ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. BLANC

Les espaces métriques quasi convexes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 55 (1938), p. 1-82

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1938_3_55__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LES

ESPACES MÉTRIQUES QUASI CONVEXES

PAR M. E. BLANC.

INTRODUCTION.

En cherchant à établir les fondements d'une théorie des fonctions multiformes abstraites d'un argument abstrait, dont l'ébauche se trouve dans quelques Notes présentées par moi à l'Académie des Sciences [1], je me heurtai à une difficulté qui fut le point de départ des présentes recherches.

J'avais cru démontrer qu'une suite convergente d'ensembles C.-M. de rayon α [un tel ensemble est la réunion de sphères ouvertes de rayon α centrées sur les points d'un ensemble donné [2]; c'est ce que j'appellerai aussi, dans le cours de ce travail, un sphéroïde ouvert]

(1) *Sur la structure de certaines lois générales régissant les correspondances multiformes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 196, 1933, p. 1769) et *Sur les correspondances multiformes monotones* (*ibid.*, t. 200, 1935, p. 1829).

(2) G. BOULIGAND, *Géométrie infinitésimale directe*, p. 34.

avait pour ensemble limite un ensemble C.-M. de même rayon. Or ce théorème est faux en général dans un espace métrique quelconque. Il faut, pour qu'il devienne exact, assujettir la métrique de cet espace à une condition nouvelle que j'ai appelée la *quasi-convexité*. C'est à l'étude de cette quasi-convexité et de conditions du même type qu'est consacré ce Mémoire.

Il est naturel d'appeler « sphère » dans un espace métrique quelconque l'ensemble des points dont la distance à un point donné est inférieure (ou inférieure ou égale) à un nombre donné. Il est alors tentant de se laisser entraîner par ce qu'un tel mot peut évoquer, et d'attribuer à de telles sphères celles au moins des propriétés des sphères ordinaires qui paraissent les plus évidentes.

Or, dans certains espaces métriques fort simples, ces sphères peuvent déjà présenter de multiples anomalies. C'est le rôle de la quasi-convexité et des conditions analogues que d'empêcher ces anomalies de se produire. Dans ce que j'appelle les « espaces à distance régulière » les sphères sont des êtres géométriques sur lesquels il est possible de raisonner à peu près comme sur les sphères de la géométrie euclidienne.

Après un Chapitre préliminaire où sont précisées hypothèses et notations, le Chapitre I est consacré à l'analyse de la notion de frontière d'un ensemble et à l'expression au moyen de six ensembles fondamentaux d'ensembles attachés à cet ensemble (intérieur, fermeture, etc.). J'y définis aussi la notion d'ensemble régulier, généralisant celles déjà connues d'ensemble régulier ouvert et d'ensemble régulier fermé.

Dans le Chapitre II, je montre, sur des exemples simples, les singularités que peuvent présenter les « sphères » d'un ensemble métrique quelconque.

Le Chapitre III est consacré à la définition de la quasi-convexité et à sa conséquence fondamentale : *La fermeture d'une sphère ouverte coïncide avec la sphère fermée de même centre et de même rayon.* Les relations de la quasi-convexité avec la convexité de M. Menger et les convexités de M. Aronszajn y sont aussi étudiées.

Je définis, dans le Chapitre IV, deux conditions de régularité de la distance, chacune pouvant se présenter sous une forme faible ou sous une forme forte, la première condition forte étant la quasi-convexité elle-même. Ces conditions, lorsqu'on les impose à la métrique d'un espace, y suppriment l'une ou l'autre des singularités constatées au Chapitre III. Leur mode d'action est en général le suivant : Pour qu'une des singularités disparaisse, l'une ou l'autre des conditions faibles est nécessaire, la condition forte correspondante étant alors suffisante.

J'étudie dans le Chapitre V les sphères généralisées ou sphéroïdes (lieux des points dont la distance à un *ensemble* est inférieure à un nombre donné) et j'étends à ces sphères le résultat fondamental du Chapitre III. J'introduis, en outre, la notion de sphéroïde d'ordre supérieur à un et montre comment la quasi-convexité intervient pour en simplifier certains aspects.

Les Chapitres VI, VII, VIII, après un bref rappel de résultats connus sur les ensembles limites attachés à une suite d'ensembles, contiennent une étude des suites de sphéroïdes dans un espace quasi convexe et compact. J'y montre comment les ensembles limites attachés à une suite de sphéroïdes, se déduisent des ensembles analogues attachés à la suite des ensembles centres de ces sphéroïdes. J'obtiens ainsi, sous les hypothèses énoncées, d'importants théorèmes de passage à la limite, en particulier celui dont il est question au début de cette Introduction.

Pour finir, un appendice contient deux exemples d'espaces non quasi convexes qui n'étant pas compacts présentent des singularités supplémentaires. J'avais déjà signalé dans ma Note : *Sur la notion de distance* (1), le premier de ces exemples.

Je tiens, en terminant, à exprimer ma vive reconnaissance à M. Bouligand qui a donné à mes recherches leur élan initial et n'a cessé de s'intéresser à mes travaux, ainsi qu'à M. Montel dont les précieuses indications m'ont amené à préciser certains points de ce Mémoire. Qu'il me soit permis enfin de remercier ici les maîtres qui m'ont formé au Lycée, à l'École Normale, à la Sorbonne et au Collège de France, ainsi que tous ceux qui, à un titre quelconque, m'ont aidé de leurs conseils et soutenu de leurs encouragements.

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1646.

CHAPITRE PRÉLIMINAIRE.

I. — Hypothèses sur l'espace.

Dans tout le cours de ce travail, nous supposerons que l'espace $\mathfrak{X}$, sur lequel nous aurons à raisonner est un espace *métrique*, effectivement distancié au moyen d'une distance de Fréchet. On sait qu'une telle distance satisfait aux axiomes suivants :

Quels que soient deux éléments a et b de l'espace, en désignant par ab leur distance, on doit avoir :

I. $ab > 0$, si a et b sont distincts;
II. $ab = 0$, si a et b sont confondus ;
III. $ab = ba$ (loi de symétrie) ;
IV. Quels que soient trois points a, b, c, on a : $ab \leqq ac + bc$ (inégalité triangulaire).

Le quatrième axiome a pour conséquence que, si deux points sont distants de moins de ε, leurs distances à un troisième diffèrent de moins de ε. On voit que, d'après la définition de la limite dans un espace métrique, si un point variable x a pour limite un point x_0, la distance ax a pour limite ax_0. En ce sens, on peut dire que :

Théorème. — *Si x et y sont deux points variables de l'espace la distance xy est une fonction continue des deux points x et y.*

Nous supposerons en outre que l'espace $\mathfrak{X}$ est *connexe* [1], c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver deux ensembles A et B, non vides, fermés et tels que

$$A + B = \mathfrak{X}, \qquad A.B = 0.$$

[1] *Voir*, par exemple, Knaster et Kuratowski, *Sur les ensembles connexes* (*Fund. Math.*, Vol. II, p. 207), où l'on trouvera une bibliographie complète et une étude sur les différentes définitions proposées pour la connexité.

Dans le présent travail, nous appellerons ensemble connexe, un ensemble dont la fermeture ne se laisse pas décomposer en deux ensembles fermés sans points communs. Un ensemble connexe et fermé est un continu.

II. — Notations.

Les majuscules désigneront en général les ensembles, et les minuscules les éléments de l'espace ou de ses sous-ensembles.

On désignera par :

$A + B$, la réunion des ensembles A et B;
$A . B$, leur intersection;
$\mathfrak{X} - A$, le complémentaire de A dans l'espace $\mathfrak{X}$;
A', le dérivé de A;
$\overline{A}$, la fermeture de A (réunion de A et de son dérivé);
A_i, l'intérieur de A;
A_e, l'extérieur de A;
A_f, la frontière de A;
$A \supset B$, signifie que A contient B et au moins un point étranger à B;
$A \supseteq B$, signifie que A contient B;
$a \varepsilon A$, signifie que a appartient à A;
a non — εA, signifie que a n'appartient pas à A;
ab est la distance des deux points a et b;
$d(a, E)$, la distance du point a à l'ensemble E;
(E, F), la distance des deux ensembles E et F (les parenthèses pouvant être remplacées par des crochets, si besoin est);
(a), l'ensemble formé du seul point a;
$(a)_\alpha$ ou $s(a, \alpha)$, la sphère ouverte de centre a, de rayon α;
$(a)_{\overline{\alpha}}$ ou $s(a, \overline{\alpha})$, la sphère fermée analogue;
$\sigma(a, \alpha)$, la périsphère (¹) de centre a et de rayon α.

E, étant un ensemble quelconque, on désignera par :

E_α ou $s(E, \alpha)$, la sphère généralisée ouverte (sphéroïde ouvert);
$E_{\overline{\alpha}}$ ou $s(E, \overline{\alpha})$, la sphère généralisée fermée (sphéroïde fermé);
$\sigma(E, \alpha)$, la périsphéroïde,
toutes de centre E et de rayon α (²).

(¹) *Voir* § 11.
(²) *Voir* § 37.

Pour une suite d'ensembles $\{E_n\}$:

I, est l'ensemble limite restreint (Borel);
S, en est l'ensemble limite complet;
L, l'ensemble limite (s'il existe) au sens de M. Borel;
$\mathcal{I}$, la limite topologique inférieure;
$\mathfrak{S}$, la limite topologique supérieure;
$\mathcal{L}$, la limite topologique (si elle existe);
$\mathcal{L}'$, la limite métrique (Hausdorff).

Pour la suite des sphéroïdes $\{(E_n)_\alpha\}$,

I^α, S^α, L^α, $\mathcal{I}^\alpha$, $\mathfrak{S}^\alpha$, $\mathcal{L}^\alpha$, $\mathcal{L}'^\alpha$ ont des significations analogues.

CHAPITRE I.

FRONTIÈRES.

I. — Définitions.

1. On sait que par rapport à un ensemble donné A, on peut subdiviser l'espace $\mathfrak{X}$ en trois ensembles s'excluant mutuellement :

L'intérieur de A : $A_i = \mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X} - A}$;
L'extérieur de A : $A_e = \mathfrak{X} - \overline{A}$;
La frontière de A : $A_f = \overline{A}.\overline{\mathfrak{X} - A}$.

Ces trois ensembles peuvent dans certains cas être vides, cependant le dernier est certainement non vide dans un espace connexe pourvu que A soit un vrai sous-ensemble non vide de cet espace. S'il n'en était pas ainsi, $\mathfrak{X}$ serait décomposé en deux sous-ensembles non vides, fermés et sans points communs $\overline{A}$ et $\overline{\mathfrak{X} - A}$ et ceci est contraire à l'hypothèse de connexité de l'espace.

On a bien

$$A_i + A_e + A_f = (\mathfrak{X} - \overline{A}) + (\mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X} - A}) + \overline{A}.\overline{\mathfrak{X} - A} = \mathfrak{X},$$

c'est la loi de De Morgan appliquée aux ensembles $\overline{A}$ et $\overline{\mathfrak{X} - A}$. D'autre part, les relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_i . A_e = 0, \\ A_e . A_f = 0, \\ A_i . A_f = 0 \end{array} \right.$$

résultent du fait que $E.(\mathfrak{X} - E)$ est vide quel que soit E, combiné avec l'associativité de l'opération intersection.

2. Nous allons maintenant subdiviser la frontière elle-même en quatre sous-ensembles. Écrivons

$$A_f = A_f.\mathfrak{X}.\mathfrak{X} = A_f.[\overline{A}_i + (\mathfrak{X} - \overline{A}_i)].[\overline{A}_e + (\mathfrak{X} - \overline{A}_e)] \quad (^1),$$
$$A_f = A_f.\overline{A}_i.\overline{A}_e + A_f.\overline{A}_i.(\mathfrak{X} - \overline{A}_e) + A_f.(\mathfrak{X} - \overline{A}_i).\overline{A}_e + A_f.(\mathfrak{X} - \overline{A}_i)(\mathfrak{X} - \overline{A}_e).$$

Nous désignerons les quatre ensembles qui figurent au second membre respectivement par A_{fr}, A_{fi}, A_{fe}, A_{fs}. Il est évident, d'après leur origine qu'ils n'ont aucun point en commun deux à deux. Interprétons-les.

On peut écrire, A_f, A_i, et A_e étant sans points communs deux à deux

$$A_{fr} = A_f.(A_i + A_i').(A_e + A_e') = A_f.A_i'.A_e',$$

A_{fr} est donc l'ensemble de ceux des points frontière qui sont limites à la fois de points intérieurs et de points extérieurs. De tels points seront appelés *points frontière réguliers* et A_{fr} sera la *frontière régulière*. C'est un ensemble fermé (intersection de trois ensembles fermés).

On montrera de même que A_{fi}, *la frontière intérieure*, est l'ensemble des points frontière limites de points intérieurs mais pas de points extérieurs; que A_{fe}, *frontière extérieure*, est l'ensemble des points frontière limites de points extérieurs mais pas de points intérieurs;

---

(1) Ceci n'est pas autre chose que le développement logistique de la classe A_f rapport aux classes $\overline{A}_i$ et $\overline{A}_e$ (*voir* par exemple COUTURAT, *Algèbre de la Logique*, p. 31-32, Paris, 1905).

que A_{fs}, *frontière singulière* est l'ensemble des points frontière qui ne sont limites ni de points intérieurs ni de points extérieurs [1].

3. **Remarque.** — Il résulte évidemment des définitions de A_i, A_e, A_{fr}, A_{fs}, A_{fi}, A_{fe} que ces six ensembles s'excluent mutuellement l'un l'autre, c'est-à-dire que leurs produits deux à deux sont tous nuls et qu'ils forment une décomposition de l'espace, c'est-à-dire que leur somme est égale à $\mathfrak{X}$.

II. — Dualité.

4. Avec un ensemble A considérons son complémentaire B. La relation qui sert à définir l'intérieur peut s'écrire

$$A_i = x - \overline{B}; \qquad \overline{B} = x - A_i.$$

On aura évidemment aussi

$$B_i = x - \overline{A}; \qquad \overline{A} = x - B_i.$$

(1) Soit dans le plan l'ensemble de tous les points du carré unitaire OAEF

$$0 \leqq x \leqq 1,$$
$$0 \leqq y \leqq 1.$$

Réunissons à cet ensemble l'ensemble des points de coordonnées rationnelles positives inférieures à 2. L'ensemble réunion possède :

Une frontière régulière formée des segments OE et OA (extrémités comprises);

Une frontière extérieure EDCBA (les points A et E étant exclus);

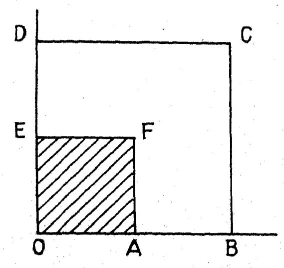


Fig. 1.

Une frontière intérieure AFE (A et E exclus);

Une frontière singulière constituée par tous les points *intérieurs* à « l'équerre » ABCDEFA.

En tenant compte de la relation qui sert à définir l'extérieur d'un ensemble, on voit que

$$(1) \qquad A_i = B_e, \qquad A_e = B_i.$$

La définition de la frontière étant symétrique par rapport à A et B, on aura d'autre part

$$(2) \qquad A_f = B_f.$$

En tenant compte de (1) et de (2) on a

$$(3) \qquad B_{fr} = B_f . \overline{B_i} . \overline{B_e} = A_f . \overline{A_e} . \overline{A_i} = A_{fr},$$

$$(3') \qquad B_{fi} = B_f . \overline{B_i} . (\mathfrak{X} - \overline{B_e}) = A_f . \overline{A_e} (\mathfrak{X} - \overline{A_i}) = A_{fe};$$

de même

$$(3'') \qquad B_{fe} = A_{fi},$$

et enfin

$$(3''') \qquad B_{fs} = B_f . (\mathfrak{X} - \overline{B_i}) (\mathfrak{X} - \overline{B_e}) = A_f . (\mathfrak{X} - \overline{A_e}) (\mathfrak{X} - \overline{A_i}) = A_{fs}.$$

En résumé, à chaque élément de la décomposition de l'espace par A correspond un élément de la décomposition par B, qui lui est égal, les indices se correspondant de la façon suivante :

f	correspond à	f,
r	»	r,
s	»	s,
i	»	e,
e	»	i.

Les premières égalités écrites montrent en outre que

La fermeture de A est complémentaire de l'intérieur de B ;
La fermeture de B est complémentaire de l'intérieur de A.

Si l'on remarque que l'opération du passage d'un ensemble à son complémentaire est elle-même sa propre inverse, on peut encore dire que les *opérations de fermeture et de passage d'un ensemble à son intérieur sont transformées l'une de l'autre par l'opération de passage au complémentaire*.

III. — Cas particuliers.

5. **Ensembles ouverts.** — On a, en supposant A ouvert,

$$A = A_i; \tag{1}$$

et par conséquent

$$A_{fe} = A_f . (\mathfrak{X} - \overline{A_i}) . \overline{A_e} = \overline{A} . (\overline{\mathfrak{X} - A}) (\mathfrak{X} - \overline{A}) . \overline{A}_e ;$$

d'où

$$A_{fe} = 0,$$

de même

$$A_{fs} = \overline{A} . (\overline{\mathfrak{X} - A}) (\mathfrak{X} - \overline{A}) (\mathfrak{X} - \overline{A_e}) = 0.$$

Un ensemble ouvert ne possède ni frontière extérieure ni frontière singulière.

6. **Ensembles fermés.** — Un ensemble fermé étant le complémentaire d'un ensemble ouvert les relations de dualité et l'énoncé précédent entraînent :

Un ensemble fermé ne possède ni frontière intérieure ni frontière singulière.

IV. — Règles de calcul.

7. Il résulte de la remarque faite au paragraphe 3 que le complémentaire de la somme de plusieurs des ensembles A_i, A_e, A_{fr}, A_{fs}, A_{fi}, A_{fe} s'obtient en prenant la somme des autres. Ceci nous permettra d'exprimer formellement au moyen de ces ensembles un certain nombre d'autres ensembles intéressants.

1° *Fermetures :*

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{A} &= \mathfrak{X} - A_e = A_i + A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs}, \\ \overline{\mathfrak{X} - A} &= \mathfrak{X} - A_i = A_e + A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs}, \\ \overline{A_f} &= \quad A_f \quad = \quad A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs}; \end{aligned} \right.$$

puis en remarquant que

$$A_{fr} . \overline{A_i} = A_{fr} ; \qquad A_{fi} . \overline{A_i} = A_{fi} ; \qquad A_{fe} . \overline{A_i} = A_{fs} . \overline{A_i} = 0,$$

on aura

$$\overline{A}_i = \overline{A}_i . \overline{A} = \overline{A}_i (A_i + A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs});$$

(II₁) $$\overline{A}_i = A_i + A_{fr} + A_{fi}$$

et

(II₂) $$\overline{A}_e = A_e + A_{fr} + A_{fe}$$

par dualité.

2° *Intérieurs et extérieurs :*

(III) (¹)
$$\left\{\begin{array}{ll} 1. & (A_i)_i = A_i; \\ 2. & (A_e)_i = A_e; \\ 3. & (A_i)_e = \mathfrak{X} - \overline{A}_i = A_e + A_{fe} + A_{fs}; \\ 4. & (A_e)_e = \mathfrak{X} - \overline{A}_e = A_i + A_{fi} + A_{fs}; \\ 5. & (\overline{A})_i = \mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X} - \overline{A}} = \mathfrak{X} - \overline{A}_e = A_i + A_{fi} + A_{fs} = (A_e)_e; \\ 6. & (\overline{A})_e = \mathfrak{X} - \overline{A} = A_e. \end{array}\right.$$

3° *Frontières :*

(IV₁)
$$\left\{\begin{array}{l} (\overline{A})_f = \overline{A} . \overline{\mathfrak{X} - \overline{A}} = \overline{A} . \overline{A}_e \\ \qquad = (A_i + A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs})(A_e + A_{fr} + A_{fe}), \\ (\overline{A})_f = A_{fr} + A_{fe}, \\ (A_i)_f = \overline{A}_i . \overline{\mathfrak{X} - A_i} = \overline{A}_i . (\mathfrak{X} - A_i), \end{array}\right.$$

puisque $\mathfrak{X} - A_i$ est fermé. Il vient

(IV₂) $$(A_i)_f = (A_i + A_{fr} + A_{fi})(A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs} + A_e) = A_{fr} + A_{fi},$$

et par dualité

(IV₃) $$(A_e)_f = A_{fr} + A_{fe} = (\overline{A})_f \text{ (²)}.$$

(¹) $(A_i)_i$ signifie évidemment intérieur de l'intérieur de A, $(\overline{A})_i$, intérieur de la fermeture de A, etc.

(²) Il est clair que tous les ensembles que l'on obtiendra à partir de A par une succession quelconque d'opérations fermeture, passage à l'extérieur, passage à l'intérieur, passage au complémentaire, s'exprimeront au moyen des six ensembles fondamentaux relatifs à A. Le nombre des ensembles distincts que l'on pourrait ainsi obtenir est donc égal au plus à $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 - 2 = 62$. Pour un ensemble régulier, ce nombre est au plus égal à 6 car il n'y a plus que trois ensembles fondamentaux (*voir* § 9).

