Annales scientifiques de l'É.N.S.

Henri Milloux

Sur la théorie des fonctions méromorphes dans le cercle unité

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 151-229
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__151_0>

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS MÉROMORPHES

DANS LE CERCLE UNITÉ

PAR M. HENRI MILLOUX

(Bordeaux).

INTRODUCTION.

Ce Mémoire comporte deux parties; la première traite de fonctions holomorphes ou méromorphes jouissant de propriétés spéciales; dans la deuxième, j'effectue certaines recherches sur les fonctions méromorphes les plus générales.

Première partie. — On sait que si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans le cercle unité, et ne prend ni la valeur 0 ni la valeur 1, elle satisfait à l'inégalité

$$\text{(E)} \qquad (1-r)\log|f(re^{i\omega})| < k\log|f(0)| + k,$$

où k désigne une constante numérique positive. C'est l'inégalité de Schottky-Landau, qui ne peut être améliorée. Remarquons ici que la fonction $f(z)$ est inférieure en module à $|f(0)|$ sur un arc de courbe issu de 0 et aboutissant à la frontière du cercle unité.

Supposons que la fonction $f(z)$, holomorphe dans le cercle unité, prenne n fois la valeur 0 et p fois la valeur 1, et conservons pour $|f(z)|$ une hypothèse de majoration analogue à la précédente; par exemple supposons que l'inégalité

$$|f(z)| < M$$

soit vérifiée sur un arc de courbe issu de o et traversant le cercle $|z| = \frac{1}{2}$.

En m'appuyant d'abord sur la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, ensuite sur le théorème de Boutroux-H. Cartan étendu à la métrique non euclidienne, enfin sur une conséquence de l'inégalité de Carleman, j'obtiens, pour la fonction $f(z)$ étudiée, une inégalité qui se ramène exactement à l'inégalité de Schottky-Landau lorsque n et p sont nuls (*voir* énoncé du théorème II).

Ce théorème de Boutroux-H. Cartan étendu à la métrique non euclidienne (*voir* Chapitre I, théorème B) joue ici un rôle fondamental, aussi heureux dans ses conséquences que le théorème de Boutroux-H. Cartan proprement dit l'a été pour certaines théories concernant les fonctions méromorphes dans le plan. Il permet en outre ici d'élargir l'hypothèse de majoration faite sur $f(z)$, de traiter aussi facilement le cas des fonctions méromorphes prenant n fois la valeur o, p fois la valeur 1 et q fois la valeur infinie (*voir* théorème II', n° 81), d'obtenir un énoncé (théorème III, n° 30) permettant d'attaquer quantitativement et d'*un point de vue finitiste* certains problèmes résolus qualitativement et *d'un point de vue infinitiste* par M. Paul Montel :

Rappelons que lorsque dans un domaine D une famille de fonctions holomorphes est quasi-normale d'ordre m, si chaque fonction est bornée en $m+1$ points, la famille est normale dans le domaine, donc chaque fonction est uniformément bornée dans tout domaine complètement intérieur; rappelons encore qu'une famille de fonctions holomorphes dans un domaine D, où chaque fonction de la famille prend n fois la valeur o et p fois la valeur 1, est une famille quasi-normale dont l'ordre m est le plus petit des nombres n et p.

Ici, l'intérêt se porte sur l'individu, et non sur la collectivité. La fonction $f(z)$ étant holomorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur o, p fois la valeur 1, on désigne par m le plus petit des nombres n et p, et l'on suppose $|f(z)|$ limité supérieurement par M en $m+1$ points fixes; je démontre qu'aussitôt les hypothèses font apparaître en conséquence *un petit arc de courbe sur lequel la fonction se trouve bornée*, de sorte que, immédiatement, nous voici ramenés à l'extension du théorème de Schottky-Landau. Dans la borne générale de $|f(re^{i\omega})|$ les influences de r et de la position des points où la fonction est supposée bornée semblent tout à fait satisfaisantes (*voir* théorème IV).

M. Paul Montel a généralisé la propriété rappelée plus haut; supposons que chaque fonction de la famille quasi-normale d'ordre m est uniformément bornée non plus en $m+1$ points, mais en moins de $m+1$, mais introduisons en ces points les dérivées successives de la fonction, et en les bornant de la même façon de manière que le nombre total des bornes soit encore $m+1$; M. Paul Montel démontre que la famille est encore normale. Ici, même succès, dans l'étude de chaque individu; même méthode de travail, qui consiste à faire apparaître un arc de courbe sur lequel la fonction est bornée (*voir* théorème V).

Au lieu de supposer simplement la fonction $f(z)$ bornée en les points d'un certain ensemble, on peut préciser cette hypothèse en admettant que la fonction $f(z)$ se rapproche beaucoup d'une valeur donnée α; on obtient alors une limitation de $f(z)-\alpha$ dans le cercle unité (*voir* théorème VI).

Le but de ces diverses recherches est la *limitation du module* de $f(z)$. Au Chapitre III pour les fonctions holomorphes, ou au Chapitre IV pour les fonctions méromorphes, je recherche, en conservant les hypothèses, une majoration de *l'indice caractéristique* $T(r, f)$. Les résultats obtenus sont tout à fait satisfaisants (*voir* l'énoncé du théorème VIII, n° 69).

Est-il vraiment si nécessaire de conserver toutes les hypothèses de majoration de $f(z)$, dans le cas d'une fonction méromorphe prenant n fois au plus chacune des valeurs $0, 1, \infty$, pour obtenir une majoration de l'indice caractéristique? Non, car si dans le cercle $|z|=\frac{1}{2}$ par exemple, la fonction f est inférieure à 1 sur un ensemble de points très réduit, on passe à la fonction $\frac{1}{f}$, laquelle est alors inférieure à 1 dans presque tout le cercle. On obtient ainsi une majoration de l'indice caractéristique valable dans des conditions plus générales (*voir* énoncé du théorème X, où les quantités $0, 1, \infty$ sont remplacées par a, b, c). On s'achemine ainsi vers la deuxième Partie.

Deuxième Partie. — Un premier Chapitre traite d'une majoration $n(r, \alpha)$ du nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans le cercle $|z| = r$, lorsque dans le cercle unité la fonction méromorphe φ prend m fois au plus chacune des trois valeurs a, b, c, dont les distances sphériques prises deux à deux sont au moins égales à δ (*voir* théorèmes XII et XII′, nos 99 et 102).

Au Chapitre II cette majoration est utilisée à l'étude des cercles de remplissage des fonctions méromorphes dans le cercle unité. Les résultats les plus saillants sont les suivants :

On sait qu'une fonction φ satisfait au théorème de Picard si elle satisfait à la condition

$$\overline{\lim} \frac{T(r, \varphi)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty.$$

Je démontre ici qu'elle admet une suite de cercles de remplissage vus du cercle unité sous des angles tendant vers zéro, et dans cette suite de cercles le théorème de Picard est vérifié, lorsque est réalisée la condition

$$\overline{\lim} \frac{T(r, \varphi)}{\log^2 \frac{1}{1-r}} = \infty.$$

Ce résultat est tout à fait analogue au résultat déjà connu des fonctions méromorphes dans le plan, où dans ce qui précède, l'expression $\log \frac{1}{1-r}$ est remplacée par $\log r$. Mais dans le plan, on connaît des exemples (fonctions d'Ostrowski) montrant qu'il est impossible d'obtenir mieux; pour les fonctions méromorphes dans le cercle unité, ces exemples, s'ils existent, sont encore à trouver; il semble même, pour diverses raisons, que l'analogie avec les résultats dans le plan n'est qu'apparente et due au genre de méthodes employées; la condition entraînant la véracité du théorème de Picard entraîne peut-être aussi l'existence des cercles de remplissage.

Pour les fonctions méromorphes d'ordre fini, certaines propriétés dues à M. G. Valiron sont retrouvées (*voir* notamment théorème XVI, n° 107); elles concernent le nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans chaque cercle de remplissage, et les rayons de ces cercles.

Enfin, l'étude des fonctions méromorphes φ d'ordre fini ρ (*voir* définition au n° 107) a conduit M. G. Valiron à démontrer l'existence sur le cercle unité de ce qu'il appelle un *point de Borel d'ordre* $\rho+1$, si $r(\alpha)$ désigne le module d'un zéro de $\varphi-\alpha$ situé au voisinage de ce point, la série

$$\Sigma[1-r(\alpha)]^{\rho+1-\varepsilon}$$

est divergente, sauf pour deux valeurs au plus de α.

M. Valiron appelle *point de Borel direct* un point A où la série précédente diverge (sauf au plus pour deux α) dans le voisinage de A, mais restreint à un angle de sommet A dont aucun côté n'est tangent au cercle unité. Il démontre que, dans ce cas, il existe une suite de cercles de remplissage tendant vers A, vus du cercle unité sous des angles tendant vers zéro, et dans l'ensemble desquels la série étudiée diverge toujours (sauf pour deux α au plus).

Les méthodes employées ici permettent non seulement de retrouver cette propriété, mais de l'étendre à une catégorie de points de Borel plus généraux que les points directs. En outre, pour les points non directs les plus généraux, je démontre l'existence d'une suite de cercles de remplissage où diverge la série

$$\Sigma[1-r(\alpha)]^{\rho-\varepsilon},$$

sauf pour deux valeurs au plus de α.

PREMIÈRE PARTIE.

AUTOUR DU THÉOREME DE SCHOTTKY-LANDAU.

CHAPITRE I.

MATÉRIAUX DE BASE.

1. Première base fondamentale. — Constituée par la deuxième inégalité de Rolf Nevanlinna. Nous la prendrons sous la forme précise suivante, donnée par M. G. Valiron [1] :

THÉORÈME A. — *Soit* $F(z)$ *une fonction méromorphe pour* $|z| \leqq R$; *on suppose* $F(0)$ *et* $F'(0)$ *différents de* 0 *et de* ∞; *et de plus* $F(0)$ *différent de* 1. *Alors l'indice caractéristique* $T(r, F)$ *satisfait, pour* r *inférieur à* R, *à l'inégalité*

$$(1) \qquad T(r, F) < 5\Big[N(R, 0) + N(R, 1) + N(R, \infty)\Big] + 405 + 10\overset{+}{\log}|F(0)| + 5\overset{+}{\log}\frac{1}{R|F'(0)|} + 14\overset{+}{\log}\frac{R}{R-r}.$$

2. Deuxième base fondamentale. — La théorie des fonctions méromorphes dans le plan est redevable de nombreuses et belles propriétés à une large utilisation du théorème de P. Boutroux-H. Cartan. Il s'agit du théorème suivant :

Soient dans le plan, n *points* P_i. *L'ensemble des points* M *du plan pour lesquels on a l'inégalité*

$$\Sigma \log MP_i \leqq n \log h,$$

peut être enfermé dans des cercles, qu'on peut supposer tous extérieurs les

---

[1] G. VALIRON, *Directions de Borel des fonctions méromorphes* [*Mémorial des Sciences mathématiques*, formule (12)]. Consulter ce livre pour la définition des indices employés ici.

uns aux autres, et dont la somme des rayons est inférieure à 2 *eh. Ces cercles sont appelés cercles d'exclusion. Ils sont en nombre au plus égal à n.*

Cette utilisation a été effectuée non seulement dans le plan, mais aussi sur la sphère de Riemann, lorsque l'on y a représenté les valeurs de la fonction méromorphe étudiée. Nous reprendrons ici accessoirement cette dernière utilisation. Il est superflu de démontrer le théorème de Boutroux-Cartan sur la sphère. Il résulte, soit par inversion, du théorème initial, soit par démonstration directe identique.

Ce que nous entendons ici par deuxième base fondamentale, c'est une propriété analogue au théorème de Boutroux-Cartan, mais établie *dans le domaine non euclidien que constitue l'intérieur du cercle unité.* Elle s'énonce ainsi :

Théorème B. — *Soient deux points* A *et* B *d'affixes x et y, intérieurs au cercle unité. On appelle pseudo-distance* (AB) *de ces deux points la quantité*

$$\left|\frac{x-y}{1-x\bar{y}}\right|,$$

et pseudo-rayon d'un cercle la pseudo-distance (constante) qui sépare le centre non euclidien de ce cercle d'un point quelconque du cercle.

Soient n points P_i intérieurs au cercle unité. L'ensemble des points M *(intérieurs au cercle unité) pour lesquels on a l'inégalité*

$$\Sigma \log(MP_i) \leqq n \log h,$$

peut être enfermé dans des cercles, tous intérieurs au cercle unité, qu'on peut supposer extérieurs les uns aux autres, et dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à 2 *eh. Ces cercles seront appelés aussi cercles d'exclusion. Ils sont en nombre au plus égal à n.*

Cette propriété jouera dans toutes les théories qui vont suivre, un rôle absolument capital. On trouvera la démonstration dans un récent mémoire [1].

---

(1) H. Milloux, *Sur une extension d'un théorème de P. Boutroux-H. Cartan* (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1937).

3. Nous utiliserons aussi la propriété suivante : *Toute couronne circulaire*

$$r' \leqq |z| \leqq r'',$$

satisfaisant à la condition

$$\frac{1-r'}{1-r''} \geqq \left[\frac{1+2eh}{1-2eh}\right]^2,$$

contient au moins un cercle de centre o, *dont tous les points sont hors des cercles d'exclusion.*

La démonstration se trouve dans le Mémoire qui vient d'être cité. Elle résulte de l'étude de la pseudo-distance des cercles de la couronne.

Application numérique. — Pour $h = \frac{1}{100}$, on trouve que la condition précédente est réalisée si $\frac{1-r'}{1-r''}$ dépasse ou atteint $\frac{5}{4}$.

4. Indiquons que le produit des quantités (MP_i) s'appelle aussi *produit de Blaschke* relatif aux points P_i, pour le point M.

5. Il n'est pas indifférent de signaler une autre démonstration, très simple, de cette deuxième base fondamentale, à partir du théorème de Boutroux-Cartan. Il est vrai que dans cette démonstration la somme des pseudo-rayons est majorée par kh, k étant une constante numérique supérieure à $2e$.

Voici cette démonstration :

Les pseudo-distances, pseudo-rayons ne sont pas modifiés par une transformation homographique du cercle unité sur lui-même.

Amenons le point M à l'intérieur du cercle $|z| = \frac{1}{2}$, et classons les P_i en deux groupes : ceux, en nombre m, intérieurs au cercle $|z| = \frac{3}{4}$, et les autres.

Lorsque l'un des points A ou B est intérieur au cercle $|z| = \frac{1}{2}$, le rapport de la pseudo-distance (AB) à la distance euclidienne est compris entre deux constantes numériques.

Pour le deuxième groupe de points P_i, on a donc :

$$(MP_i) > k,$$

constante numérique inférieure à 1 et positive.

D'où, pour tous les points M intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$ et ce deuxième groupe de points P_i,

$$\Sigma \log(MP_i) > p \log k \geqq n \log k.$$

Il nous reste à étudier le premier groupe. Il suffit de remarquer que si l'on applique le théorème de Boutroux-H. Cartan à ces points P_i, et pourvu qu'on choisisse h suffisamment petit, les cercles d'exclusion relatifs à ces points sont certainement intérieurs à un cercle intérieur au cercle unité, par exemple au cercle $|z| = \frac{7}{8}$.

Alors on a l'inégalité

$$\Sigma \log(MP_i) > m \log h \geqq n \log h,$$

sauf pour des points M intérieurs à ces cercles d'exclusion, dont la somme des rayons euclidiens n'atteint pas $2\,eh$.

Il ne reste plus qu'à noter que le rapport d'un rayon à un pseudo-rayon d'un tel cercle est compris entre deux constantes numériques positives, et la démonstration est achevée.

Pour limiter le nombre des cercles d'exclusion, même séparation en deux groupes et même conclusion.

6. **Troisième base fondamentale.** — Rappelons un théorème qui a rendu également d'importants services dans la théorie des fonctions méromorphes dans le plan, et principalement dans la théorie des fonctions entières :

THÉORÈME C. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et de module inférieur à 1. On suppose le module de $f(z)$ inférieur à m sur un arc de courbe issu de l'origine et gagnant la frontière du cercle. Alors dans le cercle $|z| = r$, on a l'inégalité*

$$\log|f(z)| < k(1-r)\log m; \tag{2}$$

k est une constante numérique positive, dont la valeur exacte est $k = \frac{1}{\pi}$ (1).

7. Corollaire. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe, privée de zéro et de module inférieur à 1 dans le cercle unité. Entre les valeurs de la fonction en deux points* A *et* B, *on a la double inégalité*

$$\frac{\pi}{1-(AB)} > \frac{\log|f(A)|}{\log|f(B)|} > \frac{1-(AB)}{\pi}.$$

En effet, les membres extrêmes de ces inégalités sont invariants dans toute transformation homographique du cercle sur lui-même. Si l'on amène par exemple B à l'origine, la pseudo-distance (AB) devient la distance euclidienne.

