forment deux à deux quatre plans.

IX.

Élevons-nous dès à présent à la généralisation la plus complète dont la méthode paraisse susceptible, et considérons deux groupes de sphères en nombre quelconque (le même, pour simplifier, dans chaque groupe) :

$$S_1, \quad S_2, \ldots, \quad S_n,$$
$$S'_1, \quad S'_2, \ldots, \quad S'_n.$$

Désignons par k_{ij} la *puissance commune* d'une sphère i du premier groupe et j du second, et étudions la forme *bilinéaire*

$$\tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu'_j, \tag{53}$$

qui contient deux séries de variables. Nous obtiendrons une première série de conséquences importantes en supposant $n = 4$. On a donc deux groupes distincts de quatre sphères, pouvant se réduire à deux tétraèdres distincts.

Soient R le rayon, a, b, c les coordonnées du centre de la sphère *radicale* (R) du premier groupe de quatre sphères [1]. Soient R', a', b', c' les mêmes éléments se rapportant à la sphère *radicale* (R') du second groupe. Si nous désignons par

$$H = -2RR'\cos\varphi \tag{54}$$

la *puissance commune* de ces deux sphères radicales, on a évidemment les équations suivantes, où $x_i, \ldots, x'_j$ désignent les coordonnées des centres des sphères de chaque groupe

$$\left\{\begin{array}{l}
(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2 - R_i^2 - R^2 = 0,\\
(x'_j - a')^2 + (y'_j - b')^2 + (z'_j - c')^2 - R_j'^2 - R'^2 = 0,\\
(x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_i)^2 + (z_i - z'_j)^2 - R_i^2 - R_j'^2 = k_{ij},\\
(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 - R^2 - R'^2 = H;
\end{array}\right. \tag{55}$$

et par conséquent, en retranchant les deux dernières des deux premières,

$$-k_{ij} - H = 2(x_i - a')(x'_j - a) + 2(y_i - b')(y'_j - b) + 2(z_i - c')(z'_j - c). \tag{56}$$

---

[1] Nous appelons sphère *radicale* d'un groupe de quatre sphères la sphère qui les coupe à angle droit.

En tenant compte de cette formule, nous avons l'identité

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu'_j = {} & \frac{H}{2}(\Sigma\mu_i)(\Sigma\mu'_i) \\ & + [\Sigma\mu_i(x_i - a')][\Sigma\mu'_i(x'_i - a)] \\ & + [\Sigma\mu_i(y_i - b')][\Sigma\mu'_i(y'_i - b)] \\ & + [\Sigma\mu_i(z_i - c')][\Sigma\mu'_i(z'_i - c)], \end{aligned}\right.$$

et par conséquent, si l'on pose

$$(58)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \Sigma\mu_i(x_i - a'), \\ Y &= \Sigma\mu_i(y_i - b'), \\ Z &= \Sigma\mu_i(z_i - c'), \\ T &= \Sigma\mu_i, \end{aligned}\right.$$

et

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} X' &= \Sigma\mu'_i(x'_i - a), \\ Y' &= \Sigma\mu'_i(y'_i - b), \\ Z' &= \Sigma\mu''_i(z'_i - c), \\ T' &= \Sigma\mu'_i. \end{aligned}\right.$$

on aura identiquement

$$(60)\quad \tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu'_i = XX' + YY' + ZZ' + \frac{H}{2}TT'.$$

Ainsi les deux formes bilinéaires figurant dans les deux membres sont les transformées l'une de l'autre par les substitutions (58) et (59). On n'aura donc plus, pour obtenir les équations cherchées, qu'à appliquer les notations relatives aux invariants et covariants des formes bilinéaires.

Mais auparavant nous allons indiquer ce que représente l'équation

$$(61)\quad \Sigma - k_{ij}\mu_i\mu'_j = 0.$$

D'après les formules (58), les quantités μ_i peuvent être considérées les coordonnées homogènes d'un point de la première figure rapporté au tétraèdre formé par les quatre centres des sphères du premier groupe; X, Y, Z seront les coordonnées rectangulaires de ce point rapportées à des axes parallèles aux axes primitifs se coupant en (a', b', c'). De même les quantités μ'_i sont les coordonnées tétraédriques d'un point rapporté au tétraèdre des quatre centres du second groupe. L'équation (61) établit donc une relation entre deux points μ_i, μ'_i appartenant à deux figures différentes, et cette relation consiste en ce que, si de chacun des points comme centre on décrit une sphère orthogonale, pour le point (XYZ) à la sphère radicale (R), pour le point (X′Y′Z′) à la sphère radicale (R′), *ces deux sphères sont orthogonales entre elles*. Ainsi menons deux sphères orthogonales chacune à une sphère fixe et orthogonales entre elles, il y aura entre les coordonnées variables de leurs centres une relation de la forme (61).

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'une relation de ce genre établit la *corrélation* de deux figures, suivant la définition de M. Chasles.

Les formes homogènes à deux séries de variables indépendantes que nous rencontrons ici ont été considérées par M. Cayley au début même de la théorie des invariants. On connaît d'une manière suffisante pour le but que nous nous proposons leurs invariants et leur système de formes adjointes.

Étant donnée la forme bilinéaire

$$\Sigma\, a_{ij} x_i x'_j,$$

cette forme a d'abord un invariant

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn},$$

et cet invariant, lorsqu'on effectue sur x_i, x'_i des substitutions indépendantes, se reproduit multiplié par les deux déterminants de ces substitutions.

La forme a de même un contrevariant simple

$$(62)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m'_1 & m'_2 & m'_3 & m'_4 & 0 \end{vmatrix}$$

et un contrevariant double qu'on obtiendrait en ajoutant une ligne et une colonne de plus, et qui se reproduisent également, multipliés par les déterminants des deux substitutions.

Appliquons ces principes aux deux formes

$$\tfrac{1}{2}\Sigma - k_{ij}\mu_i\mu'_j, \qquad XX' + YY' + ZZ' + \frac{H}{2}TT',$$

transformées l'une de l'autre par les substitutions (58), (59). Les déterminants de ces deux substitutions sont

$$6V, \quad 6V',$$

si V et V′ désignent les volumes des tétraèdres formés par les centres des sphères de chaque groupe. En écrivant l'équation des discriminants, et en se rappelant que

$$-\frac{H}{2} = RR' \cos\varphi,$$

on aura donc d'abord

$$(63) \qquad -\overline{24}^2 RR' \cos\varphi\, VV' = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{vmatrix};$$

mais ici on n'a pas, comme dans les formules primitives,

$$k_{ij} = k_{ji}.$$

Si l'on forme de même le contrevariant (61) avec les deux fonctions linéaires

$$T = \Sigma \mu_i, \quad T' = \Sigma \mu'_i,$$

on obtient

$$(64) \qquad 288\, VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ 1 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ 1 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ 1 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{vmatrix}.$$

Si les deux groupes de quatre sphères se réduisent à des groupes de quatre points, k_{ij} devient le carré d_{ij} de la distance, et l'on retrouve les deux formules

$$(65) \qquad 288\, VV' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix},$$

due à V. Staudt, et

$$(66)\qquad -\overline{24}^2\,RR'\cos\varphi\,VV' = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{vmatrix},$$

due à Siebeck (*Journal de M. Borchardt*, t. LXII). La première donne, on le voit, le produit des volumes de deux tétraèdres, en fonction des carrés des distances mutuelles de leurs sommets; la seconde donne la *puissance commune* des deux sphères circonscrites aux deux tétraèdres. Il est clair que ces équations comprennent, comme cas particuliers, celles qui sont relatives à un seul tétraèdre : il suffit de supposer que les points correspondants des deux groupes viennent se confondre; alors

$$d_{ii} = 0, \quad d_{ij} = d_{ji},$$

et l'on retrouve les propositions établies plus haut.

On peut se demander ce que représentent les formules précédentes quand les points de l'un des groupes sont dans un même plan. Dans ce cas, V devient nul et R infini, en supposant, par exemple, que les points du premier groupe soient dans un plan. La formule (65) ne présente rien d'obscur; il faut y remplacer VV' par zéro; mais il n'en est pas de même de la formule (66).

Les notions données plus haut, relatives au *triangle invariable*, nous permettent de faire disparaître cette difficulté. Quand le tétraèdre devient un quadrilatère, 6VR reste fini : c'est la surface du triangle invariable. En appelant donc α, α' les surfaces des deux triangles invariables pour les deux groupes, on a

$$-4^2\alpha.\alpha'\cos\varphi = -24^2 VR\,V'R'\cos\varphi;$$

cette transformation fait disparaître toute difficulté.