V. — Ensembles réguliers.

8. Par définition, un ensemble sera dit *régulier* s'il ne possède que des points frontière réguliers, c'est-à-dire si

$$A_f = A_{fr}$$

ou, ce qui revient au même, si

$$A_{fi} = A_{fe} = A_{fs} = 0.$$

Il est évident, d'après les règles de dualité établies, que le *complémentaire d'un ensemble régulier est aussi un ensemble régulier.*

9. Si A est un ensemble régulier les formules établies au paragraphe précédent deviennent

$$\overline{A} = \overline{A_i} = A_i + A_f;$$

$$(\mathrm{V}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathfrak{X} - A} = \overline{A_e} = A_e + A_f, \\ (A_i)_i = (A_e)_e = A_i, \\ (A_i)_e = (A_e)_i = A_e, \\ (\overline{A})_i = A_i, \\ (A_i)_f = (A_e)_f = (\overline{A})_f = A_f. \end{array} \right.$$

Ainsi

Théorème I. — *La fermeture d'un ensemble régulier coïncide avec la fermeture de son intérieur et son intérieur coïncide avec celui de sa fermeture.*

Réciproquement, si l'on a simultanément

$$(1) \qquad \overline{A} = \overline{A_i} \qquad \text{et} \qquad A_i = (\overline{A})_i,$$

il résulte d'après (I), (II_1), de la première relation que

$$A_{fe} = A_{fs} = 0,$$

et de la seconde, il résulte d'après (III_5)

$$A_{fi} = A_{fs} = 0,$$

c'est-à-dire que l'ensemble est régulier.

Les ensembles réguliers sont donc caractérisés par la réalisation simultanée des deux conditions (1) qui expriment une *loi d'absorption* de l'une des deux opérations « *fermeture* » et « *passage d'un ensemble à son intérieur* » lorsqu'elle est suivie de l'autre.

THÉORÈME II. — *Les ensembles réguliers sont caractérisés par le fait que les deux opérations « passage d'un ensemble à son intérieur » et « passage d'un ensemble à son extérieur » appliquées successivement à un tel ensemble se combinent à la façon des multiplications algébriques par* -1 *et* $+1$.

Cela résulte des relations (V) et de la réciproque suivante :

Si l'on a

$$(A_i)_e = A_e \quad \text{et} \quad (A_e)_e = A_i,$$

celà entraîne

$$A_{fe} = A_{fs} = 0 \quad \text{et} \quad A_{fi} = A_{fs} = 0,$$

c'est-à-dire la régularité de l'ensemble A.

THÉORÈME III. — *La frontière d'un ensemble régulier coïncide avec celle de son intérieur, avec celle de son extérieur, et avec celle de sa fermeture, et c'est encore une propriété caractéristique de ces ensembles.*

Cela résulte des relations (V) et de la réciproque suivante :

Si ces quatre frontières coïncident on peut écrire

$$A_{fr} + A_{fi} + A_{fe} + A_{fs} = A_{fs} + A_{fe} = A_{fr} + A_{fi};$$

d'où résulte

$$A_{fi} = A_{fe} = A_{fs} = 0.$$

10. **Ensembles réguliers particuliers.** — Pour qu'un ensemble ouvert soit régulier, il faut et il suffit que l'on ait

$$A_{fi} = 0,$$

puisque A_{fe}, et A_{fs} sont déjà vides. On peut donc prendre comme définition :

DÉFINITION I. — *Un ensemble ouvert est appelé ensemble* ouvert régulier *s'il ne possède aucun point frontière intérieur.*

On aura de même :

Définition I′. — *Un ensemble fermé est appelé ensemble* fermé régulier *s'il ne possède aucun point frontière extérieur.*

On sait que pour tout ensemble ouvert on a

$$A = A_i$$

et par conséquent

$$\overline{A} = \overline{A_i}.$$

D'après ce qu'on a vu plus haut, la condition

$$A_i = (\overline{A})_i \qquad \text{ou} \qquad A = (\overline{A})_i \tag{1}$$

sera alors nécessaire et suffisante pour que l'ensemble soit régulier. Un raisonnement analogue à celui de la page précédente montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble *fermé* soit régulier est que

$$A = \overline{A} = \overline{A_i}. \tag{2}$$

Ainsi :

Définition II. — *On appelle ensemble ouvert régulier un ensemble ouvert qui coïncide avec l'intérieur de sa fermeture.*

Définition II′. — *On appelle ensemble fermé régulier un ensemble fermé qui coïncide avec la fermeture de son intérieur.*

Remarquons enfin que la condition (1) peut s'écrire

$$A = (\overline{A})_i = \mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X} - \overline{A}},$$

ce qui n'est autre chose que la définition de ce que M. Kuratowski [1] appelle aussi un ensemble régulier ouvert.

De même la condition (2) s'écrit

$$A = \overline{A_i} = \overline{\mathfrak{X} - \overline{\mathfrak{X} - A}},$$

[1] *L'opération* $\overline{A}$ *de l'*Analysis situs (*Fund. Math.*, vol. III, p. 192). Ces dénominations ont été aussi employées par M. Zaycki (*Fund. Math.*, vol. IX, p. 3-15). Dans son *Traité de topologie*, M. Kuratowski les remplace par celles de domaine ouvert et de domaine fermé, se conformant à cela à la terminologie de M. Lebesgue qui le premier semble avoir utilisé de tels ensembles. [*Sur les correspondances entre les points de deux espaces* (*Fund. Math.*, vol. II, p. 273)].

ce qui constitue la définition des ensembles réguliers fermés d'après M. Kuratowski. Ainsi il y a identité entre les ensembles réguliers ouverts ou fermés de M. Kuratowski et les ensembles du même nom qui viennent d'être définis.

CHAPITRE II.

SPHÈRES.

I. — Définitions.

11. Étant donnés un point a et un nombre positif α, on appellera respectivement :

a. Sphère ouverte de centre a et de rayon α, l'ensemble $s(a, \alpha)$ des points m pour lesquels

$$ma < \alpha.$$

b. Sphère fermée de centre a et de rayon α, l'ensemble $s(a, \alpha)$ des points m pour lesquels

$$ma \leqq \alpha.$$

c. Périsphère (¹) *de centre a et de rayon* α, l'ensemble

$$\sigma(a, \alpha) = s(a, \bar{\alpha}) - s(a, \alpha)$$

des points pour lesquels

$$ma = \alpha.$$

12. **Propriétés des sphères.** — On a :

1° $s(a, \alpha)$ est un ensemble ouvert;

2° $s(a, \bar{\alpha})$ est un ensemble fermé;

3° $\sigma(a, \alpha)$ est un ensemble fermé;

4° si $\alpha' > \alpha$, on a $s(a, \bar{\alpha}) \subset s(a, \alpha')$;

5° $s(a, \bar{\alpha}) \supseteq \overline{s(a, \alpha)}$;

6° front. $s(a, \alpha) \subseteq \sigma(a, \alpha)$; front. $s(a, \bar{\alpha}) \subseteq \sigma(a, \alpha)$.

(¹) J'emploie ici le mot de périsphère pour éviter celui du mot frontière. Nous verrons en effet que la périsphère peut n'être la frontière ni de la sphère ouverte ni de la sphère fermée correspondantes. Elle peut même n'être pas un ensemble frontière et posséder des points intérieurs.

Les propriétés 1°, 2°, 6°, sont des conséquences immédiates de la continuité de la distance; la propriété 3° résulte des deux premières; la propriété 4° est une conséquence directe de la définition des sphères; enfin 5° résulte de 2° et de ce que $s(a, \bar{\alpha})$ contient $s(a, \alpha)$.

13. Dans un espace tel que l'espace ordinaire à trois dimensions les relations (5) et (6) se réduisent à des égalités et l'on pourrait être tenté de croire qu'il en est de même pour les espaces métriques les plus généraux. Il n'en est rien et quelques exemples vont nous montrer combien il serait dangereux de se fier aux intuitions que pourraient suggérer les faits familiers de la géométrie euclidienne.

Avant de donner ces exemples, nous ferons une remarque, conséquence de l'hypothèse de connexité de l'espace.

Remarque. — *A moins que l'espace ne soit borné, on peut toujours, étant donnés un point a et un nombre positif α, trouver un point b tel que $ab = \alpha$*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, on aura alors

$$\sigma(a, \alpha) = 0, \qquad s(a, \alpha) = s(a, \bar{\alpha}).$$

Il n'y aura donc qu'une sphère de centre a et de rayon α et elle sera à la fois ouverte et fermée. Appelons S le complémentaire de cette sphère. Ce sera aussi un ensemble fermé et ouvert. Ainsi $\mathfrak{X}$ se trouverait décomposé en deux ensembles fermés sans points communs à moins que S ne soit vide [puisque $s(a, \alpha)$ contient au moins le point a], c'est-à-dire $\mathfrak{X}$ confondu avec $s(a, \alpha)$ et par conséquent borné. Dans ce cas d'ailleurs il existera un nombre α_0 tel que $\sigma(a, \alpha)$ existe pour $\alpha < \alpha_0$ et n'existe pas pour $\alpha > \alpha_0$. [Si l'espace est compact $\sigma(a, \alpha)$ existe certainement aussi pour $\alpha = \alpha_0$.]

Cette remarque constitue en somme dans un espace connexe, non borné, un théorème d'existence de la périsphère de centre a et de rayon α, quels que soient a et α.

Pour les sphères un tel théorème serait inutile; la sphère ouverte ou fermée de centre a et de rayon α ne peut être un ensemble vide puisqu'elle contient au moins le point a.

II. — Singularités des sphères.

14. Les exemples qui vont suivre sont destinés à montrer que les sphères, au sens très général où elles viennent d'être définies, sont loin de posséder, parmi les propriétés des sphères ordinaires, celles qui paraissent les plus intuitives. Voici le principe commun de formation de ces exemples :

Soit, dans l'espace ordinaire à trois dimensions E_3 une surface S. Nous appellerons distance de deux points de cette surface la longueur du segment de droite qui les joint. Nous pourrons considérer une telle surface ainsi distanciée comme un nouvel espace métrique Σ. La distance que nous avons définie satisfait bien évidemment aux axiomes I-IV, car Σ est un sous-espace de E_3 (¹). Remarquons que tout sous-ensemble borné de Σ est compact en soi.

15. Exemple I (²). — Nous prendrons comme surface et nous désignerons par S_1 celle formée par les faces P et Q d'un dièdre aigu d'arête Δ. L'espace obtenu à partir de ce dièdre sera désigné par Σ_1.

Soit A un point de P, H sa projection sur Q, a sa projection sur Δ; nous posons

$$AH = h,$$
$$Aa = l.$$

Étudions dans Σ_1 les sphères de centre A; plusieurs cas sont à distinguer :

Tant que le rayon α de la sphère reste inférieur à h, la sphère ouverte et la sphère fermée se réduisent respectivement aux cercles ouvert et fermé $C_P(A, \alpha)$ et $C_P(A, \overline{\alpha})$ de centre A et de rayon α, tracés dans le plan P.

Lorsque

$$\alpha = h,$$

(¹) On peut évidemment prendre au lieu d'une surface un ensemble quelconque, l'espace que l'on obtient alors est compact à condition que cet ensemble soit borné et fermé.

(²) Dans ma Note *Sur la notion de distance* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1646) j'avais cité un exemple analogue constitué par la surface d'une lentille biconvexe. Celui-ci est plus simple et présente en outre l'intérêt de n'être pas borné.

la sphère ouverte $s(A, h)$ est encore constituée par le cercle ouvert $C_P(A, h)$, mais la sphère fermée $s(A, \bar{h})$, outre le cercle $C_P(A, \bar{h})$, contient le point isolé H. On n'a donc pas ici $s(A, \bar{h}) = \overline{s(A, h)}$. De plus, la sphère $s(A, \bar{h})$ *n'est pas connexe*. Cette dernière anomalie se produit d'ailleurs pour l'une et l'autre sphère tant que l'on a $h < \alpha < l$. Chacune des sphères se compose de deux cercles séparés l'un dans P, l'autre dans Q [1]. Enfin lorsque $\alpha > l$, les deux sphères sont redevenues connexes.

Une remarque encore :

Supposons

$$h < \alpha < l$$

et soit h' la plus petite distance d'un point de $C_Q(H, \sqrt{\alpha^2 - h^2})$ au plan P. On peut évidemment choisir α assez voisin de h pour que

$$\sqrt{\alpha^2 - h^2} < h'.$$

Alors, étant donné un point quelconque de $C_Q(H, \sqrt{\alpha^2 - h^2})$ il est impossible de trouver une sphère contenant ce point, contenue dans $s(A, \alpha)$ et dont le rayon soit compris entre $\sqrt{\alpha^2 - h^2}$ et h'. En d'autres termes il existe des nombres $\beta < \alpha$ et dans $s(A, \alpha)$ des points, tels qu'on ne puisse les enfermer dans une sphère de rayon β intérieure à $s(A, \alpha)$.

16. Exemple II. — Nous prendrons comme surface S_2 la surface de révolution dont la méridienne comprend :

1° Le segment OA coupant l'axe Δ à angle droit en O;

2° Un arc de cercle AB moindre que $\frac{\pi}{2}$ de centre O;

3° La demi-droite BX qui prolonge OB.

Dans l'espace Σ_2 ainsi formé, étudions les sphères de centre O. Rien d'anormal ne se produit tant que α n'atteint pas la longueur a de OA, ou lorsque α a dépassé cette valeur. Par contre, considérons $s(O, a)$ et $s(O, \bar{a})$. La première de ces sphères est formée du cercle ouvert

[1] Les centres de ces cercles sont respectivement A et H et leurs rayons α et $\sqrt{\alpha^2 - h^2}$.

engendré par OA; la seconde contient, outre ce cercle, toute la zone sphérique Z (cercles limites compris) engendrée par l'arc AB. Ici, non seulement $s(O, \overline{a})$ n'est pas la fermeture de $s(O, a)$, mais encore, la

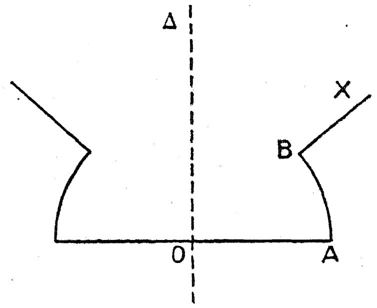


Fig. 2.

périsphère $\sigma(O, a)$ étant formée par la zone Z contient des points intérieurs. Ce n'est donc pas un ensemble frontière; encore moins sera-t-elle la frontière de l'une ou l'autre sphère, ces sphères étant l'une un ensemble ouvert, l'autre un ensemble fermé [1].

17. Exemple III. — Prenons pour surface S_3 la surface de révolution formée d'un cylindre illimité dans un sens et se raccordant à une demi-sphère de même rayon. Soit A un point du cylindre, O le centre de la demi-sphère, B le point où OA coupe cette demi-sphère. On voit immédiatement que AB constitue un maximum relatif pour la distance du point A à un point variable de l'espace Σ_3. Ainsi la sphère $s(A, \alpha)$, où α est inférieur à AB d'une quantité assez petite, laissera à son extérieur, d'une part un petit cercle contenant B, d'autre part une portion de cylindre s'étendant à l'infini. En d'autres termes, c'est ici le complémentaire de la sphère $s(A, \alpha)$ qui n'est pas connexe. Pour $\alpha_0 = AB$, $\sigma(A, \alpha_0)$ se compose d'une certaine courbe et du point isolé B. Ce dernier n'est pas point frontière de $s(A, \overline{\alpha}_0)$. $\sigma(A, \alpha_0)$ ne coïncide donc pas avec la frontière de $s(A, \overline{\alpha}_0)$.

On voit en outre que $s(A, \alpha_0)$ ne coïncide pas avec l'intérieur de $s(A, \overline{\alpha}_0)$, mais possède en moins le point B.

[1] La frontière d'un ensemble ouvert ou fermé est toujours un ensemble frontière.

18. Les exemples précédents montrent que l'on peut effectivement définir des espaces simples appartenant à une classe d'espaces relati-

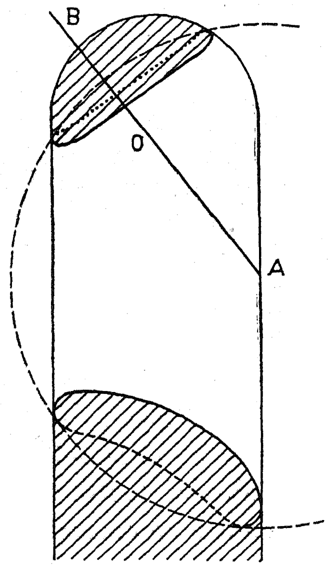


Fig. 3.

vement restreinte [1] dans lesquels sont en défaut l'une ou l'autre des propriétés suivantes, propriétés que l'on serait assez tenté de regarder comme évidentes.

F_1. Toute sphère fermée coïncide avec la fermeture de la sphère ouverte correspondante.

F_2. La frontière de toute sphère ouverte coïncide avec la périsphère correspondante.

I_1. Toute sphère ouverte coïncide avec l'intérieur de la sphère fermée correspondante.

I_2. La frontière de toute sphère fermée coïncide avec la périsphère correspondante.

P. Les périsphères sont des ensembles frontières.

C_1. Les sphères sont des ensembles connexes.

---

[1] Ces espaces sont en effet des espaces dans lesquels tout ensemble borné et fermé est compact et se rapprochent par cette propriété des espaces euclidiens. Nous dirons en abrégé qu'ils sont *compacts à distance finie*.

C_2. Les complémentaires de sphères sont des ensembles connexes ([1]).

D. Étant donnés une sphère S de rayon α, un point quelconque A intérieur à S et un nombre quelconque β inférieur à α, il existe une sphère de rayon β contenue dans S et contenant A ([2]).

Nous énoncerons encore les deux propriétés suivantes, vraies dans un espace euclidien et en défaut dans les espaces que nous avons formés :

R_1. Toute sphère fermée est un ensemble régulier.

R_2. Toute sphère ouverte est un ensemble régulier.

Nous verrons dans ce qui va suivre, que toutes ces propriétés sont étroitement liées à deux hypothèses supplémentaires que nous appellerons *hypothèses de régularité* de la distance et dont la première n'est autre que l'hypothèse de *quasi-convexité* de ma Note citée.

19. Les différentes propriétés que nous venons d'énoncer ne sont pas indépendantes. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Les propriétés* F_1 (*coïncidence de la sphère fermée avec la fermeture de la sphère ouverte*) *et* F_2 (*coïncidence de la périsphère avec la frontière de la sphère ouverte*) *sont équivalentes.*

DÉMONSTRATION. — $s(a, \alpha)$ étant un ensemble ouvert, ses points frontières sont, comme on le voit aisément caractérisés, par les relations

$$m \text{ non } \varepsilon\ s(a, \alpha), \tag{1}$$

$$m\ \varepsilon\ s'(a, \alpha) \quad ([3]); \tag{2}$$

de plus, ils appartiennent nécessairement à $\sigma(a, \alpha)$. Pour que $\sigma(a, \alpha)$

([1]) L'absence des propriétés I_1, I_2, C_2 apparaît dans une certaine mesure comme moins choquante que celle des autres. Elle peut en effet se produire même dans un espace euclidien (E_3 par exemple) lorsque, au lieu de se borner à des sphères ordinaires on envisage des sphères généralisées, par exemple si l'on considère une sphère généralisée ayant pour « centre » la surface d'une sphère ordinaire.

([2]) Dans un espace euclidien, cette propriété est vraie en prenant les mots contenu et contenant dans leur sens strict; c'est dans ce sens que nous les prendrons ici.

([3]) En désignant par $s'(a, \alpha)$ l'ensemble dérivé de $s(a, \alpha)$.

coïncide avec la frontière de $s(a, \alpha)$, il est donc nécessaire et suffisant que tout point de $\sigma(a, \alpha)$ satisfasse à la relation (2), car il satisfait déjà à la relation (1). En d'autres termes il faut et il suffit que l'on ait

$$\sigma(a, \alpha) \subset s'(a, \alpha)$$

ou

$$s(a, \bar{\alpha}) = s(a, \alpha) + \sigma(a, \alpha) \subset \overline{s(a, \alpha)},$$

ce qui, étant donné la propriété 5 des sphères, équivaut à

$$s(a, \bar{\alpha}) = \overline{s(a, \alpha)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Puisque ces conditions sont équivalentes, nous dirons si elles sont remplies, que l'espace possède la propriété F.

Théorème II. — *Les propriétés* I_1 (*coïncidence de la sphère ouverte avec l'intérieur de la sphère fermée*) *et* I_2 (*coïncidence de la périsphère avec la frontière de la sphère fermée*) *sont équivalentes.*

Un point de la frontière de $s(a, \bar{\alpha})$ est caractérisé par les deux relations

$$(3) \qquad m \ \varepsilon \ s(a, \bar{\alpha}),$$

$$(4) \qquad m \text{ non } \varepsilon \text{ int. } s(a, \bar{\alpha}),$$

car $s(a, \bar{\alpha})$ est fermé. De plus, un tel point appartient nécessairement à $\sigma(a, \alpha)$. Dire que $\sigma(a, \alpha)$ coïncide avec la frontière de $s(a, \bar{\alpha})$ équivaut donc à dire que tous les points de $\sigma(a, \alpha)$ satisfont à (4), car ils satisfont nécessairement à (3). La propriété I_2 équivaut donc à la suivante :

$$(5) \qquad \sigma(a, \alpha).[\text{int. } s(a, \bar{\alpha})] = 0.$$

Comme l'on a

$$s(a, \alpha) \subset \text{int. } s(a, \bar{\alpha}) \subset s(a, \bar{\alpha}),$$

il vient

$$\begin{aligned} \text{int. } s(a, \bar{\alpha}) &= s(a, \bar{\alpha}).[\text{int. } s(a, \bar{\alpha})] \\ &= s(a, \alpha).[\text{int. } s(a, \bar{\alpha})] + \sigma(a, \alpha)[\text{int. } s(a, \bar{\alpha})], \end{aligned}$$

ce qui montre que la relation (5) équivaut à

$$s(a, \alpha) = \text{int. } s(a, \bar{\alpha}). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Comme plus haut, si ces conditions sont remplies, nous dirons que l'espace possède la propriété I.