La fonction étant privée de zéro est inférieure en module à $|f(B)|$ sur un arc de courbe issu de B et gagnant la circonférence unité. Étant aussi inférieure en module à 1 dans le cercle unité, on retombe donc sur le théorème C.

CHAPITRE II.

FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE CERCLE UNITÉ, ET PRENANT n FOIS LA VALEUR 0 ET p FOIS LA VALEUR 1. LIMITATIONS DU MODULE.

8. Nous désignons par $P_i (i \leqq n)$ et $Q_j (j \leqq p)$ les points où la fonction considérée, $f(z)$, est égale respectivement à zéro et à 1. Les cercles d'exclusion relatifs aux P_i sont désignés par $\gamma(0, h)$; ceux des Q_j, par $\gamma(1, h)$.

Nous serons amenés ultérieurement à donner une valeur variable à h; mais pour le moment, fixons cette valeur à une constante numérique assez petite : prenons $h = \frac{1}{100}$.

---

(1) *Voir* E. Schmidt, *Über den Milloux schen Satz* (*Sitz. der Preuss. Ak. der Wiss. Phys. Math. klasse*, XXV, 1932).

Consulter le livre de R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Funktionen*, pour d'autres démonstrations.

Ainsi la somme des pseudo-rayons des $\gamma\left(0, \frac{1}{100}\right)$ est inférieure à $\frac{e}{50}$, de même que celle des $\gamma\left(1, \frac{1}{100}\right)$.

Nous aurons aussi à envisager les cercles d'exclusion relatifs à la fois aux points P et Q. Nous les désignerons par $\gamma(0, 1, h)$.

9. Nous considérons une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle unité, et de module inférieur à M sur un arc de courbe issu de O et aboutissant au cercle $|z| = \frac{1}{2}$. Nous nous proposons de *rechercher une limite supérieure de* $|f(z)|$ *dans le cercle de centre* O *et de rayons r*, et tout d'abord nous donnons à r une valeur numérique; pour fixer les idées, $r = \frac{8}{10}$.

Cette limitation a été résolue pour une valeur numérique plus faible (¹). Nous pourrions aussi nous servir de l'étude effectuée par M. G. Valiron, et qui donne une limitation pour r littéral (²). (Cette limitation va ici être largement dépassée.)

Comme nous allons souvent employer des raisonnements du genre qui va suivre, nous indiquerons rapidement les points essentiels de cette étude, qui va être reprise sur des bases élargies.

10. Un *premier cas* est celui où la fonction $f(z)$ a sa dérivée assez petite dans tout le cercle $|z| = \frac{8}{10}$. En particulier, si l'on suppose $|f'(z)|$ inférieur à 1, dans tout le cercle de centre O et de rayon $\frac{8}{10}$, $|f(z)|$ est inférieur à $M + 1$.

11. Dans le *deuxième cas*, le maximum du module de la dérivée est donc supérieur ou égal à 1 en un point x au moins, de module inférieur à $\frac{8}{10}$. Comme $f'(z)$ est holomorphe, cette propriété est réalisée sur un arc de courbe L issu de x et aboutissant au cercle

(¹) H. Milloux, *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52).

(²) *Voir* le fascicule du *Mémorial* déjà cité.

unité. Or, L traverse des régions hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0,1,\frac{1}{100}\right)$; et même pour être précis, et en utilisant l'application numérique du numéro 3, on constate qu'en un point au moins hors des $\gamma\left(0,1,\frac{1}{100}\right)$ et à une distance de l'origine moindre que 0,84, se trouve un point x' en lequel $|f'(z)|$ est supérieur à 1. Le cercle de centre O et de rayon x' ne se trouve rencontré par aucun cercle d'exclusion.

12. Sur l'arc de courbe issu de O, où $|f(z)|$ est inférieur à M, existent également des points situés à moins de 0,5 de l'origine, hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0,1,\frac{1}{100}\right)$. Notons en passant qu'il en est plus généralement ainsi si l'ensemble E des points A où $|f|$ est inférieur ou égal à M comprend des points, situés à moins de 0,5 de l'origine, ne pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons ne dépasse pas $\frac{2e}{100}$.

Nous désignons par x'' l'affixe de l'un de ces points et par x'_1 le point, de même module que x', ayant même argument que x''.

L'un des arcs $x'x'_1$ (de centre O) est inférieur à $\pi \times 0{,}84 < 3$.

Joignons $x''x'_1$. Ni l'origine, ni l'extrémité ne sont dans les cercles d'exclusion. Mais le segment $x''x'_1$ peut être rencontré par de tels cercles, qui, rappelons-le, sont extérieurs les uns aux autres. En cas de rencontre, on substitue à la corde intérieure l'arc du cercle d'exclusion le plus petit.

De la sorte, on bâtit un chemin qui va de x'' en x' en passant par x'_1, entièrement hors des cercles d'exclusion, et de longueur totale inférieure à 6.

Sur ce chemin, nous allons choisir, à partir de x'', le premier point, soit y, en lequel $|f'(z)|$ est supérieur ou égal à 1. Ce point peut être x''. Il peut être aussi x' ou tout point intermédiaire. En tous cas, en ce point y on a les deux inégalités

$$|f(y)| < M + 6, \qquad |f'(y)| \geqq 1.$$

Quitte à opérer une rotation, nous supposerons y réel et positif.

13. La transformation homographique

$$Z = \frac{z - y}{1 - zy}$$

amène y au centre du nouveau cercle unité; f est devenue F. L'origine du plan des Z est hors des cercles d'exclusion, correspondant après transformation aux anciens (leur rôle est évidemment invariant dans toute transformation du cercle unité sur lui-même, puisque les pseudo-distances sont elles-mêmes invariantes).

Or, on a

$$N\left(1, \frac{1}{F}\right) = \Sigma \log \frac{1}{OP'},$$

P′ désignant le transformé de P, point où f est nulle.

De même

$$N\left(1, \frac{1}{F-1}\right) = \Sigma \log \frac{1}{OQ'}.$$

D'où

$$N\left(1, \frac{1}{F}\right) + N\left(1, \frac{1}{F-1}\right) = \Sigma \log \frac{1}{OR'},$$

les R′ désignent les points P′ et Q′ réunis.

O étant hors des cercles d'exclusion, on a donc

$$N\left(1, \frac{1}{F}\right) + N\left(1, \frac{1}{F-1}\right) < (n+p) \log \frac{1}{h} = (n+p) \log 100 < 5(n+p).$$

14. Nous appliquons maintenant la formule (1) du théorème A en y faisant $R = 1$. Le calcul de $F'(O)$ donne $f'(y)(1-y^2)$, quantité dont le module est supérieur à 0,29. D'où, toutes réductions faites, l'inégalité

$$T(r, F) < 25(n+p) + 10 \overset{+}{\log} M + 14 \log \frac{1}{1-r} + 430. \tag{3}$$

15. F(Z) étant holomorphe, on sait que l'on a l'inégalité

$$T(r, F) > \frac{r - r'}{r + r'} \log M(r', F).$$

Choisissons r' de façon que $r - r'$ soit égal à $1 - r$ (ceci suppose r

supérieur à $\left.\frac{1}{2}\right)$. Il vient alors l'inégalité

$$(4)\quad (1-r')\log|F(r'e^{i\omega})| < 100(n+p) + 40\overset{+}{\log}M + 56\log\frac{1}{1-r'} + 1760.$$

15. Traduisons cette inégalité dans le plan z, de façon qu'elle s'applique à tout le cercle de centre O et de rayon 0,8, ce qui est notre but. On constate pour cela qu'il faut prendre

$$r' \geqq \frac{0,8+y}{1+0,8y},$$

y étant inférieur à 0,84, on trouve que cette condition est réalisée si l'on prend $1-r' = \frac{1}{52}$, ce qui conduit au :

Théorème I. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur* 0 *et p fois la valeur* 1. *On suppose que dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$,* les *points où l'on a l'inégalité*

$$|f(z)| \leqq M,$$

ne peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'atteint pas $\frac{2e}{100}$ (exemple : points situés sur un arc de courbe issu de O *et atteignant la circonférence $|z| = \frac{1}{2}$.*

Alors on a, dans le cercle $|z| = 0,8$, l'inégalité

$$(5)\qquad \log|f(z)| < k_1(n+p) + k_2\overset{+}{\log}M + k_3.$$

On peut prendre $k_1 = 5200$, $k_2 = 2080$, $k_3 = 140000$.

En désignant par k une constante *numérique* qui n'a pas nécessairement, partout où elle figure, la même valeur, on peut écrire simplement

$$\log|f(z)| < k(n+p) + k\overset{+}{\log}M + k.$$

16. Remarquons que dans l'hypothèse, on peut supposer *a fortiori* $|f(z)| \leqq M$ sur un arc de courbe issu de O et aboutissant à la frontière du cercle unité.

Si l'arc est issu de A (et toujours aboutit au cercle unité), alors *l'inégalité* (5) *est encore valable dans le cercle de centre non euclidien* A *et de pseudo-rayon* o,8.

Démonstration en faisant la transformation homographique amenant A à l'origine.

17. Reprenons notre fonction $f(z)$ inférieure en module à M, sur un arc de courbe issu de O et aboutissant à la circonférence $|z| = \frac{1}{2}$.

Nous allons rechercher maintenant une limitation de $|f(z)|$ valable dans le cercle de centre O et de rayon r supérieur à o,8.

Sur ce cercle la fonction $\log|f(z)|$ prend des valeurs dont le maximum est désigné par μ; ce maximum est atteint en un point S. Bien entendu, nous ne nous intéressons qu'au cas où μ est déjà supérieur au deuxième membre de l'inégalité (5).

Log $|f(z)|$ est supérieur à μ sur un arc de courbe L issu de S et aboutissant à la frontière du cercle unité.

18. a_i désignant un zéro de $f(z)$, en même temps que cette fonction, nous considérerons les fonctions $g(z)$ et $h(z)$ définies par

$$f = g\Pi \frac{z - a_i}{1 - z\bar{a}_i}, \qquad gh = 1.$$

Le module de f est inférieur ou égal à celui de g. Une autre comparaison en sens inverse est possible hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(o, \frac{1}{100}\right)$. En effet, à l'extérieur de ces cercles, le produit de Blaschke $\left(\frac{f}{g}\right)$ relatif aux a_i est supérieur en module à $n \log \frac{1}{100}$, donc *a fortiori* à $5n$.

Dans cet extérieur, on a donc l'inégalité

$$\log|f| > \log|g| - 5n.$$

Considérons les cercles de centre non euclidien S. Désignons par (B) le plus grand cercle à l'intérieur duquel on a l'inégalité

$$\log|h(z)| < -\alpha.$$

α est une quantité positive qui sera bientôt choisie. En dehors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0; \frac{1}{100}\right)$ et dans le cercle (B), on a donc l'inégalité

$$\log|f(z)| > \alpha - 5n.$$

Rappelons que $|f(z)|$ est inférieur à M sur un arc de courbe issu de o et traversant le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, de plus, que des points de cet arc sont nécessairement hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0; \frac{1}{100}\right)$. Donc *il y a impossibilité avec l'inégalité précédente si*

1° le cercle (B) contient le cercle $|z| = \frac{1}{2}$;

2° α est égal à $5n + \overset{+}{\log} M$.

Conservons cette valeur de α et désignons par ρ le pseudo-rayon du cercle (B). Il est donc nécessaire que le cercle (B) ne contienne pas le cercle $|z| = \frac{1}{2}$; par suite, que l'on ait l'inégalité

$$\rho < \frac{2r + 1}{2 + r}.$$

Et par suite $1 - \rho$ doit être supérieur à $\frac{1 - r}{2 + r}$ et *a fortiori* à $\frac{1 - r}{3}$.

20. Ce cercle (B) satisfait encore à la propriété suivante : en un point A de sa frontière, $\log|h(z)|$ est égal à $-\alpha$; $h(z)$ étant holomorphe, on a l'inégalité

$$\log|h(z)| \geqq -\alpha$$

sur un arc de courbe L' issu de A et rejoignant le cercle unité. La même inégalité a lieu si l'on substitue à h la fonction $\frac{1}{f}$, qui lui est supérieure en module. D'où, sur L', l'inégalité

$$\log|f(z)| < 5n + \overset{+}{\log} M.$$

Cette inégalité nous permet d'appliquer le théorème I, par l'intermédiaire de la remarque du numéro 16 : ainsi, *dans le cercle de centre non euclidien* A et de pseudo-rayon 0,8, on a l'inégalité

$$\log|f(z)| < [k_1(n + p) + 5k_2 n] + k_2 \overset{+}{\log} M + k_3. \tag{6}$$

Nous sommes amenés à faire une nouvelle hypothèse sur μ, valeur de $\log|f(z)|$ en S : nous supposons que μ *est au moins égal au deuxième membre de l'inégalité* (6). Alors, en conséquence, *le cercle de centre non euclidien* A *et de pseudo-rayon* 0,8 *ne peut atteindre* S.

Autrement dit *la pseudo-distance* (AS) *surpasse* 0,8.

21. Opérons la transformation homographique du cercle unité du plan z sur le cercle unité du plan Z, de façon que S vienne à l'origine du nouveau plan. Le cercle (B) devient un cercle (B′) de centre origine; son rayon est précisément ρ; c'est une quantité supérieure à 0,8; mais $1-\rho$ est supérieur à $\frac{1-r}{5}$.

Soit H(Z) la transformée de $h(z)$. *Dans le cercle* (B′), *d'après l'hypothèse effectuée au début du numéro* 19, *on a*

$$\log|H(z)| < -\alpha.$$

D'autre part, sur l'arc L issu de S et joignant le cercle unité, $\log|f(z)|$, et par suite $-\log|h(z)|$, est supérieur à μ. *Donc sur un arc de courbe issu de la nouvelle origine et gagnant le nouveau cercle unité, on a l'inégalité*

$$\log|H(Z)| < -\mu.$$

L'ensemble de ces deux propriétés de la fonction H(Z) permet l'application du théorème C (troisième base fondamentale du Chapitre I) à la fonction He^{α}.

Translatons l'inégalité (2) en y faisant $r=\lambda$, à la fonction H, et nous obtenons le résultat suivant :

Dans le cercle $|Z|=\lambda\rho$, la fonction H(Z) satisfait à l'inégalité

$$\log|H| < -\left[1-\frac{1}{\pi}(1-\lambda)\right]\alpha-\frac{1}{\pi}(1-\lambda)\mu, \tag{7}$$

μ est nettement supérieur à α.

22. En particulier, cette inégalité (7) est vérifiée au point D′ le plus proche de A′, lequel est l'homologue de A.

Quelle est la pseudo-distance (A′ D′) ? C'est

$$\frac{\rho-\rho\lambda}{1-\lambda\rho^2}.$$

Et maintenant, *choisissons l'indéterminée* λ *de façon que cette pseudo-distance soit* $\frac{1}{2}$. On trouve ainsi

$$1-\lambda = \frac{1-\rho^2}{2\rho-\rho^2} > 1-\rho > \frac{1-r}{3}.$$

L'inégalité (7) entraine alors comme conséquence :

$$\log|H| < -\left[1-\frac{1-r}{3\pi}\right]\alpha - \frac{1-r}{3\pi}\mu < -\frac{1-r}{3\pi}\mu. \tag{8}$$

Dans le passage du plan z au plan Z, f est devenue F. Les cercles d'exclusion se correspondent; $\log|F|$ est supérieure à $\log\frac{1}{|H|} - 5n$, hors de ces cercles d'exclusion. Par suite, dans le cercle (B_1), mais hors des cercles d'exclusion, on a l'inégalité

$$\log|F| > \frac{1-r}{3\pi}\mu - 5n. \tag{9}$$

23. *Je dis qu'il y a des points Z en lesquels cette inégalité est vérifiée, et qui sont à une pseudo-distance de* A′ *inférieure à* 0,8.

La vérification est aisée; quitte à faire tourner le plan, on peut supposer l'affixe de A′ réelle et positive. Elle est alors égale à ρ; celle de D′, point d'affixe réelle et positive du cercle (B_1), est $\lambda\rho$. La pseudo-distance (A′D′) est, par définition de λ, égale à $\frac{1}{2}$. Désignons par E′ le point de l'axe réel situé à gauche de D′, ayant comme définition d'être à une pseudo-distance de A′ égale à 0,8. Sans effectuer de vérification élémentaire, on peut s'appuyer sur le fait (démontré dans le Mémoire déjà cité au début) que si 3 points sont alignés sur un rayon dans l'ordre E′D′A′, on a

$$(E'A') < (E'D') + (D'A').$$

Par suite (E′A′) est supérieur à 0,3. Fait qu'il est facile d'ailleurs de vérifier directement.