Cette difficulté toutefois se présente aussi pour les formules générales données plus haut (63), et relatives à deux groupes de quatre sphères. Pour achever la solution de cette question, nous ferons usage d'une formule démontrée plus loin, et d'après laquelle on a, pour quatre cercles (x_i, y_i, R_i) dans un plan, l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & 0 & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & 0 & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & 0 \end{vmatrix} = -(4\Delta)^2$$

où

$$\Delta = (1, x_i, y_i, x_i^2 + y_i^2 - R_i^2).$$

La formule (63) nous donnerait, en y supposant identiques les deux groupes de sphères,

$$(6VR)^2 = \Delta^2.$$

On voit donc que l'on devra substituer Δ à 6RV. Or Δ peut se définir d'une manière simple, car le déterminant écrit plus haut est évidemment la surface du triangle formée par les centres de trois quelconques des quatre cercles, multipliée par le double de la puissance commune du quatrième cercle et du cercle radical des trois premiers. Ainsi nous avons la proposition suivante.

Quand les quatre sphères de l'un des groupes auront leur centre dans un même plan, la surface du triangle formé par les centres de trois quelconques d'entre elles, multipliée par le double de la puissance commune de la quatrième et d'une sphère orthogonale aux trois autres, donne un produit Δ *toujours le même, de quelque manière qu'on ait choisi les trois premières sphères parmi les quatre sphères données. C'est ce produit* Δ *qu'on pourra substituer à* 6 VR *quand les formules deviendront illusoires* (¹).

X.

Les déterminants (63), (64), (65) donnent lieu à un grand nombre de mineurs du premier ordre, dont il peut être utile de connaître la valeur. Aussi allons-nous employer la méthode déjà suivie au paragraphe V pour obtenir les mineurs cherchés.

(¹) Ce produit paraît avoir été considéré aussi par V. Staudt (*Journal de M. Borchardt*, t. LVII, p. 88).

Soient

$$m\,X + n\,Y + p\,Z + q\,T,$$
$$m'X' + n'Y' + p'Z' + q'T'$$

les deux fonctions linéaires, transformées par les substitutions (58), (59) en

$$\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + \alpha_3\mu_3 + \alpha_4\mu_4,$$
$$\alpha'_1\mu'_1 + \alpha'_2\mu'_2 + \alpha'_3\mu'_3 + \alpha'_4\mu'_4.$$

Le contrevariant (61), déjà considéré, donnera lieu à l'équation

$$(67)\quad 144\,VV'[2qq' - (mm' + nn' + pp')RR'\cos\varphi] = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & \alpha_1 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & \alpha_2 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & \alpha_3 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & \alpha_4 \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 & 0 \end{vmatrix};$$

d'ailleurs, pour passer des variables m, m' aux variables α_i, α'_i, il faut employer les substitutions inverses

$$\alpha_i = m(x_i - a') + n(y_i - b') + p(z_i - c') + q,$$
$$\alpha'_i = m'(x'_i - a) + n'(y'_i - b) + p'(z'_i - c) + q';$$

ces formules peuvent être résolues par rapport aux variables $m, m', \ldots$; elles donnent le résultat suivant :

Soient S_i l'aire de la face (i) du premier tétraèdre des centres; a_i, b_i, c_i les angles que fait cette face avec les plans coordonnés; V_i le volume du tétraèdre ayant pour base la face S_i et pour sommet *le centre de la sphère radicale du second groupe*. Soient S'_i, a'_i, b'_i, c'_i, V'_i les notations analogues pour les points du second groupe. On aura

$$(68)\quad \begin{cases} 3\,V\,m = \Sigma\,\alpha_i S_i \cos a_i, \\ 3\,V\,n = \Sigma\,\alpha_i S_i \cos b_i, \\ 3\,V\,p = \Sigma\,\alpha_i S_i \cos c_i, \\ \;\;V\,q = \Sigma\,\alpha_i V_i; \end{cases}$$

$$(69)\quad \begin{cases} 3\,V'm' = \Sigma\,\alpha'_i S'_i \cos a'_i, \\ 3\,V'n' = \Sigma\,\alpha'_i S'_i \cos b'_i, \\ 3\,V'p' = \Sigma\,\alpha'_i S'_i \cos c'_i, \\ \;\;V'q' = \Sigma\,\alpha'_i V'; \end{cases}$$

en effectuant ces substitutions dans la formule (67), son premier membre devient

$$-\Sigma\left(288\,V_i V'_j - 32\,RR'\cos\varphi\, S_i S'_j \cos\widehat{S_i S'_j}\right)\alpha_i \alpha'_j.$$

Ce développement donne tous les mineurs du déterminant (67). Par exemple,

$$(70)\qquad 288\,V_4 V'_4 - 32\,RR'\cos\varphi\, S_4 S'_4 \cos\widehat{S_4, S'_4} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix},$$

et, si les sphères deviennent des points,

$$(70\ bis)\qquad 288\,V_4 V'_4 - 32\,RR'\cos\varphi\, S_4 S'_4 \cos\widehat{S_4, S'_4} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}.$$

Le second membre de cette formule ne contenant aucun des points 4, cette formule s'applique en réalité à deux triangles dans l'espace. On a l'énoncé suivant :

Étant donnés deux triangles dans l'espace (123), (123'), et deux sphères quelconques circonscrites respectivement à ces deux triangles, on a

$$288\,VV' - 32\,RR'\cos\varphi\, SS'\cos\widehat{S, S'} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix},$$

où S, S' désignent les aires des triangles, V, V' les volumes des tétraèdres ayant pour base chaque triangle, et pour sommet le centre de la sphère circonscrite à l'autre.

Il y a, on le voit, une indétermination dans le choix des sphères dont on peut profiter dans chaque cas particulier. Si les deux triangles, par exemple, ont leurs sommets sur une même sphère, le premier membre de la formule devient

$$2(4RS)(4R'S')\cos U,$$

U désignant l'angle des deux cercles circonscrits, R, R' leurs rayons.

La considération du contrevariant double nous donne de même la formule

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 & \alpha'_3 & \alpha'_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha'_1 & 1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ \alpha'_2 & 1 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \alpha'_3 & 1 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ \alpha'_4 & 1 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{vmatrix} = \Sigma\, 16\, S_i S'_j \cos \widehat{S_i S'_j}\, \alpha_i \alpha'_j,$$

d'où l'on déduit l'équation connue

$$(71) \qquad - 16\, SS' \cos \widehat{SS'} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ 1 & k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ 1 & k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix},$$

qui donne le produit des aires de deux triangles par le cosinus de l'angle de leurs plans.

L'équation tangentielle

$$(72) \qquad \Sigma\, S_i S'_j \cos \widehat{S_i S'_j}\, \alpha_i \alpha'_j = 0$$

exprimerait d'ailleurs que les plans α_i, α'_j sont rectangulaires.

Il est bon de faire remarquer que la méthode suivie ne donne pas directement les mineurs du déterminant (65), tel que le suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \end{vmatrix};$$

mais il suffira d'adjoindre au système contenant trois points le centre de la sphère R' circonscrite au tétraèdre formé par les points du second groupe, et l'on aura alors, d'après la formule (66),

$$\begin{vmatrix} R'^2 & R'^2 & R'^2 & R'^2 \\ d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \end{vmatrix} = + (24)^2 VV_1 \frac{R'^2}{2},$$

V_1 désignant le volume du tétraèdre ayant pour base la face 123 du premier groupe, et pour sommet le centre de la sphère circonscrite aux quatre points du second groupe. Supprimant R'^2, on aura l'expression cherchée.

XI.

Avant de continuer la démonstration des formules relatives aux groupes de sphères, nous allons donner quelques applications, et d'abord traiter une question relative à deux tétraèdres et analogue à une question déjà examinée.

Étant donnés, dans l'espace, deux groupes distincts de points, dans quel cas peut-on exprimer le carré de la distance d'un point i du premier groupe à un point j du second par les formules

$$d_{ij} = v_i + v'_j, \quad i \gtrless j ? \tag{73}$$

Le problème peut s'énoncer en d'autres termes. L'équation précédente exprime que, si l'on décrit des sphères du point i comme centre avec $\sqrt{v_i}$ pour rayon, et du point j avec $\sqrt{v'_j}$, ces deux sphères sont orthogonales. Nous avons donc à examiner la question suivante :

Peut-on trouver deux groupes de sphères S_i, S'_j se correspondant une à une, et telles que chaque sphère S_i de l'un des groupes soit orthogonale à toutes celles S'_j de l'autre groupe, pourvu que i ne soit pas égal à j, et quel est le nombre maximum de sphères contenues dans chaque groupe ?

La remarque suivante nous donne la solution du problème. D'après une proposition déjà employée, l'équation (73) exprime que toute droite (ii') de la première figure est perpendiculaire aux droites (kk') de la seconde, k et k' étant différents à la fois de i et de i'. Il faudra donc, par exemple, que la droite 12 de la première figure soit perpendiculaire à toutes les droites qui joignent, dans la seconde, tous les points autres que 1, 2. Ainsi tous les points de chaque figure, moins deux quelconques, doivent être dans un même plan. Leur nombre total, dans chaque figure, ne peut donc dépasser cinq, mais il peut égaler ce nombre, et voici comment on construira ces deux groupes de cinq points :

Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD, *d'un point* E' *on abaissera* *des perpendiculaires sur les faces, et l'on prendra des points* A′B′C′D′ *sur ces perpendiculaires* (A′ *sur la perpendiculaire à la face* BCD, *etc.*) : *on aura ainsi formé un nouveau tétraèdre* A′B′C′D′. *Cela posé, les perpendiculaires abaissées des sommets du premier tétraèdre sur les faces du second se coupent en un même point* E, *et les deux groupes de points cherchés sont*

ABCDE, A′B′C′D′E′.