THÉORÈME III. — *La propriété* F *entraîne* R_1.

Supposons que

$$\sigma(a, \alpha) = \text{front.}\, s(a, \alpha);$$

tout point de σ est alors limite de points de $s(a, \alpha)$, c'est-à-dire de points intérieurs à $s(a, \bar{\alpha})$. Tout point frontière de $s(a, \bar{\alpha})$ appartient à σ. On voit donc que l'ensemble fermé $s(a, \bar{\alpha})$ ne possède aucun point frontière extérieur. C'est un ensemble régulier.

La réciproque n'est pas vraie.

THÉORÈME IV. — *La propriété* I *entraîne* R_2.

Si l'on suppose

$$\sigma(a, \alpha) = \text{front.}\, s(a, \bar{\alpha}),$$

tout point de σ est limite de points du complémentaire de $s(a, \bar{\alpha})$, c'est-à-dire de points extérieurs à $s(a, \alpha)$. Tout point frontière de $s(a, \alpha)$ appartient nécessairement à σ. Il ne peut donc être point frontière extérieur. L'ensemble ouvert $s(a, \alpha)$ est donc régulier.

La réciproque n'est pas vraie.

La dualité définie dans le Chapitre précédent se poursuit ici et l'on voit F et R_1 y correspondre respectivement à I et R_2. Nous verrons plus loin que C_1 y correspond aussi à C_2 (avec quelques restrictions il est vrai).

CHAPITRE III.

LA QUASI-CONVEXITÉ.

I. — Différents types de convexité.

20. Une propriété importante des espaces euclidiens est la suivante :

PROPRIÉTÉ A. — *Deux sphères ouvertes, dont la somme des rayons* *dépasse si peu que ce soit, la distance des centres, ont au moins un point commun.*

On peut encore l'énoncer ainsi :

A'. *Quels que soient* α *et* α', *si* $ab < \alpha + \alpha'$, *il existe au moins un point* c *tel que*

$$ac < \alpha,$$
$$cb < \alpha'.$$

Sous cette forme, on peut la rapprocher de la condition de *convexité* de Menger (¹).

M. *Quels que soient les deux points* a *et* b, *il existe un point* c (interpoint) *tel que*

$$ac + bc = ab.$$

21. En général ces deux propriétés sont indépendantes, chacune pouvant être satisfaite sans que l'autre le soit. On trouvera dans ma Note « Sur la notion de distance » l'exemple d'un espace dans la métrique duquel intervient une sphère singulière et qui possède la propriété M sans posséder la propriété A. J'ai repris cet exemple avec plus de détails dans l'appendice du présent travail.

La liaison qui existe pourtant entre ces deux propriétés est donnée par le théorème suivant :

Si l'espace est compact en soi, les propriétés A *et* M *sont équivalentes* (²).

1° A *entraîne* M. — Soit le couple de points a, b avec $ab = \alpha$, et soit une infinité de nombres α_i inférieurs à α. D'après A, il existe un point m_i commun aux deux sphères $s(a, \alpha_i)$ et $s(b, \alpha - \alpha_i + \varepsilon_i)$, où ε_i est un nombre positif donné à l'avance et tendant vers o lorsque i augmente indéfiniment. L'espace étant supposé compact, ces points m_i

---

(¹) MENGER, *Ueber allgemeine Metrik* (*Math. Ann.*, 100, 1929, p. 76-163).

(²) M. N. Aronszajn a bien voulu me signaler qu'il a introduit dans sa Thèse de Varsovie (1930), les notions de *pleine-convexité* (vollkonvexität) et de *presque-convexité* (fastkonvexität). La première de ces notions correspond à l'existence pour tout couple de points, d'au moins un interpoint situé à une distance donnée quelconque (inférieure à la ont au moins un point d'accumulation μ. Soient r et r' les distances de ce point à a et à b; $r+r'$ est supérieur ou égal à α; en vertu de la continuité de la distance $r+r'$ ne peut surpasser α, puisque μ est limite de points pour lesquels cette somme ne surpasse α que d'une quantité variable et tendant vers o. Ainsi $r+r'$ est égal à α et μ est un interpoint. Si même on prend une suite α_i ayant comme seule valeur limite une valeur quelconque ρ, nécessairement inférieure à α, on obtient un interpoint situé à la distance ρ du point a [1].

2° M *entraîne* A. — M. Menger a montré que l'hypothèse de convexité entraînait, dans le cas où l'espace est compact, l'existence d'interpoints partageant la distance ab dans un rapport quelconque [2]. Soit alors $ab = \alpha$ et

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha + 2\varepsilon;$$

le point c qui partage ab dans le rapport $\frac{\alpha_1 - \varepsilon}{\alpha_2 - \varepsilon}$ appartient à la fois aux deux sphères $s(a, \alpha_1)$ et $s(b, \alpha_2)$, ce qui prouve que la propriété A a lieu.

Aucun des espaces étudiés au Chapitre précédent ne possède ces

---

distance des deux points) de l'un quelconque de ces points. La deuxième est, sous une forme un peu différente, entièrement équivalente à la propriété A. M. Aronszajn avait, démontré l'équivalence de la convexité, de la pleine-convexité et de la presque-convexité dans le cas où l'espace est compact. Sa thèse n'ayant pas été imprimée, je conserve ici en accord avec lui, ma démonstration rédigée avant que j'aie eu connaissance de ses travaux.

Dans le même ordre d'idées, on doit à M. Aronszajn le résultat suivant :

Dans un espace complet, la convexité entraîne la presque-convexité, mais la réciproque n'est pas vraie, comme le montre l'exemple suivant :

Soit l'espace formé des segments qui joignent, dans un plan cartésien, les points A(1,0) et B(—1,0) aux points $C_n\left(0, \frac{1}{n}\right)$, le segment AB étant exclu; on définira la distance entre deux points de cet espace comme la borne inférieure des longueurs euclidiennes des chemins unissant ces deux points dans l'espace. Une telle métrique est bien une métrique de M. Fréchet. L'espace ainsi défini est complet mais non compact; enfin il est presque-convexe comme on le voit aisément. Il n'est cependant pas convexe, puisqu'il n'existe aucun interpoint entre A et B.

(1) Pleine-convexité.

(2) Menger, *loc. cit.*, p. 80. Cette expression se comprend d'elle-même; c'est une autre façon d'énoncer la pleine-convexité.

propriétés. D'ailleurs, comme ils sont tous compacts à distance finie, s'ils possédaient l'une d'elles, ils posséderaient les autres.

II. — La quasi-convexité.

22. La propriété M exprime l'existence pour tout couple a, b d'un interpoint *qui peut être unique;* la propriété A n'exprime que l'existence de ce qu'on pourrait appeler des interpoints approximatifs et à ce point de vue est plus faible que M. Mais ici il y a de ces interpoints à toute distance (inférieure à ab) de chacun des composants du couple.

On verrait très aisément que cette propriété A est suffisante pour entraîner la propriété F_1 (et par conséquent F) du Chapitre précédent, mais elle n'est nullement nécessaire.

Il suffit en effet, comme nous allons le voir, d'assurer l'existence des interpoints approximatifs *au voisinage* des points a et b. La nouvelle propriété ainsi définie est évidemment plus faible que A : c'est elle que nous appellerons la *quasi-convexité* (1).

23. Étant donnés deux points a et b distants de α, nous dirons que l'espace *est quasi convexe en b relativement à a*, si, étant donné un nombre positif δ, on peut lui faire correspondre un autre nombre positif ε de telle façon que les sphères ouvertes $s(a, \alpha - \varepsilon)$ et $s(b, \delta)$ aient au moins un point commun c, et ceci aussi petit que soit δ (2).

L'application aux points a, b, c, de l'inégalité triangulaire montre que ε est au plus égal à δ. Lorsque a, b, δ sont donnés, les nombres ε ont une borne supérieure qui dépend de ces trois éléments et qui est

---

(1) *Voir* ma Note, *Sur la notion de distance* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1546). Étant donné le caractère de la restriction apportée à la propriété A j'avais cru devoir nommer cette propriété « quasi-convexité locale » ; j'ai reconnu que le caractère local de cette définition n'était qu'apparent. La quasi-convexité est en effet une propriété de la distance et des couples de point dont la distance est finie, et ce n'est pas lui attribuer un caractère local que de faire intervenir dans sa définition les points voisins des éléments qui constituent le couple.

(2) Il est à remarquer que, si l'on a pu faire correspondre comme il est dit un nombre ε à une valeur δ_0 de δ, ce nombre ε correspond aussi à toute valeur de δ supérieure à δ_0 ; en effet $s(a, \alpha - \varepsilon)$ aura certainement des points communs avec $s(b, \delta)$ si elle en a avec $s(b, \delta_0)$, puisque si $\delta > \delta_0$, $s(b, \delta)$ contient $s(b, \delta_0)$.

au plus égale à δ. C'est cette borne que nous désignerons par $\varepsilon(\delta, a, b)$ et que nous appellerons le *module de quasi-convexité en b relativement à a*. Cette borne peut d'ailleurs être atteinte ou non suivant le cas. Ainsi les espaces presque convexes sont caractérisés par le fait que la borne y est égale à δ mais n'est pas atteinte, tandis qu'elle est aussi égale à δ mais se trouve atteinte dans les espaces pleinement convexes.

La condition de quasi-convexité peut être interprétée de la manière suivante : supposons qu'elle soit réalisée et prenons une suite de nombre δ_i tendant vers o. Il lui correspond une suite de points c_i ayant b comme point limite, et dont les distances à a sont respectivement inférieures à des nombres $\alpha - \varepsilon_i$ tendant vers α par valeurs *inférieures*. Le point b peut donc être considéré comme point limite de points de $s(a, \alpha)$. Réciproquement si b est limite de points de $s(a, \alpha)$, l'espace est évidemment quasi convexe en b relativement à a.

Si un espace est quasi convexe en un point b relativement à tous ses autres points, nous dirons qu'il est *quasi convexe au point b*. Enfin un espace quasi convexe en chacun de ses points sera dit *quasi convexe*.

Il est suffisamment clair d'après ce qui précède que :

Il y a équivalence entre la notion d'espace quasi convexe et celle d'espace possédant la propriété F_1 (§ 18).

En d'autres termes :

La quasi-convexité est la condition nécessaire et suffisante pour que :

1° *Toute sphère ouverte ait pour fermeture la sphère fermée correspondante;*

2° *Toute sphère ouverte ait pour frontière la périsphère correspondante.*

24. Aucun des espaces étudiés au précédent Chapitre n'est quasi convexe. Au contraire l'espace Σ_0 obtenu par le même procédé de formation en prenant comme surface-support la surface d'une sphère est quasi convexe comme on peut le voir aisément. Il est d'ailleurs facile d'imaginer un espace quasi convexe, formé lui aussi d'après le même procédé et homéomorphe à Σ_0. On prendra par exemple comme support la surface d'une lentille sphérique biconvexe, chacune des faces étant moindre qu'une demi-sphère. La possibilité d'une telle

homéomorphie prouve que la quasi-convexité n'est *pas une propriété topologique* des espaces auxquels elle appartient.

25. La quasi-convexité est évidemment plus faible que la presque-convexité et *a fortiori* que la pleine convexité de M. Aronszajn, mais pas que la convexité de M. Menger comme on pourrait le croire d'après la terminologie. On trouvera dans ma Note citée un exemple d'espace convexe et non quasi convexe. On peut s'attendre à ce qu'un tel espace ne soit pas compact car sinon la convexité entraînerait comme on l'a vu la presque-convexité et par conséquent la quasi-convexité. (*Voir* en appendice une étude plus détaillée de cet espace.)

26. **Quasi-convexité uniforme.** — Nous dirons qu'un espace quasi convexe l'est *uniformément*, si pour tout nombre δ donné et pour l'ensemble des couples des points a, b distants de plus de δ, les nombres $\varepsilon(\delta, a, b)$ ont une borne inférieure $\varepsilon(\delta)$ non nulle. Cette borne sera appelée : *module de quasi-convexité de l'espace*. Il est clair que l'on pourra l'utiliser comme module pour n'importe quel point relativement à n'importe quel autre point distant de plus de δ [1].

Théorème I. — *Dans un espace compact en soi, la quasi-convexité, si elle existe, ne peut être qu'uniforme.*

S'il n'en était pas ainsi, il existerait un nombre δ, et une double suite de point a_i, b_i, tels que l'on ait simultanément

$$a_i b_i > \delta \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(\delta, a_i, b_i) < \frac{1}{i}.$$

L'espace étant supposé compact, la suite des a_i possède au moins un point d'accumulation a, et la suite des b_i au moins un point d'accumulation b et nous pourrons, sans diminuer la généralité admettre que ce sont les suites a_i et b_i elles-mêmes qui tendent vers ces points.

La continuité de la distance entraîne

$$ab \geqq \delta.$$

L'espace étant quasi convexe, nous pouvons déterminer un point c

(1) Les espaces euclidiens et plus généralement les espaces qui satisfont à la condition A sont uniformément quasi convexes avec pour module δ lui-même.

tel que

$$(1) \qquad \begin{cases} bc < \dfrac{\delta}{2}, \\ ac < ab - \varepsilon\left(\dfrac{\delta}{2}, a, b\right). \end{cases}$$

Choisissons d'autre part i assez grand pour que soient réalisées simultanément les trois conditions suivantes :

$$(2) \qquad \varepsilon(\delta, a_i, b_i) < \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right) \quad \text{[1]},$$

$$(3) \qquad b_i b < \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right) < \frac{\delta}{2},$$

$$(4) \qquad a_i a < \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right).$$

Il résulte de (1), (3), (4) et de l'inégalité triangulaire appliquée un certain nombre de fois que

$$\begin{aligned} b_i c &< b_i b + bc < \delta, \\ a_i c &< a_i a + ac < ab - \varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right) + a_i a \\ &\leqq a_i b_i + a_i a + b_i b - \varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right) + a_i a \\ &< a_i b_i + \frac{3}{4}\varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right) - \varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right) = a_i b_i - \frac{1}{4}\varepsilon\left(\frac{\delta}{2}, a, b\right). \end{aligned}$$

L'ensemble de ces deux inégalités est contradictoire avec (2) et le théorème se trouve démontré. Il résulte de là que

THÉORÈME I *bis*. — *Dans tout ensemble borné d'un espace compact à distance finie, la quasi-convexité, si elle existe, ne peut être qu'uniforme.*

CHAPITRE IV.

LES DEUX CONDITIONS DE RÉGULARITÉ DE LA DISTANCE.

I. — Définitions.

27. A la définition par ε qui vient d'être donnée de la quasi-convexité, nous confronterons dans le présent Chapitre une définition

---

(1) On a vu que $\varepsilon(\alpha, a, b) \leqq \alpha$.

dont le caractère plus qualitatif permet des extensions nouvelles et une étude plus aisée de certains problèmes.

Soit a un point fixe et x un point variable. Lorsque x décrit l'espace $\mathfrak{X}$, la distance ax est une fonction de x définie et continue pour toute position du point argument. Dire que l'espace est quasi convexe en b relativement à a, c'est dire que dans tout voisinage de b existent des points dont la distance à a est inférieure à ab, c'est dire encore que la distance ax n'a pas au point b un minimum au sens large (1).

Dire que l'espace est quasi convexe en a, c'est donc dire que ax ne possède aucun minimum large. Nous sommes ainsi conduits à la définition suivante :

DÉFINITION I. — *$\mathfrak{X}$ est dit quasi convexe si, quel que soit le point a, la distance ax ne possède aucun minimum même au sens large.*

Il peut être utile d'énoncer cette définition sous la forme négative suivante :

DÉFINITION I'. — *Pour qu'un espace ne soit pas quasi convexe, il faut et il suffit qu'il existe deux points a et b tels que ax ait un minimum large au point b.*

Ce qui précède suggère immédiatement la définition d'une propriété moins restrictive que nous appellerons *la quasi-convexité faible* par opposition à la quasi-convexité étudiée jusqu'ici qui prendra dorénavant le nom de *quasi-convexité forte* (2).

DÉFINITION II. — *Un espace sera dit faiblement quasi convexe si, quel que soit le point a, la distance ax ne possède aucun minimum étroit.*

Ce qu'on peut encore énoncer :

DÉFINITION II'. — *Pour qu'un espace ne possède pas la faible quasi-con-*

---

(1) Je dirai qu'une fonction $f(x)$ possède en x_0 un minimum au sens étroit si pour tout point voisin de x_0, on a $f(x) > f(x_0)$ et un minimum au sens large si pour tout point voisin on a $f(x) \geqq f(x_0)$. Il s'agit bien entendu de minimums relatifs autres que le minimum o atteint au point a.

(2) Quasi-convexité tout court restant toujours synonyme de quasi-convexité forte.

vexité, il faut et il suffit qu'il existe deux points a et b tels que ax ait un minimum étroit au point b.

Nous dirons encore d'un espace fortement (faiblement) quasi convexe que la *distance y satisfait à la première condition forte (faible) de régularité*.

Il est naturel enfin pour les espaces non bornés de définir de façon semblable, mais en remplaçant le mot de minimum par celui de maximum, une *deuxième condition* (forte ou faible suivant qu'il s'agit de maximum étroit ou de maximum large) *de régularité de la distance*. Enfin un espace sera dit *à distance régulière* (ou fortement régulière) si les deux conditions fortes s'y trouvent satisfaites simultanément; il sera *à distance faiblement régulière* si les deux conditions faibles sont remplies simultanément.

Les espaces euclidiens à un nombre quelconque de dimensions, l'espace de Hilbert et plus généralement les espaces vectoriels, sont des espaces à distance régulière.

II. — La première condition de régularité.

28. Voici maintenant une série de théorèmes relatifs à la quasi-convexité.

THÉORÈME I. — *Dans un espace fortement quasi convexe, la plus courte distance d'un point a aux points d'un ensemble Δ ne contenant pas a, ne peut être atteinte qu'en des points de la frontière de cet ensemble.*

Soit, en effet, un point b intérieur à Δ, ce point peut être entouré d'un voisinage V formé de points de Δ; si la plus courte distance de a aux points de l'ensemble y était atteinte, cela signifierait que la distance de a aux points de V serait au moins égale à ab. Le point b serait alors un minimum large de ax ce qui est contraire à l'hypothèse.

29. Ce théorème préliminaire va nous permettre d'étudier les rapports entre la quasi-convexité et la propriété C_1 du Chapitre sur les sphères :

THÉORÈME II. — *Pour que toutes les sphères de l'espace soient connexes,* *il suffit que l'espace possède la quasi-convexité forte, il faut qu'il possède la quasi-convexité faible.*

Première partie. — Supposons donc qu'il existe un point a et un nombre α tels que la sphère $s(a, \overline{\alpha})$ ne soit pas connexe. On pourra donc la décomposer en deux ensembles fermés disjoints A et B. L'un de ces ensembles, soit A, contient le point a.

En tout point x de B, on a $ax \leqq \alpha$. Posons $C = \mathfrak{X} - A - B$. En tout point de C, on a $ax > \alpha$. En vertu de la continuité de la distance, on aura donc en tout point frontière de B, $ax = \alpha$.

La distance de a aux points de B possède donc un minimum β au plus égal à α.

Si $\beta < \alpha$, ce minimum ne peut, d'après ce qui précède, être atteint qu'en un point intérieur de B et ceci est incompatible nous l'avons vu avec la quasi-convexité forte.

Si $\beta = \alpha$, c'est que, pour tout point de B, on a $ax = \alpha$; comme au voisinage d'un point de B ne se trouvent que des points de B ou de C, pour lesquels $ax \geqq \alpha$, tout point de B serait alors un minimum large pour ax.

L'existence d'une sphère *fermée* non connexe est donc incompatible avec celle de la quasi-convexité forte. Prenons maintenant une sphère ouverte; sa fermeture est une sphère fermée (la quasi-convexité forte est, rappelons-le, la quasi-convexité du Chapitre précédent), donc un ensemble connexe (et même un continu). La sphère ouverte considérée est donc aussi un ensemble connexe. La quasi-convexité forte entraîne donc bien la connexité de toutes les sphères.

C. Q. F. D.

Deuxième partie. — Supposons qu'il n'y ait pas quasi-convexité faible. Il existe donc deux points a et b tels que ax ait un minimum étroit α lorsque x est en b. Il existe donc un nombre non nul β tel que

$$bx < \beta, \qquad x \neq b$$

entraînent

$$ax > \alpha.$$

La distance entre b et le premier élément d'une chaîne dont tous les points appartiendraient à $s(a, \overline{\alpha})$ est donc au moins égale à β. On voit que cette sphère a un défaut d'enchaînement d'amplitude au moins égale à β entre b et un quelconque de ses points. Comme en dehors de b, elle contient au moins le point a, on voit qu'elle n'est pas connexe. C. Q. F. D.

30. Il semble même que si l'on augmente assez peu le rayon d'une telle sphère, on pourra obtenir encore une sphère non connexe composée de deux morceaux dont l'un contient a et l'autre b. C'est en effet ce qui arrive *à condition que l'espace soit compact à distance finie* et nous allons le montrer; cela nous conduira d'ailleurs à un résultat important relatif à la propriété D (§ 18). Si l'espace n'est pas compact, il peut ne pas en être ainsi : on en trouvera un exemple dans l'appendice.