Or, la somme des pseudo-rayons des cercles d'exclusion n'excède pas $\frac{2e}{100}$, quantité nettement inférieure à 0,3. Il y a donc des points de E′A′ hors des cercles d'exclusion, ce qui démontre la propriété annoncée.

24. Dans ces conditions, on a pour ces points :

1° l'inégalité (9);

2° une inégalité résultant de ce que la pseudo-distance à A′ est inférieure à 0,8, c'est-à-dire l'inégalité (6) translatée au plan Z.

On s'aperçoit de suite que ces inégalités ne sont compatibles que si l'on a

$$k_1(n+p)+5k_2n+k_2\overset{+}{\log}\,\mathrm{M}+k_3>\frac{1-r}{3\pi}\mu-5n.$$

Ou, plus simplement,

$$(1-r)\mu<k'_1(n+p)+k'_2\overset{+}{\log}\,\mathrm{M}+k'_3;$$

k'_1, k'_2 et k'_3 sont des constantes numériques positives.

25. Résumons dans l'énoncé fondamental suivant :

Théorème II. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur* 0 *et p fois la valeur* 1. *On suppose que $|f(z)|$ est inférieur à* M *sur un arc de courbe issu de* 0 *et gagnant la frontière du cercle $|z|=\frac{1}{2}$, ou plus généralement que les points où $|f(z)|$ est inférieur à* M *dans ce cercle $|z|=\frac{1}{2}$ ne peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'atteint pas $\frac{2e}{100}$. Alors dans le cercle $|z|=r$, on a l'inégalité*

$$(1-r)\log|f(z)|<k'_1(n+p)+k'_2\overset{+}{\log}\,\mathrm{M}+k'_3; \tag{10}$$

k'_1, k'_2, k'_3 sont des constantes *numériques* positives.

26. On peut aussi indiquer que si la courbe où $|f(z)|$ est inférieure à M part d'un point A et aboutit au cercle unité, en désignant par x l'affixe de A, par y l'affixe d'un autre point et par d la pseudo-distance (x, y), *la quantité* $(1-d)\log|f(y)|$ *est majorée par le deuxième membre de l'inégalité* (10).

27. Faisant $n=p=0$, *on reconnaît ici, dans l'inégalité* (10) *aux coefficients numériques près, le théorème de Schottky-Landau.*

C'est la première fois, semble-t-il, que ce théorème est retrouvé avec, comme point de départ, la deuxième inégalité fondamentale de Rolf Nevanlinna.

Signalons que M. G. Valiron avait déjà obtenu une limitation portant sur une puissance de $1-r$ plus élevée (*voir* le fascicule du *Mémorial* déjà cité).

28. En somme, on peut prendre pour M le minimum du module de la fonction $f(z)$ dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$ hors des cercles d'exclusion

$$\gamma\left(0, 1; \frac{1}{100}\right),$$

et l'inégalité (10) est encore valable. Sous cette forme, on peut énoncer le théorème II un peu différemment :

THÉORÈME II (forme plus générale). — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur* 0 *et p fois la valeur* 1. *On désigne par $\gamma\left(0, 1; \frac{1}{100}\right)$ les cercles d'exclusion relatifs à ces points où $f(z)$ est égale à* 0 *ou à* 1. *Soient x et y deux points quelconques, et $M(x)$ la borne inférieure de $|f(z)|$ dans le cercle de centre non euclidien x et de pseudo-rayon $\frac{1}{2}$, et hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1; \frac{1}{100}\right)$. On désigne enfin par d la pseudo-distance (xy). Alors on a l'inégalité*

$$(10') \qquad (1-d)\log|f(y)| < k_1'(n+p) + k_2' \overset{+}{\log} M(x) + k_3'.$$

Si x et y sont tous les deux hors des cercles d'exclusion, on peut remplacer $M(x)$ par $|f(x)|$, et l'on a ainsi une double inégalité enserrant $|f(y)|$ par rapport à $|f(x)|$ et à d.

29. **Extensions du théorème II.** — Nous allons passer à l'examen du cas où les points A où $|f(z)|$ ne dépasse pas M sont situés dans le cercle de centre 0 et de rayon littéral u; on désigne par m le plus petit des nombres n, p, et l'on suppose que les points A *ne peuvent être inclus*

dans des circonférences, en nombre m au plus, dont la somme des pseudo-rayons ne dépasse pas 2 *eh*.

Notre intention est de démontrer qu'au fond, malgré la disssemblance, en modifiant convenablement M et l'origine, on se retrouve dans le cas du théorème II.

Quitte à changer f en $1-f$, ce qui revient à remplacer M en $1+M$, on peut supposer $m=n$.

On considère le produit de Blaschke $g(z)$ relatif aux zéros a_i de la fonction considérée, c'est-à-dire la fonction

$$g(z)=\prod \frac{z-a_i}{1-z\bar{a}_i}.$$

On pose

$$f(z)=g(z)\,\varphi(z).$$

On a l'inégalité

$$\log|g(z)|>n\log h,$$

sauf en des points pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $2eh$. Donc, dans le cercle $|z|=u$, existe un point A où l'inégalité précédente est vérifiée, alors que $|f(z)|$ est inférieur ou égal à M. Par suite, en ce point, on a

$$\log|\varphi(z)|<\log M-n\log h=\log M'.$$

Cette inégalité est vérifiée non seulement en A, mais encore sur tout un arc de courbe issu de A et aboutissant au cercle unité, ce qui conduit à une limitation de $|f(z)|$, car partout le module de $f(z)$ est inférieur ou égal à celui de $\varphi(z)$. On applique alors le théorème II.

L'énoncé suivant est valable à la fois pour la fonction f et la fonction $f_1=1-f$.

30. Théorème III. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité, et y prenant n fois la valeur* 0, *p fois la valeur* 1; *on désigne par m le plus petit des nombres n, p. On suppose que $|f|$ ne dépasse pas* M *en des points intérieurs au cercle $|z|=u$, qu'il est impossible d'enfermer en des cercles en nombre au plus égal à m, et dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $2eh$.*

Alors dans le cercle $|z|=u$ se trouve un point d'affixe y, tel que dans la circonférence de centre non euclidien y et de pseudo-rayon d, on a *l'inégalité*

$$(11) \qquad (1-d)\log|f(z)| < k(n+p) + k\overset{+}{\log}\,M + k - km\log h.$$

Les k sont toujours numériques.

A fortiori, on a aussi l'inégalité

$$(11') \quad (1-|z|)(1-u)\log|f(z)| < k(n+p) + k\overset{+}{\log}\,M + k - km\log h.$$

31. Attaquons des problèmes déjà résolus qualitativement par M. Paul Montel, à l'aide de la théorie des familles normales ou quasi-normales de fonctions.

Commençons par un problème, que M. G. Valiron a déjà étudié dans le fascicule du *Mémorial* cité plus haut; la solution et les résultats qui vont suivre sont plus simples et plus précis; l'énoncé de ce problème est le suivant :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et prenant n fois la valeur 0 *et p fois la valeur* 1. *On se donne la borne de la fonction en $m+1$ points fixes intérieurs au cercle $|z| = u$; m est le plus petit des nombres n, p. Trouver une limite supérieure de $|f(z)|$.*

Quitte à changer f en $1-f$, on peut supposer m égal à n. Désignons par A les $n+1$ points fixes où l'on sait que $|f(z)|$ est inférieur à M. Nous désignerons par δ la plus petite pseudo-distance de deux points A.

Les cercles de centres non euclidiens A et de pseudo-rayon $\frac{\delta}{2}$ sont tous extérieurs les uns aux autres. Cela résulte de ce que si deux cercles sont tangents entre eux extérieurement, ou sécants, la pseudo-distance de leurs centres est inférieure à la somme de leurs pseudo-rayons (*voir* Mémoire cité du *Bull. de la Soc. Math.*, ou appliquer la propriété rappelée ici au n° 23).

32. Donc l'un de ces cercles (qui sont au nombre de $n+1$), ne contient pas de zéro de la fonction f. Désignons-le par C. Sur une courbe L issue de son centre, et aboutissant à la frontière de C, $|f(z)|$ est inférieur à M. La courbe L ne pourra jamais être englobée dans un

cercle dont le diamètre est inférieur au rayon de C, c'est-à-dire à $\frac{\delta}{2}$ ([1]). En appliquant la propriété rappelée au n° 23, on constate de suite que ce pseudo-rayon est supérieur ou égal à $\frac{\delta}{4}$ (il y a égalité lorsque le centre est en o); δ est inférieur à 1.

Remarquons de plus que l'arc de courbe L peut sortir du cercle $|z| = u$; on peut le restreindre à l'intérieur du cercle $|z| = u'$, avec

$$1 - u' = \frac{1-u}{2}.$$

Ceci fait, on constate que les fonctions f et $1-f$ sont justiciables du théorème III. D'où le

Théorème IV. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et y prenant n fois la valeur* o *et p fois la valeur* 1. *Soit m le plus petit des nombres n, p. Si $|f(z)|$ est inférieur à* M *en $m+1$ points fixes* A *intérieurs au cercle $|z| = u$, et dont les pseudo-distances deux à deux sont au moins égales à δ, on a l'inégalité*

$$(12) \quad (1-u)(1-|z|)\log|f(z)| < k(n+p) + k\overset{+}{\log}\,\mathrm{M} + k - km\log\delta;$$

k est une constante numérique positive, qui n'a pas partout la même valeur.

Remarque. — D'une façon plus précise, on peut remplacer le premier membre de (12) par $(1-d)\log|f(z)|$, où d désigne la pseudo-distance de z à un point situé à une distance du cercle unité au moins égale à $\frac{1-u}{2}$.

33. Ce théorème IV contient et précise considérablement, en les simplifiant, les résultats fondamentaux de la thèse de M. L.-C. Bossard ([2]).

([1]) Rappelons que si un ensemble E est continu, et si des cercles C' l'englobent, on peut toujours trouver un cercle unique C englobant E, et dont le pseudo-rayon est inférieur à la somme des pseudo-rayons des cercles C' (*voir* Mémoire cité du *Bull. de la Soc. Math.*).

([2]) L.-C. Bossard, *Ueber den verallgemeinerten Schottkyschen Satz und seine Anwendungen*, Zurich, 1936.

34. Guidé par la théorie des familles normales ou quasi-normales de fonctions [1], je passerai ensuite au cas suivant : le nombre des points, où la fonction est supposée bornée, est inférieur à $m+1$, mais les dérivées entrent en jeu. Pour dégager cette étude, plus compliquée que la précédente, nous traiterons d'abord le problème suivant :

Soit $F(Z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité du plan Z, et y prenant au plus q fois la valeur zéro. On suppose que $|F(Z)|$, ainsi que les q premières dérivées, prises à l'origine, sont limitées supérieurement par M. Il s'agit de montrer que sur un arc de courbe non négligeable L, la fonction est encore bornée.

Traçons les cercles de centre o et de rayons respectifs o, $\frac{1}{q+1}$, $\frac{2}{q+1}$, ..., 1. Ils découpent $q+1$ couronnes circulaires (la première est un cercle), donc l'une d'elles ne contient pas de zéro de la fonction $F(Z)$.

35. Un premier cas, particulièrement favorable, est celui où il s'agit du premier cercle. Alors $|F(Z)|$ reste inférieur à $|F(0)|$, donc à M, sur un arc de courbe L issu de o et aboutissant à la frontière du domaine.

Retenons que L ne peut pas être englobé dans un cercle de diamètre inférieur à $\frac{1}{(q+1)}$.

36. Écartons ce cas, de sorte qu'il y a au moins un zéro de F dans le premier cercle. Désignons par C' et C'' le plus petit et le plus grand cercle de la couronne ne contenant pas de zéro de F; par Γ le cercle médian de cette couronne, par M' la borne inférieure de $|F|$ sur Γ, par q' le nombre (au moins égal à 1 et au plus à q) de zéros de F intérieurs à C' (c'est-à-dire à C''), et considérons le polynome

$$P(Z) = (Z - a_1) \dots (Z - a_{q'}),$$

s'annulant aux zéros de F intérieurs à C'.

---

[1] P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques*, (Gauthier-Villars, 1927; collection Borel). Voir p. 71.

Le rapport $\frac{P}{F}$ est holomorphe et privé de zéro dans le cercle C''. Il sera désigné par φ.

Dans tout le cercle C'', $|P|$ est inférieur à $2^{q'}$; et sur tout le cercle Γ, $|F|$ est supérieur à M'. Donc sur Γ, on a l'inégalité

$$\log|\varphi| < q'\log 2 - \log M' = \log m.$$

Cette inégalité permet d'obtenir, à l'aide des intégrales de Cauchy, des limitations des modules de φ et de ses dérivées successives à l'origine. Notons pour cela que le rayon de Γ est minimum lorsque la couronne $C'C''$ est la première couronne circulaire (véritable), et que dans ce cas, il est égal à $\frac{3}{2(q+1)}$. On a alors l'inégalité

$$(13) \qquad |\varphi^{(k)}(0)| < m.\left[\frac{2(q+1)}{3}\right]^k.$$

37. De l'égalité $P = \varphi F$, et du fait que F et ses q premières dérivées sont bornées par M à l'origine, on déduit, après application de l'inégalité (13), une suite de bornes de P et de ses q premières dérivées à l'origine. En particulier, la dérivée d'ordre $q'(q' \leqq q)$ est limitée snpérieurement par

$$M m\left[1 + \frac{2(q+1)}{3}\right]^{q'}.$$

Or, cette dérivée est précisément q' ! D'où l'inégalité

$$\log M' < q'\log 2 + q'\log\left[1 + \frac{2(q+1)}{3}\right] + \log M - \log q'!$$

La somme du deuxième et du quatrième terme du deuxième membre est inférieure à $1 + \frac{2(q+1)}{3}$; q' est inférieur ou égal à q, et q est supérieur ou égal à 1. On peut écrire plus simplement l'inégalité

$$(14) \qquad \log M' < 4q + \log M.$$

38. La borne inférieure de $|F(Z)|$ sur le cercle Γ est atteinte en un point S, point de départ d'un arc de courbe L atteignant la frontière de la couronne envisagée, et sur lequel $\log|F|$ est inférieur à $\log M'$,

donc à $4q + \log M$; car F n'a pas de zéro dans la couronne. Notons que L ne peut être enfermé dans un cercle de diamètre $\frac{1}{2(q+1)}$.

39. On peut résumer les résultats obtenus depuis le n° 34 dans le

Lemme. — *Soit* $F(Z)$ *une fonction holomorphe dans le cercle unité et y prenant au plus* q *fois la valeur zéro. On suppose que les modules de* F *et de ses* q *premières dérivées sont inférieurs à* M *à l'origine. Alors on a l'inégalité*

$$\log |F(Z)| < \log M + 4q$$

sur un arc de courbe L *ne pouvant être enfermé dans un cercle de diamètre* $\frac{1}{2(q+1)}$.

40. Abordons maintenant l'étude annoncée, celle d'une fonction $f(z)$ holomorphe dans le cercle unité, prenant n fois la valeur 0 et p fois la valeur 1. On désigne par m le plus petit des nombres n, p. On suppose l'existence d'un certain nombre de points $A_1 A_2 \ldots$ tous intérieurs au cercle $|z| = u$, en lesquels on a respectivement :

en A_1 : F et ses q_1 premières dérivées limitées supérieurement en module par M;

en A : F et ses q premières dérivées limitées supérieurement en module par M;

etc., avec la condition

$$(q_1+1) + (q_2+1) + \ldots = m+1.$$

On désigne par δ la plus petite pseudo-distance de deux points A, et l'on considère les cercles C de centres non euclidiens A et de pseudo-rayons $\frac{\delta}{2}$. Ces cercles sont tous extérieurs les uns aux autres.

Il résulte de cette hypothèse que l'un deux, de centre non euclidien, A_1 par exemple, contient au plus q_1 zéros de la fonction f. On désigne par x l'affixe de ce point A_1, qu'on peut supposer réelle et positive, et dans la transformation

$$y = \frac{z-x}{1-zx},$$

on ramène A_1 à l'origine du plan y; (C) devient un cercle de centre O et de rayon $\frac{\delta}{2}$; f est devenue une fonction $g(y)$; $g(0)$ est égale à $f(A_1)$. Que sont devenues les dérivées ?

On a

$$g'(0) = (1-x^2)\ f'(A_1),$$
$$g''(0) = (1-x^2)^2 f''(A_1),$$

etc., ce qui montre que les dérivées de la fonction g à l'origine sont encore, jusqu'à la q_1-ième, limitées supérieurement par M.