On voit qu'on ne peut pas trouver deux groupes de plus de cinq sphères, telles que chaque sphère d'un groupe soit orthogonale à toutes celles de l'autre qui ne lui correspondent pas. On aura d'ailleurs, entre les quantités v_i, v'_i, l'identité

$$\sum \frac{1}{d_{ii} - v_i - v'_i} = 0,$$

analogue à la formule (15), déjà trouvée.

XII.

Enfin nous allons terminer ce qui se rapporte à notre sujet en examinant, au point de vue précédent, les relations entre deux groupes de n sphères, n étant supérieur à 4.

Reprenons la forme

$$\sum -\frac{k_{ij}}{2}\mu_i\mu'_j, \tag{74}$$

où

$$k_{ij} = (x_i - x'_j)^2 + (y_i - y'_j)^2 + (z_i - z'_j)^2 - R_i^2 - R_j'^2;$$

cette forme est évidemment la transformée de la suivante

$$XX' + YY' + ZZ' - \frac{TU' + UT'}{2}, \tag{75}$$

par les substitutions

$$\left\{\begin{aligned} X &= \Sigma\mu_i x_i,\\ Y &= \Sigma\mu_i y_i,\\ Z &= \Sigma\mu_i z_i,\\ T &= \Sigma\mu_i,\\ U &= \Sigma\mu_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - R_i^2); \end{aligned}\right. \tag{76}$$

$$(77)\quad \begin{cases} X' = \Sigma \mu'_i x'_i, \\ Y' = \Sigma \mu'_i y'_i, \\ Z' = \Sigma \mu'_i z'_i, \\ T' = \Sigma \mu'_i, \\ U' = \Sigma \mu'_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i - R'^2_i); \end{cases}$$

et, par suite, en adjoignant à la forme (75) les fonctions linéaires

$$T,\ T',$$

qui annulent le premier contrevariant, on trouve l'équation

$$(78)\quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ 1 & k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ 1 & k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ 1 & k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ 1 & k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{vmatrix} = 0,$$

entre les puissances communes de cinq sphères quelconques. C'est l'équation de M. Cayley, et l'introduction des sphères à la place des points ne constitue pas une généralisation bien essentielle de la formule [1].

En écrivant la relation entre les deux discriminants, on a, au contraire, la relation nouvelle

$$(79)\quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} \end{vmatrix} = 8\Delta\Delta',$$

où Δ, Δ' sont les déterminants des deux substitutions (76), (77)

$$(80)\quad \begin{cases} \Delta = (1,\ x_i,\ y_i,\ z_i,\ \ x^2_i + y^2_i + z^2_i - R^2_i), \\ \Delta' = (1,\ x'_i,\ y'_i,\ z'_i,\ \ x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i - R'^2_i). \end{cases}$$

---

[1] Pour être exact, il faut ajouter que M. Cayley n'a développé que la relation entre les distances mutuelles de cinq points. Voir *Baltzer*, § XVI, 3^e édit.

Ces déterminants ne sont nuls que si les cinq sphères du groupe correspondant sont orthogonales à une même sphère. On a donc la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les cinq sphères de l'un des groupes soient orthogonales à une même sphère, c'est que le déterminant (79) *soit nul.*

Quand les sphères se réduisent à des points, on a la condition nécessaire et suffisante pour que les cinq points de l'un des groupes soient sur *une même sphère.*

Chacun des déterminants Δ, Δ' peut d'ailleurs être interprété géométriquement. Δ, par exemple, est le volume du tétraèdre formé par les centres de quatre des sphères, multiplié par six fois la puissance commune de la cinquième sphère et de la sphère orthogonale aux quatre autres. Si les cinq sphères du groupe se réduisent à des points, Δ est le sextuple du volume du tétraèdre formé par quatre quelconques de ces points, multiplié par la puissance du cinquième par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre formé par les quatre premiers. Nous avons fait usage de cette remarque (IX).

XIII.

Si, au lieu de cinq variables, nous en avions introduit un nombre plus grand n dans nos formules, nous aurions obtenu les résultats suivants :

Le discriminant de la forme

$$\Sigma \pm d_{ij}\,\mu_i\,\mu'_j$$

devient un déterminant d'ordre n qui est nul en même temps que tous ses mineurs de l'ordre $n-6$.

Le contrevariant, analogue à l'expression (78), sera nul, en même temps que tous ses mineurs de l'ordre $n-5$.

Il n'y a donc à signaler qu'une formule distincte des précédentes; mais elle est utile : c'est l'équation homogène

$$(80\ bis)\qquad \left\{\begin{array}{l} |\, d_{ij}\,| = 0, \\ \text{ou} \\ |\, k_{ij}\,| = 0, \end{array}\right. \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

entre les distances mutuelles de deux groupes de six points dans l'espace, ou les puissances communes de deux groupes de six sphères.

Étant données deux sphères dans l'espace, nous avons surtout considéré dans ce qui précède leur invariant le plus simple, désigné sous le nom de *puissance commune*.

Quant aux questions relatives aux tangentes communes, on les traitera de la manière suivante :

Soient deux sphères de centres (x, y, z), (x', y', z'), et de rayons R, R'. Une de leurs tangentes communes a pour carré

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 - (R - R')^2.$$

Si nous remplaçons R, R' par $t\sqrt{-1}$, $t'\sqrt{-1}$, cette expression prend la forme

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + (t - t')^2.$$

C'est la formule qui exprimerait la distance de deux points dans un espace plan à quatre dimensions. Cette remarque bien connue et l'analogie nous guideront toutes les fois que nous aurons à étendre aux sphères les solutions ou constructions relatives aux cercles.

Par exemple, on a, entre les trente-six tangentes communes à six sphères d'un premier groupe et à six sphères d'un second groupe, une relation analogue à celle qui a été indiquée plus haut :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 1 & t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ 1 & t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} & t_{36} \\ 1 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} & t_{46} \\ 1 & t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & t_{55} & t_{56} \\ 1 & t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & t_{66} \end{vmatrix} = 0.$$

Si les deux groupes se confondent, il suffit d'y faire

$$t_{ii} = 0, \quad t_{ij} = t_{ij}.$$

Rappelons d'ailleurs que les tangentes communes qu'on doit choisir sont parfaitement définies quand on a fixé le signe qu'on donne au rayon de chaque sphère

De même l'équation

$$(81) \qquad | t_{ij} | = 0, \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,$$

analogue à l'équation (80 *bis*) indiquée plus haut, est une relation homogène entre les tangentes communes de deux groupes de sept sphères quelconques.

Nous indiquerons du reste, dans la troisième Partie, les équations relatives aux sphères dont nous aurons à faire usage.

Enfin, de même que les théorèmes précédents s'étendent à des questions comportant un nombre supérieur de dimensions, ils s'appliquent aussi aux problèmes où l'on considère simplement des points situés dans le plan.

TROISIÈME PARTIE.

XIV.

La relation entre les distances mutuelles de cinq points sur la sphère reçoit une application très-simple et en quelque manière une représentation géométrique dans la solution du problème suivant :

Trouver l'équation de chacune des sphères inscrites ou exinscrites à un tétraèdre.

Ces sphères sont, on le sait, au nombre de huit. Dans un autre travail, nous pourrons développer les relations qu'elles présentent; pour le moment, nous nous bornerons à donner leurs équations.

Soient 1, 2, 3, 4 les quatre points de contact de la sphère inscrite avec chacune des faces du tétraèdre. Appelons, comme précédemment, d_{ij} le carré de la distance de deux points i et j, et soit α_{ij} le dièdre du tétraèdre formé par les faces d'indices i et j. Si l'on désigne par r le rayon de la sphère inscrite, on aura évidemment

$$d_{ij} = 4 r^2 \cos^2 \frac{\alpha_{ij}}{2}.$$

Prenons sur la sphère inscrite un nouveau point auquel nous donnerons l'indice 5, et désignons par p_i la distance de ce point à la face d'indice i; on a, d'après une propriété bien connue de la sphère,

$$d_{5i} = 2rp_i.$$

Écrivons, en nous servant des formules précédentes, la relation homogène entre cinq points d'une sphère, nous aurons

$$(82)\qquad \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_1 & 0 & \cos^2\frac{\alpha_{12}}{2} & \cos^2\frac{\alpha_{13}}{2} & \cos^2\frac{\alpha_{14}}{2} \\ p_2 & \cos^2\frac{\alpha_{21}}{2} & 0 & \cos^2\frac{\alpha_{23}}{2} & \cos^2\frac{\alpha_{24}}{2} \\ p_3 & \cos^2\frac{\alpha_{31}}{2} & \cos^2\frac{\alpha_{32}}{2} & 0 & \cos^2\frac{\alpha_{34}}{2} \\ p_4 & \cos^2\frac{\alpha_{41}}{2} & \cos^2\frac{\alpha_{42}}{2} & \cos^2\frac{\alpha_{43}}{2} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est l'équation de la sphère inscrite. Pour avoir les équations des autres sphères exinscrites, on changera de toutes les manières possibles les signes d'un nombre quelconque des quantités p_1, p_2, p_3, p_4, et l'on remplacera $\cos\frac{\alpha_{ij}}{2}$ par $\sin\frac{\alpha_{ij}}{2}$ toutes les fois que p_i et p_j ne conserveront pas le même signe dans la nouvelle équation.