Démonstration. — Nous montrerons que, sous cette hypothèse supplémentaire, on peut choisir ε assez petit pour que, ce choix fait, il soit possible de déterminer un autre nombre η tel que la « couronne »

$$\gamma_\varepsilon = s(b, \overline{2\varepsilon}) - s(b, \varepsilon)$$

ne contienne aucun point de la sphère $s(a, \alpha + \eta)$.

S'il en était autrement, on pourrait, quel que soit, ε déterminer une suite de nombres η_i tendant vers o, telle que γ_ε contienne au moins un point x_i de $s(a, \alpha + \eta_i)$. Nous avons supposé l'espace compact à distance finie. Il existerait donc au moins un point d'accumulation x_0 pour cette suite qui est évidemment bornée. Ce point appartiendrait d'ailleurs à γ_ε qui est un ensemble fermé (différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble ouvert). La distance ax_0 serait au plus égale à α puisque $ax_i < \alpha + \eta_i$. Ceci ayant lieu, nous l'avons dit, pour toute valeur de ε, il en résulterait que dans toute sphère suffisamment petite de centre b se trouverait au moins un point dont la distance à a serait au plus égale à α. Alors, contrairement à l'hypothèse, il n'y aurait pas au point b minimum étroit de la distance.

Soit donc choisi le nombre ε $\left(\text{que l'on pourra toujours supposer inférieur à } \frac{\alpha}{2}\right)$ et le nombre η correspondant. Considérons alors la sphère $s(a, \alpha + \eta)$. Elle contient évidemment a et b et ne contient aucun point de γ_ε. D'autre part a est extérieur à $s(b, \overline{2\varepsilon})$ et b est intérieur à $s(b, \varepsilon)$. La distance d'un point quelconque x de $s(b, \varepsilon)$ à un point quelconque y extérieur à $s(b, \overline{2\varepsilon})$ est au moins égale à ε puisque l'on a

$$xy \geqq yb - xb > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Il en résulte que a et b ne peuvent être joints par une chaîne de points distants de moins de ε sans que cette chaîne ne comporte au moins un point de γ_ε c'est-à-dire au moins un point étranger à $s(a, \alpha + \eta)$. Cette sphère n'est donc pas connexe puisqu'elle présente un défaut d'enchaînement d'amplitude au moins égale à ε.

C. Q. F. D.

Remarquons que tout cercle de rayon 2ε qui contient b contient aussi des points de γ_ε, c'est-à-dire, s'il n'y a pas quasi-convexité faible, des points étrangers à $s(a, \alpha + \eta)$; 2ε étant inférieur à $\alpha + \eta$, il en résulte que l'espace ne jouit pas de la propriété D (§ 18) [1]. Ainsi :

Théorème III. — *Pour qu'un espace compact à distance finie possède la propriété* D, *il faut qu'il soit faiblement quasi convexe.*

31. Il serait intéressant d'avoir une condition suffisante pour que la propriété D soit satisfaite. Contrairement à ce que l'on pourrait attendre, la *quasi-convexité forte* ne paraît être suffisante que sous réserve d'une uniformité d'un caractère particulier qui n'est pas celui du Chapitre précédent. La *presque convexité* est suffisante, mais ce n'est certainement pas la condition suffisante la plus large.

32. Je démontrerai enfin les théorèmes suivants :

Théorème IV. — *Pour que toute sphère fermée soit un ensemble régulier, il faut que l'espace possède la quasi-convexité faible, il suffit qu'il possède la quasi-convexité forte* [2].

---

[1] Je rappelle que cette propriété est la suivante :

Dans une sphère donnée de rayon R, on peut toujours placer une sphère de rayon donné inférieur à R, de manière à ce qu'elle contienne un point intérieur donné quelconque de la première sphère. C'est une des propriétés les plus intuitives des espaces euclidiens.

[2] De la comparaison des théorèmes II et IV, il ne faudrait pas conclure qu'il y a équivalence entre le fait que les sphères sont connexes et celui que les sphères fermées sont régulières.

1° S'il n'y a pas quasi-convexité faible, il existe deux points a et b tels que ax passe en b par un minimum strict $ab = \alpha$. Alors b n'est pas point limite de points de $s(a, \alpha)$. D'autre part, b est point frontière de $s(a, \overline{\alpha})$, puisque b appartient à cette sphère et que tous les points voisins de b appartiennent à son complémentaire. On voit que b est un point frontière extérieur de $s(a, \overline{\alpha})$ qui n'est donc pas un ensemble régulier.

2° Supposons que $s(a, \overline{\alpha})$ admette b comme point frontière extérieur. Le point b est donc limite de points de $\mathfrak{X} - s(a, \overline{\alpha})$ mais pas de points de $s(a, \alpha)$ [puisque cette dernière sphère appartient à l'intérieur de $s(a, \overline{\alpha})$]. Il n'existe donc au voisinage de b que des points dont la distance à a est au moins égale à α, en sorte que b étant un minimum large, il n'y a pas quasi-convexité forte.

III. — La deuxième condition de régularité.

33. Nous démontrerons tout d'abord le théorème suivant :

Théorème V. — *La deuxième condition forte de régularité entraîne la propriété* I.

Bornons-nous à démontrer qu'elle entraîne la propriété I_2 c'est-à-dire que toute sphère fermée a pour frontière la périsphère correspondante. Il suffit pour cela de voir que tout point de cette périsphère est point frontière; soit donc m un point de $\sigma(a, \alpha)$. En vertu de l'hypothèse faite, ce point est limite de points pour lesquels ax est supérieur à α, c'est-à-dire de points du complémentaire de $s(a, \overline{\alpha})$. D'autre part m appartient à $s(a, \overline{\alpha})$; ceci démontre notre affirmation [1].

On pourrait dire aussi que les périsphères coïncident avec les frontières de complémentaires de sphères fermées (que nous appellerons dorénavant les complémentaires ouverts). Sous ce rapport la deuxième condition de régularité entraîne pour les complémentaires ouverts les mêmes conséquences que la première pour les sphères ouvertes. On voit apparaître entre les deux conditions une dualité qui

[1] On pourrait comme au Chapitre précédent démontrer une réciproque en faisant intervenir des hypothèses complémentaires de continuité.

prolonge celle dont il a été question au Chapitre sur les frontières et qui va se poursuivre dans d'autres théorèmes. Des difficultés cependant vont se présenter du fait que, si les sphères sont des ensembles bornés, il n'en est pas de même en général des complémentaires et ceci restreindra l'intérêt de la deuxième condition de régularité. Cet intérêt est d'ailleurs encore diminué par le fait que, si l'on suppose l'espace borné, la deuxième condition forte n'est pas satisfaite, puisque la distance d'un point fixe à un point variable a certainement un maximum absolu.

34. A chaque théorème sur la première condition de régularité correspond un théorème relatif à la deuxième. Au théorème I correspond le théorème suivant qui se démontre exactement de la même façon :

Théorème VI. — *Si la deuxième condition forte est satisfaite, la plus grande distance d'un point à un ensemble borné est atteinte sur la frontière de l'ensemble.*

Comme corrélatif du théorème II nous aurons le suivant (mais il nécessite une hypothèse supplémentaire).

Théorème VII. — *Si l'on suppose que le complémentaire d'un ensemble borné contienne au plus un composant non borné* (1), *pour que la condition* C_2 *soit satisfaite, il faut que l'espace satisfasse à la deuxième condition faible, il suffit qu'il satisfasse à la deuxième condition forte.*

Rappelons que la condition C_2 exprime la connexité des complémentaires de sphères.

Première partie. — Supposons qu'il existe un point a et un nombre α tel que l'ensemble $\mathfrak{X} - s(a, \alpha)$ ne soit pas connexe. On pourra donc décomposer cet ensemble (fermé) en deux ensembles fermés disjoints M et N. D'après l'hypothèse supplémentaire que nous avons faite, l'un de ces deux ensembles, M par exemple, est borné.

---

(1) Cette hypothèse est satisfaite par exemple dans tous les espaces euclidiens, sauf l'espace à une dimension.

La distance de a aux points de l'ensemble a donc un maximum atteint (puisque M est fermé) en un point b de l'ensemble et ce maximum est au moins égal à α. Ce point devant être un point frontière, d'après le théorème VI, le maximum sera égal à α, ce qui entraîne que la distance de a à un point quelconque de M est égale à α. Un point quelconque de M fournit donc un maximum large de la distance, puisque les seuls points pour lesquels cette distance soit supérieure à α sont les points de N et que ces points ne peuvent s'accumuler au voisinage d'un point de M. L'espace ne possède donc pas la quasi-convexité forte. Celle-ci suffit donc bien à entraîner la connexité de tous les complémentaires de sphères ouvertes et par suite celle de tous les complémentaires de sphères fermées. La fermeture d'un complémentaire de sphère fermée est en effet un complémentaire de sphère ouverte d'après le théorème V.

Deuxième partie. — La démonstration est exactement analogue à la démonstration correspondante dans le théorème II. Si l'on suppose l'espace compact à distance finie, on pourra même démontrer exactement comme plus haut la possibilité (s'il n'y a pas la deuxième condition faible) de choisir ε puis η de telle façon que la sphère $s(a, \alpha - \eta)$ contienne entièrement la couronne γ_ε. Or b est dans le complémentaire de cette sphère, et il résulte de ce qui précède que le composant de ce complémentaire qui contient b est intérieur à $s(b, \varepsilon)$. Si donc l'espace est non borné le complémentaire est nécessairement non connexe. Si l'on suppose l'espace borné il peut se faire que le complémentaire soit constitué par ce seul composant auquel cas $s(a, \bar{\alpha})$ recouvre tout l'espace.

Le corrélatif du théorème III présente un intérêt assez faible. Il se démontre comme le théorème III et s'énonce :

Théorème VIII. — *Pour qu'un espace compact possède la propriété* D′, *il faut qu'il satisfasse à la deuxième condition faible.*

La propriété D′ consiste en ce que m étant un point quelconque du complémentaire d'une sphère S, il existe une sphère contenant m, ne contenant aucun point de S et ayant pour rayon un nombre donné quelconque.

Voici enfin le corrélatif du théorème IV :

THÉORÈME IX. — *Pour que tout complémentaire fermé ou, ce qui revient au même, pour que toute sphère ouverte soit un ensemble régulier, il faut que l'espace satisfasse à la deuxième condition faible, il suffit qu'il satisfasse à la deuxième condition forte.*

1° Si la deuxième condition faible n'est pas satisfaite, il existe deux points a et b tels que ax passe en b par un maximum strict α. Alors b n'est pas point limite de points du complémentaire de $s(a, \alpha)$. D'autre part b est point frontière de ce complémentaire, puisqu'il en fait partie. C'est donc un point frontière extérieur de ce complémentaire qui par conséquent n'est pas régulier.

2° Si $s(a, \alpha)$ admet un point b comme point frontière intérieur cela signifie que :

a. $ab = \alpha$;

b. Un point x voisin de b ne peut appartenir à l'extérieur de $s(a, \alpha)$ et appartient donc à sa fermeture; on a par conséquent $ax \leqq \alpha$. Il y a donc en b un maximum large de ax. C. Q. F. D.

35. Pour terminer, nous énoncerons le théorème suivant qui résulte immédiatement de ce qui précède :

THÉORÈME X. — *Dans un espace à distance fortement régulière les propriétés* F, I, C_1, D *sont remplies, les sphères fermées ou ouvertes sont des ensembles réguliers, enfin, sous la restriction énoncée plus haut, la propriété* C_2 *est remplie.*

Si les propriétés F *et* I, *ou* C_1 *et* C_2 *sont remplies, ou si toutes les sphères sont des ensembles réguliers, c'est que l'espace est à distance faiblement régulière.*

CHAPITRE V.

LES SPHÈRES GÉNÉRALISÉES.

I. — Distance d'un point à un ensemble.

36. C'est, par définition, la borne inférieure des distances de ce point à tous les points de l'ensemble. Je désignerai par $d(E, a)$ ou $d(a, E)$, la distance du point a à l'ensemble E.

Cette distance est nulle lorsque a appartient à $\overline{E}$ et seulement dans ce cas. Lorsque l'ensemble reste fixe, la distance est fonction continue de la position du point. Cela résulte sans autre hypothèse de l'inégalité triangulaire, à laquelle satisfait la distance (¹)

Si $d(E, a) = \alpha$, il existe dans E, d'après la définition précédente, une suite de points $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$ tels que la distance am_i tende vers α. Cette suite admet lorsque l'espace est *compact*, au moins un point d'accumulation m, qui n'appartient obligatoirement à E que si cet ensemble est *fermé*. On a évidemment

$$am = \alpha.$$

II. — Sphères généralisées.

37. Étant donnés un nombre positif α et un ensemble *borné* quelconque E, nous considérerons les ensembles suivants :

1° E_α ou $s(E, \alpha)$: *Sphère généralisée ouverte de centre* E *et de rayon* α. — C'est l'ensemble des points dont la distance à E est inférieure à α. Les sphères ouvertes ordinaires peuvent être considérées comme des sphères généralisées dont l'ensemble centre se réduit à un point. Pour simplifier, tout en marquant la différence entre les sphères étudiées jusqu'ici et les sphères généralisées, nous réserverons à ces dernières le nom de « sphéroïdes » dans ce qui suit.

Enfin nous appellerons *opération sphérique ouverte* de rayon α, l'opération qui fait passer d'un ensemble E à l'ensemble E_α et *construction sphérique ouverte* toute construction permettant d'*effectuer* ce passage.

2° $E_{\overline{\alpha}}$ ou $s(E, \overline{\alpha})$: *Sphère généralisée fermée ou sphéroïde fermé de centre* E *et de rayon* α. — C'est l'ensemble des points dont la distance à E est au plus égale à α. Nous appellerons *opération sphérique fermée* de rayon α, l'opération qui fait passer de E à $E_{\overline{\alpha}}$.

3° La *réunion des sphères ordinaires ouvertes* de rayon α centrées sur les points de E. Il est inutile d'employer une notation spéciale pour

(¹) *Voir* par exemple Hausdorff, *Mengenlehre* p. 111.

cet ensemble car il coïncide toujours avec E_α. Cette remarque fournit une *construction sphérique ouverte* [1].

4° $E_{(\alpha)}$: *Réunion des sphères fermées* de rayon α, centrées sur les points de E. Cet ensemble en général ne coïncide pas avec la sphère fermée $E_{\bar{\alpha}}$. Il n'existe pas une construction sphérique fermée analogue à la construction C.-M.

Il résulte immédiatement des définitions que

$$E_\alpha \subset E_{(\alpha)} \subseteq E_{\bar{\alpha}}$$

et que si $\beta > \alpha$, pour un ensemble donné E, les trois ensembles que l'on vient de définir avec un rayon α sont contenus dans chacun des trois ensembles analogues de rayon β.

$$E_\alpha \subset E_{(\alpha)} \subseteq E_{\bar{\alpha}} \subset E_\beta \subset E_{(\beta)} \subseteq E_{\bar{\beta}}.$$

Remarque. — Il est impossible qu'un ensemble F tel que

$$E_\alpha \subset F \subset E_{\bar{\alpha}}$$

soit un sphéroïde de centre E. Son rayon devrait être différent de α, ce qui serait absurde d'après la remarque précédente.

Enfin nous avons supposé et nous supposerons essentiellement dans tout ce qui suit que les centres des sphéroïdes que nous étudions sont des ensembles bornés, en sorte que *tout sphéroïde de rayon fini est lui-même un ensemble borné.*

38. **Cas particuliers.** — La définition précédente des sphères fermées conserve un sens même lorsque α est nul; c'est l'ensemble des points dont la distance à E est nulle, c'est-à-dire la fermeture de E. On conviendra donc de la notation suivante :

$$E_{\bar{0}} = \bar{E}.$$

Comme il n'existe aucun point dont la distance à E soit négative, il

---

(1) C'est ce que M. G. Bouligand appelle la *construction C.-M.* (Cantor-Minkowski). Les ensembles C.-M. de l'espace euclidien ont été étudiés d'une manière très approfondie par M. Bouligand et ses élèves. *Voir* notamment : G. Bouligand, *Géométrie infinitésimale directe* (*G. I. D.*) Vuibert, 1932; G. Durand, *Sur une généralisation des surfaces convexes* (*Thèse*, Paris, 1931); L. Chamard (*Thèse*, Poitiers, 1933).

faudra convenir que

$$E_0 = o.$$

Que l'espace soit borné ou non, il sera naturel d'appeler sphère de rayon infini l'espace lui-même, cette sphère étant considérée à la fois comme ouverte et fermée

$$E_\infty = E_{\overline{\infty}} = \mathfrak{X},$$

quel que soit E.

Enfin, toujours en restant dans dans le cadre de la définition générale, on posera si $\mathfrak{X}$ est borné,

$$\mathfrak{X}_{\overline{0}} = \mathfrak{X}_\alpha = \mathfrak{X}_{\overline{\alpha}} = \mathfrak{X}.$$

39. Les sphères généralisées jouissent des propriétés suivantes :

a. E_α est un ensemble ouvert; $E_{\overline{\alpha}}$ un ensemble fermé.

b. Si $E \subseteq F$, on a $E_\alpha \subseteq F_\alpha$ et $E_{\overline{\alpha}} \subseteq F_{\overline{\alpha}}$.

c. $\overline{E}_\alpha \subseteq E_{\overline{\alpha}}$.

d. 1. A tout point de E_α correspond au moins un point de E qui en est distant de moins de α;

2. A tout point de $E_{\overline{\alpha}}$ et à tout nombre positif ε correspond au moins un point de E qui en est distant de moins de $\alpha + \varepsilon$.

e. On ne change pas un sphéroïde fermé ou ouvert en remplaçant son centre par un ensemble de même fermeture

$$E_\alpha = (\overline{E})_\alpha, \qquad E_{\overline{\alpha}} = (\overline{E})_{\overline{\alpha}}.$$

On peut donc toujours, sans diminuer la généralité, supposer que le centre E est un ensemble fermé.

Les propriétés *b*, d_2, résultent immédiatement des définitions. Les propriétés *a*, *c*, d_1, *e* sont classiques (1).

Lorsque l'espace est *compact à distance finie*, la propriété d_2 devient :

d'_2. A tout point de $E_{\overline{\alpha}}$ correspond au moins un point de E qui en est distant de α au plus.

(1) Voir par exemple : Kuratowski, *Topologie I*, Varsovie 1934, p. 34.

Autrement dit, on a dans ce cas

$$E_{\bar{\alpha}} = E_{(\alpha)}.$$

40. Soit E un ensemble fermé. Considérons la famille des sphéroïdes ouverts ou fermés ayant E pour centre. Il est clair que tout point de E appartient à chacun des ensembles de cette famille. Je dis que réciproquement tout point appartenant à chacun des ensembles de la famille, appartient à E.

Soit en effet un point m appartenant à tous les ensembles de cette famille. Donnons-nous une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de nombres positifs tendant vers zéro. Le point m appartient à E_{α_n} quel que soit n; on pourra donc trouver dans E une suite

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_n, \quad \ldots$$

de points tels que

$$M_n m < \alpha_n;$$

ceci prouve que les M_n ont m pour point limite et, puisque E est fermé, que m appartient à E.

Nous avons raisonné avec des sphères ouvertes, mais il est évident d'après la fin du paragraphe 37, qu'il y a identité entre l'ensemble des points communs à toutes les sphères ouvertes centrées sur E et l'ensemble des points communs à toutes les sphères fermées centrées sur E.

Le résultat trouvé peut s'énoncer de la manière suivante :

Tout ensemble fermé coïncide avec l'intersection de toutes les sphères qui admettent cet ensemble pour centre.

Il est remarquable que la seule hypothèse faite sur l'espace est qu'il soit *métrique*.

41. L'exemple des sphères ordinaires nous a montré que la fermeture d'une sphère ouverte ne coïncide pas toujours avec la sphère fermée de même centre et de même rayon et nous fait prévoir l'importance de la quasi-convexité dans cette question. C'est ce que confirme le théorème suivant :

Théorème fondamental. — 1° *Dans un espace uniformément quasi* *convexe* (1), *on a toujours, si* $\alpha > 0$,

$$E_{\overline{\alpha}} = \overline{E_\alpha}.$$

2° *Si cette égalité est vérifiée pour tout ensemble* E, *et tout nombre positif* α, *on peut affirmer que l'espace est quasi convexe* (2).

DÉMONSTRATION. — 1° D'après la propriété c, il suffira de démontrer que l'on a toujours

$$E_{\overline{\alpha}} \subseteq \overline{E_\alpha}.$$

Soit p un point quelconque de $E_{\overline{\alpha}}$, démontrons qu'il appartient à $\overline{E_\alpha}$. Soit $\varepsilon(\delta)$ le module de quasi-convexité uniforme, et donnons-nous une suite de nombres δ_i tendant vers zéro. Posons $\varepsilon(\delta_i) = \varepsilon_i$. A chaque ε_i faisons correspondre un nombre positif ε'_i tel que $\varepsilon_i - \alpha < \varepsilon'_i < \varepsilon_i$, ce qui n'est d'ailleurs possible que si $\alpha \neq 0$. Il existe dans E un point m_i tel que

$$m_i p < \alpha + \varepsilon'_i.$$

En vertu de la quasi-convexité, il existe un point p_i tel que

$$p p_i < \delta_i,$$
$$m_i p_i < \alpha + \varepsilon'_i - \varepsilon_i < \alpha.$$

La dernière inégalité montre que p_i appartient à E_α, la première que la suite des points p_i tend vers p. Ceci prouve donc bien que p appartient à $\overline{E_\alpha}$ (3).