41. On passe ensuite au cercle unité du plan Z en posant

$$Z = y\,\frac{2}{\delta}.$$

La fonction $g(y)$ devient F(Z), et les dérivées de F à l'origine sont inférieures en module à celles de $g(y)$, donc à M, pour les q_1 premières. A cette fonction F(Z) peut être appliqué le lemme énoncé au n° 39. Notons que l'arc L′ du plan y correspondant à l'arc L dont il s'agit dans ce lemme, ne peut être enfermé dans une circonférence de diamètre $\frac{\delta}{4(q_1+1)}$. En appliquant ce qui a été dit au n° 32 on constate *qu'on ne peut enfermer* L′ *dans un cercle dont le pseudo-rayon est inférieur à* $\frac{\delta}{8(q_1+1)}$.

42. Cette propriété se transmet lorsqu'on repasse au plan z, ce qui permet d'énoncer la propriété intermédiaire suivante :

Dans le plan z il existe un arc de courbe l ne pouvant être enfermé dans un cercle de pseudo-rayon inférieur à $\frac{\delta}{8(q_1+1)}$, *et issu d'un point intérieur au cercle* $|z| = u$; *donc on peut le limiter à l'intérieur du cercle* $|z| = u'$ *avec* $1-u' = \frac{1}{2}(1-u)$. *Sur cet arc, on a l'inégalité*

$$\log|f(z)| < 4q_1 + \log M < 4m + \log M < 2(n+p) + \log M.$$

43. Alors la fonction f est à nouveau justiciable (de même que $1-f$) du théorème III. D'où le

Théorème V. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle* *unité, et y prenant n fois la valeur zéro et p fois la valeur un. On désigne par m le plus petit des nombres n, p. On suppose que dans le cercle* $|z| = u$, *en certains points* $A_1 A_2 \ldots$ *dont les pseudo-distances sont au moins égales à* δ, *la fonction f, ainsi respectivement que ses* q_1 *premières dérivées (en* A_1*),* q_2 *en* (A_2)*, etc., sont limitées supérieurement par* M. *Le nombre des points* A_i *et les nombres* q_i *sont régis par la loi*

$$\Sigma(q_i + 1) = m + 1,$$

et l'on désigne par q le plus grand des nombres q_i.

Alors la fonction $f(z)$ *satisfait à l'inégalité*

$$(14)\quad (1 - |z|)(1 - u)\log|f(z)| < k(n+p) + k\overset{+}{\log} M - km\log\delta + km\log q + k,$$

où k désigne une constante numérique positive (qui n'a pas partout la même valeur).

Remarque I. — On peut encore remplacer le premier membre par

$$(1 - d)\log|f(z)|,$$

comme dans la remarque du théorème IV.

Remarque II. — On peut simplifier le deuxième membre de l'inégalité (14) en remplaçant q par m.

44. Il est possible d'indiquer encore des cas simples dans lesquels le théorème III s'applique.

Supposons par exemple que le nombre n des zéros soit différent de p. Alors il existe un cercle de centre O et de rayon u inférieur à un, tel que, à partir de $|z| = r$ supérieur à u, le nombre des zéros de $f(z)$ est différent du nombre des zéros de $f(z) - 1$.

Il en résulte que sur ce cercle, *le minimum du module de* $f(z)$ *est inférieur à* 1. Sinon, d'après le théorème de Rouché, le nombre des zéros de $f(z)$ et de $f(z) - 1$ serait le même à l'intérieur du cercle $|z| = r$.

Donc, *on peut appliquer le théorème* III, en remplaçant u par $u' = 1 - \frac{1-u}{2}$, et en faisant h numérique $\left(h = \frac{1}{4e}\right)$, ce qui conduit à l'inégalité très simple :

$$(1-|z|)(1-u)\log|f(z)| < k(n+p)+k,$$

où l'on peut remplacer le premier membre par l'expression plus précise

$$(1-d)\log|f(z)|,$$

d a la même signification que dans la remarque du théorème IV.

45. Au lieu de supposer simplement que $|f(z)|$ est inférieur à M en certains points, nous allons préciser en supposant de plus que $f(z)$ se rapproche beaucoup d'une valeur α; nous précisons en indiquant que $|f(z)-\alpha|$ est inférieur à ε en des points A intérieurs au cercle de centre O et de rayon u, ces points ne pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $2eh$.

46. Tout d'abord, rappelons le théorème suivant [1], généralisant le théorème C :

Soit $F(z)$ *une fonction holomorphe et de module inférieur à* 1 *dans le cercle unité. Si dans le cercle* $|z|=u$, *les points où la fonction* $F(z)$ *vérifie l'inégalité*

$$\log|F| < -\mu$$

ne peuvent être enfermés dans des cercles dont la somme des rayons est égale à $2eh'$, *on a l'inégalité*

$$\log|F(z)| < \frac{k\mu(1-u)(1-|z|)}{\log h'}.$$

k est une constante numérique positive.

La même propriété a évidemment lieu si, au lieu de rayon, on dit : pseudo-rayon. En effet, le pseudo-rayon d'un cercle est toujours au plus égal à son rayon.

47. Reprenons notre fonction $f(z)$ du n° 45. Elle est justiciable du théorème III, lorsque l'on remplace M par $|\alpha|$. Donc elle satisfait

---

(1) H. MILLOUX, *Sur certaines fonctions holomorphes et bornées dans un cercle* (*Mathematica*, vol. IV, p. 182-185).

à l'inégalité (11′) que nous prenons, pour sa simplicité, de préférence à l'inégalité plus précise (11).

Cette inégalité nous fournit une limitation de $|f(z)|$, et par suite de $|f(z)-\alpha|$, dans le cercle de ce centre O et de rayon R inférieur à 1. Dans ce cercle nous avons ainsi l'inégalité

$$\log|f(z)-\alpha| < \frac{k(n+p)+k\overset{+}{\log}|\alpha|+k-km\log h}{(1-R)(1-u)} = \log M',$$

où m est le plus petit des nombres n et p.

48. Il nous reste à poser $F(z)=\dfrac{f(z)-\alpha}{M'}$ pour pouvoir appliquer le théorème rappelé au n° 46. Ce théorème s'applique non plus dans le cercle unité, mais dans le cercle de centre O et de rayon R. On peut cependant y remplacer h' par h, car, effectivement, si l'on fait de ce dernier cercle, par homothétie un cercle unité, h' est *supérieur à* h. μ est remplacé par $-\log\dfrac{\varepsilon}{M'}$.

D'autre part, $|z|$ étant inférieur ou égal à r, nous choisirons R égal à $\dfrac{1+r}{2}$. De la sorte, on obtient le théorème suivant :

Théorème VI. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et y prenant n fois la valeur* 0 *et p fois la valeur* 1. *On désigne par m le plus petit des nombres n, p. On suppose que dans le cercle* $|z|=u$, *il existe des points* A, *ne pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons ne dépasse pas* 2 *eh, en lesquels* $|f(z)-\alpha|$ *est inférieur à* ε. *Alors, dans le cercle* $|z|=r$, *on a l'inégalité*

$$(15)\quad \log|f(z)-\alpha| < k'\frac{(1-u)(1-r)\log\varepsilon}{\log\frac{1}{h}} + \left[1-\frac{k'(1-u)(1-r)}{\log\frac{1}{h}}\right] \frac{k(n+p)+k\overset{+}{\log}\alpha+k-km\log h}{(1-r)(1-u)},$$

k est une constante numérique positive qui n'a pas partout la même valeur; k' en est une autre, mais qui a la même valeur aux deux endroits où elle figure. On peut simplifier l'inégalité (15) en remplaçant par l'unité le crochet du deuxième membre.

49. Si l'on imagine une suite de fonctions f_1, f_2, ..., f_q, ..., satisfaisant chacune aux conditions de l'énoncé du théorème VI, avec n, p, α, u et h indépendants de la fonction considérée, ε étant remplacé par $\varepsilon(q)$ on suppose (c'est la seule différence) que $\varepsilon(q)$ tende vers o lorsque q augmente indéfiniment. Alors il résulte visiblement de l'inégalité (15) que $f_q(z)$ converge uniformément vers α dans tout domaine complètement intérieur au cercle unité.

Lorsque les points A sont fixes, on retombe qualitativement dans des applications bien connues de la théorie des familles normales ou quasi-normales.

50. Dans le cas où α est nul, on peut introduire des précisions; en effet, si $|f(z)|$ est inférieur à ε en $n+1$ points fixes de pseudo-distances, prises deux à deux, au moins égales à δ, on détermine comme plus haut (dans le lemme) un arc de courbe non négligeable sur lequel $|f(z)|$ est inférieur à ε. Donc, dans ce cas, on peut appliquer le théorème VI, et aussi le théorème VII.

En somme, lorsque $f(z)$ est suffisamment petite en $n+1$ points fixes, ou $1-f(z)$ en $p+1$ points, on peut dire que la fonction $f(z)$ est encore petite dans un cercle concentrique au cercle unité et de rayon moindre.

51. Est-il possible de déduire une loi semblable, dans le cas où $f(z)-\alpha$ est petite en des points donnés, en nombre r, situés dans le cercle $|z|=u$?

Oui, si le nombre r dépasse d'une unité au moins le nombre des racines de $f(z)-\alpha$ non pas nécessairement dans le cercle unité, mais dans un cercle de rayon u' compris entre u et 1, et de centre O. On peut, par exemple, prendre $u'=\frac{1+u}{2}$. Pour traiter cette question, il est indispensable, connaissant n et p, de savoir majorer le nombre des racines de $f(z)-\alpha$ dans le cercle $|z|=u'$. Nous résoudrons ce problème dans un chapitre ultérieur.

Sans faire de calcul, on constate que l'application des théorèmes VI et VII donnent d'intéressants résultats quantitatifs de problèmes déjà étudiés qualitativement dans la théorie des familles normales ou quasi-normales.

CHAPITRE III.

FONCTIONS HOLOMORPHES DANS LE CERCLE UNITÉ, ET PRENANT n FOIS LA VALEUR O ET p FOIS LA VALEUR I LIMITATION DE L'INDICE CARACTÉRISTIQUE.

52. Nous revenons dans ce chapitre aux fonctions considérées au début du Chapitre II; c'est-à-dire aux fonctions dont le module est inférieur à M, dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, soit sur un arc de courbe issu de O, soit plus généralement en des points dont on peut affirmer que certains sont extérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1, \frac{1}{100}\right)$.

Nous avons donné, pour ces fonctions, une limitation de $\log M(r, f)$. Celle-ci vaut pour l'indice caractéristique $T(r, f)$. Nous conserverons cette limitation lorsque r n'est pas trop voisin de 1. Pour fixer les idées, supposons que r ne dépasse pas 0,99. Alors on peut écrire l'inégalité

$$T(r, f) < k(n+p) + k \overset{+}{\log} M + k. \tag{16}$$

Nous supposerons désormais r supérieur à 0,99.

Dans la suite, nous distinguerons deux cas, suivant que la dérivée n'est pas trop petite dans un cercle de rayon numérique, ou au contraire est petite jusque assez loin de l'origine.

53. **Premier cas.** — *Dans le cercle $|z| = 0,8$, il existe un point, hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1, \frac{1}{100}\right)$ en lequel $|f'(z)|$ n'est pas trop petit; pour fixer les idées, est supérieur ou égal à* 0,1.

Si l'on désigne par x et x' les affixes de deux points quelconques intérieurs au cercle $|z| = 0,8$, et extérieurs aux cercles d'exclusion, on peut les joindre par un chemin, de longueur inférieure à une constante numérique [1], dont tout point est extérieur aux cercles d'exclusion et intérieur au cercle $|z| = 0,8$.

Si l'on part d'un point où $|f(z)|$ est inférieur à M, pour aboutir à un autre point où $|f'(z)|$ est supérieur ou égal à $0,1$, on montre ainsi l'existence, hors des cercles d'exclusion, et dans le cercle $|z| = 0,8$, d'un point d'affixe x en lequel on a les inégalités

$$|f(x)| < M + 1, \qquad |f'(x)| \geqq 0,1.$$

On peut supposer x réel et positif.

54. On effectue alors la correspondance du cercle $|z| = r$ au cercle unité du plan Z par la transformation homographique

$$Z = \frac{(z - x)r}{r^2 - zx}.$$

L'homologue du cercle unité du plan Z est un cercle centré sur l'axe réel, extérieur au cercle

$$|Z| = R = \frac{r(1 + x)}{r^2 + x}.$$

Notons que $R - 1$, égal à $(1 - r)\dfrac{r + x}{r^2 - x}$, est compris entre $1 - r$ et $10(1 - r)$, car x est compris entre 0 et $0,8$ et r est supérieur à $0,99$.

Désignons par F la fonction transformée de f. A l'origine du plan Z, on a

$$|F| < M + 1; \qquad \left|\frac{dF}{dZ}\right| > 0,1; \qquad \frac{r^2 - x^2}{r} > 0,03.$$

Le point x étant hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0,1, \dfrac{1}{100}\right)$, on a l'inégalité

$$\sum \log \left|\frac{x - \alpha}{1 - x\bar{\alpha}}\right| > (n + p) \log \frac{1}{100},$$

α désignant un zéro quelconque de f ou de $f - 1$.

---

[1] On peut s'arranger pour que ce chemin reste à une distance de O inférieure ou égale à la plus grande distance de O aux deux points considérés. Le calcul indique alors une quantité inférieure à 2π.

Cette inégalité entraîne la suivante

$$\sum \log |x - \alpha| > -k(n+p),$$

k étant numérique positif; en effet, $1 - x\bar{\alpha}$ est supérieur à $0,2$, et le nombre des quantités α est égal à $n+p$.

Cette dernière inégalité se transmet dans le plan Z, après la transformation homographique. On désigne par β les points intérieurs au cercle $|Z| = R$, en lesquels la fonction F est nulle ou égale à 1. Les β sont les correspondants de certains des α, et une étude élémentaire montre que pour α et β correspondants, le rapport $\left|\frac{x-\alpha}{\beta}\right|$ est compris entre deux constantes numériques.

On en déduit *a fortiori* l'inégalité

$$\sum \log |\beta| > -k(n+p),$$

k désignant toujours une constante numérique positive.

Appliquons à la fonction F(Z) le théorème A, et l'inégalité (1), où l'on fait $r = 1$; remarquons que le terme $\log \frac{1}{R-1}$ de cette inégalité peut être remplacé ici par $\log \frac{1}{1-r} + k$. Il vient alors l'inégalité

$$T(1, F) < k(n+p) + k \overset{+}{\log} M + k \log \frac{1}{1-r} + k.$$

55. **Retour au plan Z.** — Nous étudions la correspondance entre $T(1, F)$ et $T(r, f)$. Elle résulte de l'étude très élémentaire suivante :

Désignons par φ et Φ les arguments correspondants de z et Z sur les cercles respectifs $|z| = r$ et $|z| = 1$. Grâce à l'hypothèse que x est compris entre 0, et $0,8$, et de plus que r est supérieur à $0,99$, on constate que le rapport $\frac{\Phi}{\varphi}$ est compris entre deux constantes *numériques*, obtenues lorsque z est réel, soit positif, soit négatif.

Il en résulte immédiatement que $\frac{m(1, F)}{m(r, f)}$ est compris entre ces deux constantes; comme les indices m sont précisément ici les indices T, on a l'inégalité

$$T(r, f) < k(n+p) + k \overset{+}{\log} M + k \log \frac{1}{1-r} + k. \tag{17}$$

Remarque. — On pourrait ici remplacer M par $|f(y)|$, y étant un point *quelconque* intérieur au cercle $|z| = \frac{1}{2}$ et hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1, \frac{1}{100}\right)$.

56. **Deuxième cas.** — *Dans tout le cercle* $|z| = \frac{1}{2}$, *hors les cercles d'exclusion,* $|f'(z)|$ *est inférieur à* 0,1. *Donc* $|f(z)|$ *est inférieur à* $M + 1$.

Notre intention est de démontrer que même dans ce cas, qui paraît plus défavorable à première vue, mais qui en réalité est *plus favorable*, l'inégalité (17) est encore valable. La méthode consistera à fractionner le cercle $|z| = r$, suivant une loi convenable, imposée par la distance plus ou moins grande qui sépare l'origine, dans une direction déterminée, du point où $|f'(z)|$ est supérieur à 0,1; puis à majorer sur cette fraction de circonférence l'expression

$$\int \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

57. Quitte à majorer très légèrement r, nous pouvons toujours supposer que la circonférence $|z| = r$ est entièrement hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1, \frac{1}{100}\right)$. En effet, on sait (*voir* application numérique du n° 3) qu'il y a certainement une telle circonférence (de centre o) dans toute couronne

$$r' < |z| < r'' = 1 - 0{,}8(1 - r'),$$

et la limitation de l'indice caractéristique (fonction croissante de r), valable pour cette circonférence, est valable aussi pour la circonférence de départ $|z| = r'$.