On a ainsi les équations des huit sphères tangentes aux quatre faces d'un tétraèdre.

On peut d'ailleurs généraliser cette méthode et trouver par couples les équations des sphères tangentes à quatre autres. En effet, l'analogie indique suffisamment, et l'on peut démontrer de plusieurs manières, la proposition suivante :

Pour que cinq sphères soient tangentes à une même sphère, il doit y avoir entre les longueurs des tangentes communes la relation

$$(83)\qquad \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} & t_{35} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & t_{45} \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans cette relation on peut remplacer les tangentes communes par les sinus des moitiés des angles faits par les sphères correspondantes.

Supposons d'ailleurs que la sphère (5) se réduise à un point, l'équation

$$(84)\qquad \begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 \\ S_1 & 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ S_2 & t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} \\ S_3 & t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} \\ S_4 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

où S_i désigne le carré de la tangente, menée d'un point à la sphère (i), représente deux sphères tangentes aux quatre sphères 1, 2, 3, 4. D'ailleurs ces sphères sont réciproques l'une de l'autre par rapport à la sphère radicale des quatre sphères données.

Plus généralement, toute équation

$$f(S_1, S_2, S_3, S_4) = 0,$$

homogène par rapport aux quantités S_i, représente une surface anallagmatique par rapport à la sphère radicale des quatre sphères S_i.

En changeant, dans la formule (84), les signes des rayons, on aura huit combinaisons donnant les huit groupes de sphères tangentes aux quatre sphères données. Nous rappelons que, lorsque les rayons de deux sphères sont pris avec le même signe, on doit prendre la tangente commune extérieure; c'est au contraire la tangente intérieure que l'on doit introduire dans les formules quand les rayons ont des signes différents. Les relations entre les sphères sont multiples; nous en réservons l'examen pour un autre travail.

XV.

Les formules données dans la seconde Partie donnent une solution simple, analytique du problème suivant :

Construire un cercle coupant sous des angles donnés trois cercles donnés.

Ce problème a été proposé par Steiner, dans le tome II du *Journal de Crelle*, et cet éminent géomètre a annoncé qu'il en possédait la solution; mais il n'a publié, à ma connaissance du moins, que les solutions de quelques cas particuliers. Nous allons voir que la méthode employée pour la construction du cercle tangent à trois autres s'applique au problème actuel. A cet effet, nous allons indiquer quelques propositions se rapportant au mode de représentation des cercles déjà indiqué.

Étant donné un cercle C situé dans un plan P, nous avons vu que ce cercle peut être représenté par un groupe de deux points situés sur la perpendiculaire élevée au plan P au centre du cercle, et à une distance de ce plan égale au rayon multiplié par $\sqrt{-1}$.

L'un de ces points, par exemple, correspondra à une valeur positive du rayon, l'autre à la valeur du rayon prise avec un signe opposé. Nous appellerons ces deux points les *foyers du cercle* [1]. Ainsi le point M sera le foyer du cercle situé dans le plan P, à l'intersection de ce plan et de la sphère de rayon nul, ayant son centre en M. Un cercle assujetti à se trouver dans un plan est déterminé évidemment par un seul de ses foyers. Si l'on avait à étudier un cercle dans l'espace, il faudrait donner les deux sphères de rayon nul sur lesquelles il se trouve, et qui le déterminent. Nous ne considérerons que les cercles situés dans un plan P, et par conséquent un seul *foyer* suffira à leur détermination.

Cela posé, puisque les cercles sont représentés par un point de l'espace, la théorie des cercles dans le plan reviendra à celle des points dans l'espace. La distance de deux points sera, nous l'avons vu, la tangente commune des deux cercles qu'ils représentent prise d'une manière déterminée, etc.

De même que, dans l'espace, on considère des lignes droites, des plans, des cercles, des sphères, etc., on aura à examiner dans le plan ce qu'on peut appeler des suites *rectilignes*, *circulaires*, *planes*, *sphé-*

---

[1] Dans l'article déjà cité des *Annali*, M. Cayley propose l'expression de *contre-foyer*. Celle de *foyer* se justifierait peut-être par la remarque suivante :

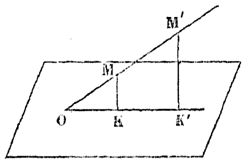
Étant donnés dans l'espace un cercle et ses deux foyers (sphères de rayon nul qui le contiennent), *le cercle se projette sur un plan quelconque suivant une conique dont les foyers sont la projection des foyers du cercle.*

Plus généralement, *tout cône contenant le cercle a pour focales les droites qui joignent son sommet aux deux foyers du cercle ; toute surface quadrique contenant le cercle a ses focales passant par les foyers du cercle.*

riques de cercles. La suite rectiligne, par exemple, se composera de cercles ayant leurs foyers en ligne droite; la suite plane, des cercles ayant leurs foyers dans un plan, etc. Nous allons voir que ces suites se rencontrent dans toutes les questions les plus simples relatives aux cercles, et leur considération nous conduira à des solutions, fondées sur des principes uniformes, des problèmes les plus importants relatifs aux systèmes de cercles.

La *suite rectiligne* de cercles est formée, nous l'avons vu, des cercles ayant leurs foyers en ligne droite. Ces cercles ont leurs centres K, K′ en ligne droite (*fig.* 2) et leurs rayons proportionnels à la distance du

Fig. 2.



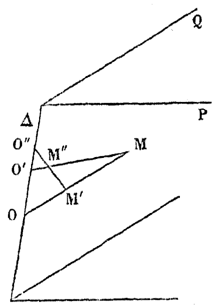
centre à un point fixe O pris sur la ligne des centres. Deux quelconques des cercles de la suite auront donc le point O pour centre de similitude. Il y a deux cercles d'une suite rectiligne passant par un point du plan ou tangents à une droite. Il y a deux espèces de suites rectilignes : celles pour lesquelles le centre de similitude est intérieur à tous les cercles, et celles pour lesquelles le centre de similitude est extérieur. Dans cette seconde espèce de suites rectilignes, tous les cercles sont tangents à deux droites réelles dans le même angle ou dans des angles opposés.

Deux cercles tracés dans le plan donnent lieu à deux suites *rectilignes*.

Les suites *planes* sont formées de tous les cercles dont un des foyers se trouve dans un plan Q (*fig.* 3). Deux quelconques des cercles de la suite ont un centre de similitude O sur une droite Δ fixe, intersection du plan Q et du plan P qui contient tous les cercles. Cette droite fixe Δ, qu'on peut appeler *axe de similitude de la suite plane*, est axe de similitude de trois cercles quelconques de la suite. Les rayons des cercles sont proportionnels aux distances de leurs centres à cet axe Δ. Ils coupent cet axe sous un angle constant réel ou imaginaire.

Trois cercles donnent lieu à quatre suites planes dont les axes sont les quatre axes de similitude des quatre cercles donnés.

Fig. 3.

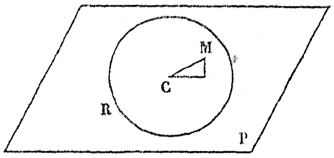


Les *suites sphériques* de cercles sont formées de tous les cercles ayant un de leurs foyers sur une sphère. Ces suites sphériques peuvent être définies par plusieurs propriétés dont l'examen rapide est nécessaire et donnera des résultats intéressants.

Soit C le centre d'une sphère; ce centre représente un cercle (C), et il est clair que tous les points M de la sphère seront les foyers de cercles (M) variables dans le plan, et tels que la tangente commune à ces cercles (M) et au cercle fixe (C) conserve une longueur invariable.

Un cas particulier très-important est le suivant : Imaginons une sphère ayant son centre C (*fig.* 4) dans le plan P, et coupant ce plan

Fig. 4.



suivant un cercle R réel ou imaginaire. Tout point M de cette sphère sera le foyer d'un cercle tel, que la tangente menée de C à ce cercle soit égale au rayon du cercle R. Donc

Tous les cercles coupant à angle droit un cercle R *tracé dans leur plan* P *ont leurs foyers sur une sphère admettant le cercle* R *pour grand cercle.*

Voilà donc un premier et remarquable exemple de *suite sphérique*. On peut le généraliser, et démontrer que :

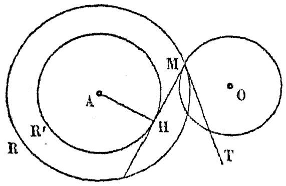
Tous les cercles coupant sous un angle donné un cercle R *tracé dans leur plan* P *ont leur foyer sur une sphère contenant le cercle* R.