2° Donnons-nous deux points quelconques m et p de l'espace et soit α leur distance. Prenons comme ensemble E l'ensemble (m) formé du seul point m. On devra avoir

$$(m)_{\overline{\alpha}} = \overline{(m)_\alpha}$$

et p qui appartient à $(m)_{\overline{\alpha}}$ devra être point limite de points de $(m)_\alpha$.

L'espace sera donc quasi convexe en p relativement à m. Comme p et m ont été pris quelconques, on voit que l'espace satisfait bien à la condition de quasi-convexité.

---

(1) Il s'agit de nouveau ici et dans tout ce qui va suivre de la quasi-convexité forte ou quasi-convexité proprement dite telle qu'elle a été définie au Chapitre III.

(2) Il va de soi que lorsque $\overline{E_\alpha}$ et $E_{\overline{\alpha}}$ sont confondus, ils coïncident avec $\overline{E}_{(\alpha)}$.

(3) *Voir* rectification à la fin de l'appendice.

42. Si l'on avait supposé l'espace compact en soi, il aurait suffi de supposer la quasi-convexité pour entraîner la quasi-convexité uniforme, ainsi :

Dans un espace compact en soi, la quasi-convexité est la condition nécessaire et suffisante pour que la fermeture d'une sphère généralisée ouverte soit confondue avec la sphère généralisée fermée de même centre et de même rayon (1).

Le théorème reste valable dans un ensemble compact à distance finie, puisque les sphéroïdes dont il s'agit sont des ensembles bornés.

III. — Sphères généralisées d'ordre supérieur.

43. Sur un sphéroïde ouvert ou fermé de centre E et de rayon α, faisons une opération sphérique ouverte ou fermée de rayon β. Contrairement à ce qui se passe dans l'espace euclidien, le résultat ne sera pas en général un nouveau sphéroïde ayant le même centre E. Nous appellerons le nouvel ensemble obtenu : *sphéroïde d'ordre* 2 avec le centre E et les rayons α et β. Il y a en général quatre sphéroïdes d'ordre 2 ayant un centre et des rayons donnés. Nous les désignerons respectivement par $E_{\alpha,\beta}$, $E_{\bar{\alpha},\beta}$, $E_{\alpha,\bar{\beta}}$, $E_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$, la notation se comprenant d'elle-même (2).

Nous appellerons sphéroïde d'ordre 3 l'ensemble obtenu en faisant une opération sphérique sur un sphéroïde d'ordre 2 et plus généralement sphéroïde d'ordre p, l'ensemble obtenu en faisant une opération sphérique sur un sphéroïde d'ordre $p-1$ (3). La notation sera analogue à celle des sphéroïdes d'ordre 2, le $i^{\text{ième}}$ indice représentant la $i^{\text{ième}}$ opération et étant ou non surligné suivant que cette opération est fermée ou ouverte.

---

(1) On peut le démontrer directement en se servant de la propriété e'_2, ce qui facilite quelque peu les raisonnements de la première partie.

(2) L'ordre dans lequel on prend les deux rayons n'est bien entendu pas indifférent. Les sphères de rayons α et β ne coïncident pas en général avec les sphères de rayons β et α. *Les opérations sphériques ne sont pas en général permutables.* Un exemple est donné dans l'appendice.

(3) Les sphéroïdes d'ordre 1 seront les sphères généralisées ordinaires.

44. Il est clair qu'étant donné un ensemble E et une suite de p nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_p$ *pris dans un ordre déterminé*, il existe en général 2^p sphéroïdes d'ordre p admettant cet ensemble pour centre et ces nombres pour rayons. Ces 2^p sphéroïdes se réduisent pourtant à deux dont l'un coïncide avec la fermeture de l'autre dans un cas très général (comprenant celui des espaces euclidiens) comme le montre le théorème suivant :

Théorème III. — *Si l'espace est quasi convexe uniformément, tous les sphéroïdes d'ordre p, ayant le même centre et les mêmes rayons se réduisent à deux d'entre eux, et l'un des deux est la fermeture de l'autre.*

Si en effet cette condition est réalisée, il résulte immédiatement de la propriété e et du théorème fondamental que l'on peut, dans le symbole qui représente le sphéroïde, supprimer tous les signes de fermeture figurant sur les indices autres que le dernier (ou au contraire en ajouter de nouveaux) sans changer le résultat final. Toutes les sphères se réduisent aux deux suivantes :

$$E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \quad \text{et} \quad E_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \overline{\alpha}_p};$$

il est clair, d'après le théorème fondamental que la seconde se confond avec la fermeture de la première.

Théorème III *bis*. — *Si les sphéroïdes d'ordre p ayant un centre et des rayons donnés se réduisent à deux d'entre eux, l'un étant la fermeture de l'autre, l'espace est quasi convexe.*

Si, en effet, l'hypothèse est réalisée quel que soit p, elle l'est pour $p = 1$, c'est-à-dire pour les sphèroïdes à un seul rayon ce qui d'après la deuxième partie du théorème fondamental entraîne la quasi-convexité.

45. *Dans le cas où l'espace est compact* à distance finie on peut réunir ces deux théorèmes en un seul :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'y ait que deux sphéroïdes d'ordre p distincts, l'un étant la fermeture de l'autre, est que l'espace soit quasi convexe.

Lorsque la circonstance énoncée dans les théorèmes ci-dessus se trouve réalisée, cela aura un sens de parler de sphéroïde ouvert et de sphéroïde fermé d'ordre p et l'on voit que le *théorème fondamental leur reste applicable*. Il n'en résulte pas que ces sphéroïdes d'ordre p se réduisent toujours, comme dans l'espace euclidien, à des sphéroïdes de même centre et d'ordre 1. Ceci exige comme on va le voir l'intervention d'une propriété plus forte que la quasi-convexité.

46. Il suffira évidemment de se borner au cas des sphéroïdes d'ordre 2, étant donnée la définition de proche en proche donnée pour les sphéroïdes d'ordre supérieur.

Théorème IV. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait, quels que soient* E, α, β,

$$E_{\bar{\alpha},\beta} = E_{\bar{\alpha},\beta} = E_{\alpha+\beta}, \tag{1}$$

$$E_{\alpha,\bar{\beta}} = E_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} = E_{\overline{\alpha+\beta}}, \tag{2}$$

est que l'espace satisfasse à la condition A.

On sait déjà (prop. b, c, e) que

$$E_{\alpha,\beta} \subseteq E_{\bar{\alpha},\beta} \qquad \text{et que} \qquad E_{\alpha,\bar{\beta}} \subseteq E_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}.$$

Montrons que l'on a toujours

$$E_{\bar{\alpha},\beta} \subseteq E_{\alpha+\beta} \qquad \text{et} \qquad E_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} \subseteq E_{\overline{\alpha+\beta}}. \tag{3}$$

Soit p un point de $E_{\bar{\alpha},\beta}$; il existe par définition, dans $E_{\bar{\alpha}}$ un point q, tel que

$$pq = \beta_0 < \beta.$$

Donnons-nous une suite de nombres γ_i tendant vers zéro; il existe dans E une suite de points m_i tels que

$$m_i q < \alpha + \gamma_i,$$

alors

$$m_i p < \alpha + \beta_0 + \gamma_i,$$

ce qui prouve que la distance de p à E est au plus égale à $\alpha + \beta_0$, c'est-à-dire que p appartient à $E_{\alpha+\beta}$.

. On démontrera de manière tout à fait semblable que tout point de $E_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$ appartient à $E_{\overline{\alpha+\beta}}$.

Nous allons maintenant montrer que, si l'espace satisfait à la condition A, on a

$$E_{\alpha,\beta} \supseteq E_{\alpha+\beta},$$

ce qui, joint aux inégalités précédemment démontrées, entraînera les égalités (1). Prenons en effet dans ce cas, un point p de $E_{\alpha+\beta}$; il existe dans E un point m tel que

$$mp = \alpha_0 < \alpha + \beta.$$

Posons

$$0 < 2\delta < \alpha + \beta - \alpha_0.$$

En vertu de la condition A, les sphères $s(m, \alpha - \delta)$ et $s(p, \beta - \delta)$ ont au moins un point commun q. Ce point appartient évidemment à E_α, et p appartient à $s(q, \beta)$, c'est-à-dire à $E_{\alpha,\beta}$.

Soit encore, en supposant toujours la condition A réalisée, p un point de $E_{\overline{\alpha+\beta}}$ et soit ε_i une suite de nombres positifs tendant vers zéro; il existe dans E une suite de points m_i tels que

$$m_i p < \alpha + \beta + \varepsilon_i.$$

En vertu de la condition A, si l'on se donne une autre suite évanescente ε'_i, on trouvera au moins un point q_i commun à $s(m_i, \alpha)$ et à $s(p, \beta + \varepsilon_i + \varepsilon'_i)$. Alors q_i appartient à E_α, d'où il résulte que p appartient à $E_{\alpha,\bar{\beta}}$, ce qui joint à (3) entraîne (2).

Réciproques. — Supposons maintenant que l'on ait toujours les égalités (1). Considérons deux points quelconques a et b distants de γ, et soient α et β deux nombres positifs quelconques inférieurs à γ et tels que $\alpha + \beta > \gamma$. En prenant comme ensemble E l'ensemble (a) formé du seul point a, le point b appartient à $E_{\alpha+\beta}$; il appartient donc à $E_{\alpha,\beta}$ en vertu de l'hypothèse. Il existe donc un point c tel que

$$ac < \alpha,$$
$$cb < \beta,$$

et ceci a lieu si petite que soit la différence $\alpha + \beta - \gamma$. Cela revient exactement à la condition A.

Supposons enfin que les inégalités (2) soient vérifiées pour tout ensemble et considérons encore deux points quelconques a et b distants de γ. Soit α un nombre positif inférieur à γ et posons $\beta = \gamma - \alpha$. Prenons encore comme ensemble E l'ensemble formé du seul point a. Le point b appartient à $E_{\overline{\alpha+\beta}}$ et par conséquent, d'après l'hypothèse à $E_{\bar{\alpha},\bar{\beta}}$. Il existe donc, quel que soit ε, un point c de $E_{\bar{\alpha}}$ pour lequel

$$cb < \beta + \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire un point commun aux sphères $s\left(a, \alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $s\left(b, \beta + \frac{\varepsilon}{2}\right)$; la condition A est donc réalisée, puisque les points a et b sont quelconques ainsi que les nombres α et ε. C. Q. F. D.

CHAPITRE VI.

LES ENSEMBLES LIMITES D'UNE SUITE D'ENSEMBLES.

I. — Distance de deux ensembles.

47. Étant donnés deux ensembles quelconques A et B, nous dirons qu'un nombre positif α satisfait à la condition D relativement à ces deux ensembles, si l'on a simultanément

$$\mathrm{D}\begin{cases} A \subseteq B_{\bar{\alpha}}, \\ B \subseteq A_{\bar{\alpha}}. \end{cases}$$

La borne inférieure des nombres qui satisfont à la condition D est appelée *distance des deux ensembles*. Nous la désignerons par la notation

$$(A, B) \quad \text{ou} \quad (B, A).$$

J'ai démontré [1] que *la condition* D *est satisfaite par le nombre* (A, B) *lui-même*, *en sorte que la relation*

$$\alpha \geq (A, B)$$

est équivalente au système d'inclusion (D).

---

[1] *Sur la distance de deux ensembles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 1556). — J'ai démontré dans cette Note que cette définition bien que différente dans sa forme de celle de M. Haussdorff conduit au même résultat, ainsi d'ailleurs que celle, différente des deux premières, de M. Vasilesco.

Remarque I. — Si $A \subset B$, la première des inclusions D est évidemment satisfaite, quel que soit α, en sorte que la condition D se réduit à la seule inclusion

$$B \subseteq A_{\overline{\alpha}}.$$

En particulier, E étant un ensemble quelconque, on a

$$(E, E_{\overline{\alpha}}) = (E, E_{\alpha}) = \alpha.$$

Remarque II. — Si $A \subset B \subset C$, on a

$$(A, B) < (A, C),$$
$$(B, C) < (A, C).$$

Remarque III. — Étant donnés deux ensembles A et B, si, quel que soit le point a de A, il existe un point de B tel que $ab \leqq \alpha$ et si, quel que soit b, il existe a avec la même condition, on a

$$(A, B) \leqq \alpha.$$

48. La distance ainsi définie possède les propriétés suivantes [1] :

(*a*) $(A, B) = (B, A)$ symétrie;

(*b*) $(A, B) + (B, C) \geqq (A, C)$, inégalité triangulaire;

(*c*) $(A, A) = 0$;

(*d*) $\overline{A} = \overline{B}$ entraîne $(A, B) = 0$;

(*e*) $(A, B) = 0$ entraîne $(A, C) = (B, C)$.

Ces deux dernières propriétés conduisent à considérer comme identiques relativement à cette métrique deux ensembles ayant la même fermeture; lorsque ce sera utile, on pourra donc sans diminuer la généralité supposer qu'il ne s'agit que d'ensembles fermés en substituant au besoin leurs fermetures à ceux qui ne le seraient pas.

II. — Ensembles limites d'une suite d'ensembles.

49. Soit $\{E_n\}$ une suite infinie d'ensembles dont les éléments appartiennent à un espace quelconque $\mathfrak{X}$.

---

[1] Haussdorff, *Mengenlehre*, p. 146.

Les ensembles limites attachés à cette suite sont de trois espèces différentes. Je rappellerai en premier lieu la définition des limites de Borel.

Limites de Borel. — Ce sont :

1° L'ensemble *limite restreint :* ensemble des points appartenant à tous les ensembles de la suite sauf au plus un nombre fini;

2° L'ensemble *limite complet :* ensemble des points appartenant à une infinité d'ensembles de la suite;

3° L'ensemble *limite* proprement dit qui n'existe que si les deux précédents coïncident et coïncide alors avec eux. Nous dirons, lorsqu'il en est ainsi, que la suite *converge au sens de M. Borel.* Un cas classique de convergence dans ce sens est celui ou les ensembles forment une suite monotone (1) (croissante ou décroissante). La limite est alors, dans le cas d'une suite croissante, la réunion de tous les ensembles qui la composent; dans le cas d'une suite décroissante, leur intersection.

Chacun de ces ensembles peut être vide. Nous les désignerons respectivement par I, S, L.

50. Limites topologiques (2). — Leur définition suppose que l'on est dans un espace où l'on peut définir des voisinages.

1° *Limite topologique supérieure* $(\overline{\text{lim. top.}})$: ensemble des points tels que dans tout voisinage de chacun d'eux se trouvent des points de tous les ensembles E_n sauf au plus un nombre fini. Cet ensemble, que nous désignerons par $\mathcal{I}$, peut être *vide*. Lorsqu'il existe, il est *fermé*.

2° *Limite topologique inférieure* $(\underline{\text{lim. top.}})$: ensemble des points tels que dans tout voisinage de chacun d'eux se trouvent des points d'une infinité d'ensembles de la suite. Cet ensemble que nous désignerons par $\mathfrak{S}$ est fermé. Dans un espace compact en soi il ne

(1) Suite dans laquelle chaque ensemble contient le précédent (croissante), ou s'y trouve contenu (décroissante).

(2) Plusieurs terminologies ont été employées pour ces notions. J'adopte ici celle de M. Kuratowski.

peut être vide, que si tous les ensembles de la suite le sont à partir d'un certain rang. Cette conclusion reste valable dans un espace compact à distance finie, pour toute suite bornée dans son ensemble.

3° *Limite topologique* (lim. top.) : existe lorsque les deux précédents coïncident et coïncide alors avec eux. On dit alors que la suite *converge topologiquement* vers cette limite. M. G. Bouligand a donné un critère général de convergence topologique [1]. En particulier, d'après ce critère, les suites monotones convergent topologiquement. Dans un espace compact, une suite convergente ne peut avoir pour limite un ensemble vide. L'ensemble limite est évidemment un ensemble fermé; nous le désignerons par $\mathcal{L}$.

Il résulte immédiatement des définitions que

$$\begin{gathered} \mathrm{I} \subseteq \mathcal{I}, \qquad \mathrm{I} \subseteq \mathrm{S}, \\ \mathrm{S} \subseteq \mathcal{S}, \qquad \mathcal{I} \subseteq \mathcal{S}, \\ \mathrm{L} \subseteq \mathcal{L} \text{ si ces limites existent.} \end{gathered}$$

51. Limite métrique. — Supposons enfin que $\mathfrak{X}$ soit distancié.

Nous dirons avec M. Hausdorff [2] qu'une suite $\{E_n\}$ uniformément bornée *converge métriquement* vers un ensemble *fermé* [3] et qui sera nécessairement borné $\mathcal{L}'$, si la distance $(E_n, \mathcal{L}')$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini; $\mathcal{L}'$ est alors appelé la limite métrique de la suite. M. Hausdorff a démontré les théorèmes suivants [4] :

Théorème I. — *L'existence de la limite métrique entraîne, sans autre hypothèse, celle de la limite topologique et ces deux limites sont égales.*

Théorème II. — *L'existence de la limite topologique entraîne celle de la limite métrique à condition que l'espace soit compact. Les deux limites sont alors égales* [5].

---

(1) Bouligand, *G. I. D.*, p. 156.

(2) *Mengenlehre*, p. 146.

(3) Cette restriction est nécessaire si l'on veut que l'ensemble limite soit unique. Si l est un ensemble ayant $\mathcal{L}'$ pour fermeture (E_n, l) tend aussi vers zéro.

(4) *Mengenlehre*, p. 148, 150.

(5) Ce théorème reste vrai dans un espace compact à distance finie, puisque nous nous bornons à considérer des suites uniformément bornées.

La démonstration de ce dernier théorème est basée sur le fait que, dans un espace compact, on a pour tous les E_n sauf au plus un nombre fini

$$E_n \subset \mathcal{S}_\varepsilon,$$
$$(E_n)_\varepsilon \supset \mathcal{S},$$

quel que soit ε positif.

Ainsi la convergence métrique apparaît-elle comme plus forte que la convergence topologique, sauf dans un espace compact en soi, où elles coïncident.

52. On peut en prenant comme éléments les ensembles E non vides contenus dans l'espace $\mathfrak{X}$, construire deux espaces abstraits différents, suivant qu'on associe à la donnée de ces éléments la limite topologique ou la limite métrique (1).

Dans le premier cas, on obtient évidemment un espace $(\mathcal{L})$ de Fréchet, qui n'est pas forcément un espace métrique. Appelons-le $\mathfrak{Y}$. Au contraire l'espace obtenu dans le second cas est un espace métrique $\mathfrak{Z}$ dans lequel la distance de deux éléments est, par définition, leur distance de Hausdorff lorsqu'on les considère comme des sous-ensembles de $\mathfrak{X}$.

Dire qu'une suite d'éléments de $\mathfrak{Y}$ converge, revient à dire que la suite des sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ dont ils sont constitués converge topologiquement dans $\mathfrak{X}$. Dire qu'une suite d'éléments de $\mathfrak{Z}$ converge, c'est dire que la suite des sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ dont ils sont formés converge métriquement dans $\mathfrak{X}$. Les deux théorèmes cités plus haut entraînent la coïncidence de $\mathfrak{Y}$ et de $\mathfrak{Z}$ lorsque $\mathfrak{X}$ est compact en soi.

Citons encore ce théorème de M. Hausdorff (2) :

Si $\mathfrak{X}$ est séparable (3), toute suite d'éléments de $\mathfrak{Y}$ contient une suite partielle convergente, c'est-à-dire que $\mathfrak{Y}$ est compact.

En particulier, si $\mathfrak{X}$ *est compact en soi*, il est en même temps sépa-

---

(1) *Voir* par exemple : C. Kuratowski, *Topologie*, p. 157-158.

(2) Hausdorff, *loc. cit.*, p. 148-150.

(3) C'est-à-dire, si l'on peut y trouver un ensemble dénombrable partout dense (Hausdorff, *loc. cit.*, p. 125).

rable, *en sorte que les espaces* $\mathfrak{Y}$ *et* $\mathfrak{Z}$, *puisqu'ils coïncident, sont à la fois métriques et compacts.*

CHAPITRE VII.

LES SUITES DE SPHÉROÏDES.

I. — Approximation d'un sphéroïde par des sphéroïdes de rayons voisins.

53. Je me propose de rechercher dans quelles conditions un sphéroïde de centre E et de rayon α peut être considéré comme la limite de sphéroïdes de même centre dont les rayons tendent vers α.

Plaçons-nous tout d'abord au point de vue des limites de Borel en supposant que les rayons des sphères tendent vers α par valeurs inférieures.

Soit une suite de nombres positifs (1)

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \ldots < \alpha_n < \ldots,$$

tendant vers α, et considérons la suite des sphères ouvertes et fermées :

$$\text{(S)} \qquad E_{\alpha_1}, \quad E_{\overline{\alpha_1}}, \quad \ldots, \quad E_{\alpha_n}, \quad E_{\overline{\alpha_n}}, \quad \ldots.$$

Cette suite est monotone et croissante; elle admet donc pour limite de Borel la réunion ΣE_{α_i} des ensembles qui la composent. Je dis que cette réunion n'est autre que le sphéroïde ouvert E_α. Pour le démontrer je pourrai évidemment me contenter de considérer la suite partielle des sphéroïdes ouverts E_{α_i}.