58. Soit S un point de la circonférence $|z| = r$. On joint OS. Sur la portion de ce rayon comprise dans la circonférence $|z| = 0{,}8$, il y a des points hors des cercles d'exclusion. On en choisit un, par exemple à une distance de o supérieure à 0,75 (il y en a), soit S'; on joint S' S par une ligne L composée soit de la totalité du segment S' S, si ce

segment ne rencontre aucun cercle d'exclusion, soit de portions de ce segment, et d'arcs des cercles d'exclusion. On choisira les arcs qui correspondent à des angles au centre inférieurs à π. De toute façon, la ligne L a une longueur inférieure à $0,25\,\pi$, donc *a fortiori* à 1.

59. Il va nous être utile d'étudier de plus près l'oscillation possible de l'argument de z lorsque ce point décrit la ligne L. Pour cela, on peut toujours supposer réelle et positive l'affixe α du centre du cercle d'exclusion γ sur lequel se trouve z (si z ne se trouve pas sur un cercle d'exclusion, la question ne se pose pas). Ce cercle d'exclusion a un pseudo-rayon inférieur à $\frac{2e}{100}\cdot$ Il rencontra la ligne L en deux points dont le plus proche de o est au moins à une distance de $0,75$. On constate de suite que α est supérieur à $0,75$. Sous quel angle de o voit-on le cercle γ ? Il est intérieur au cercle

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-z\alpha}\right| = \frac{2e}{100}.$$

En désignant par λ la constante $\frac{2e}{100}$, par 2ω l'angle sous lequel, de o, on voit ce cercle, un calcul élémentaire donne

$$\sin\omega = \frac{\lambda(1-\alpha^2)}{\alpha(1-\lambda^2)} < 0,12(1-\alpha).$$

D'où encore

$$\omega < 0,15(1-\alpha).$$

Telle est la majoration de l'argument de z. Il fait intervenir la distance α qui sépare o du centre non euclidien du cercle γ.

Il peut être intéressant aussi de majorer ω en fonction de $(1-|z|)$. Il suffit pour cela de remarquer que le rapport $\frac{1-|z|}{1-\alpha}$ est compris entre les valeurs extrêmes obtenues lorsque z est réel. Ces valeurs extrêmes sont, pour un cercle de pseudo-rayon $\frac{2e}{100}$, les valeurs suivantes :

$$\frac{1+\frac{2e}{100}}{1-\alpha\frac{2e}{100}} < 1,12 \quad \text{et} \quad \frac{1-\frac{2e}{100}}{1+\alpha\frac{2e}{100}} > 0,88.$$

D'où, pour le cercle γ, l'inégalité

$$\omega < 0,17(1 - |z|).$$

Comme le point z est situé de l'autre côté du rayon OS par rapport à α, on constate que le *point z ne s'écarte du rayon* OS *que d'un angle inférieur à* $0,17(1 - |z|)$.

60. Nous désignons par A le point, s'il existe, rencontré le premier sur le chemin L, à partir du point S, en lequel $|f'(z)|$ est supérieur ou égal à $0,1$. En ce point, on a les inégalités suivantes :

$$|f(z)| < M + 2, \qquad |f'(z)| \geqq 0,1.$$

Nous séparons les points S en deux classes.

Première classe. — A n'existe pas ou est à une pseudo-distance de S inférieure à une constante numérique; pour fixer les idées, $0,99$.

Deuxième classe. — Les autres.

61. **Étude de $f(z)$ en un point S de première classe.** — Dans le cas où A n'existe pas, on a en S

$$|f(z)| < M + 2.$$

Dans le cas où A existe, il suffit d'appliquer les résultats du deuxième chapitre (théorème II, forme plus générale), car sur une courbe issue de A et dépassant certainement le cercle de centre non euclidien A et de pseudo-rayon $\frac{1}{2}$ (il s'agit ici de L, pris de A vers S'), $|f(z)|$ est majoré par $M + 2$.

On obtient ainsi une limitation de $|f(z)|$ valable dans les deux cas, et qui est la suivante :

$$\log|f(z)| < k(n+p) + k \log M + k,$$

k constante numérique positive.

Les points S de première classe forment des arcs désignés par a, et l'on a l'inégalité

$$(18) \qquad \sum \int_a \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi < k(n+p) + k \overset{+}{\log} M + k,$$

62. On exclut maintenant de la circonférence $|z| = r$ *tous les points* S *de première classe*, et l'on procède à un ordre des autres, suivant la distance qui sépare les points A qui leur sont attachés, de l'origine.

Cette distance peut déjà être majorée en fonction de r :

Si le point A est sur le rayon du point S, OA est inférieur à la quantité u définie par

$$\frac{r-u}{1-ru} = 0,99.$$

Par suite, en désignant par r' la distance OA, on a l'inégalité

$$\frac{1-r'}{1-r} > 100.$$

Si le point A est situé sur un cercle d'exclusion, le calcul est un peu plus compliqué. Dans la couronne

$$r' < |z| < r'',$$

avec $1 - r'' = \frac{4}{5}(1 - r')$ se trouve (voir application numérique du numéro 3) une circonférence de centre O tout entière hors des cercles d'exclusion ; donc en particulier il y a un point A' situé sur le rayon OS, hors des cercles d'exclusion. La pseudo-distance (AA') est inférieure à celle des cercles frontières de la couronne : donc *a fortiori* à $\frac{4e}{100} < 0,11$.

Donc la pseudo-distance (SA') est supérieure à $0,99 - 0,11 = 0,88$.

Soit r''' la distance OA'; le calcul indique l'inégalité

$$\frac{1-r'''}{1-r} > 14.$$

Par suite, comme les distances de l'origine à des points de L vont croissantes dans le sens de O vers S sur la ligne L, on a, pour le point A', et ceci dans les deux cas envisagés,

$$\frac{1-r'}{1-r} > 14. \tag{19}$$

63. Ceci posé, ordonnons les points S de deuxième classe suivant la règle suivante :

Premier point, soit S_1. — Il correspond à un point A_1 *situé le plus* *près de O sur tous les chemins* L *possibles*. On désigne sa distance à O par r'_1. Bien entendu, hors les cercles d'exclusion, dans le cercle $|z| = r'_1$, la dérivée $f'(z)$ est en module inférieure à 0,1; de plus r'_1 est supérieur à 0,8.

Quitte à effectuer une rotation, on peut supposer l'affixe de A_1 réelle et positive (égale à r'_1). *Nous allons établir que sur un arc d'ouverture* ω_1, *situé sur le cercle* $|z| = r$, *et ayant pour milieu* S_1, *on a l'inégalité*

$$(20)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi < \left[k(n+p) + k + k\overset{+}{\log}M + k\log\frac{1}{1-r}\right]\omega_1,$$

ω_1 est de l'ordre de grandeur de $1 - r'_1$.

64. Considérons en effet la transformation homographique

$$Z = \frac{(z - r'_1)r}{r^2 - zr'_1},$$

qui fait correspondre le cercle $|z| = r$ au cercle unité du plan Z, la fonction f à la fonction F. Cette fonction est holomorphe dans un cercle centré sur l'axe réel, et qui contient le cercle de centre origine et de rayon $1 + (1-r)\frac{r - r'_1}{r^2 + r'_1}$; d'après l'inégalité (19), ce cercle contient à son tour le cercle

$$|Z| = R = 1 + 7(1-r)^2.$$

On désigne, comme plus haut (n° 54), par β les points dans ce cercle, où F est égale à 0 ou 1, et par α les points dans le cercle $|z| = 1$ où f est égale à 0 ou à 1.

Les β correspondent à certains des α. Le point A'_1, situé hors des cercles d'exclusion dans le plan z, et correspondant à l'origine dans le plan Z, on montre, comme au n° 54, que l'on a l'inégalité

$$\sum \log|\beta| > -k(n+p),$$

k étant une constante numérique positive.

En A'_1 la fonction f est inférieure en module à $M + 2$.

On applique à nouveau le théorème A, et l'inégalité (1) conduit à la limitation

$$T(1, F) < k(n+p) + k\overset{+}{\log}M + k\log\frac{1}{R-1} + k,$$

et ici $\log \frac{1}{R-1}$ peut être remplacé par $k + 2\log \frac{1}{1-r}$, ce qui donne l'inégalité

$$(21) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overset{+}{\log}|F(e^{i\nu})|\,d\nu < k(n+p) + k\overset{+}{\log}M + k\log\frac{1}{1-r} + k.$$

65. **Retour au plan** z. — Ce qui constitue une importante modification avec la méthode du n° 55, où un tel retour est déjà étudié, c'est qu'au lieu de l'envisager sur la totalité des cercles correspondants $|z| = r$ et $|Z| = 1$, on ne l'envisage que *sur une portion seulement de ces cercles*.

Il nous est pour cela nécessaire d'étudier d'un peu plus près la correspondance des arguments ν et φ de Z et de z, arguments qui sont nuls en même temps, d'après le choix de l'axe réel et positif passant par A'_1. Cette étude est élémentaire; elle conduit à l'égalité

$$e^{i\nu}\frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{r^2 - r_1'^2}{(r - r'_1 e^{i\varphi})^2},$$

d'où

$$\frac{d\nu}{d\varphi} = \frac{r^2 - r'^2}{(r - r'_1)^2 + 4rr'_1\sin^2\frac{\varphi}{2}} > \frac{r^2 - r_1'^2}{(r - r'_1)^2 rr'_1\varphi^2}.$$

Cette formule nous indique que $\frac{d\nu}{d\varphi}$ est supérieur à $\frac{r + r'_1}{2(r - r'_1)}$, donc *a fortiori* à $\frac{1,79}{2(r - r'_1)}$, lorsque φ est inférieur à $r - r'_1$.

On désigne par B_1 le point du cercle $|z| = r$ qui a même argument que A_1, argument nul dans notre choix de l'axe réel et positif. On considère l'arc $C_1B_1C'_1$ du milieu B_1, les points C_1 et C'_1 ayant pour arguments $\pm(r - r'_1)$.

D'après la discussion précédente, on a l'inégalité

$$\int_{C'_1B_1C_1} \overset{+}{\log}|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi < \left[k(n+p) + k\overset{+}{\log}M + k\log\frac{1}{1-r} + k\right](r - r'_1).$$

66. Passons maintenant au point S_1. Rappelons que la différence des arguments de S_1 et de A_1 est au plus égale à $0,17[1 - |z(A_1)|]$ d'après les résultats du n° 59. Donc ici, *non seulement le point* S_1 *est*

inclus dans l'arc $C_1B_1C'_1$, *mais il en est de même de l'arc* (ω_1) *de milieu* S_1 *et d'ouverture* $\lambda(r = r'_1)$, λ *étant numérique.*

En effet, rappelons que $\frac{1-r'_1}{1-r_1}$ excède la constante numérique 14. De sorte que $0,17(1-r'_1)$ est inférieur à $0,2(r-r'_1)$. On peut prendre $\lambda = 1,6$. De sorte que l'inégalité (20) est démontrée.

67. Reprenons l'ordre des points S :

Nous commençons donc par le point S_1, autour duquel nous détachons l'arc ω_1. Des points de deuxième classe, restants sur le cercle $|z| = r$, nous considérons le point S_2 correspondant au point A_2 le plus rapproché de l'origine (distance r'_2) d'où, sur la circonférence $|z| = r$, un nouvel arc ω_2 de milieu S_2, *qui peut empiéter sur l'arc* ω_1. Cependant, l'arc ω_2 est d'ouverture inférieure ou égale à celle de ω_1, d'après l'ordre des points S_1 et S_2; de plus S_2 est extérieur à ω_1. *Donc l'empiétement, s'il a lieu, ne peut s'effectuer que sur la moitié de* ω_1 *tout au plus.*

On aperçoit la suite du raisonnement; on a ainsi une suite *finie* de points S : $S_1 S_2 \ldots S_i$, jusqu'à ce que les angles $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_i$ couvrent tous les points de deuxième classe du cercle $|z| = r$. Cette suite est finie du fait que $r - r'_1$ est supérieur à $k(1-r)$ pour les points de deuxième classe.

Cherchons à majorer la somme des ouvertures de tous les angles ω. L'angle (ω_1) est recouvert au minimum deux fois. En effet, supposons que la moitié de l'angle (ω_1) soit partiellement recouverte par une partie de la moitié de l'angle (ω_2) par exemple. Tout autre angle (ω_i) ne peut plus attaquer la moitié considérée de l'angle (ω_1) d'après le mode de construction.

Donc la somme des ouvertures de tous les angles ω est inférieure à 4π, et par suite

$$\sum \int_{\omega_i} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi < k(n+p) + k + k \overset{+}{\log} M + k \log \frac{1}{1-r}.$$

68. En rappelant que les angles (ω_i) recouvrent tous les points de deuxième classe et que pour les points de première classe la limitation, déjà obtenue au n° 61, et terminée par l'inégalité (18), est plus favorable encore, on peut résumer ainsi :

Dans le deuxième cas, c'est-à-dire lorsque $|f'(z)|$ est inférieur à 0,1 dans le cercle $|z| = 0{,}8$, hors des cercles d'exclusion, on a l'inégalité

$$T(r, f) < k(n+p) + k \overset{+}{\log} M + k \log \frac{1}{1-r} + k.$$

69. Bloquons les cas 1 et 2 dans l'unique énoncé suivant :

THÉORÈME VIII. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et y prenant n fois la valeur 0 et p fois la valeur 1. Si $|f(z)|$ est inférieur à M en des points intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$ et ne pouvant être enfermés dans des circonférences dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $\frac{2e}{100}$, on a l'inégalité*

$$T(r, f) < k(n+p) + k \overset{+}{\log} M + k \log \frac{1}{1-r} + k. \tag{22}$$

70. Ce théorème VIII se généralise, comme nous avons fait pour le module de la fonction f, au cas où les points, où le module de f est majoré par M, obéissent à des lois analogues à celles imposées au théorème III. Cependant, il y a en plus ici une correspondance à effectuer entre $T(r, f)$ et l'indice caractéristique de la fonction F, identique à f pour les points homologues z et Z de la transformation

$$Z = \frac{z - x}{1 - z\overline{x}},$$

lorsque x est inférieur à u.

Cette correspondance se fait sans difficulté. Nous indiquerons simplement ici, sans démonstration, le résultat suivant, à peu près évident d'ailleurs : l'inégalité (22) est encore valable, à condition de remplacer le premier membre par

$$(1-u)^2 T(r, f).$$

71. **Comparaison des limitations du module et de l'indice caractéristique.** — Le théorème II et le théorème VIII se complètent; on ne peut dire que l'un est plus précis que l'autre.

On peut préciser cependant un point du théorème II à l'aide du théorème VIII.

Supposons, en effet, que l'on ait

$$(1-r)\log|f(z)| < k'(n+p) + k'\overset{+}{\log}M + k'$$

en certains points du cercle $|z|=r$, constituant des arcs de longueur totale ω. k' est une certaine constante numérique, bien entendu inférieure aux constantes k de l'inégalité (10).

On constate à l'aide du théorème VIII, que ω ne peut être très grand. Lorsque r est suffisamment voisin de 1, par rapport à M, n et p, on voit que ω est tout au plus de l'ordre de grandeur de $(1-r)\log\frac{1}{1-r}$.

72. Il est à peine besoin de signaler que lorsqu'on fait n et p nuls, les théorèmes II et VIII ne peuvent être améliorés, à part les valeurs des constantes numériques qui y figurent. Pour des exemples réalisant la limite, il suffit de consulter le livre de M. Paul Montel sur les familles normales et leurs applications (pavage du cercle fondamental, p. 53), ou celui de M. R. Nevanlinna (*Le théorème de Picard-Borel...; voir* le Chapitre VI).

73. Plus simplement, il suffit de considérer la fonction

$$f(z) = e^{\frac{1}{1-z}}$$

qui ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans le cercle unité.

En effet, on a

$$\log M(r,f) = \frac{1}{1-r}.$$

D'autre part

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

On peut restreindre l'intégration à l'intervalle $0\,\frac{\pi}{2}$, puisque le résultat définitif est 4 fois plus grand. Dans cet intervalle, l'intégrale se comporte (pour r supérieur à $\frac{1}{2}$, pour fixer les idées) comme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-r)^2+\varphi^2}} = \operatorname{Log}\frac{\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + (1-r)^2}}{1-r}.$$

On constate immédiatement que $T(r, f)$ est compris entre deux expressions de la forme $k \log \frac{1}{1-r}$ (k constante numérique).

CHAPITRE IV.

FONCTIONS MÉROMORPHES DANS LE CERCLE UNITÉ, PRENANT n FOIS LA VALEUR 0, p FOIS LA VALEUR 1, q FOIS LA VALEUR ∞. LIMITATIONS DU MODULE (HORS LES CERCLES D'EXCLUSION DES PÔLES). LIMITATION DE L'INDICE CARACTÉRISTIQUE.

74. Les méthodes ne diffèrent pas de celles utilisées dans l'étude précédente des fonctions holomorphes. Il s'y ajoute simplement les q pôles et leur cortège de cercles d'exclusion. Aussi serai-je bref, et insisterai seulement sur les rares différences qui se présentent.