En effet, soit tracé dans le plan P le cercle R fixe, de centre A, et considérons un cercle quelconque de centre O coupant le cercle fixe sous l'angle donné

$$\widehat{\mathrm{HMT}} = \alpha.$$

La droite MH, qui est la tangente en M au cercle O (*fig.* 5), coupe évidemment le cercle R sous l'angle α, et par conséquent elle enveloppera

Fig. 5.



dans toutes ses positions un cercle R′ concentrique au cercle R, et déterminé par cette propriété que ses tangentes coupent le cercle R sous l'angle donné α. *On peut donc remplacer pour le cercle* O *variable la condition de couper le cercle* R *sous l'angle* α *par celle d'avoir avec le cercle* R′ *une tangente commune* MH *de longueur connue.*

D'après cela, soit C le foyer du cercle R′, un foyer du cercle O devra se trouver à une distance constante du point C, et, par conséquent, les cercles O, coupant un cercle R sous un angle donné, auront leurs foyers sur une sphère qui contiendra évidemment le cercle C, et dont le centre sera le foyer du cercle R′. Cette sphère est donc complétement déterminée.

Nous pourrions évidemment ajouter beaucoup de propriétés et transporter aux suites sphériques toutes les propriétés de la sphère. Par exemple, tous les cercles ayant avec deux cercles fixes des tangentes communes dont le rapport est donné forment une suite, plane si ce rapport est l'unité, sphérique si le rapport est quelconque, etc. Nous nous contentons d'énoncer les propriétés dont nous ferons usage.

Remarquons seulement, et pour préciser les résultats précédents, que toute suite sphérique est formée de cercles coupant sous un angle constant un cercle fixe R (intersection de la sphère des foyers et du plan P) et ayant avec un autre cercle fixe R′ concentrique à R une tangente de longueur donnée.

Les *suites circulaires* sont formées des cercles ayant un de leurs foyers sur un cercle U de l'espace. Ces suites, extrêmement importantes, donnent lieu à des propriétés nombreuses.

Par le cercle U on peut faire passer une suite de sphères S, S′, S″,.... Ces sphères coupent le plan P suivant une suite de cercles C, C′, C″,... ayant deux points communs. Tous ces cercles sont évidemment coupés par les cercles de la suite U sous un angle fixe pour chacun d'eux. Ainsi tous les cercles de la suite U couperont C sous l'angle α, C′ sous l'angle α',....

Comme, parmi les sphères S, S′, S″ contenant le cercle U il y en a deux qui se réduisent à des points, ces points F, F′ seront à des distances nulles de tous les points du cercle U, et par conséquent ils représenteront deux cercles tangents à tous ceux de la suite U. Enfin une des sphères S, S′, S″,... a son centre dans le plan P, et elle coupe ce plan suivant un cercle R que rencontrent à angle droit tous ceux de la suite U. On a donc la proposition suivante :

Tous les cercles appartenant à une suite circulaire U *coupent sous des angles constants des cercles* C, C′, C″,... *ayant même axe radical. Parmi tous les cercles* C, C′, C″,..., *il y en a deux, réels ou imaginaires, qui sont tangents à tous les cercles de la série* U, *un qui leur est orthogonal.*

Avant de donner de nouvelles propriétés de la suite circulaire, faisons l'application des résultats précédents à la recherche des cercles coupant deux cercles donnés C, C′ sous des angles donnés.

Adjoignons aux cercles C et C′ les cercles concentriques D, D′ enveloppes des droites coupant C et C′ respectivement sous les angles donnés pour chaque cercle.

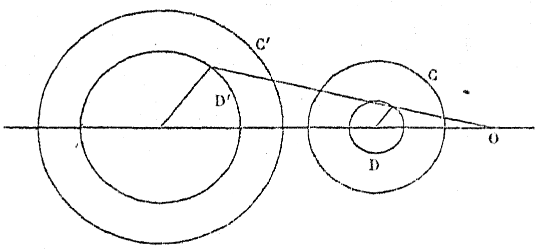
Les cercles coupant le cercle C sous l'angle donné auront leurs foyers sur deux sphères passant par C et ayant pour centre un des deux foyers d, d_1 du cercle D. De même, les cercles coupant C′ sous l'angle indiqué auront leurs foyers sur deux sphères contenant C′ et ayant pour centres un des foyers d', d'_1 du cercle D′. Les deux sphères passant par C couperont les deux sphères contenant C′ suivant quatre cercles, deux à deux symétriques par rapport au plan P, et qui détermineront par conséquent *deux séries circulaires* de cercles.

Soit U l'une de ces séries; les cercles de cette série couperont sous un angle constant tout cercle passant par l'intersection de C et de C′; mais il importe de donner une construction géométrique simple fournissant cet angle. Les remarques suivantes conduisent au résultat.

Le centre de toute sphère passant par le cercle U est le foyer d'un cercle avec lequel tous les cercles de la suite ont une tangente commune de longueur donnée. Il y a donc toute une série de cercles (série rectiligne), telle que tous les cercles de la suite U ont avec chacun d'eux une tangente commune de longueur donnée. Ces cercles, étant représentés par des points en ligne droite, centres de toutes les sphères contenant le cercle U, forment ce que nous avons appelé une *suite rectiligne*. Nous obtenons donc le résultat élégant qui suit :

Étant donnés deux cercles C, C′ (*fig.* 6) *qui doivent être coupés par des cercles variables sous les angles* α, α', *on construira les cercles* D *enveloppe des droites coupant* C *sous l'angle* α *et* D′, *enveloppe des droites coupant* C′ *sous l'angle* α'. Cela posé,

Fig. 6.



Tous les cercles variables couperont sous un angle constant α'' *tout cercle* C″ *passant par l'intersection des cercles* C *et* C′, *et les droites coupant le cercle* C″ *sous l'angle correspondant* α'' *envelopperont un cercle* D″ *concentrique à* C″, *et ayant avec* D, D′ *un même centre de similitude.*

On a donc deux séries de cercles suivant qu'on prend l'un ou l'autre des deux centres de similitude de D *et de* D′.

Celui des cercles C″, C‴ qui a pour centre le point O est coupé à angle droit. Les deux cercles tangents s'obtiendront en menant par l'intersection de C et de C′ les cercles admettant avec D et D′ le même centre de similitude. Ce problème, quand les cercles tangents cherchés sont réels, ne présente aucune difficulté. Il se ramène, en effet, à la construction d'un cercle passant par deux points et tangent à deux droites, construction qu'on sait effectuer, alors même que les deux points ou les deux droites sont imaginaires conjugués.

Ainsi l'on saura déterminer par les constructions précédentes l'angle sous lequel est coupé chaque cercle C'',... par les cercles variables, ceux de ces cercles C'' qui sont coupés à angle droit, ou tangents à tous ces cercles variables.

Revenons aux suites circulaires. Ces suites circulaires pourront être définies avec avantage de la manière suivante : Le plan du cercle U détermine une suite plane comprenant tous les cercles de la série U; en second lieu, on peut faire passer par le cercle U une sphère ayant son centre dans le plan P. Cette sphère contient les foyers de tous les cercles coupant à angle droit un cercle donné, intersection de la sphère par le plan P. Donc :

Toute suite circulaire peut être définie comme formée de deux cercles d'une suite plane qui coupent à angle droit un cercle donné R. Nous emploierons utilement ce mode de détermination.

Il y aurait aussi à étudier avec avantage les suites de cercles dont les foyers décrivent des sections coniques, des courbes gauches du quatrième ordre, etc. Cela nous éloignerait de l'objet du présent travail.

XVI.

Les principes précédents nous permettent de donner une solution et la construction géométrique du problème de Steiner.

Construire un cercle coupant sous trois angles donnés α, α', α'' trois cercles donnés C, C', C''.

Nous savons d'abord que, si l'on construit les trois cercles D, D', D'', D enveloppe des droites coupant le cercle C sous l'angle α; D', D'' définis de la même manière au moyen de C', C'', le problème de Steiner sera équivalent au suivant :

Construire un cercle ayant avec les trois cercles D, D', D'' *des tangentes communes de longueur donnée (et égales pour chaque cercle* D *à la moitié de la corde que la tangente à ce cercle intercepte dans le cercle* C *qui lui est concentrique).*

D'après cela, on peut imaginer la construction suivante du problème : Soient d, d', d'' trois foyers des cercles D, D', D''; de ces trois points comme centres on décrira trois sphères contenant respectivement les cercles C, C′, C″. Ces trois sphères se couperont en deux points qui seront les foyers de deux des cercles cherchés. En choisissant de toutes les manières possibles les foyers des cercles D, D′, D″, on aura huit solutions déterminées par couples.