En premier lieu, il est évident que

$$(1) \qquad E_\alpha \supseteq \Sigma E_{\alpha_i}.$$

---

(1) Le fait de prendre la suite α_n croissante ne restreint pas la généralité. Soit en effet une suite β_n de nombres *inférieurs* à α et tendant vers α de façon quelconque; on pourra en extraire une suite partielle croissante β_{n_i}; entre deux termes consécutifs β_{n_i} et $\beta_{n_{i+1}}$ ne se trouve qu'un nombre fini de termes β_n. Les sphères qui correspondent à ces termes contiennent $E_{\beta_{n_i}}$ et sont contenues dans $E_{\overline{\beta_{n_{i+1}}}}$; si donc la suite $E_{\beta_{n_i}}$ admet une limite de Borel, la suite E_{β_n} admettra elle aussi cette limite pour limite de Borel. L'énoncé du théorème V est donc valable lorsque le rayon tend vers α par valeurs inférieures, mais d'une façon quelconque.

Soit alors M un point de E_α; il lui correspond dans E un point m tel que

$$m\mathrm{M} = \alpha_0 < \alpha;$$

il est clair que M appartient à E_{α_i} dès que $\alpha_i > \alpha_0$. Ainsi M appartient à ΣE_{α_i} ce qui prouve que

$$(2) \qquad E_\alpha \subseteq \Sigma\, E_{\alpha_i}.$$

De la comparaison de (1) et (2) résulte le théorème annoncé. Nous avons donc montré que :

Théorème V. — *Les sphéroïdes ouverts ou fermés de centre* E, *dont le rayon tend vers* α *par valeurs inférieures* (1), *ont pour ensemble limite de Borel le sphéroïde ouvert de même centre et de rayon* α.

Soit maintenant une suite décroissante

$$\alpha'_1 > \alpha'_2 > \ldots > \alpha'_n > \ldots$$

tendant aussi vers α, et considérons à nouveau la suite des sphéroïdes ouverts et fermés

$$(\mathrm{S}') \qquad E_{\bar{\alpha}'_1}, \quad E_{\alpha'_1}, \quad \ldots, \quad E_{\bar{\alpha}'_n}, \quad E_{\alpha'_n}, \quad \ldots.$$

Cette suite est cette fois monotone et décroissante; elle admet comme limite l'ensemble intersection $\mathcal{D}E_{\alpha'}$ des ensembles qui la composent. Je dis que cet ensemble n'est autre que le sphéroïde fermé $E_{\bar{\alpha}}$. Je puis évidemment me contenter d'utiliser la suite partielle des sphéroïdes ouverts $E_{\alpha'_i}$.

En premier lieu, il est évident que

$$(3) \qquad E_{\bar{\alpha}} \subseteq \mathcal{D}\, E_{\alpha'_i}.$$

Soit maintenant un point M de $\mathcal{D}E_{\alpha'_i}$; il appartient à $E_{\alpha'_i}$ quel que soit i, on peut donc trouver dans E un point m_i tel que

$$\mathrm{M}\, m_i < \alpha'_i.$$

La distance de M à E, c'est-à-dire la borne inférieure des distances de M aux différents points de E est donc nécessairement au plus égale à α, puisque α'_i peut, pour i assez grand, s'approcher autant qu'on le

(1) *Voir* la Note de la page précédente.

veut de α. On voit que M appartient à $E_{\bar{\alpha}}$ ce qui prouve bien que

$$(4) \qquad E_{\bar{\alpha}} \supseteq \mathcal{O}_{\alpha_i}.$$

De la comparaison de (3) et (4) résulte le théorème annoncé. Il peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME VI. — *Les sphéroïdes ouverts ou fermés de centre* E, *dont le rayon tend vers* α *par valeurs supérieures* [1], *ont pour limite de Borel le sphéroïde fermé de même centre et de rayon* α.

Le théorème du n° 40 n'est qu'un cas particulier de celui-ci, lorsque $\alpha = 0$.

54. Plaçons-nous maintenant au point de vue des limites topologiques. La suite monotone croissante (S), possède (critère de Bouligand) une limite topologique. Cette limite est un ensemble fermé, elle doit contenir la limite de Borel E_α; de plus, tous les ensembles de la suite étant contenus dans E_α, elle est forcément contenue dans $\overline{E_\alpha}$. Comme $\overline{E_\alpha}$ est le plus petit ensemble fermé contenant E_α, la limite cherchée sera l'ensemble $\overline{E_\alpha}$ lui-même. On démontrera d'une manière analogue que la suite (S′) a pour limite topologique le sphéroïde fermé $E_{\bar{\alpha}}$. En résumé :

THÉORÈME VII. — *Les sphéroïdes de centre* E *dont le rayon tend vers* α *non nul par valeurs inférieures ont pour limite topologique l'ensemble* $\overline{E_\alpha}$, *ceux dont le rayon tend vers* α *par valeurs supérieures ont pour limite topologique le sphéroïde fermé* $E_{\bar{\alpha}}$. *La seule hypothèse faite est la métricité de l'espace.*

55. Si l'espace est *quasi convexe uniformément* et si $\alpha \neq 0$, ces deux limites sont égales :

THÉORÈME VII *bis*. — *Toute suite de sphéroïdes de centre* E *dont le rayon converge d'une manière quelconque vers* α, *converge topologiquement vers la sphère fermée* $E_{\bar{\alpha}}$.

Si, en outre, l'espace est *compact en soi*, la suite des mêmes sphéroïdes converge aussi *métriquement* vers la même limite.

---

[1] *Voir* la Note de la page 53.

56. Nous allons montrer maintenant que cette condition de compacité n'est pas nécessaire et que la *quasi-convexité uniforme suffit à assurer directement la convergence métrique* de la suite considérée vers sa limite $E_{\bar{\alpha}}$.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Étant donnés un ensemble* E, *dans un espace uniformément quasi convexe, un nombre non nul* α *et un nombre positif* δ, *on peut trouver un nombre* ε *tel que l'inégalité*

$$|\alpha - \alpha'| < \varepsilon$$

entraîne

$$(E_{\bar{\alpha}}, E_{\bar{\alpha}'}) < \delta.$$

Remarquons d'ailleurs qu'il est indifférent dans cette dernière inégalité de prendre les sphéroïdes ouverts ou fermés puisque

$$(E_\alpha, E_{\alpha'}) = (\overline{E_\alpha}, E_{\alpha'}) = (E_\alpha, \overline{E_{\alpha'}}) = (\overline{E_\alpha}, \overline{E_{\alpha'}})$$

et que, l'espace étant ici supposé quasi convexe, on a

$$\overline{E_\alpha} = E_{\bar{\alpha}}, \qquad \overline{E_{\alpha'}} = E_{\bar{\alpha}'}.$$

Ceci posé, nous admettrons pour fixer les idées que $\alpha < \alpha'$, et nous prendrons le sphéroïde de rayon α ouvert et le sphéroïde de rayon α' fermé. Comme on a

$$E_\alpha \subset E_{\bar{\alpha}'},$$

il suffira (n° 47, rem. I), d'établir que l'on peut déterminer ε tel que

$$\alpha' - \alpha < \varepsilon$$

entraîne

$$(1) \qquad E_{\alpha.\delta} \supseteq E_{\bar{\alpha}'}.$$

Soit, en effet, p un point de $E_{\bar{\alpha}'}$, et soit $\pi(\delta)$ le module de quasi-convexité uniforme correspondant à la valeur δ. Je dis qu'il suffira de prendre

$$\alpha' - \alpha = \pi_0 < \pi(\delta)$$

pour satisfaire à (1), c'est-à-dire que l'on pourra prendre ε égal à π.

Posons $\eta = \pi(\delta) - \pi_0$.

Il existe dans E au moins un point m dont la distance à p est inférieure à $\alpha' + \eta$ (prop. d_2 des sphères gén.). En vertu de l'hypothèse de quasi-convexité, il existe au moins un point q tel que l'on ait à la fois :

$$pq < \delta,$$
$$mq < \alpha' + \eta - \pi(\delta) = \alpha' - \pi_0 = \alpha$$

et ces inégalités signifient, la seconde, que q appartient à E_α, et la première, que p appartient à $s(q, \delta)$, donc à $E_{\alpha,\delta}$. C. Q. F. D.

Ceci posé, si l'on considère une suite $\{\alpha_n\}$ ayant pour limite un nombre α non nul [1], on peut énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Dans un espace uniformément quasi convexe, la suite des sphéroïdes de centre* E *et de rayon* α_n *converge métriquement vers* $E_{\bar{\alpha}}$, *si* α_n *converge vers* α.

On pourra, en effet, δ étant donné, prendre n assez grand pour que $|\alpha - \alpha_n|$ soit inférieur à $\pi(\delta)$ et que la distance du sphéroïde de rayon α_n au sphéroïde $E_{\bar{\alpha}}$ soit inférieure à δ.

Le nombre $\pi(\delta)$ ne dépend que de δ et pas de E ni de α; nous serons fondés à dire que, dans leur ensemble, toutes les suites du type $\{E_{\alpha_n}\}$ où α_n converge vers une limite α convergent *uniformément* vers leurs limites métriques, le *module de cette convergence uniforme étant au moins égal au module de quasi-convexité uniforme*.

Voici maintenant la réciproque :

THÉORÈME V. — *Si toute suite du type précédent converge métriquement en même temps que la suite des rayons, l'espace est quasi convexe; si cette convergence est uniforme relativement à toutes les suites de ce type, la quasi-convexité est uniforme, elle aussi, et son module est au moins égal à celui de la convergence.*

Soit K la limite métrique de la suite E_{α_n}. C'est en même temps, d'après le n° 51, la limite topologique de cette même suite. Or, si la suite des α_n comprend une infinité de valeurs aussi bien à droite qu'à gauche de sa limite α, la limite topologique ne peut exister (th. III)

[1] Remarquons que si $\{\alpha_n\}$ converge vers o, $E\alpha_n$ aura encore pour limite $E_{\bar{0}} = \bar{E}$ cette limite n'étant atteinte qu'à droite; on peut faire entrer ceci dans l'énoncé du cas général puisque la suite $\{\alpha_n\}$ ne peut tendre vers o qu'à droite.

que si l'on a

$$K = \overline{E_\alpha} = E_{\overline{\alpha}}.$$

Comme on suppose que toute suite du type considéré converge, il en résulte que l'égalité précédente doit être réalisée quels que soient E et α, ce qui entraîne la quasi-convexité (n° 41, th. fondamental).

Venons-en à la seconde partie. Supposons que la convergence soit uniforme et de module π', c'est-à-dire que l'inégalité

$$|\alpha - \alpha_n| < \pi'(\delta)$$

entraîne

$$(E_\alpha, E_{\alpha_n}) < \delta.$$

Prenons alors deux points m et p et posons

$$E = (m),$$
$$mp = \alpha,$$
$$\alpha' = \alpha - \varepsilon \qquad (\varepsilon < \pi').$$

Dire que $(E_{\overline{\alpha}}, E_{\overline{\alpha'}})$ est inférieur à δ, c'est dire que l'on a

$$E_{\overline{\alpha}} \leq E_{\alpha', \delta},$$
$$E_{\overline{\alpha'}} \leq E_{\alpha, \delta},$$

alors p appartient à $E_{\alpha', \delta}$, c'est-à-dire que l'on peut trouver un point q tel que

$$q \,\varepsilon\, E_{\alpha'} \ : \quad mq < \alpha' = \alpha - \varepsilon;$$
$$p \,\varepsilon\, (q)_\delta : \quad pq < \delta.$$

L'espace est donc quasi convexe en p relativement à m avec un module au moins égal à π', puisque ε peut être pris aussi voisin que l'on veut de π'. Les points m et p étant arbitraires, on voit que l'espace est uniformément quasi convexe avec un module au moins égal au module de convergence. En résumé :

Dans tout espace métrique, compact ou non, la convergence métrique des suites du type $\{E_{\alpha_n}\}$ *et la quasi-convexité de l'espace sont liées en sorte que :*

1° *La première entraîne la seconde* (1);

(1) La simple quasi-convexité peut ne pas entraîner la convergence.

2° *Si on les suppose uniformes* [1] *chacune entraîne l'autre et leurs modules sont égaux.*

Il résulte en effet des deux théorèmes précédents que lorsque les deux propriétés coexistent et sont uniformes, chacun des modules est au moins égal à l'autre.

II. — Les espaces de sphéroïdes et les correspondances sphère-rayon.

57. Étant donné un espace métrique $\mathfrak{X}$, et un ensemble quelconque E d'éléments de cet espace, nous appellerons $\mathfrak{Z}_E$ l'espace dont les éléments sont les sphéroïdes fermés de centre E et de rayon positif ou nul, la distance entre deux éléments de cet espace étant la distance de Hausdorff. Un tel espace peut ne pas être compact en soi, même à distance finie. Cela résulte du théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Pour que tous les espaces $\mathfrak{Z}_E$ soient compacts à distance finie, il faut que $\mathfrak{X}$ soit quasi convexe, il suffit que $\mathfrak{X}$ soit uniformément quasi convexe.*

Première partie. — Soit $\{\alpha_n\}$ une suite croissante et bornée de nombres positifs. Elle converge vers une limite α. Considérons la suite correspondante $\{\mathbf{E}_{\alpha_n}\}$ d'éléments de $\mathfrak{Z}_E$. C'est une suite bornée, la distance d'un élément quelconque de cette suite à l'ensemble centre E étant inférieure à α. Si l'on suppose tous les $\mathfrak{Z}_E$ compacts à distance finie, on pourra extraire de cette suite une suite partielle (que nous désignerons par la même notation) et qui converge dans $\mathfrak{Z}_E$, c'est-à-dire telle que les sphéroïdes qui en sont les éléments convergent métriquement dans $\mathfrak{X}$.

La convergence métrique de cette suite de sphéroïdes entraîne sa convergence topologique et d'après les résultats du précédent paragraphe, la limite topologique ne peut être que $\overline{\mathbf{E}}_\alpha$. Mais si l'espace

---

[1] Ce n'est pas d'ailleurs une restriction bien forte : nous avons vu que la quasi-convexité ne pouvait être qu'uniforme dans un espace compact. D'ailleurs, des espaces très généraux comme les espaces A [note (1), § 26] sont uniformément quasi convexes. Ils comprennent comme cas particuliers les espaces euclidiens.

n'était pas quasi convexe, c'est qu'il existerait un ensemble E et un nombre α tels que $\overline{E}_\alpha$ ne soit pas un sphéroïde et n'appartienne pas à $\mathfrak{Z}_E$. La suite $\{E_{\alpha_n}\}$ correspondante n'aurait donc pas sa limite dans $\mathfrak{Z}_E$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Deuxième partie. — Soit la suite $\{E_{\alpha_n}\}$ d'éléments de $\mathfrak{Z}_E$. De la suite $\{\alpha_n\}$ on peut extraire une suite qui converge vers α. Si nous supposons $\mathfrak{X}$ uniformément quasi convexe, nous avons vu que la suite $\{E_{\alpha_{n_i}}\}$ converge métriquement dans $\mathfrak{X}$ vers $E_{\bar{\alpha}}$, quel que soit l'ensemble E. Alors cette suite, considérée comme une suite d'éléments de $\mathfrak{Z}_E$ converge vers un autre élément de $\mathfrak{Z}_E$ qui est donc bien compact à distance finie.

On pourrait établir des résultats analogues (en excluant le cas $\alpha = 0$) pour les espaces $\mathfrak{Z}'_E$ formés avec les fermetures de sphéroïdes ouverts. Ces espaces coïncident d'ailleurs avec les précédents lorsque $\mathfrak{X}$ est quasi convexe.

58. Il y a évidemment entre un espace $\mathfrak{Z}_E$ (ou un espace $\mathfrak{Z}'_E$) et le segment $(0, +\infty)$ de l'axe des α, une correspondance biunivoque.

Les résultats établis dans ce Chapitre prouvent en somme que :

Théorème II. — *Une condition nécessaire pour que cette correspondance soit continue est que l'espace soit quasi convexe.*

Théorème III. — *La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les correspondances de ce type soient continues, et ceci d'une façon uniforme relativement à α d'une part, à l'ensemble* E *d'autre part, est que l'espace soit uniformément quasi convexe. Le module de quasi-convexité et celui de continuité sont alors égaux.*

Lorsque cette correspondance est continue, il sera assez naturel de dire que les sphéroïdes sont des « fonctions » continues de leur rayon [1]. Le théorème III peut alors s'énoncer :

Théorème III *bis.* — *La condition nécessaire et suffisante pour que tous les sphéroïdes d'un espace soient des fonctions continues de leur rayon,*

---

[1] Sur ce sens du mot fonction, *voir* mes Notes aux *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 1769, et 200, 1935, p. 1828.

et ceci uniformément par rapport aux centres et aux rayons, est que l'espace soit uniformément quasi convexe (¹).

CHAPITRE VIII.

LES SUITES DE SPHÉROÏDES DANS UN ESPACE COMPACT ET QUASI CONVEXE (*suite*).

59. Nous venons d'étudier, au point de vue de la convergence, des suites de sphéroïdes de centre fixe et de rayons variables; nous nous proposons maintenant de compléter cette étude par celle des suites de sphéroïdes quelconques. Nous supposerons dans ce Chapitre que l'espace $\mathfrak{X}$ est *compact en soi et quasi convexe*. Ainsi nous n'aurons pas à distinguer (compacité) entre convergence métrique et convergence topologique, non plus (quasi-convexité) qu'entre sphéroïdes fermés et sphéroïdes ouverts, puisque dans les questions de convergence il est indifférent de considérer les ensembles ou leurs fermetures.

I. — Sphéroïdes de centre variable et de rayon fixe.

60. Étant donnée une suite d'ensembles $\{E_n\}$, nous désignerons comme il a été dit plus haut par

$$I, \quad S, \quad L, \quad \mathcal{I}, \quad \mathcal{S}, \quad \mathcal{L}$$

les divers ensembles limites attachés à cette suite (notation du Chapitre précédent), et par

$$I^\alpha, \quad S^\alpha, \quad L^\alpha, \quad \mathcal{I}^\alpha, \quad \mathcal{S}^\alpha, \quad \mathcal{L}^\alpha$$

les ensembles analogues attachés à la suite $\{(E_n)_\alpha\}$ des sphéroïdes de rayon α centrés sur les ensembles de la première suite.

Les sphéroïdes de rayon α ayant pour centres I, S, L, $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}$ seront

(¹) J'ai donné dans la deuxième des Notes citées ci-dessus un énoncé à peu près semblable avec un principe de démonstration que j'ai depuis reconnu être faux. Cette démonstration s'appuyait en effet sur un théorème de M. Kuratowski qui ne serait applicable que dans le cas où l'on supposerait compacts tous les espaces tels que $\mathfrak{Z}_E$. Or la démonstration de cette compacité s'appuie sur le fait que la continuité est déjà démontrée.

d'après une notation déjà indiquée, désignés par

$$I_\alpha,\quad S_\alpha,\quad L_\alpha,\quad \mathcal{I}_\alpha,\quad \mathcal{S}_\alpha,\quad \mathcal{L}_\alpha.$$

Nous supposerons dans ce qui va suivre $\alpha \neq 0$.

61. Théorème I. — *On a toujours*

$$I_\alpha \subseteq \mathcal{I}_\alpha \subseteq I^\alpha \subseteq \mathcal{I}^\alpha.$$

Comme $I \subseteq \mathcal{I}$ la première de ces inégalités résulte de la propriété b des sphères généralisées (n° 39). La dernière est banale, la limite restreinte d'une suite étant toujours contenue dans sa limite topologique inférieure. Il reste donc à démontrer que

$$\mathcal{I}_\alpha \subseteq I^\alpha.$$

Soit m un point de $\mathcal{I}_\alpha$. Il existe dans $\mathcal{I}$ un point μ tel que

$$\mu m = \alpha_0 < \alpha.$$

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit et inférieur à $\alpha - \alpha_0$. Dans le sphéroïde ouvert de centre μ et de rayon ε, il y a des points de tous les E_n, sauf peut-être un nombre fini. Ces points seront aussi dans la sphère $s(m, \alpha)$ en vertu de l'inégalité triangulaire. Le point m appartient donc à tous les $(E_n)_\alpha$, sauf peut-être un nombre fini; il appartient donc à I^α. C. Q. F. D.

62. Théorème II. — *On a toujours*

$$S_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\alpha \subseteq S^\alpha \subseteq \mathcal{S}^\alpha = \overline{\mathcal{S}_\alpha}.$$

La première et la troisième inégalités sont triviales. Il reste donc à démontrer :

1° $\mathcal{S}_\alpha \subseteq S^\alpha$.

Soit m un point de $\mathcal{S}_\alpha$. Il y a donc dans $\mathcal{S}$ un point μ tel que

$$\mu m = \alpha_0 < \alpha;$$

soit ε un nombre positif arbitrairement petit et inférieur à $\alpha - \alpha_0$; il y a dans $s(\mu, \varepsilon)$ des points d'une infinité d'ensembles E_n; soit p_i

celui de ces points qui appartient à E_{n_i}, on a

$$mp_i < \alpha_0 + \varepsilon < \alpha,$$

ce qui prouve que m appartient à $(E_{n_i})_\alpha$, m appartient donc à S^α.

2° $\mathfrak{S}^\alpha = \overline{\mathfrak{S}}_\alpha$.