Dans ce chapitre, nous désignons par $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, prenant n fois la valeur 0, p fois la valeur 1, et q fois la valeur ∞.

I. — Limitations du module.

75. Commençons par supposer que $|\varphi(z)|$ est inférieur à M en certains points du cercle $|z| \leq \frac{1}{2}$, ne pouvant être enfermés dans des circonférences dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $\frac{2e}{100}$; de la sorte l'un de ces points est nécessairement extérieur aux cercles d'exclusion $\gamma(0, 1, \infty; 1/100^e)$. Comme pour les fonctions holomorphes, on décompose l'étude de cette fonction : d'abord dans le cercle $|z| = 0,8$; ensuite dans le cercle $|z| = r$ supérieur à 0,8.

76. **Étude dans le cercle** $|z| = 0,8$. *Premier cas.* — Hors des cercles d'exclusion, la dérivée est petite, en module inférieur à 1, pour fixer les idées. Alors on a de suite la limitation $M + k$ pour $|\varphi(z)|$, hors des cercles d'exclusion.

Deuxième cas. — Il existe un point x (affixe inférieure à 0,8 et qu'on peut supposer réelle et positive) hors des cercles d'exclusion, en lequel $|\varphi(z)|$ est inférieur à $M+k$ et $|\varphi'(z)|$ supérieur ou égal à 1. On opère la transformation

$$Z = \frac{z-x}{1-zx},$$

f est devenue F. La nouvelle origine est hors les cercles d'exclusion. A l'ancien cercle $|z| = 0{,}8$, correspond un cercle intérieur au cercle $|Z| = \frac{40}{41}$, $|F(0)|$ est inférieur à $M+k$; $|F'(0)|$ est supérieur à k. On applique à la fonction F le théorème A où l'on fait $R = 1$ et $r = 0{,}9$; ce qui donne l'inégalité

$$\text{(23)} \qquad T(0{,}9\,;\,F) < k(n+p+q) + k\overset{+}{\log} M + k.$$

77. On passe ensuite à une limitation de $|F|$ dans le cercle $|Z| = \frac{40}{41}$ de la façon suivante : on désigne par c_j les pôles de la fonction f dans le cercle unité, et par C_j leurs correspondants dans le plan Z. On pose

$$U(Z) = \Pi \frac{Z - C_j}{1 - Z\overline{C}_j}$$

et

$$u(z) = \Pi \frac{z - c_j}{1 - z\overline{c}_j}.$$

Les modules de U et de u sont égaux aux points homologues z et Z. Le produit FU est holomorphe dans le cercle unité du plan Z. L'origine n'est pas un pôle pour la fonction F; $T(r, FU)$ est égal à $m(r, FU)$ quantité inférieure ou égale à $m(r, F)$, donc à $T(r, F)$. En effet, G a son module inférieur à un. Donc, on a l'inégalité

$$T(0{,}9\,;\,FU) < k(n+p+q) + k\overset{+}{\log} M + k.$$

FU étant holomorphe, on déduit de suite, comme au Chapitre II, une limite supérieure de $|FU|$ dans le cercle $|Z| = \frac{40}{41}$, et par suite de $|fu|$ dans le cercle $|z| = 0{,}8$. Cette limite est représentée par le deuxième membre de l'inégalité précédente (avec une valeur différente de k).

78. Reste à passer à la fonction f. On remarque pour cela que, hors

les cercles d'exclusion $\gamma(\infty; 1/100)$, on a l'inégalité

$$|u(z)| > -q \log 100.$$

D'où le

Théorème I'. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur* 0, *p fois la valeur* 1 *et q fois la valeur* ∞. *On suppose que dans le cercle $|z| = \frac{1}{2}$, le module de φ est majoré par* M *en des points ne pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des rayons n'atteint pas $\frac{2e}{100}$. Alors dans la circonférence $|z| = 0{,}8$, l'inégalité*

$$\log|\varphi| < k(n+p+q) + k \overset{+}{\log} \mathrm{M} + k \tag{24}$$

est vérifiée, sauf pour des points z intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma(\infty; 1/100)$; k est numérique positif.

79. **Étude dans le cercle $|z| = r$ supérieur à 0,8.** — Le même plan va être observé, comme pour les fonctions holomorphes. En prévision du résultat, et guidé par ceux des fonctions holomorphes, on peut dès à présent supposer que l'inégalité

$$(1-r)\log|\varphi(z)| > k'(n+p+q) + k' \overset{+}{\log} \mathrm{M} + k'$$

est vérifiée en un point S de la circonférence $|z| = r$, *point supposé situé hors des cercles d'exclusion* $\gamma(\infty; 1/100)$. k' désigne une certaine constante numérique positive qui sera déterminée ultérieurement. a_i étant l'affixe d'un zéro de f, on pose

$$\Pi \frac{z - a_i}{1 - z\bar{a}_i} = v(z),$$

puis

$$g = f\frac{u}{v}; \qquad h = \frac{1}{g}.$$

Les fonctions g et h sont holomorphes et privées de zéro dans le cercle unité. Hors les cercles d'exclusion $\gamma(\infty; 1/100)$, on a

$$\log|g| > \log|f| - q\log 100 > \log|f| - 5q.$$

Donc en S, $\log|h|$ est inférieur à

$$-\frac{(k'-5)(n+p+q) + k' \overset{+}{\log} \mathrm{M} + k'}{\qquad}.$$

Cette propriété est vérifiée non seulement en S, mais encore (h est privée de zéro dans le cercle unité) sur un arc de courbe L issu de S et aboutissant au cercle unité.

Le raisonnement se poursuit comme au Chapitre II (n^{os} 19 et suivants) : on désigne toujours par (B) le plus grand cercle de centre non euclidien S, dans lequel $\log|h|$ est inférieur à $-\alpha = -5n - \overset{+}{\log} M$. On désigne par ρ le pseudo-rayon du cercle (B). On montre que ρ n'est ni trop grand ni trop petit (mêmes limites que pour les fonctions holomorphes); que d'un point A du cercle (B), jusqu'au cercle unité, part un arc de courbe L' sur lequel $|h|$ est supérieur à $-\alpha$; que dans un cercle de centre non euclidien S et de pseudo-rayon $\lambda\rho$ (*voir* la valeur de λ au n° 22), la fonction h est encore très petite; $\log|h|$ est inférieur à $-\left[k_1(n+p+q)+k_1\overset{+}{\log}M+k_1\right]$, k_1 dépendant de k'. D'autre part, sur la ligne L', la fonction f qui est égale à $\frac{1}{h}\cdot\frac{v}{u}$, satisfait à l'inégalité

$$\log|f| < 5n + \overset{+}{\log}M + 5q = 5(n+q) + \overset{+}{\log}M,$$

sauf en des points intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(\infty; \frac{1}{100}\right)$. C'est la seule différence avec les fonctions holomorphes. Elle ne trouble aucun résultat, et, toujours dans le cercle C de centre non euclidien A et de pseudo-rayon 0,8, on a l'inégalité (24) sauf pour des points intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(\infty; \frac{1}{100}\right)$.

Ce cercle attaque largement le cercle C' de centre non euclidien S et de pseudo-rayon $\lambda\rho$, dans lequel on a l'inégalité

$$\log|h| < -\left[k_1(n+p+q) + k_1\overset{+}{\log}M + k_1\right],$$

et par suite

$$\log|f| > (k_1 - 5)(n+p+q) + k_1\overset{+}{\log}M + k_1,$$

sauf pour des points intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(0; \frac{1}{100}\right)$.

Non seulement les cercles C et C' ont des régions communes, mais encore ces régions sont assez étendues pour qu'elles ne soient pas constituées par des points intérieurs aux $\gamma\left(\infty; \frac{1}{100}\right)$ ou $\gamma\left(0; \frac{1}{100}\right)$. Si k_1, donc k', est une constante numérique positive convenablement choisie, il y a contradiction entre la dernière inégalité écrite et l'inégalité (24), de sorte que l'hypothèse de départ est erronée.

Le lecteur reconstituera sans peine, à l'aide de ces indications et du parallélisme avec les fonctions holomorphes, la démonstration complète.

81. Le résultat en est l'énoncé suivant :

THÉORÈME II'. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, prenant n fois la valeur* 0, *p fois la valeur* 1, *q fois la valeur ∞.*

On suppose que $|\varphi(z)|$ est majorée par M *en des points intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$, ne pouvant être inclus dans des circonférences dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $\frac{2e}{100}$. Alors on a l'inégalité :*

$$(25) \qquad (1-|z|)\log|\varphi(z)| < k(n+p+q) + k\overset{+}{\log}M + k,$$

sauf pour des points z intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(\infty\,; \frac{1}{100}\right)$.

D'une façon plus générale, la fonction $\varphi(z)$ satisfait à l'inégalité

$$(25') \qquad (1-|z|)\log|\varphi(z)| < k(n+p+q) + k\overset{+}{\log}M + k - kq\log h,$$

sauf en des points z intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma(\infty\,; h)$.

Cette inégalité (25') se déduit immédiatement de l'inégalité (25) par la considération de la fonction holomorphe f obtenue en multipliant la fonction φ par le produit de Blaschke relatif aux pôles de cette fonction. Le module de f est inférieur à celui de φ. Donc il satisfait à l'inégalité (25); on passe à l'inégalité (25') comme d'habitude, en majorant le produit de Blaschke hors des cercles d'exclusion $\gamma(\infty\,; h)$.

82. **Remarque.** — Quitte à échanger φ en $\frac{1}{\varphi}$, on peut supposer que $|\varphi|$ est inférieur à 1 en de grandes régions du cercle $|z| = \frac{1}{2}$ (en gros, en plus de la moitié). Alors le théorème II' est applicable à cette fonction, et l'on a l'inégalité

$$(1-|z|)\log|\varphi(z)| < k(n+p+q) + k - k\log h,$$

hors les cercles $\gamma(\infty\,; h)$.

Cette remarque s'applique aussi au cas des fonctions holomorphes prenant n fois la valeur o et p fois la valeur 1. On a l'une des deux inégalités suivantes :

$$(1-|z|)\log|f(z)|<k(n+p)+k,$$
$$(1-|z|)\log|f(z)|>-[k(n+p)+k-k\log h],$$

la deuxième inégalité ayant lieu hors des cercles $\gamma(0; h)$.

83. Le théorème II' est susceptible d'une forme plus générale, comme il a été indiqué au numéro 28, pour les fonctions holomorphes.

84. **Extensions du théorème II'.** — Comme au numéro 29, nous désignons par m le plus petit des nombres n et p ; et nous supposons $|\varphi(z)|$ inférieur à M en des points A situés dans le cercle $|z|=u$, et qu'il est impossible d'inclure dans m circonférences au plus, dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $2eh$.

Quitte à changer φ en $1-\varphi$, ce qui change M en $1+M$, on peut supposer m égal à n. On considère le produit de Blaschke $v(z)$ relatif aux zéros a_i de la fonction φ, et l'on remarque que $\log|v(z)|$ est supérieur à $n\log h$, sauf en des points pouvant être enfermés dans des circonférences, en nombre n au plus, et dont la somme des pseudo-rayons n'atteint pas $2eh$. Donc il existe un point A où $\log|v(z)|$ est supérieur à $n\log h$. Soit B ce point.

Posons

$$f=\frac{v}{\varphi}.$$

La fonction f est holomorphe dans le cercle unité ; au point B, $\log|f|$ est supérieur à $n\log h-\log M$, donc aussi sur une ligne L issue de B et aboutissant au cercle unité. Il suffit maintenant de remarquer que $|\varphi|$ est partout inférieur à $\frac{1}{|f|}$ (car $|v|$ est inférieur à 1) pour constater que *sur l'arc de courbe* L, *on a l'inégalité*

$$\log|\varphi|<M-n\log h=M'.$$

L'arc L traverse la couronne

$$u<|z|<1.$$

D'où l'application du théorème II', qui conduit à l'énoncé suivant, valable pour les fonctions φ et $1-\varphi$.

Théorème III'. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur* o, *p fois la valeur* 1, *q fois la valeur* ∞. *On suppose que $|\varphi|$ est majoré par* M *en des points* A *intérieurs au cercle $|z|=u$, qu'il est impossible d'enfermer dans des circonférences, en nombre m au plus (m est le plus petit des nombres n, p) et dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $2eh$. Alors on a l'inégalité*

$$(26)\quad (1-|z|)(1-u)\log|\varphi(z)|<k(n+p+q)+k\overset{+}{\log}\mathrm{M}-km\log\mathrm{H}+k$$
$$(k \text{ numérique positif}),$$

sauf pour des points z intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(\infty;\frac{1}{100}\right)$.

Remarque. — On peut remplacer l'inégalité (26) par une inégalité plus précise, analogue à l'inégalité (11) du théorème III.

85. Il est à peine besoin d'indiquer que le théorème IV s'étend de suite à une fonction méromorphe φ, prenant n fois la valeur o, p fois la valeur 1, et q fois la valeur ∞. Si $|\varphi|$ est inférieure à M en $m+1$ points fixes (m est le plus petit des nombres n, p) intérieurs au cercle $|z|=u$, et dont les pseudo-distances prises deux à deux, sont au moins égales à δ, on a l'inégalité

$$(1-u)(1-|z|)\log|\varphi(z)|<k(n+p+q)+k\overset{+}{\log}\mathrm{M}+k-km\log\delta,$$

sauf pour des points z intérieurs aux cercles d'exclusion $\gamma\left(\infty, \frac{1}{100}\right)$.

Nous terminons sur cette propriété, les extensions aux fonctions méromorphes de certaines propriétés du module des fonctions holomorphes, et passons à un problème plus important, celui relatif à l'indice caractéristique.

II. — Limitation de l'indice caractéristique.

86. La fonction $\varphi(z)$ étudiée ici est méromorphe dans le cercle unité, où elle prend n fois la valeur o, p fois la valeur 1, q fois la

valeur ∞. Son module est majoré par M en des points intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$ ne pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $\frac{2e}{100}$.

La limitation de l'indice caractéristique s'opère en deux temps, comme pour les fonctions holomorphes.

Un *premier cas* est celui où la dérivée φ' n'est pas trop petite partout hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0,1,\ \infty\ ;\ \frac{1}{100}\right)$ dans le cercle $|z| = 0,8$. Pour fixer les idées, comme pour les fonctions holomorphes, on suppose qu'en un point au moins de ce domaine, $|\varphi'|$ est supérieur à $0,1$. On montre l'existence d'un point d'affixe x (qu'on peut supposer réelle et positive) hors des cercles d'exclusion, et en lequel on a

$$|\varphi(x)| < \mathrm{M} + 1, \qquad |\varphi'(x)| \geqq 0,1,$$

on opère la transformation

$$\mathrm{Z} = \frac{(z - x)r}{r^2 - zx},$$

et l'on applique le théorème A.

Désignons par Φ la transformation de φ; la nouvelle origine n'est pas un pôle pour la fonction Φ. Comme pour les fonctions holomorphes, $\mathrm{T}(1, \Phi)$, donc *a fortiori* $m(1, \Phi)$, est majoré par

$$k(n + p + q) + k \overset{+}{\log} \mathrm{M} + k \log \frac{1}{1 - r} + k,$$

par application de l'inégalité (1).

Dans le retour au plan z se produit un incident supplémentaire.

En effet, la comparaison de $\mathrm{T}(1, \mathrm{F})$ et de $\mathrm{T}(r, f)$ est celle de deux indices m. Ici, il s'ajoute les indices de densité N relatifs aux pôles, ce qui complique légèrement la comparaison.

La comparaison des indices $m(1, \Phi)$ et $m(r, \varphi)$ s'effectue comme pour les fonctions holomorphes, et l'on a, dans ce premier cas, l'inégalité

$$m(r, \varphi) < k(n + p + q) + k \overset{+}{\log} \mathrm{M} + k \log \frac{1}{1 - r} + k.$$

87. L'étude du deuxième cas s'effectue exactement sur la même base que pour les fonctions holomorphes. Aucun raisonnement supplé-

mentaire n'est nécessaire pour passer au cas de la méromorphie [1], mais, comme dans le premier cas, il n'est pas possible d'obtenir autre chose qu'une limitation de l'indice $m(r, \varphi)$, celle-ci est la même que la précédente.

88. Résumons dans le

THÉORÈME VIII'. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité et y prenant n fois la valeur* o, *p fois la valeur* 1, *q fois la valeur ∞. On suppose que $|\varphi|$ est inférieur à* M *en des points intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$, et qu'il est impossible d'enfermer dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $\frac{2e}{100}$. Alors on a l'inégalité*

$$m(r, \varphi) < k(n+p+q) + k \overset{+}{\log} \mathrm{M} + k \log \frac{1}{1-r} + k. \tag{27}$$

89. **Application à l'indice caractéristique.** — Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, prenant n fois la valeur o, p fois la valeur 1 et q fois la valeur ∞. On pose $\psi = \frac{1}{\varphi}$. Des deux fonctions φ, ψ, l'une d'elles est inférieure en module à 1 dans la moitié au moins du cercle $|z| = \frac{1}{2}$; nous supposerons que c'est φ. On peut appliquer à cette fonction l'inégalité (27), où l'on fait $\mathrm{M} = 1$.