Mais la construction précédente ne peut être qu'imaginée; on ne pourrait même pas l'effectuer par la Géométrie descriptive, puisqu'elle repose sur l'emploi des imaginaires. Elle n'offre donc qu'un avantage, celui de guider et d'apprendre que le problème est possible avec la règle et le compas. Il reste maintenant à indiquer des constructions s'effectuant dans le plan, et ne devenant impossibles que si les cercles cherchés deviennent imaginaires. Voici comment on peut obtenir ce résultat :

Nous admettrons, pour ne pas interrompre le raisonnement, qu'on sache construire, quand ils existent, les deux cercles qui coupent à angle droit un cercle donné (dont le centre est réel, mais dont le rayon peut être soit réel, soit la racine carrée d'un nombre négatif), et qui ont avec un autre cercle un centre de similitude donné.

Cela posé, on procédera de la manière suivante :

Le plan $dd'd''$ coupe le plan P des trois cercles suivant une droite Δ qu'on construira. C'est l'axe de similitude des trois cercles D, D′, D″.

Soit R le cercle radical de centre O des trois cercles donnés C, C′, C″. La droite Δ coupe le cercle radical R en deux points appartenant aux deux cercles inconnus.

Par suite, le problème pourrait, dès à présent, être ramené au suivant :

Construire un cercle passant par deux points donnés, réels ou imaginaires conjugués, et coupant sous un angle donné un cercle donné, soit C *sous l'angle* α, *soit* C′ *sous l'angle* α', *soit* C″ *sous l'angle* α''.

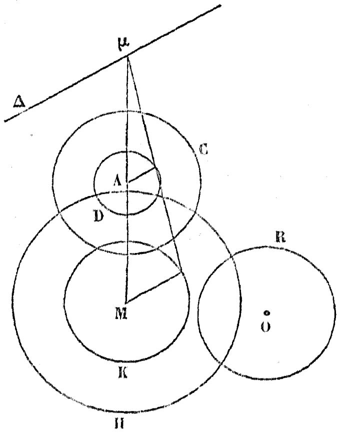
Mais on peut achever la solution de la manière suivante :

Tous les cercles tangents aux deux cercles inconnus font partie d'une *suite circulaire*. Reportons-nous à la construction imaginaire donnée au début. Les foyers des deux cercles cherchés, étant à l'intersection de trois sphères de centres d, d', d'', seront placés symétriquement par rapport au plan des centres. Soient F, F′ ces deux foyers. La droite FF′, étant l'axe radical des trois sphères, viendra couper le plan P des cercles C, D au point O, centre radical des cercles C, et toutes les sphères de rayon nul passant par F, F′ seront à l'intersection du plan

$dd'd''$ et de la sphère décrite du point O comme centre, et contenant le cercle radical R déjà défini. Ainsi les foyers de tous les cercles tangents aux deux cercles inconnus sont à la fois sur la sphère contenant le cercle R comme grand cercle, et dans le plan des foyers d, d', d'' des trois cercles D, D', D''. D'après cela, nous pouvons énoncer la curieuse proposition suivante :

Si d'un point quelconque M (*fig.* 7) *du plan comme centre, on décrit un cercle* H *orthogonal à* R *et un cercle* K *ayant avec* D, *par exemple, son*

Fig. 7.



centre de similitude μ *sur l'axe* Δ, *les deux cercles inconnus et cherchés couperont le cercle* H *sous le même angle que les tangentes du cercle* K [1].

C'est la généralisation de la proposition donnée pour les cercles coupant deux cercles donnés sous des angles donnés. On voit qu'une construction des plus simples donnera l'angle sous lequel est coupé par les deux cercles inconnus tout cercle orthogonal au cercle R.

Il est clair qu'il est possible de déduire de cette construction générale une infinité de manières de résoudre la question proposée. Par exemple, si l'on examine la suite des cercles orthogonaux à R, ayant leurs centres sur une droite donnée, ces cercles passeront par deux points fixes, et il y en aura deux qui seront tangents aux deux cercles

(1) On voit pourquoi les deux points d'intersection du cercle R et de la droite Δ appartiennent aux cercles cherchés. Ce sont des cercles de rayon nul tangents à ces deux cercles.

inconnus. On les déterminera par la méthode de l'article précédent; mais, pour être assuré que ces cercles tangents aux cercles inconnus sont réels quand les cercles inconnus le sont, il faudra choisir des lignes particulières, telle que la droite OO′ perpendiculaire abaissée de O sur Δ.

Voici, par exemple, comment on pourra procéder :

Il peut arriver deux cas : ou bien les cercles D, D′, D″ couperont leur axe Δ (et tous les trois sous le même angle), ou bien aucun d'eux ne le coupera.

Dans le premier cas, supposons, par exemple, que le cercle D coupe l'axe Δ en E, E′ (*fig.* 8). On mènera par le centre radical O deux droites parallèles aux tangentes en E, E′; *les deux cercles cherchés seront tangents à ces deux droites* [1], *et comme ils doivent passer par l'intersection du cercle* R *et de l'axe* Δ, le problème sera ramené à une construction connue et toujours possible quand le problème aura des solutions réelles.

Fig. 8.

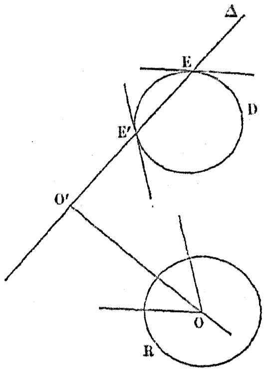
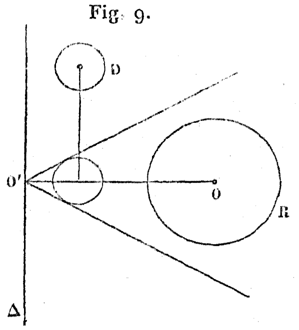


Fig. 9.



Dans le deuxième cas, où les cercles D ne coupent pas leur axe de similitude Δ (*fig.* 9), on fera glisser un de ces cercles D parallèlement à Δ, jusqu'à ce que son centre vienne sur la droite OO′; on lui mènera deux tangentes réelles du point O′, et *l'on construira les deux cercles tangents à ces deux droites et coupant le cercle* R *à angle droit.* Ces deux cercles coupent la droite OO′ sur laquelle ils ont leurs centres en quatre points qui sont les extrémités des diamètres des deux cercles cherchés.

---

(1) En effet, les cercles tangents aux deux cercles inconnus sont orthogonaux au cercle R et coupent l'axe Δ sous le même angle que les cercles D, D′, D″. Les deux droites considérées satisfont à cette double condition.

Ces deux cercles sont donc plus que déterminés, puisqu'on en connaît déjà les deux points à l'intersection de Δ et de R.

Il est bon de faire remarquer qu'aucune de ces constructions ne suppose le cercle radical réel.

Enfin, comme les méthodes précédentes peuvent conduire à un grand nombre de constructions, on pourra en préférer une qui conduira à un cercle K tangent aux deux cercles inconnus. Alors, pour avoir les points de contact, il suffit de prendre le pôle de l'axe Δ par rapport au cercle K, et de joindre ce pôle au centre radical O : la droite de jonction coupera le cercle K à ses deux points de contact avec les deux cercles inconnus.

On pourrait appliquer cette construction si l'un des trois cercles donnés D devait être tangent aux cercles cherchés, ou si l'on trouvait préférable de chercher, dans une des séries de cercles orthogonaux à R et ayant leurs centres en ligne droite, les deux qui doivent être tangents aux deux cercles inconnus. Ce mode de construction pourrait être avantageux si le cercle radical R coupait l'axe Δ en deux points réels. Alors, dans la suite des cercles ayant leur centre sur une ligne droite contenant l'un de ces points a et orthogonaux à R, un seul serait tangent aux cercles inconnus (l'autre étant représenté par le point a) et serait par conséquent réel. Il y aurait lieu alors d'appliquer pour les points de contact la construction que nous avons indiquée; mais les solutions indiquées tout d'abord nous paraissent satisfaisantes au point de vue de la théorie, en ce sens qu'elles sont simples et demeurent applicables tant que le problème est possible.

La méthode précédente s'étend aux sphères. On a en effet les propositions suivantes, dont nous laissons la démonstration à chercher au lecteur.

Toutes les sphères coupant deux sphères S, S′ *sous des angles constants* α, α' *coupent également sous un angle constant* α'' *chacune des sphères* S″ *passant par l'intersection de* S *et de* S′.

Qu'on associe à S, S′, S″ *des sphères concentriques* T, T′, T″ *déterminées par la condition que leurs plans tangents coupent* S, S′, S″ *respectivement sous les angles* α, α', α'', *les sphères* T, T′, T″ *auront même centre de similitude.*

Toutes les sphères coupant trois sphères S, S′, S″ *sous des angles con-*

stants α, α', α'' *coupent aussi sous un angle constant* α''' *toute sphère* S''' *passant par les deux points d'intersection des trois premières. Qu'on associe, par la même règle que précédemment, aux sphères* S *des sphères* T *concentriques, ces sphères* T *auront un même axe de similitude ; leurs centres de similitude seront sur cet axe.*

Les deux sphères d'un même couple coupant quatre sphères S, S', S'', S''' *sous des angles donnés* α, α', α'', α''' *coupent sous l'angle* α_i *toute sphère* S_i *ayant même centre radical que les quatre premières ; et si l'on associe, comme précédemment, des sphères concentriques* T *aux sphères* S, *les sphères* T *prises deux à deux ont leur centre de similitude dans un plan fixe* Δ.