La démonstration de ce fait présente un intérêt tout spécial, car les hypothèses de compacité et de quasi-convexité inutiles dans les raisonnements qui précèdent vont apparaître ici explicitement. Pour bien mettre en évidence le rôle de la seconde, nous procéderons par étapes.

a. On a $\mathfrak{S}_\alpha \subset \mathfrak{S}^\alpha$, et par conséquent, $\mathfrak{S}^\alpha$ étant fermé,

$$\overline{\mathfrak{S}}_\alpha \subseteq \overline{\mathfrak{S}^\alpha} = \mathfrak{S}^\alpha.$$

b. Soit m un point de $\mathfrak{S}^\alpha$. Étant donnée une suite $\{\varepsilon_i\}$ de nombres positifs tendant vers zéro, il existe une suite de points m_i tels que m_i appartienne à $(E_{n_i})_\alpha$ et que l'on ait

$$mm_i < \varepsilon_i;$$

au point m_i correspond dans E_{n_i} un point p_i tel que

$$m_i p_i < \alpha, \qquad mp_i < \alpha + \varepsilon_i,$$

l'espace étant *compact*, ces points p_i ont au moins un point d'accumulation p, qui appartiendra, d'après sa définition, à $\mathfrak{S}$, et pour lequel, d'après la continuité de la distance,

$$mp \leqq \alpha.$$

Il résulte de cette inégalité que m appartient à la sphère fermée $\mathfrak{S}_{\bar{\alpha}}$.

On a donc

$$\mathfrak{S}^\alpha \subseteq \mathfrak{S}_{\bar{\alpha}}.$$

c. L'espace étant *quasi convexe* (1), on a

$$\mathfrak{S}_{\bar{\alpha}} = \overline{\mathfrak{S}}_\alpha,$$

(1) Si l'on supprimait cette hypothèse, tout ce que l'on pourrait affirmer serait que la limite topologique supérieure de la suite des sphéroïdes serait comprise entre la fermeture du sphéroïde ouvert et le sphéroïde fermé ayant pour rayon α et pour centre la limite topologique supérieure de la suite initiale.

on en déduit

$$\mathcal{S}^{\alpha} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{\alpha}, \qquad \text{puis, en vertu de } a, \qquad \mathcal{S}^{\alpha} = \overline{\mathcal{S}}_{\alpha}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — S^{α} est compris entre $\mathcal{S}_{\alpha}$ et $\mathcal{S}^{\alpha}$, donc sa fermeture coïncidera avec la fermeture commune de ces deux ensembles, c'est-à-dire avec $\mathcal{S}^{\alpha}$.

63. La relation que nous venons de démontrer peut s'énoncer à part sous la forme suivante qui fera mieux juger de son importance :

Théorème III. — *La limite topologique supérieure d'une famille de sphères généralisées de rayon α, centrées sur les ensembles d'une suite* $\{E_n\}$, *coïncide avec le sphéroïde fermé de même rayon centré sur la limite topologique supérieure de la suite.*

Ou encore :

Le passage a la limite topologique supérieure et l'opération sphérique fermée sont permutables.

Ce théorème *n'a pas d'équivalent en matière de limites inférieures;* nous nous trouvons en présence d'une rupture assez inattendue de la symétrie entre les deux sortes de limites, rupture qui, sous les hypothèses indiquées, assure aux limites supérieures une suprématie curieuse sur les limites inférieures.

64. En remarquant que l'on a

$$\mathcal{I}_{\alpha} \subseteq \mathcal{S}_{\alpha}, \qquad \mathcal{I}^{\alpha} \subseteq \mathcal{S}^{\alpha},$$

on peut grouper dans le tableau suivant certains des résultats précédents :

$$\mathcal{I}_{\alpha} \subseteq \left\{ \begin{matrix} I^{\alpha} \subseteq \mathcal{I}^{\alpha} \\ \mathcal{S}_{\alpha} \subseteq S^{\alpha} \end{matrix} \right\} \subseteq \mathcal{S}^{\alpha} = \overline{\mathcal{S}}_{\alpha}.$$

Supposons alors que la suite $\{E_n\}$ converge vers une limite topologique $\mathcal{L}$. On aura donc

$$\mathcal{I} = \mathcal{S} = \mathcal{L};$$

d'où

$$\mathcal{I}_{\alpha} = \mathcal{S}_{\alpha} = \mathcal{L}_{\alpha}$$

et

$$\overline{\mathcal{I}}_{\alpha} = \overline{\mathcal{S}}_{\alpha} = \overline{\mathcal{L}}_{\alpha},$$

en tenant compte de ce que $\mathcal{I}^\alpha$ et $\mathcal{S}^\alpha$ sont fermés, on en déduit

$$\overline{\mathcal{I}}_\alpha = \overline{\mathrm{I}}^\alpha = \mathcal{I}^\alpha = \overline{\mathcal{S}}_\alpha = \overline{\mathrm{S}}^\alpha = \mathcal{S}^\alpha = \overline{\mathcal{L}}_\alpha.$$

L'égalité de $\mathcal{I}^\alpha$ et $\mathcal{S}^\alpha$ montre que la suite $(\mathrm{E}_n)_\alpha$ est, elle aussi, convergente; on voit en outre que sa limite est le sphéroïde fermé de rayon α centré sur la limite de la suite E_n. Ainsi :

Théorème IV. — *Les sphéroïdes de même rayon centrés sur les ensembles d'une suite convergente forment aussi une suite convergente. L'opération sphérique fermée et le passage à la limite sont alors des opérations permutables.*

Cette dernière partie du théorème, une fois la première partie admise, n'est d'ailleurs qu'une application directe du théorème II.

Remarquons enfin que $\overline{\mathrm{I}}^\alpha = \overline{\mathrm{S}}^\alpha$, c'est-à-dire que les limites de Borel de la suite des sphères ont la même fermeture (¹).

65. Remarque. — Avec les conventions adoptées au Chapitre précédent, les énoncés III et IV gardent un sens pour les sphéroïdes fermés de rayon nul; ils restent d'ailleurs exacts car ils expriment ce fait classique que les limites topologiques ne sont pas changées si l'on ferme tous les ensembles de la suite. Ceci nous conduit à adopter les nouvelles conventions suivantes :

$$\mathcal{I}^0 = \mathcal{I},$$
$$\mathcal{S}^0 = \mathcal{S},$$
$$\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}.$$

66. Exemple. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, E_n sera le segment de longueur unité, d'abscisse $\frac{1}{n}$, défini par

$$x = \frac{1}{n} \qquad (0 \leqq y \leqq 1).$$

La suite $\{\mathrm{E}_n\}$ est convergente topologiquement et a pour limite le segment

$$x = 0 \qquad (0 \leqq y \leqq 1).$$

(¹) Il n'en résulte pas forcément que ces limites coïncident (*voir* la note de la page suivante).

$(E_n)_\alpha$ sera formé d'un rectangle prolongé par deux demi-cercles, comme le montre la figure (il est indifférent de considérer cette figure comme fermée ou non).

On vérifiera aisément que :

1° $\mathcal{L}_\alpha$ est constitué par la figure EFGHIJ, pourtour non compris;

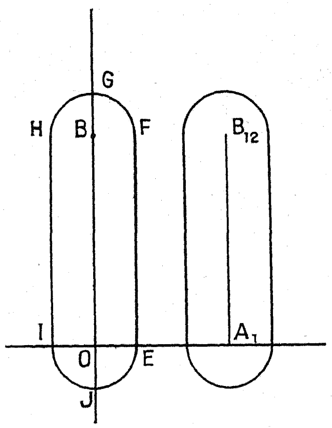


Fig. 4.

2° L^α est constitué par la même figure, mais cette fois avec la moitié de droite JEFG du pourtour (1);

3° $\mathcal{L}^\alpha$ existe et est formé de la même figure munie de la totalité de son pourtour;

4° $\overline{\mathcal{L}_\alpha}$ et $\overline{L^\alpha}$ coïncident avec $\mathcal{L}^\alpha$.

II. — Continuité des ensembles limites.

67. Les ensembles limites I^α, S^α, L^α, $\mathcal{I}^\alpha$, $\mathfrak{S}^\alpha$, $\mathcal{L}^\alpha$ d'une suite de sphéroïdes du type précédent dépendent du paramètre α. Mais $\mathfrak{S}$ et $\mathcal{L}$ sont des ensembles fixes et nous avons vu au Chapitre précédent que $\mathfrak{S}_{\bar{\alpha}}$

(1) Il ne faudrait pas en conclure que L^α existe toujours lorsque la suite E_n converge. Si, dans l'exemple ci-dessus on donnait aux segments A_nB_n des abscisses alternativement positives et négatives de manière à approcher AB à la fois par la droite et par la gauche, I^α serait formé de la figure sans son pourtour, et S^α de la figure avec tout son pourtour, de sorte que L^α n'existerait pas, mais I^α et S^α auraient la même fermeture $\mathcal{L}^\alpha$.

et $\mathcal{E}_{\overline{\alpha}}$ sont des fonctions continues de l'argument α, l'espace étant compact et quasi convexe. En confrontant ceci avec les résultats du paragraphe précédent nous pourrons énoncer les théorèmes

Théorème I. — *La limite topologique supérieure d'une suite de sphéroïdes de rayon fixe α est une fonction continue de α.*

Théorème II. — *Une suite de sphéroïdes de rayons α centrés sur des ensembles dont la suite est convergente, converge vers une limite fonction continue de α* [1].

Remarque. — Ces deux théorèmes restent valables à droite pour la valeur o de α. Cela résulte des conventions faites à la fin du paragraphe précédent.

68. Nous n'avons jusqu'à présent, dans le cas où la suite n'est pas convergente, aucun renseignement analogue pour la limite inférieure. Nous allons montrer que

Théorème III. — *La limite topologique inférieure d'une suite de sphéroïdes de rayon α est une fonction de α continue à droite pour toute valeur positive ou nulle de α.*

Nous entendons par là que si la suite

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n > \ldots > \alpha_0$$

a pour limite α_0, la suite $\{\mathcal{J}^{\alpha_n}\}$ converge vers l'ensemble $\mathcal{J}^{\alpha_0}$. Nous le démontrerons d'abord pour $\alpha_0 = 0$ (avec la convention $\mathcal{J}^0 = \mathcal{J}$).

En premier lieu on a

$$\mathcal{J}^{\alpha_1} \supset \mathcal{J}^{\alpha_2} \supset \ldots \supset \mathcal{J}^{\alpha_n} \supset \ldots \supset \mathcal{J},$$

ce qui montre que :

1° La suite $\{\mathcal{J}^{\alpha_i}\}$ étant monotone est convergente;
2° Sa limite contient $\mathcal{J}$.

---

[1] On peut même dire sans rien supposer sur la convergence des centres : *Une suite convergente de sphéroïdes de rayon α a pour limite une fonction continue de α.* La limite de la suite se confond en effet avec sa limite supérieure et il suffit d'appliquer le théorème I.

Il reste donc à démontrer que cette limite est contenue dans $\mathcal{J}$; il suffira pour cela de prouver que la limite supérieure est contenue dans $\mathcal{J}$; c'est-à-dire que si l'on se donne une suite quelconque de points

$$x_i \quad \varepsilon \quad \mathcal{J}^{\alpha_i},$$

tous les points d'accumulation de cette suite appartiennent à $\mathcal{J}$. Soit x un tel point d'accumulation; la suite $\{\alpha_i\}$ ayant pour limite o et la suite $\{x_i\}$ ayant x comme point d'accumulation, il sera possible de trouver un indice i_0 tel que l'on ait simultamément

$$x_{i_0}x < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\alpha_{i_0} < \frac{\varepsilon}{3},$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

Mais dire que x_{i_0} appartient à $\mathcal{J}^{\alpha_{i_0}}$, c'est dire qu'il existe un nombre N tel que pour $n < \mathrm{N}$, il existe dans $(\mathrm{E}_n)_{\alpha_{i_0}}$ au moins un point m_n tel que

$$x_{i_0}m_n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il existe alors dans E_n un point p_n tel que

$$m_np_n < \alpha_{i_0} < \frac{\varepsilon}{3};$$

et l'on a

$$xp_n < xx_{i_0} + x_{i_0}m_n + m_np_n < \varepsilon.$$

Ainsi, étant donné ε, on peut déterminer N tel que dans tout ensemble E_n d'indice supérieur à N se trouve un point distant de x de moins de ε. C'est dire que x appartient à $\mathcal{J}$. C. Q. F. D.

Venons-en maintenant au cas général $\alpha_0 > 0$.

On verra comme plus haut que $\{\mathcal{J}^{\alpha_i}\}$ converge vers une limite $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{J}^{\alpha_0}$.

Il reste donc à démontrer que

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}^{\alpha_0}$$

Soit donnée une suite décroissante $\{\beta_n\}$ de nombres positifs tendant vers o. On peut, en vertu de la quasi-convexité uniforme, déterminer ε_i

tel que, *quel que soit n*,

$$(E_n)_{\alpha_0+\varepsilon_i} \subseteq (E_n)_{\alpha_0,\beta_i}.$$

Il en résulte

$$\mathcal{I}^{\alpha_0+\varepsilon_i} \subseteq \mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i},$$

la notation $\mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i}$ ayant un sens évident.

Soit α'_1 le plus grand nombre de la suite $\{\alpha_i\}$ inférieur à $\alpha_0+\varepsilon_1$. Soit de même α'_i le plus grand nombre de cette suite inférieur à la fois à $\alpha_0+\varepsilon_i$ et à α'_{i-1}. Nous aurons

$$\mathcal{I}^{\alpha'_i} \subseteq \mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i}$$

et, par conséquent,

$$\mathcal{L} \subseteq \lim \mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i}$$

la limite du second membre existe en effet, car la suite $\{\mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i}\}$ est du type étudié dans la première partie de la démonstration. $\mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i}$ est, en effet, l'ensemble $\mathcal{I}^{\beta_i}$ relatif à la suite $\{(E_n)_{\alpha_0}\}$. D'après ce que nous avons vu, la limite de $\mathcal{I}^{\alpha_0,\beta_i}$ sera l'ensemble $\mathcal{I}^{\alpha_0}$. On a donc bien

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{I}^{\alpha_0}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Corollaire. — *$\mathcal{I}^{\alpha_0}$ ne peut être vide que si tous les $\mathcal{I}^{\alpha_n}$ à partir d'un certain rang sont eux-mêmes vides.*

En effet, l'espace étant supposé compact, la suite convergente $\{\mathcal{I}^{\alpha_n}\}$ d'ensembles non vides ne pourrait avoir une limite vide. Cela résulte d'ailleurs aussi directement du raisonnement employé pour le cas $\alpha = 0$.

Remarquons enfin qu'en général $\mathcal{I}^{\alpha}$ n'est pas continu à gauche. En effet si $\alpha' < \alpha$, on a

$$\mathcal{I}^{\alpha'} \subset I^{\alpha}.$$

La limite topologique d'une suite $\{\mathcal{I}^{\alpha_i}\}$, où α_i tend vers α_0 *à gauche* est donc au plus égale à $\overline{I^{\alpha_0}}$ et par conséquent ne saurait, dans le cas général, atteindre $\mathcal{I}^{\alpha_0}$. (Il peut même se faire que $\overline{I^{\alpha_0}}$ soit vide, $\mathcal{I}^{\alpha_0}$ ne l'étant pas.)

69. *Continuité des limites de Borel.* — Pour la limite complète, comme pour la limite (lorsqu'elle existe), on a le théorème :

Théorème IV. — *La fermeture de l'une ou l'autre de ces limites est une fonction continue de α.*

Cette fermeture se confond en effet avec la limite topologique de même espèce de la même suite.

Pour la limite restreinte, il me semble très probable que sa fermeture $\bar{\mathrm{I}}^{\alpha}$ soit continue à gauche, mais on se heurte pour le démontrer à des difficultés beaucoup plus considérables que pour la continuité à droite de $\mathcal{J}^{\alpha}$; je ne suis pas parvenu à les surmonter.

III. — Suites de sphéroïdes quelconques.

70. Soit maintenant une suite

$$(1) \qquad \{(\mathrm{E}_n)_{\alpha_n}\}$$

de sphéroïdes dont les centres et les rayons sont à la fois variables. Désignons respectivement par $\mathfrak{S}$ et Σ les limites supérieures des suites $\{\mathrm{E}_n\}$ et (1). Supposons enfin que la suite des nombres α_n converge vers le nombre positif α.

Théorème I. — *On a*

$$\Sigma = \bar{\mathfrak{S}}_{\alpha},$$

En supposant toujours l'espace compact en soi et quasi convexe.

Soit une suite de nombres positifs tendant vers o;

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots.$$

1° D'après les résultats du paragraphe 56, les sphéroïdes de centre fixe, dont le rayon tend vers une limite α, convergent *uniformément* vers le sphéroïde de même centre et de rayon α, le module de convergence étant égal au module de quasi-convexité. On pourra donc, à condition de rendre α_n assez voisin de α, faire en sorte que l'on ait

$$(4) \qquad [(\mathrm{E}_p)_{\alpha_n}, (\mathrm{E}_p)_{\alpha}] < \frac{\varepsilon_i}{2},$$

ceci *quel que soit p* et en particulier pour $p = n$. La suite α_n converge vers α. Il existe donc un nombre N'_i tel que l'inégalité $n > \mathrm{N}'_i$ entraîne l'inégalité (4); notons que celle-ci est équivalente aux deux suivantes :

$$(4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} (E_p)_{\alpha_n} \subseteq (E_p)_{\alpha,\ \frac{\varepsilon_i}{2}}, \\ (E_p)_\alpha \subseteq (E_p)_{\alpha_n,\ \frac{\varepsilon_i}{2}}. \end{array} \right.$$

2° D'après les résultats du paragraphe 63, nous savons que la suite $\{(E_n)_\alpha\}$ a pour limite supérieure $\overline{\mathcal{S}}_\alpha$. On pourra donc déterminer un nombre N''_i tel que l'inégalité

$$n > N''_i$$

entraîne

$$(5) \qquad (E_n)_\alpha \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,\ \frac{\varepsilon_i}{2}};$$

c'est là une propriété classique des limites supérieures.

3° Enfin, et pour une raison analogue, on pourra déterminer N'''_i tel que

$$n > N'''_i$$

entraine

$$(E_n)_{\alpha_n} \subseteq \Sigma_{\frac{\varepsilon_i}{2}}.$$

En prenànt

$$n > \max(N'_i,\ N''_i,\ N'''_i),$$

nous aurons (¹)

$$(E_n)_{\alpha_n} \subseteq (E_n)_{\alpha,\ \frac{\varepsilon_i}{2}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,\ \frac{\varepsilon_i}{2},\ \frac{\varepsilon_i}{2}} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,\varepsilon_i},$$

$$(E_n)_\alpha \subseteq (E_n)_{\alpha_n,\ \frac{\varepsilon_i}{2}} \subseteq \Sigma_{\frac{\varepsilon_i}{2},\ \frac{\varepsilon_i}{2}} \subseteq \Sigma_{\varepsilon_i}.$$

Il résulte de ces inégalités que, quel que soit i, on a

$$\Sigma = \overline{\text{lim. top.}}\,(E_n)_{\alpha_n} \subseteq \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,\varepsilon_i},$$

$$\overline{\mathcal{S}}_\alpha = \overline{\text{lim. top.}}\,(E_n)_\alpha \subseteq \Sigma_{\varepsilon_i};$$

d'où

$$\Sigma \subseteq \lim_{i=\infty} \overline{\mathcal{S}}_{\alpha,\varepsilon_i} = \overline{\mathcal{S}}_\alpha,$$

$$\overline{\mathcal{S}}_\alpha \subseteq \lim_{i=\infty} \Sigma_{\varepsilon_i} = \Sigma;$$

et enfin

$$\Sigma = \overline{\mathcal{S}}_\alpha.$$

(¹) En appliquant les propriétés b, c, e, des sphères généralisées.

71. Théorème II. — *Si* $\{E_n\}$ *converge vers une limite* $\mathcal{L}$, $\{(E_n)_{\alpha_n}\}$ *converge vers* $\overline{\mathcal{L}_\alpha}$.

D'après le paragraphe 64, la convergence de $\{E_n\}$ vers $\mathcal{L}$ entraîne celle de $\{(E_n)_\alpha\}$ vers $\overline{\mathcal{L}_\alpha}$. On peut donc trouver N_1 tel que $n > N_1$ entraîne

$$[(E_n)_\alpha, \overline{\mathcal{L}_\alpha}] < \frac{\varepsilon}{2},$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit.

D'autre part, α_n tendant vers α, on peut, comme dans la démonstration précédente, trouver N_2 tel que $n > N_2$ entraîne

$$[(E_n)_{\alpha_n}, (E_n)_\alpha] < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour toute valeur de n supérieure à la fois à N_1 et à N_2, en appliquant l'inégalité triangulaire, on aura

$$[(E_n)_{\alpha_n}, \overline{\mathcal{L}_\alpha}] < \varepsilon,$$

ce qui démontre bien le théorème énoncé.

IV. — L'espace des sphères d'un espace métrique.

72. Le théorème II du paragraphe précédent montre que, pour qu'une suite de sphéroïdes converge, il suffit que les suites des centres et des rayons convergent séparément. Or, l'espace $\mathfrak{Y}$ des sous-ensembles de $\mathfrak{X}$ est compact d'après les hypothèses faites (théorème à la fin du n° 52).

Ainsi, étant donné une suite quelconque de sphéroïdes, on pourra en extraire une suite partielle dont les centres convergent. De cette suite partielle, on pourra en extraire une autre dont les rayons convergent. En d'autres termes, de toute suite de sphéroïdes, on peut extraire une suite partielle convergente. La limite de cette suite partielle est d'ailleurs elle aussi un sphéroïde. On voit que :

L'espace Σ *dont les éléments sont les sphéroïdes, distanciés par la distance de Hausdorff, d'un espace* $\mathfrak{X}$ *métrique, compact et quasi convexe, est lui aussi compact en soi.*

Si l'on suppose simplement que $\mathfrak{X}$ est compact à distance finie, de toute suite de sphéroïdes uniformément bornés, c'est-à-dire, de toute suite bornée d'éléments de Σ, on pourra extraire une suite convergente, dont la limite appartient à Σ, en d'autres termes, Σ est lui aussi compact à distance finie.