Passons à l'indice caractéristique de la façon suivante :

Lorsque r est supérieur à $\frac{1}{2}$, on a

$$\mathrm{N}(r, \varphi) - \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{r} \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \log 2r,$$

$n(0)$ est l'ordre de multiplicité de l'origine en tant que pôle (o si l'origine n'est pas un pôle). On déduit de suite de cette formule que $\mathrm{N}(r, \varphi) - \mathrm{N}\left(\frac{1}{2}, \varphi\right)$ est majoré par kq (k numérique positif).

---

[1] Sauf cette remarque très simple : aucun point hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1, \infty; \frac{1}{100}\right)$, n'est un pôle pour la fonction φ.

Additionnons $N(r, \varphi)$ aux deux membres de l'inégalité (27); on a une limitation de $T(r, \varphi)$.

On passe à celle de $T(r, \psi)$ en utilisant la formule de Jensen-Nevanlinna

$$T(r, \psi) = T(r, \varphi) + \log |c(\psi)|.$$

D'où le

Théorème IX. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, et prenant n fois la valeur 0, p fois la valeur 1, q fois la valeur ∞. Son indice caractéristique satisfait, pour r supérieur à $\frac{1}{2}$, à l'inégalité*

$$T(r, \varphi) < k(n + p + q) + k \log \frac{1}{1 - r} + k + \lambda, \tag{28}$$

k est une constante numérique positive, qui n'a pas partout la même valeur; λ est une des quantités

$$N\left(\frac{1}{2}, \varphi\right), \qquad N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\varphi}\right) + \log |c(\varphi)|.$$

Rappelons que $c(\varphi)$ est le premier coefficient du développement de φ en série de Laurent, aux environs de l'origine.

Remarque. — Si l'origine est hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(\infty, \frac{1}{100}\right)$ ou $\gamma\left(0, \frac{1}{100}\right)$, alors le terme $N\left(\frac{1}{2}, \varphi\right)$ ou $N\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\varphi}\right)$ rentre dans le terme $k(n + q)$.

CHAPITRE V.

LES QUANTITÉS 0, 1, ∞ SONT REMPLACÉES PAR LES QUANTITÉS a, b, c.

90. **Fonctions holomorphes dans le cercle unité, prenant n fois la valeur a, p fois la valeur b.** — Soit $g(z)$ une telle fonction. On revient aux fonctions f étudiées aux deuxième et troisième Chapitres en posant

$$f(z) = \frac{g(z) - a}{b - a}.$$

On désigne par δ la plus petite des distances des images sphériques prises deux à deux des trois valeurs : a, b, ∞. On a alors

$$|a| < \frac{k}{\delta}; \qquad |b| < \frac{k}{\delta} \qquad \text{et} \qquad |b-a| > k\delta.$$

Par suite, si l'on suppose que $|g(z)|$ est inférieur à M en certains points, $|f(z)|$ sera, en ces points, inférieur à $k\frac{M}{\delta} + \frac{k}{\delta^2}$.

Les hypothèses faites au deuxième Chapitre sur la constitution de ces points permettent de déduire des propriétés de la fonction f. Partout où, dans ces propriétés, figure la quantité $k\overset{+}{\log} M$, cette quantité doit être remplacée par

$$k\overset{+}{\log} M + k\log\frac{1}{\delta} + k.$$

Retour à la fonction g. — Elle se fait avec la formule

$$g = (b-a)f + a,$$

d'où l'on déduit

$$\log|g| < \log|f| + k\log\frac{1}{\delta} + k. \tag{29}$$

91. **Exemples.** — Ainsi le théorème II donne le

Théorème X. — *Soit $g(z)$ une fonction holomorphe dans le cercle unité et prenant* **n** *fois la valeur a, p fois la valeur b. On désigne par δ le plus petit des côtés du triangle sphérique déterminé par les images, sur la sphère de Riemann, de a, b, ∞.*

Si le module de g(z) est inférieur à M en des points intérieurs au cercle $|z| = \frac{1}{2}$, ne pouvant être enfermés dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $\frac{2e}{100}$, dans le cercle $|z| = r$, on a l'inégalité

$$(1-r)\log|g(z)| < k(n+p) + k\overset{+}{\log} M + k\log\frac{1}{\delta} + k.$$

Le théorème III, et par conséquent les théorèmes IV, V et VI se généralisent de la même façon.

92. L'extension du théorème VIII nécessite une étude comparative

de $T(r, f)$ et de $T(r, g)$. Elle se déduit immédiatement de l'inégalité (29). Par suite :

Dans les notations et hypothèses du théorème X, l'indice caractéristique est majoré par l'expression

$$k(n+p) + k\overset{+}{\log} M + k \log \frac{1}{\delta} + k.$$

93. **Fonctions méromorphes dans le cercle unité, prenant n fois la valeur a, p fois la valeur b, q fois la valeur c.** — Soit $\psi(z)$ une telle fonction. On revient aux fonctions étudiées au Chapitre IV, en posant

$$\varphi = \frac{\psi - a}{\psi - c} : \frac{b-a}{b-c}.$$

Le choix de la correspondance de l'ensemble des trois valeurs a, b, c, aux trois valeurs $0, 1, \infty$, est arbitraire, de sorte qu'à une fonction ψ correspondent six fonctions φ.

Il faut remarquer ici que dans les théorèmes faisant intervenir le module de $\varphi(z)$, limiter supérieurement ce module en certains points A, c'est imposer à $\varphi(z)$ de ne pas trop se rapprocher de la valeur ∞ en ces points. Donc la correspondance pour $\psi(z)$ devra comporter l'obligation, pour cette fonction, de ne pas trop se rapprocher, en les points A, soit de a, soit de b, soit de c; par exemple de c.

A partir de cette base, on obtient aisément une limitation supérieure de $|\varphi(z)|$ hors les cercles d'exclusion relatifs aux pôles de la fonction φ, c'est-à-dire aux points où la fonction initiale ψ prend la valeur c.

On passe ensuite sans difficulté à une limitation inférieure de la distance sphérique qui sépare ψ de c. Dans cette correspondance, le plus petit des côtés du triangle sphérique constitué par les images, sur la sphère de Riemann, de a, b, c est désigné par δ.

Supposons que la distance sphérique de ψ à c est au moins égale à $\frac{1}{M}$ en les points A du cercle $|z| = \frac{1}{2}$; points qu'il est impossible d'enfermer dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'atteint pas $\frac{2e}{100}$. On trouve ainsi que dans le cercle $|z| = r$, la distance sphérique d qui sépare ψ de c obéit à la limitation

$$(1-r)d < k(n+p+q) + k\overset{+}{\log} M + k\log\frac{1}{\delta} + k - kq\log h,$$

sauf pour des points z inclus dans les cercles d'exclusion $\gamma(c, h)$.

94. **Extensions analogues des autres théorèmes.** — Sans faire d'hypothèse sur la distance sphérique, en certains points A, de la fonction étudiée ψ à l'une des quantités a, b, c, nous allons chercher à majorer $T(r, \psi)$. Ce problème aura d'importantes conséquences dans la deuxième Partie de ce Mémoire.

Il s'agit en somme de passer de la limitation (28) ou (27), valable pour la fonction φ, à une limitation $T(r, \psi)$.

Nous désignons toujours par δ le plus petit des côtés du triangle sphérique constitué par les images de a, b, c. Soit c la quantité qui a le plus grand module, parmi a, b, c. Les modules de a et b sont alors inférieurs à $\frac{k}{\delta}$. Le rapport $\left|\frac{c-a}{c-b}\right|$ est compris entre $\frac{k}{\delta^2}$ et $k\delta^2$.

On ordonne ensuite a et b de façon que la fonction $\varphi = \frac{\psi-a}{\psi-b} : \frac{c-a}{c-b}$ soit inférieure en module à 1 dans la moitié au moins du cercle $|z| = \frac{1}{2}$.

En vertu du théorème VIII′ (n° 88), l'indice $m(r, \varphi)$ satisfait alors à l'inégalité (27), où l'on fait $M = 1$. Par suite des limitations de $\left|\frac{c-a}{c-b}\right|$, on constate que l'expression

$$k(n+p+q) + k\log\frac{1}{1-r} + k\log\frac{1}{\delta} + k$$

majore $m\left(r, \frac{\psi-a}{\psi-b}\right)$.

Or, on a

$$\frac{1}{\psi-b} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{\psi-a}{\psi-b} - 1\right).$$

Comme $\frac{1}{|b-a|}$ est inférieur à $\frac{k}{\delta}$, on en déduit que la même expression (30), mais avec une valeur différente de la troisième constante numérique k, majore aussi $m\left(r, \frac{1}{\psi-b}\right)$.

Supposons maintenant r supérieur à $\frac{1}{2}$.

Remarquons que $T\left(r, \frac{1}{\psi - b}\right) - T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\psi - b}\right)$ est inférieur ou égal à $m\left(r, \frac{1}{\psi - b}\right) + \left[N\left(r, \frac{1}{\psi - b}\right) - N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\psi - b}\right)\right]$ et que ce dernier crochet (voir le raisonnement au numéro 89) est inférieur à kp.

Donc $T\left(r, \frac{1}{\psi - b}\right) - T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\psi - b}\right)$ est encore majoré par une expression (30).

On passe de là à l'indice $T(r, \psi)$ en appliquant la formule de Jensen-Nevanlinna, qui montre que l'expression $T(r, \psi - b) - T\left(\frac{1}{2}, \psi - b\right)$ est identique à la précédente.

Comme $T(r, \psi - b) - T(r, \psi)$ est majoré par $\overset{+}{\log}|b| + \log 2$, puisque les indices m entrent seuls en jeu dans la différence, et comme $|b|$ est inférieur à $\frac{k}{\delta}$, l'expression (30) majore encore $T(r, \psi) - T\left(\frac{1}{2}, \psi\right)$.

D'où le

Théorème XI. — *Soit $\psi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité et prenant au plus m fois chacune des valeurs a, b, c, dont les distances sphériques prises deux à deux sont au moins égales à δ. Lorsque r est supérieur à $\frac{1}{2}$, on a l'inégalité*

$$T(r, \psi) < km + k \log \frac{1}{1 - r} + k \log \frac{1}{\delta} + k + T\left(\frac{1}{2}, \psi\right), \tag{31}$$

k désigne une constante numérique positive, qui n'a pas nécessairement partout la même valeur.

DEUXIÈME PARTIE.

DISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION MÉROMORPHE DANS LE CERCLE UNITÉ.

CHAPITRE I.

FONCTION MÉROMORPHE $\varphi(z)$ NE PRENANT PAS PLUS DE m FOIS CHACUNE DE TROIS VALEURS DONNÉES a, b, c.

95. Nous nous posons ici le problème suivant : *donner une limite supérieure du nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans le cercle $|x| = r$.*

Les résultats qui seront obtenus précisent ceux d'un mémoire récent [1] et seront utilisés ensuite dans une étude des cercles de remplissage des fonctions méromorphes dans le cercle unité.

Nous désignons par δ le moindre des côtés du triangle sphérique constitué sur la sphère de Riemann, par les images de a, b, c, et distinguons deux cas :

96. **Premier cas.** — *Il existe une valeur fixe ω telle qu'en tous les points* A *situés dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$, hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(a, b, c, \frac{1}{100}\right)$, la distance sphérique de φ à ω est inférieure à e^{-m}.*

On désigne par T l'une des six transformations

$$(\mathrm{T}_1)\quad Z_1 = \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c}, \qquad (\mathrm{T}'_1)\quad Z'_1 = \frac{1}{Z_1},$$

$$(\mathrm{T}_2)\quad Z_2 = 1 - Z_1, \qquad (\mathrm{T}'_2)\quad Z'_2 = \frac{1}{Z_2},$$

$$(\mathrm{T}_3)\quad Z_3 = \frac{Z_1}{1 - Z_1}, \qquad (\mathrm{T}'_3)\quad Z'_3 = \frac{1}{Z_3}.$$

---

(1) H. Milloux, *Fonctions méromorphes dans un cercle* (*J. de Math. pures et appliquées*, 1938).

Elles transforment le groupe (a, b, c) en le groupe $(0, 1, \infty)$.

Quitte à échanger T_1 et T'_1, on peut toujours supposer que T_1 transforme ω en une quantité Ω_1 de module inférieur ou égal à 1.

Nous nous proposons de majorer $n(r, \alpha)$, nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans le cercle $|z| = r$. La transformation T_1 change α en β_1. Ou bien le module de β_1 est inférieur à 2, et alors nous conserverons la transformation T_1, ou bien les deux transformations T_3 et T'_3 changent α en β_3 et β'_3 de module inférieur à 2. Nous choisirons alors parmi ces deux transformations celle qui transforme ω en une valeur de module inférieur à 2.

En résumé, *il existe une transformation* T *changeant* ω *en une valeur de module inférieur à* 1, *et une quantité donnée* α *en une quantité* β *de module inférieur à* 2. Quitte à changer l'ordre des lettres a, b, c, on peut supposer que c'est la transformation T_1.

Nous choisissons un point A quelconque, mais cependant distinct d'un zéro de $\varphi - \alpha$ et intérieur au cercle $|z| = \frac{1}{2}$; considérons la transformation conforme du cercle unité du plan x sur le cercle unité du plan X de façon que le point A et la nouvelle origine se correspondent. Soit Φ la fonction se déduisant de φ par la transformation T_1, fonction considérée dans le plan Z. A l'origine, la fonction Φ est inférieure en module à k, constante numérique (on peut prendre 2) puisque la distance sphérique de φ à ω est inférieure à e^{-10} et que Ω, correspondant à ω, a son module inférieur à 1.

La fonction Φ est inférieure en module à k non seulement à l'origine, mais encore dans tout le domaine Δ du plan Z, qui correspond à l'intérieur du cercle $|z| = u > \frac{1}{2}$ dont on a enlevé les cercles d'exclusion $\gamma\left(a, b, c, \frac{1}{100}\right)$. Il est manifeste que le domaine Δ, qui s'étend d'une façon continue à partir de l'origine du plan Z jusque des points du cercle $|Z| = \frac{1}{2}$ au moins, ne peut être enfermé dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $\frac{2e}{100}$. On peut donc appliquer le théorème VIII', qui donne ici

$$m(R, \Phi) < km + k + k \log \frac{1}{1 - R}.$$

Passons à l'indice caractéristique en ajoutant $N(R, \Phi)$, lequel est majoré par km, car l'origine est hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(0, 1, \infty, \frac{1}{100}\right)$. Et ensuite passons à $T(R, \Phi - \beta)$, majoré encore par $km + k + k\log\frac{1}{1-R}$; puisque $|\beta|$ est inférieur à 2. Enfin, la formule de Jensen-Nevanlinna donne une limitation de $T\left(R, \frac{1}{\Phi-\beta}\right)$, donc *a fortiori* de $N\left(R, \frac{1}{\Phi-\beta}\right)$. Cette borne est

$$km + k + k\log\frac{1}{1-R} - k\log|\Phi(0) - \beta|.$$

On peut remplacer $|\Phi(0) - \beta|$ par la distance sphérique de $\Phi(0)$ à β, ce qui conduit à comparer à la distance sphérique de $\varphi(A)$ à α. La comparaison a déjà été faite. Elle est d'ailleurs très élémentaire, et l'on trouve que le rapport de ces distances sphériques est compris entre $k\delta^3$ et $\frac{k}{\delta^3}$. Ce qui donne la limitation suivante :

$$(32)\qquad N(R, \beta) < km + k + k\log\frac{1}{1-R} + k\log\frac{1}{\delta} + k\log\frac{1}{\delta[\alpha, \varphi(A)]},$$

$\delta[u, v]$ désigne la distance sphérique de deux quantités u et v.

En particulier, si l'on pose

$$1 - R' = 2(1 - R),$$

on déduit de la limitation précédente que $n(R', \beta)$ est majoré par le second membre de l'inégalité (32) divisé par $1 - R$. On repasse ensuite aisément au plan x en remarquant qu'ici $\frac{1-|x|}{1-|X|}$ est compris entre deux constantes numériques. D'où finalement la limitation

$$(33)\qquad (1-r)n(r, \alpha) < km + k + k\log\frac{1}{1-r} + k\log\frac{1}{\delta} + k\log\frac{1}{\delta[\alpha, \varphi(A)]}.$$

97. **Deuxième cas.** — Supposons que *le premier cas ne se rencontre pas*.