Les deux sphères du couple passent par le cercle commun au plan Δ *et à la sphère radicale des quatre sphères données. Leurs centres sont donc sur la perpendiculaire abaissée du centre radical sur* Δ. *On est donc ramené, en coupant par un plan contenant cette perpendiculaire, à des problèmes de Géométrie plane déjà résolus.*

XVII.

Proposons-nous d'appliquer les méthodes précédentes au problème suivant, qui a été aussi proposé par Steiner, et qui est beaucoup plus facile que le précédent :

Construire un cercle coupant sous des angles égaux quatre cercles donnés.

Cherchons d'abord la suite des cercles coupant sous des angles égaux trois cercles donnés D, D', D''. Soient d, d', d'' trois foyers de ces cercles. Si par les trois points d, d', d'' on fait passer une sphère quelconque, cette sphère coupera le plan des trois cercles suivant un cercle C. Les trois cercles D, D', D'', ayant leurs foyers sur une sphère contenant le cercle C, couperont celui-ci sous un même angle. Il suit de là que l'on aura une des séries de cercles coupant sous des angles égaux les trois cercles donnés en faisant passer par les foyers d, d', d'' une suite de sphères coupant le plan P suivant des cercles ayant même axe radical. On conclut de là facilement la proposition suivante :

Tous les cercles coupant sous des angles égaux trois cercles donnés se divisent en quatre séries, et les cercles de chaque série ont pour axe radical un des quatre axes de similitude. Au nombre des cercles de chaque série *figurent le cercle radical et deux des cercles tangents aux trois cercles donnés.*

Ce théorème résout évidemment la question proposée plus haut.

Les propositions s'étendent aux sphères.

Ainsi toutes les sphères d'une série coupant sous des angles égaux trois sphères données ont un même axe radical, l'axe de similitude des trois sphères ; il y a autant de séries que d'axes de similitude ; chaque série comprend des sphères tangentes, les sphères orthogonales, etc.

Toutes les sphères coupant sous des angles égaux quatre sphères données se divisent en huit séries. Les sphères de chaque série ont pour plan radical un des huit plans de similitude. Elles comprennent la sphère orthogonale, deux sphères tangentes, etc. ([1])

On peut ajouter à ces propositions :

Toutes les sphères coupant deux sphères données sous un même angle sont orthogonales à une même sphère qui a pour centre le centre de similitude des deux premières et qui passe par leur intersection.

XVIII.

Un problème analogue au précédent est le suivant :

Construire un cercle admettant avec quatre cercles donnés des tangentes communes égales.

D'après notre méthode de représentation, cela revient à trouver dans l'espace un point à égale distance de quatre points donnés. La solution est fournie par les principes suivants :

Tous les cercles admettant avec deux cercles donnés des tangentes communes égales forment deux suites planes contenant chacune une série de cercles tangents, et ayant pour axe de similitude l'axe radical des deux cercles donnés.

Tous les cercles admettant avec trois cercles donnés des tangentes communes égales forment quatre suites rectilignes ayant chacune pour centre de similitude le centre radical, et comprenant deux cercles tangents ; la ligne des centres de la suite est normale à un axe de similitude.

([1]) *Voir* dans les *Matematische Annalen*, t. III, un article de M. Affolter, professeur à Solothurn.

Les cercles admettant avec quatre cercles des tangentes communes égales sont au nombre de huit. Leurs centres sont à l'intersection des perpendiculaires abaissées des centres radicaux des quatre cercles pris trois à trois sur les axes de similitude correspondants des quatre cercles pris trois à trois.

Ces théorèmes s'étendent sans modification aux sphères.

XIX.

Les constructions précédentes ont été données comme application de la représentation des cercles par des points de l'espace, employée pour la première fois par M. Chasles. Nous nous proposerons maintenant de traiter les mêmes problèmes, en employant les formules démontrées dans la deuxième Partie.

Soient deux groupes de cinq sphères dans l'espace, et désignons par α_{ij} le cosinus de l'angle de la sphère i du premier groupe avec la sphère j du second. Alors, désignant par k_{ij}, comme nous l'avons fait jusqu'ici, la *puissance commune* des deux mêmes sphères, on aura

$$k_{ij} = -2R_i R'_j \alpha_{ij}, \tag{85}$$

et la relation (78), appliquée aux deux groupes de cinq sphères, pourra s'écrire

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R'_1} & \frac{1}{R'_2} & \frac{1}{R'_3} & \frac{1}{R'_4} & \frac{1}{R'_5} \\ \frac{1}{R_1} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \frac{1}{R_2} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ \frac{1}{R_3} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \frac{1}{R_4} & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \alpha_{45} \\ \frac{1}{R_5} & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{vmatrix} = 0; \tag{86}$$

si les deux groupes de cinq sphères se confondent, cette équation se simplifie un peu, et elle devient une relation entre les rayons et les angles de cinq sphères quelconques. Elle peut s'écrire

$$(87)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_5} \\ \frac{1}{R_1} & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} \\ \frac{1}{R_2} & \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ \frac{1}{R_3} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ \frac{1}{R_4} & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 & \alpha_{45} \\ \frac{1}{R_5} & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

et ici l'on a

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Par exemple, si les cinq sphères sont orthogonales, toutes les quantités α_{ij} deviennent nulles, et l'équation (87) prend la forme simple

$$(88)\qquad \sum \left(\frac{1}{R_i}\right)^2 = 0.$$

Nous avons fait usage (équation 15) de cette relation.

De même si, dans la formule (78), relative à deux groupes de cinq sphères, on suppose que chaque sphère d'un groupe soit orthogonale à toutes celles de l'autre groupe qui ne lui correspondent pas (*voir* XI), on aura

$$(89)\qquad \sum \frac{1}{k_{ii}} = 0.$$

Ce résultat confirme une formule déjà indiquée (p. 363).

Puisque la formule (87) donne une relation entre les angles et les rayons de cinq sphères, elle déterminera le rayon de la sphère coupant quatre sphères 1, 2, 3, 4 sous des angles connus. On a donc ainsi une solution analytique du problème de Steiner relatif aux sphères. En changeant les lignes des cosinus, on aura huit équations du second degré donnant les seize rayons. On a donc une première solution analytique, puisque, le rayon de la sphère une fois connu, on saura déterminer la position de la sphère par rapport aux quatre sphères données. Mais nous allons donner aussi l'équation des deux sphères faisant partie d'un même couple, et coupant sous des angles donnés les quatre sphères données.

A cet effet, rappelons l'équation

$$|k_{ij}| = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

entre les puissances communes de six sphères. Supposons que les quatre premières soient les sphères données, que la cinquième soit l'une des sphères cherchées, et que la sixième se réduise à un point situé sur la sphère cherchée 5. Alors

$$k_{56} = 0, \quad k_{6i} = S_i, \quad k_{5i} = -2R_5 R_i \alpha_{5i},$$

formules où S_i désigne la puissance d'un point par rapport à la sphère i; R_i, R_j, α_{ij} ont les mêmes significations que précédemment. Cela posé, l'équation rappelée plus haut prend la forme

$$(90) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \frac{S_1}{R_1} \\ \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \alpha_{25} & \frac{S_2}{R_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & \alpha_{34} & \alpha_{35} & \frac{S_3}{R_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 & \alpha_{45} & \frac{S_4}{R_4} \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \alpha_{53} & \alpha_{54} & 1 & 0 \\ \frac{S_1}{R_1} & \frac{S_2}{R_2} & \frac{S_3}{R_3} & \frac{S_4}{R_4} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation homogène représente deux des sphères répondant à la question. On aura les sept autres couples en changeant successivement les signes des cosinus.

Nous avons déjà indiqué que toute équation homogène

$$f(S_1, S_2, S_3, S_4) = 0$$

représente une surface anallagmatique par rapport à la sphère radicale des quatre sphères S_i. L'équation précédente représente donc deux sphères réciproques par rapport à cette sphère radicale; et, en effet, les quatre sphères proposées forment une figure anallagmatique par rapport à leur sphère radicale. A toute sphère les coupant sous les angles indiqués correspondra la sphère réciproque par rapport au centre radical, sphère qui satisfera aux mêmes conditions.

Nous avons vu que le problème de Steiner [1] équivaut au suivant :

Construire une sphère admettant avec quatre sphères données des tangentes communes de longueurs données.