73. Considérons enfin l'espace Z, produit topologique de $\mathcal{Y}$ et du segment $(0, +\infty)$ de l'axe des α. A tout élément de Z correspond évidemment un élément et un seul de Σ et nous venons en somme de démontrer que *sous les hypothèses de compacité et de quasi-convexité, cette correspondance est continue.*

Il serait intéressant d'étudier la correspondance inverse qui, elle, n'est pas univoque, car un sphéroïde donné possède une infinité de rayons et, même pour un rayon donné, une infinité de centres. Nous verrons dans un prochain travail, comment parmi ces centres, il en existe de privilégiés et comment on peut distinguer, parmi les rayons celui qui est le plus grand possible. Une fois la correspondance inverse ainsi réduite, il sera possible d'étudier sa continuité et de la démontrer, sous certaines restrictions, où la quasi-convexité vient encore jouer son rôle.

APPENDICE.

I. — Un espace convexe, mais non quasi convexe ([1]).

Soit un espace métrique quelconque que nous supposerons en outre compact à distance finie et convexe au sens de Menger (et par conséquent pleinement convexe. *Voir* Chap. III) ([2]). Nous désignerons par ab la distance des deux points a et b selon la métrique propre à cet espace.

Considérons la sphère ouverte S de centre O et de rayon R (nous

([1]) J'ai donné cet exemple (pour le cas où $\mathfrak{X}$ est un plan euclidien) dans ma Note : *Sur la notion de distance* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 1646).

([2]) On peut par exemple supposer, comme dans ma Note citée, que $\mathfrak{X}$ est un plan euclidien. C'est ce que nous ferons plus loin quand nous voudrons par des figures donner une idée plus concrète d'un espace de cette sorte.

désignerons par $\overline{S}$ la sphère fermée de même centre et de même rayon et par Σ la périsphère correspondante). Nous allons maintenant définir avec les éléments de $\mathfrak{X}$ un nouvel espace $\mathfrak{Y}$ qui différera de $\mathfrak{X}$ par sa métrique. La distance des deux points a et b dans $\mathfrak{Y}$ sera désignée par ab^0. Nous adopterons les conventions suivantes :

1° Si a et b sont *tous deux* extérieurs à S, ou s'ils appartiennent *tous deux* à $\overline{S}$, on a, par définition,

$$ab^0 = ab. \tag{1}$$

2° Si a est extérieur à S et si b appartient à $\overline{S}$, on a, par définition,

$$ab^0 = a\mathrm{O}. \tag{2}$$

Il est immédiat que la distance ainsi définie satisfait aux trois premiers axiomes de la distance.

D'autre part, si trois points a, b, c appartiennent tous trois à l'extérieur de S ou tous trois à $\overline{S}$, il est évident aussi que l'inégalité triangulaire est satisfaite pour ces trois points. Les seuls cas qui nécessitent une démonstration sont donc les suivants :

α. *a et b sont extérieurs à* S, *c appartient à* $\overline{S}$. On a alors

$$ab^0 = ab,$$
$$ac^0 = a\mathrm{O},$$
$$bc^0 = b\mathrm{O}.$$

Or, dans l'espace $\mathfrak{X}$ l'inégalité triangulaire est satisfaite pour les trois points a, b, O. Elle est donc satisfaite dans $\mathfrak{Y}$ pour a, b, c.

β. *a est extérieur à* S, *b et c appartiennent à* $\overline{S}$. On a

$$ab^0 = ac^0 = a\mathrm{O} > \mathrm{R},$$
$$bc^0 = bc \leqq \mathrm{O}b + \mathrm{O}c \leqq 2\mathrm{R}.$$

On en conclut

$$bc^0 \leqq ac^0 + ab^0,$$
$$ac^0 < ab^0 + bc^0,$$
$$ab^0 < ac^0 + bc^0,$$

l'égalité étant même exclue dans les deux dernières relations, puisque $ab^0 = ac^0$ et que $bc^0 \neq 0$.

Propriétés de l'espace $\mathcal{Y}$. — Nous remarquerons en premier lieu qu'un point de la périsphère Σ ne peut jamais être voisin d'un point de l'extérieur de S, puisqu'il en est distant de plus de R.

Considérons une suite $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots$ de points tels que

$$O m_n = R + \frac{1}{n}.$$

Si l'on considère ces points comme appartenant à $\mathfrak{X}$, on pourra de

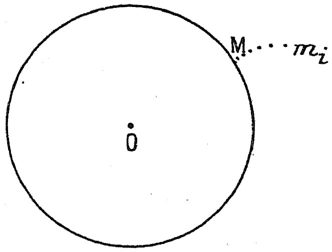


Fig. 5.

cette suite en extraire une autre (satisfaisant d'ailleurs au critère de Cauchy) et ayant pour point limite un point M qui appartient forcément à Σ.

Dans $\mathcal{Y}$, cette suite partielle (qui reste une suite de Cauchy) ne peut avoir d'autre point d'accumulation que M. Or M ne peut en être un point d'accumulation, puisque l'on a constamment

$$M m_n^0 = R + \frac{1}{n}, \qquad \lim M m_n^0 = R \neq 0.$$

Ceci prouve que $\mathcal{Y}$ non seulement *n'est pas compact*, mais encore qu'il *n'est même pas complet*.

Ce qui précède prouve aussi que $\mathcal{Y}$ *n'est pas connexe*. Son défaut d'enchaînement entre un point de $\overline{S}$ et un point extérieur à S est en effet toujours égal à R.

Un voisinage d'un point M de Σ est constitué uniquement par des points intérieurs. Un tel voisinage sera par exemple (dans E_2) la lentille comprise entre Σ et un cercle de centre M et de rayon ε (*fig.* 6).

Soient maintenant deux points a et b de $\mathfrak{X}$. Si ces deux points sont extérieurs à S, ou s'ils appartiennent à $\overline{S}$ tous les deux, *l'espace support étant convexe*, il existera un interpoint c, qui sera interpoint aussi bien par rapport à $\mathfrak{X}$, que par rapport à $\mathfrak{Y}$.

Si maintenant b est extérieur à S et si a appartient à $\overline{S}$, il existe

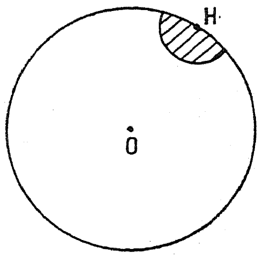


Fig. 6.

dans $\mathfrak{X}$, pour le couple O, b, un interpoint c suffisamment voisin de b pour être extérieur à S [1]. On a alors

$$Ob = Oc + cb,$$

$$ab^0 = Ob, \qquad ac^0 = Oc, \qquad bc^0 = bc;$$

donc

$$ab^0 = ac^0 + cb^0;$$

c est donc un interpoint dans $\mathfrak{Y}$ pour le couple ab et ceci prouve que $\mathfrak{Y}$ *est convexe*.

D'autre part, si l'on prend toujours a dans $\overline{S}$ et b à l'extérieur de S, il n'existe *à l'intérieur de* S aucun interpoint pour le couple ab, puisque c étant intérieur à S, nous avons vu que l'égalité

$$ab^0 = ac^0 + cb^0$$

ne peut avoir lieu.

L'espace $\mathfrak{Y}$ *n'est donc pas pleinement convexe.*

Il n'est même pas quasi convexe, puisque la distance de b à un point voisin de a est rigoureusement égale à la distance de b à a en supposant toujours a et b dans la même situation réciproque. Tout au moins cela prouve que l'espace n'est pas quasi convexe fort mais qu'en revanche il *possède la quasi-convexité faible*.

---

(1) L'existence d'un tel interpoint résulte de la pleine convexité de x.

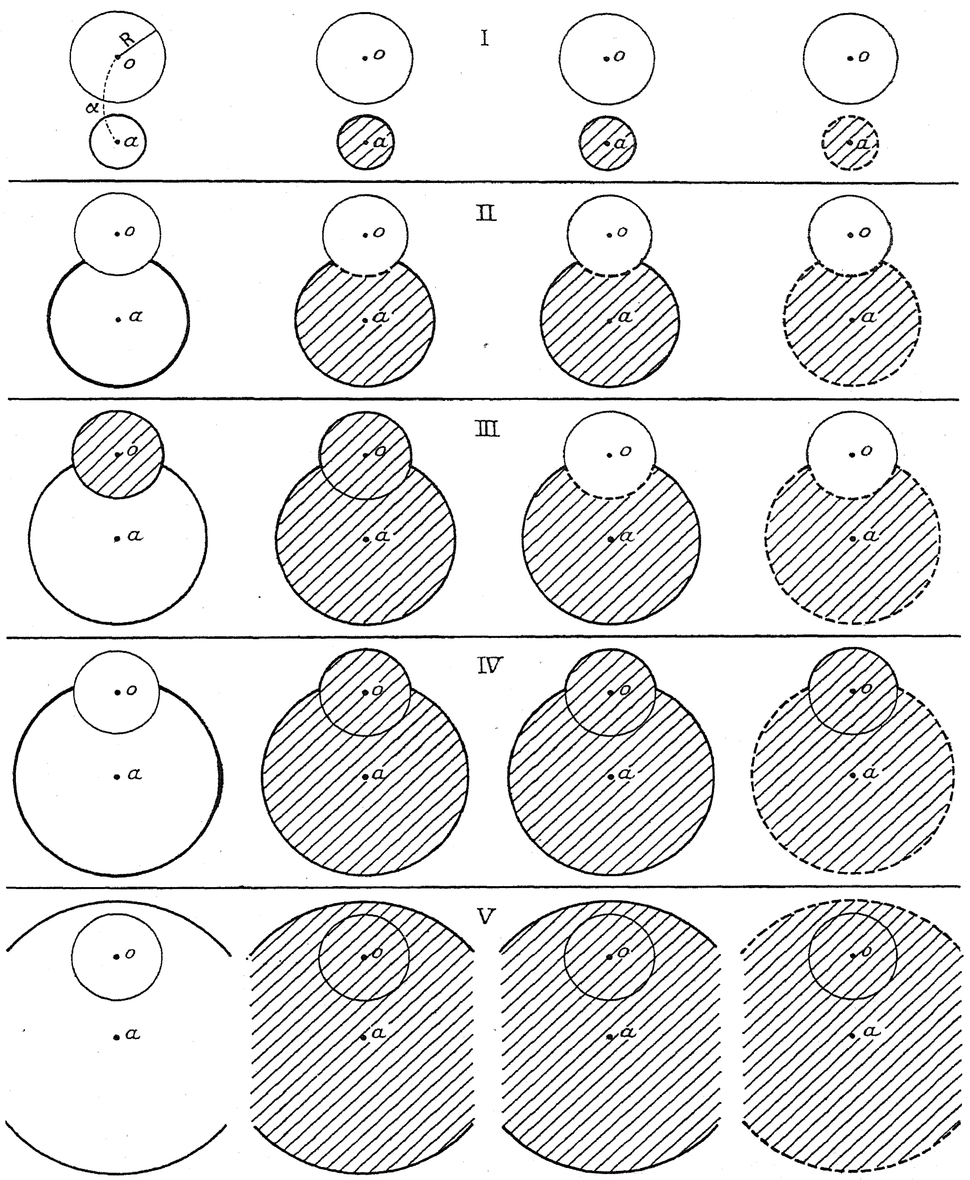


Fig. 7.

$\sigma^0(a, r)$. $s^0(a, \bar{r})$. $\overline{s^0(a, r)}$. $s^0(a, r)$.

I. $r < \alpha - R$;
II. $\alpha - R < R < \alpha$;
III. $r = \alpha$;
IV. $\alpha < r < \alpha + R$;
V. $r > \alpha + R$.

C'est même un exemple d'espace à quasi-convexité faible ne jouissant pas de la propriété F (nous avons vu au Chapitre IV que la quasi-convexité faible est une condition nécessaire pour que la propriété F ait lieu et il est intéressant d'avoir un exemple qui montre qu'elle n'est pas suffisante). Si l'on considère, en effet, un point a extérieur à S et si l'on désigne sa distance à O par α, la fermeture de $s^0(a, \alpha)$ ne coïncide pas avec $s^0(a, \bar{\alpha})$, $s^0(a, \alpha)$ et $s^0(a, \bar{\alpha})$ désignant les sphères ouverte et fermée relatives à l'espace $\mathcal{Y}$.

$s^0(a, \alpha)$ est en effet formée de $s(a, \alpha)$ échancrée par $\bar{S}$, sa fermeture

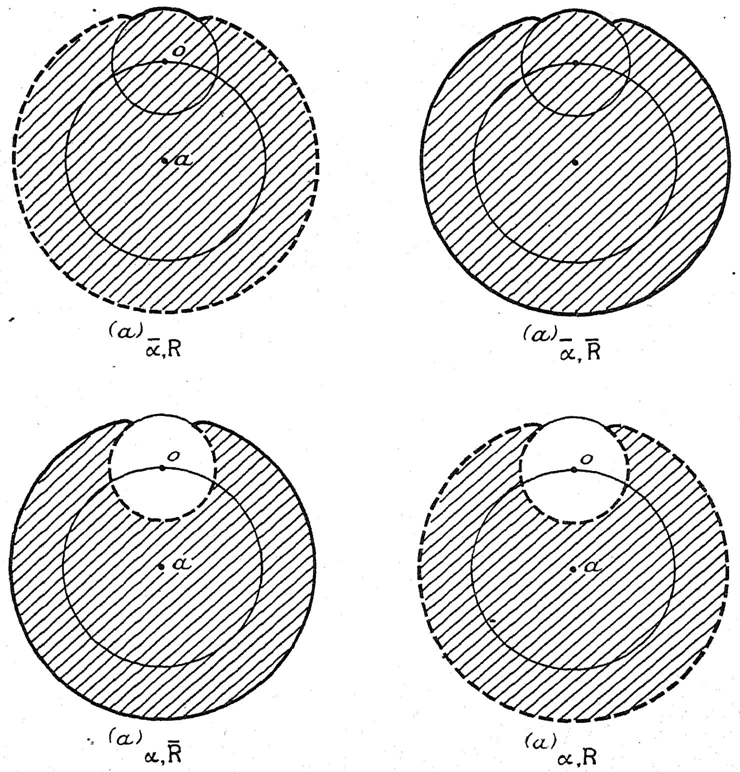


Fig. 8.

est $s(a, \bar{\alpha})$ échancrée par $\bar{S}$. Au contraire, $s^0(a, \bar{\alpha})$ est formée de la réunion de $s(a, \alpha)$ et de S.

L'espace ne satisfait donc pas à F. On voit même que la périsphère $\sigma^0(a, \alpha)$ se compose de la réunion de $\bar{S}$ et de $\sigma(a, \alpha)$; ce n'est donc pas un ensemble frontière, puisqu'il contient des points intérieurs.

Les figures de la page 77 montrent l'évolution de $s^0(a, r)$, $\overline{s^0(a, r)}$, $s^0(a, \bar{r})$, $\sigma^0(a, r)$ suivant les différentes valeurs de r. Les frontières des ensembles envisagés sont indiquées en traits plein ou interrompu suivant qu'elles en font ou non partie.

On voit clairement, en passant de la figure II à la figure III, la discontinuité à gauche de $s^0(a, \bar{r})$ considérée comme fonction de r; de même la discontinuité à droite de $\overline{s^0(a, r)}$ apparaît dans le passage de III à IV.

Enfin, dans cet espace les quatre sphéroïdes du second ordre

$$(a)_{\alpha,\mathrm{R}}, \quad (a)_{\bar{\alpha},\mathrm{R}}, \quad (a)_{\alpha,\bar{\mathrm{R}}}, \quad (a)_{\bar{\alpha},\bar{\mathrm{R}}}$$

ayant pour centre l'ensemble (a) constitué par le seul point a, sont distincts comme cela ressort de la figure 8. Aucun d'eux ne se réduit à un sphéroïde du premier ordre. Ils ne coïncident pas non plus avec ceux qu'on obtiendrait en intervertissant les rayons.

II. — Un espace singulier non compact et non quasi convexe faible [1].

Cet exemple est fabriqué suivant un principe analogue au précédent : pour plus de simplicité je prends un plan euclidien comme espace support :

Soit le cercle C de centre O, de rayon R, a étant un point extérieur à ce cercle, je considère le cercle Γ de centre a et de rayon α, α étant compris entre $a\mathrm{O}$ et $a\mathrm{O} + \mathrm{R}$.

J'appellerai X la région extérieure à C; un point de cette région sera désigné par la lettre x munie au besoin d'un indice. De même Y sera la région commune aux deux cercles C et Γ et y un point de cette région. Enfin Z et z désignent respectivement la région intérieure à C et extérieure à Γ et les points de cette région. Tout point du cercle C sera considéré comme un point x.

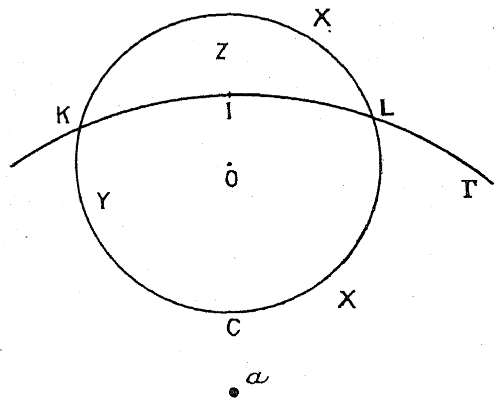
---

(1) *Voir* n° 30.

La distance euclidienne de deux points m et n est mn, leur distance dans le nouvel espace mn^0 est définie comme suit :

$$x_1 x_2^0 = x_1 x_2,$$
$$y_1 y_2^0 = y_1 y_2,$$
$$z_1 z_2^0 = z_1 z_2,$$
$$xy^0 = x\mathrm{O} > \mathrm{R},$$
$$xz^0 = xz,$$
$$yz^0 = \mathrm{R}.$$

Il reste à considérer les points f de l'arc ouvert KL du cercle Γ. Nous



Fig, 9.

les assimilerons à des points y sauf un, le milieu I de l'arc KL qui sera considéré comme appartenant à Z.

On démontrera aisément, comme dans le premier exemple, que la distance ainsi définie satisfait aux quatre axiomes de la distance. Étant donné ce qui a été vu dans le premier exemple, les seuls cas qui demandent une démonstration nouvelle, d'ailleurs très aisée, sont ceux où l'on a deux points y et un point z, ou bien deux points z et un point y.

Cet espace comme le précédent est non compact, non complet, non connexe et non quasi convexe au sens fort, il n'est même pas quasi convexe au sens faible. En effet, un voisinage de I ne se compose que de points de Z et pour tous ces points, sauf pour I lui-même, on a

$$az > a\mathrm{I},$$

l'égalité étant exclue. La distance de a à un point variable de l'espace considéré passe donc par un minimum strict au point I. L'anomalie que nous avons signalée après avoir démontré la deuxième partie du théorème II au Chapitre IV se présente ici. La sphère $s^0(|a, \overline{a\mathrm{I}})$ est

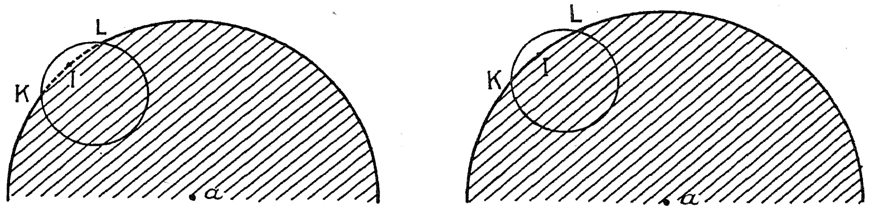


Fig. 10.

non connexe, le point I en formant un constituant, mais si peu qu'on augmente le rayon on obtient une sphère connexe; il apparaît en effet aussitôt une bande de points le long de KL et c'est cette bande qui assure entre le voisinage I et le reste de la sphère, une liaison qui ne pouvait être assurée par les points de KL $\left[\text{bien qu'ils fassent partie de } s(a, \overline{a\mathrm{I}})\right]$, puisqu'ils ne sont pas « voisins » de I.

III. — Rectification à la démonstration du théorème fondamental (§ 41).

Il suffit de démontrer que l'on a toujours

$$\mathrm{E}_{\overline{\alpha}} \subseteq \overline{\mathrm{E}_{\alpha}}.$$

Soit p un point de $\mathrm{E}_{\overline{\alpha}}$; s'il appartient à E_{α}, il appartient évidemment à $\overline{\mathrm{E}_{\alpha}}$; s'il appartient à $\mathrm{E}_{\overline{\alpha}} - \mathrm{E}_{\alpha}$, on aura

$$(p, \mathrm{E}) = \alpha,$$

et par conséquent, pour un point quelconque m de E,

$$pm \geqq \alpha.$$

Soit $\varepsilon(\delta)$ le module de quasi-convexité uniforme, et donnons-nous une suite de nombres δ_i inférieurs à α (ce qui suppose $\alpha \neq 0$) et tendant vers zéro. Posons $\varepsilon(\delta_i) = \varepsilon_i$. A chaque ε_i faisons correspondre un nombre positif ε'_i qui lui soit inférieur. Il existe dans E une suite de points m_i tel que

$$\alpha \leqq m_i p < \alpha + \varepsilon'_i.$$

En vertu de la quasi-convexité on pourra trouver une suite de points p_i tels que

$$pp_i < \delta_i,$$
$$m_i p_i < \alpha + \varepsilon'_i - \varepsilon_i < \alpha,$$

ce qui prouve que p appartient à E_α.