Ce dernier problème pourrait être traité directement de la manière suivante :

La relation entre les tangentes communes de six sphères est la même que celle qui existe entre les distances mutuelles de six points dans un espace à quatre dimensions. Cette relation est donc

$$(91) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & t_{16} \\ 1 & t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} & t_{25} & t_{26} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En supposant que la sphère 6 se réduise à un point sur la sphère 5, on aura

$$(92) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & S_1 \\ 1 & t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} & t_{25} & S_2 \\ 1 & t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} & t_{35} & S_3 \\ 1 & t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & t_{45} & S_4 \\ 1 & t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 0 & 0 \\ 1 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette nouvelle équation n'est pas homogène et ne peut pas l'être, car il est clair que la condition d'avoir avec une sphère fixe une tangente commune de longueur donnée ne se conserve pas quand on transforme par rayons vecteurs réciproques. La figure formée des deux sphères

[1] M. Griffiths a aussi traité le problème de Steiner par une voie analytique dans un article inséré aux *Proceedings* de la Société Mathématique de Londres.

représentées par l'équation précédente ne peut donc être anallagmatique par rapport à la sphère radicale des quatre sphères données S_1, S_2, S_3, S_4.

XX.

Examinons de la même manière le problème suivant :

Déterminer un cercle coupant sous des angles égaux quatre cercles donnés.

Pour résoudre cette question, nous chercherons la condition pour que cinq cercles puissent couper sous un même angle un cercle inconnu. Cette condition n'est évidemment pas satisfaite, en général, par tout groupe de cinq cercles; il y a bien un cercle qui coupe quatre cercles sous des angles égaux, mais ce cercle n'est pas nécessairement coupé par un cinquième cercle sous le même angle que par les quatre premiers.

En effet, si cinq cercles coupent sous un même angle un cercle C, leurs foyers devront être sur une même sphère (XV). Nous avons donc à exprimer analytiquement que les cinq foyers sont sur une même sphère. Pour cela, associons aux cinq cercles un groupe quelconque de cinq autres cercles représentés par cinq points quelconques, et appelons t_{ij} le carré de la tangente commune au cercle i du premier groupe et à celui j du second. Alors les distances des deux groupes de cinq foyers dans l'espace auront pour carrés t_{ij}. Donc la condition

$$|\, t_{ij} \,| = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, 5$$

exprimera que les cinq points de l'un des groupes sont sur une sphère, et si les cercles du second groupe ont été choisis de manière que leurs cinq foyers ne soient pas sur une sphère, on voit que l'équation précédente exprimera la condition nécessaire et suffisante pour que les cinq cercles donnés aient leurs foyers sur une même sphère, c'est-à-dire coupent sous un même angle un cercle inconnu. Cette condition s'exprime en fonction des vingt-cinq tangentes communes aux cinq cercles du premier groupe et aux cinq cercles arbitrairement choisis du second.

Cela posé, si l'on suppose que le cercle 5 du premier groupe se réduise à un point, ce point devra se trouver sur le cercle coupant les quatre autres sous des angles égaux, et par conséquent, en désignant par S_i la puissance de ce point par rapport au cercle i du premier groupe, l'équation

$$(93)\qquad \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & t_{25} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & t_{35} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & t_{45} \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \end{vmatrix} = 0.$$

représente le cercle coupant sous des angles égaux les cercles donnés.

Cette méthode s'étend aux sphères.

Si, au lieu de faire usage de la relation entre les distances mutuelles de deux groupes de cinq points quand les points de l'un des groupes sont sur une sphère, on eût employé la relation entre les distances mutuelles d'un seul groupe de points, on eût obtenu l'équation

$$(94)\qquad \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & S_1 \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} & S_2 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} & S_3 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & S_4 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui a l'inconvénient de donner l'équation cherchée élevée au carré.

Enfin, si l'on demande l'angle sous lequel quatre cercles sont coupés par le cercle qui les rencontre sous des angles égaux, il faudra faire usage de la relation entre les cosinus α_{ij} des angles de cinq cercles déjà donnée

$$|\alpha_{ij}| = 0.$$

En supposant que le cercle 5 coupe les quatre premiers sous un même angle de cosinus u, on a ainsi

$$(95)\qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{u^2} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 1 & \alpha_{21} & 1 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 1 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 & \alpha_{34} \\ 1 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

formule élégante d'où l'on déduirait celles qui ont été données pour les deux cas particuliers dans lesquels les quatre cercles sont tangents ou orthogonaux à un même cercle.

XXI.

Nous traiterons par des principes semblables le problème :

Déterminer une sphère, sachant qu'elle a avec cinq sphères données une tangente commune de même longueur.

En effet, parmi les relations entre les tangentes communes de sept sphères, il y en a une qui est homogène

$$(96) \qquad |\, t_{ij} \,| = 0 \qquad i, j = 1, 2, \ldots, 7.$$

Supposons que les cinq premières sphères soient les sphères données, que la sixième soit la sphère cherchée, et que la septième se réduise à un point sur la sixième, on aura

$$t_{67} = 0, \quad t_{7i} = S_i, \quad t_{6i} = k,$$

et l'équation précédente deviendra, en divisant par k la sixième ligne et la sixième colonne,

$$(93) \qquad \begin{vmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & t_{14} & t_{15} & 1 & S_1 \\ t_{21} & 0 & t_{23} & t_{24} & t_{25} & 1 & S_2 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & t_{34} & t_{35} & 1 & S_3 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & t_{45} & 1 & S_4 \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 0 & 1 & S_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette forme d'équation semble donner un lieu du quatrième ordre; mais, au moyen de la sixième ligne et de la sixième colonne, on pourra faire disparaître les termes du second degré dans la septième ligne et dans la septième colonne.

D'ailleurs la forme même de tous ces déterminants indique que les problèmes résolus se rattachent d'une manière étroite à la considération des formes homogènes du second degré introduites au début de ce travail.

Si, au lieu de composer dans l'équation (97) la sixième ligne et la sixième colonne avec l'unité, on introduisait des nombres

$$m_1,\ m_2, \ldots,\ m_5,$$

cette équation représenterait les deux sphères dont les tangentes communes avec les cinq sphères données ont les rapports indiqués par ces nombres. Ce dernier problème peut d'ailleurs se résoudre avec la règle et le compas, comme le montrent les remarques développées (XV).

XXII.

En terminant, nous démontrerons une équation très-importante entre les puissances d'un point par rapport à cinq sphères quelconques. Cette équation se distingue de toutes celles qu'on pourrait établir par cette propriété qu'elle est homogène et du second degré.

On a vu (XII) qu'on a entre les puissances communes de six sphères la relation $|k_{ij}| = 0$; si l'une d'elles se réduit à un point, on trouvera

$$(98)\qquad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & S_1 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & S_2 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & S_3 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & S_4 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & S_5 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est la relation cherchée. Si les cinq sphères sont deux à deux orthogonales,

$$k_{ij} = 0, \quad k_{ii} = -2R_i^2,$$

et nous obtenons, en développant, la formule remarquable

$$(99)\qquad \sum \left(\frac{S_i}{R_i}\right)^2 = 0.$$

Cette identité contient toute la théorie des sphères orthogonales.

La relation générale donne, en y remplaçant les puissances communes par les cosinus α_{ij} des angles, l'équation

$$(100)\qquad |\alpha_{ij}| = 0, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

analogue à une équation déjà employée. Cette équation convient aussi d'ailleurs aux angles de deux groupes distincts de cinq sphères.

Considérons de même deux groupes de cinq sphères

$$S_i, \ldots, \quad S'_i,$$

et adjoignons à chaque groupe un même point. On a ainsi deux groupes de six sphères ayant en commun un point-sphère, et par suite on obtient l'équation

$$(101) \qquad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & S_1 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & S_2 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & S_3 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & S_4 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & S_5 \\ S'_1 & S'_2 & S'_3 & S'_4 & S'_5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

entre les puissances d'un même point par rapport à deux groupes de cinq sphères.

Si ces deux groupes sont ceux considérés au § XI, tels que toute sphère de l'un des groupes soit orthogonale aux quatre sphères qui ne lui correspondent pas dans l'autre groupe, on aura

$$k_{ij} = 0, \qquad i \gtrless j,$$

et l'équation précédente deviendra

$$(102) \qquad \sum \frac{S_i S'_i}{k_{ii}} = 0.$$

Cette formule est la généralisation de l'équation (99).

Enfin, si l'on suppose qu'aux deux groupes de cinq sphères

$$S_i, \quad S'_i$$

on adjoigne deux points différents, un dans chaque groupe, on obtient l'équation

$$(103) \qquad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & S_1 \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & S_2 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & S_3 \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & S_4 \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & S_5 \\ S'_1 & S'_2 & S'_3 & S'_4 & S'_5 & d^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui donnera le carré d^2 de la distance des deux points en fonction à leurs puissances relatives pour chacun des points aux cinq sphères de l'autre groupe.

Par exemple, si l'on considère le système pour lequel

$$k_{ij} = 0,$$

on aura

$$d^2 = \sum \frac{S_i S'_i}{k_{ii}}. \tag{104}$$

L'étude des systèmes de coordonnées dans lesquels un point est déterminé par les rapports de ses puissances relatives à cinq sphères quelconques se présente comme conséquence des formules précédentes. Je réserve pour un autre travail cette étude, dont j'ai publié déjà plusieurs résultats.

15 mars 1872.