Désignons par D le domaine intérieur au cercle $|x| = \frac{1}{2}$, hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(a, b, c, \frac{1}{100}\right)$.

Il n'existe pas de valeur fixe ω dont les distances sphériques à toutes les valeurs de φ prises dans D soient inférieures à e^{-m}.

D'après sa constitution le domaine D ne peut être enfermé dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons n'excède pas $\frac{1}{2} - \frac{1}{100}$. Il est manifeste qu'il existe un domaine D′ extrait de D non nécessairement d'un seul tenant ne pouvant être enfermé dans des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à une constante numérique λ, et tel que les images sphériques des valeurs de φ prises dans D′ sont situées dans un cercle de rayon 0, 1.

En effet, s'il n'en est pas ainsi, on peut balayer toute la sphère de Riemann avec un nombre fini k de cercles de rayon 0, 1, et il correspond un nombre fini de domaines D′, pouvant être enfermés dans leur totalité en des cercles dont la somme des pseudo-rayons est inférieure à $k\lambda$. Il y a contradiction dès que $k\lambda$ n'atteint pas $\frac{1}{2} - \frac{1}{100}$.

Dans le domaine D′, on peut toujours trouver un point A tel que la distance $\delta[\alpha, \varphi(A)]$ excède e^{-m}, sinon, on établirait de proche en proche, dans tout le domaine D, l'inégalité

$$\delta(\varphi, \omega) < e^{-m},$$

et l'on retomberait dans le premier cas.

On opère alors, comme dans le premier cas, deux transformations homographiques : l'une sur la fonction φ, l'autre sur x. Les raisonnements sont les mêmes, simplifiés du fait que $\delta[\alpha, \varphi(A)]$ n'est pas très petit. On établit de la même façon que plus haut l'inégalité (33), simplifiée par la suppression du dernier terme du deuxième membre.

98. **Complément à l'étude du premier cas.** — On peut aussi choisir comme point A le point le plus proche de l'origine, mais cependant hors du cercle $|x| = \frac{1}{2}$, en lequel on a

$$\delta[\alpha, \varphi(A)] > e^{-m}.$$

Désignons par u le module de l'affixe de A. Il est manifeste que l'inégalité

$$\delta[\omega, \varphi(x)] < e^{-m}$$

est vérifiée dans le cercle $|x| = u$.

On recommence à nouveau les transformations du premier cas. On obtient à nouveau l'inégalité (32) simplifiée par la suppression de son dernier terme. Mais le passage au plan x est un peu plus compliqué; le rapport $\frac{1-|x|}{1-|X|}$ est, en effet, ici compris entre $k(1-u)$ et $\frac{k}{1-u}$. On en déduit l'inégalité

$$(1-u)(1-r)n(r,\alpha) < km + k + k\log\frac{1}{(1-r)(1-u)} + k\log\frac{1}{\delta}.$$

99. Résumons dans le

Théorème XII. — *Soit $\varphi(x)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, et prenant m fois au plus chacune de trois valeurs a, b, c dont les distances sphériques prises deux à deux sont au moins égales à δ. Soit $n(r,\alpha)$ le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ dans le cercle $|x|=r$.*

Premier cas. — *Dans le cercle $|x|=u$ supérieur à $\frac{1}{2}$ et hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(a, b, c, \frac{1}{100}\right)$ l'oscillation sphérique de la fonction φ est inférieure à e^{-m}. Alors on a les deux inégalités*

$$(1-r)n(r-\alpha) < km + k + k\log\frac{1}{1-r} + k\log\frac{1}{\delta} + k\log\frac{1}{\delta(\alpha, A)}, \tag{33}$$

où A désigne une quantité fixe, et $\delta(\alpha, A)$ la distance sphérique de α à A

$$(1-r)(1-u)n(r,\alpha) < km + k + k\log\frac{1}{(1-r)(1-u)} + k\log\frac{1}{\delta}. \tag{33'}$$

(Cette dernière inégalité suppose que u ne peut être augmenté, c'est-à-dire qu'en un cercle de centre O et de rayon supérieur à u, et en dehors des cercles d'exclusion, l'oscillation de φ est au moins égale à e^{-m}.)

Deuxième cas. — *Dans le cercle $|x|=\frac{1}{2}$, hors des cercles d'exclusion $\gamma\left(a, b, c, \frac{1}{100}\right)$, l'oscillation sphérique de la fonction atteint ou dépasse e^{-m}. On a l'inégalité*

$$(1-r)n(r,\alpha) < km + k + k\log\frac{1}{1-r} + k\log\frac{1}{\delta}. \tag{34}$$

Remarque. — Dans le premier cas, on peut introduire le théorème de Rouche. En effet, considérons la fonction $\psi = \frac{1}{\varphi - \omega}$, ω désignant l'une des valeurs de la fonction φ dans le domaine où elle ne varie pas beaucoup; on peut supposer, pour fixer les idées, ω inférieur à 1 $\left(\text{quitte à changer } \varphi \text{ en } \frac{1}{\varphi}\right)$.

Il existe un cercle $|x| = u'$, avec $1 - u' = \frac{5}{4}(1 - u)$ échappant entièrement aux cercles d'exclusion. Dans ce cercle, le nombre des zéros de $\psi - \beta$ est indépendant de β, pourvu que le module de β ne dépasse pas e^m. En particulier, il est au plus égal à m, puisque cette limitation est acquise lorsque β prend la valeur 0. Le nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ est alors inférieur à m lorsque α ne se rapproche pas trop de ω (lorsque $|\alpha - \omega|$ est inférieur à ke^{-m}).

100. **Application.** — $r = \frac{1}{2}$. Alors on a la limitation

$$n\left(\frac{1}{2}, \alpha\right) < km + k + k \log \frac{1}{\delta} + k \log \frac{1}{\delta(\alpha, A)}, \tag{35}$$

valable dans tous les cas, et résultant déjà de travaux de M. G. Valiron (*voir* fascicule du *Mémorial* déjà cité).

Cette limitation va nous servir de point de départ à une limitation de $n(r, \alpha)$ d'un autre genre que celle donnée par le théorème XII.

Le centre du cercle $|z| = \frac{1}{2}$ est l'origine. Pour bien préciser ce point, nous le rappellerons en désignant la quantité A par A(0). On peut aussi énoncer la propriété suivante :

Dans le cercle $C(x)$ *de centre non euclidien* x *et de pseudo-rayon* $\frac{1}{2}$, *le nombre des zéros de* $\varphi - \alpha$ *est au plus égal à*

$$km + k + k \log \frac{1}{\delta} + k \log \frac{1}{\delta[\alpha, A(x)]}.$$

Chaque changement de x risque de changer $A(x)$.

101. Pour majorer le nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans le cercle $|z| = r$, nous remarquerons d'abord que nous pouvons balayer

tout l'intérieur de ce cercle à l'aide de cercles $C(x)$, choisis avec un nombre fini de points x; *ce nombre fini est même inférieur à* $\frac{k}{1-r}$.

En effet, en prenant $x = re^{\lambda i \omega (1-r)}$, où 10λ est un entier compris entre 0 et $\frac{2\pi}{1-r}$, on a une première série de cercles $C(x)$, en nombre au plus égal à $\frac{A}{1-r}$, qui balayent toute la couronne.

$$r_1 < |z| < r,$$

avec

$$1 - r_1 = (1-r)(1+B),$$

A et B sont deux constantes *numériques positives*.

On recommence avec le cercle $|z| = r_1$, et ainsi de suite.

Le nombre total des cercles est alors inférieur à

$$A\left[\frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-r_1} + \ldots\right] = \frac{A}{1-r}\,\frac{1+B}{B} = \frac{k}{1-r}.$$

Dans le cercle $|z| = r$, on aura donc, pour $n(r, \alpha)$, la limitation

$$\frac{km+k}{1-r} + ku,$$

avec

$$u = -\sum \log \delta[\alpha, A(x_i)].$$

Le nombre des x_i est inférieur à $\frac{k}{1-r}$. En adaptant à notre problème un procédé dû à M. Valiron, nous appliquons à cette dernière somme le théorème de Boutroux-Cartan sur la sphère de Riemann, rappelé au Chapitre I; on en déduit l'inégalité

$$u < \frac{k}{1-r} \log \frac{1}{h},$$

sauf pour des valeurs de α, dont les images sphériques peuvent être incluses dans des cercles dont la somme des rayons n'excède pas $2eh$.

102. On peut résumer ces résultats dans l'énoncé suivant, qui complète en un certain sens le théorème XII :

THÉORÈME XII'. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité, et prenant m fois au plus les valeurs a, b, c, dont les distances sphériques sont au moins égales à δ. Alors, dans le cercle $|z|=r$, le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ est au plus égal à l'expression*

$$\frac{1}{1-r}\left[km+k\log\frac{1}{\delta}+k+k\log\frac{1}{h}\right],$$

sauf peut-être pour des valeurs de α dont les images sur la sphère de Riemann peuvent être incluses dans des cercles dont la somme des rayons n'atteint pas $2eh$.

k est une constante numérique positive.

CHAPITRE II.

CERCLES DE REMPLISSAGE.

103. Rappelons et précisons la définition de ces cercles :

Une fonction méromorphe admet un cercle C comme cercle de remplissage à indices au moins égaux à n et p si, dans ce cercle, le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ est au moins égal à n, sauf peut-être pour des quantités α dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayons au plus égaux à e^{-p}.

Le plus souvent, on fait $n=p$.

Nous utiliserons fréquemment la remarque fondamentale suivante :

Si le cercle C n'est pas, pour la fonction φ un cercle de remplissage à indices au moins égaux à n, on peut trouver trois valeurs a, b, c, dont les images sphériques sont distantes deux à deux d'au moins e^{-n}, telles que la fonction φ ne prend pas plus de n fois chacune de ces valeurs dans le cercle C.

On peut alors appliquer le résultat du n° 100, de sorte que *le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ dans le cercle C' concentrique à C et de rayon* *moitié* [1] *est majoré par l'expression*

$$kn + k + k \log \frac{1}{\delta(\alpha, A)}, \tag{35'}$$

où A *est indépendant de* α.

Ou encore : *le nombre des zéros de* $\varphi - \alpha$ *dans* C′ *inférieur à* $kn + k$, *sauf peut-être pour des valeurs de* α *dont les images sphériques peuvent être incluses dans un petit cercle de rayon* e^{-n}.

104. Une application importante de cette dernière propriété est la suivante :

Théorème XIII. — *Soit* D *un domaine qu'on décompose en une infinité dénombrable de domaines partiels* $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$, *lesquels sont englobés dans des cercles* $C'_1, C'_2, \ldots, C'_m, \ldots$, *on construit les cercles* $C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$, *concentriques et de rayons doubles, et l'on désigne par* Δ *le domaine balayé par les cercles* C_m.

A chaque valeur de m *on fait correspondre une fonction,* $\lambda(m)$ *augmentant indéfiniment avec* m, *de façon que la série*

$$\sum e^{-\lambda(m)} \tag{36}$$

converge et même ait une somme numériquement faible, par exemple inférieure à $\frac{1}{10}$.

On suppose qu'une fonction $\varphi(z)$ *méromorphe dans* Δ, *n'admette aucun cercle* C_m *comme cercle de remplissage à indices au moins égaux à* $\lambda(m)$. *Alors pour une infinité de valeurs de* a *indépendantes de* m, *et d'une façon plus précise pour des valeurs de* a *dont les images sphériques sont telles que leurs complémentaires sont incluses dans des cercles dont la somme des rayons est inférieure à* $\frac{1}{10}$, *le nombre des zéros de* $\varphi - \alpha$ *dans* C'_m *est inférieur à* $k\lambda(m) + k$.

Il suffit d'appliquer à chaque couple C_m, C'_m la dernière remarque du n° 103, après avoir remplacé n par $\lambda(m)$.

---

(1) Il n'est pas nécessaire que C′ soit concentrique : si C est intérieur au cercle unité, on peut prendre pour C′ le cercle de même centre non euclidien et de pseudo-rayon moitié.

Cet important théorème s'appliquera surtout dans sa contre-partie : nous choisirons $\lambda(m)$ de façon que la conclusion soit fausse; d'où alors résulte qu'un cercle C_m au moins est cercle de remplissage à indices au moins égaux à $\lambda(m)$. S'il est avéré que la conclusion est fausse pour une suite infinie de cercles C'_m, c'est qu'il existe une suite infinie de cercles C_m qui sont cercles de remplissage à indices au moins égaux à $\lambda(m)$.

105. Considérons une fonction méromorphe dans le cercle unité, et partageons d'abord l'intérieur de ce cercle par des couronnes circulaires de centre O, telles que les rayons r et r' des cercles extrêmes satisfont à la condition $r - r' = \omega(1 - r)$.

On suppose que ω dépend de r, et, pour fixer les idées, est inférieur à une constante numérique assez faible, par exemple 0,1. On constate aisément que l'on peut balayer une telle couronne circulaire avec des cercles $C'(\omega)$ de pseudo-rayon ω, en nombre au plus égal à $\frac{k}{\omega(1-r)}$ (k numérique). A chaque cercle $C(\omega)$ ayant même centre non euclidien que $C'(\omega)$, on associe un nombre n dépendant de r, mais non de $C(\omega)$; et l'on suppose que φ n'admet pas $C(\omega)$ comme cercle de remplissage à indices au moins égaux à n. Alors le nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans la couronne circulaire $r'r$ est inférieur à $\frac{kn+k}{\omega(1-r)}$ $\left(\text{ou plus simplement à } \frac{kn}{\omega(1-r)},\text{ si l'on suppose que } n \text{ dépasse une constante numérique}\right)$, sauf peut-être pour des valeurs de α dont les images sphériques sont incluses dans des cercles dont la somme des rayons $d(r)$ satisfait à l'inégalité

$$d(r) < \frac{k}{\omega(1-r)} e^{-n}. \tag{37}$$

Ceci posé, choisissons un système de quantités $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_p, \ldots$, non croissantes, de façon que les quantités correspondantes r_0, $r_1, \ldots, r_p, \ldots$ tendent vers 1 (1) et associons aussi des nombres n_0, $n_1, \ldots, n_p, \ldots$, tendant vers l'infini; nous supposons que les propriétés

(1) Cette condition est réalisée si la série $\sum \omega_p$ est divergente.

précédentes sont vérifiées dans chaque couronne $r_{p-1}=r'$, $r_p=r$. Nous désignons par $n(t)$ une quantité non décroissante et par $\omega(t)$ une quantité non croissante, coïncidant respectivement avec n_p et ω_{p+1}, lorsque t vaut r_p.

Il est manifeste que la condition relative à la série (36) sera vérifiée si l'intégrale

$$\mathrm{I}=\int_{r_0}^{1}\frac{e^{-n(t)}}{\omega^2(t)(1-t)^2}\,dt$$

est convergente; en effet, $d(r_p)$ est inférieur à la portion de l'intégrale correspondant à l'intervalle $r_{p-1}r_p$, multipliée par une constante numérique.

On pourra toujours choisir r_0 de façon que I soit inférieur à $\frac{1}{10}$. Nous avons donc la propriété suivante : quel que soit l'indice p, il existe une infinité de valeurs de α indépendantes de p, telles que le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ situés dans la couronne $r_{p-1}r_p$ est inférieur à $\frac{kn_p}{\omega_p(1-r_p)}$. La part de ces zéros dans le calcul de $\mathrm{N}(\mathrm{R},\alpha)$ (lorsque R dépasse r_p) est inférieure à

$$\frac{kn_p}{\omega_p}\,\frac{\mathrm{R}-r_{p-1}}{1-r_p}<k\frac{n_p}{\omega_p}.$$

Régularisons au besoin la décroissance de ω en imposant au rapport de deux ω consécutifs d'être compris entre deux constantes numériques. C'est tout naturel, puisque la série $\sum\omega_p$ doit diverger. Dans ces conditions, notons que la part précédente est inférieure à

$$\frac{kn_p}{(1-r_p)\omega_p^2}(r_p-r_{p-1}),$$

et, par suite, la part des zéros de $\varphi-\alpha$ compris entre r_p et R dans le calcul de $\mathrm{N}(\mathrm{R},\alpha)$ est inférieure à l'intégrale

$$k\int_{r_0}^{\mathrm{R}}\frac{n(t)\,dt}{(1-t)\,\omega^2(t)}=k\mathrm{J}(\mathrm{R}).$$

La part des zéros antérieurs à r_0 est inférieure à une quantité fixe : $n(r_0,\alpha)\,\mathrm{Log}\frac{1}{r_0}$. Rappelons que le nombre des α satisfaisant à cette propriété est infini. Il nous suffit d'ailleurs de trois quantités α prises dans ce groupe; choisissons-les distinctes de $\varphi(0)$, et opérons une transformation homographique sur φ, destinée à les envoyer dans le groupe $0, 1, \infty$. Comme dans chaque cercle de la sphère de Riemann, ayant pour rayon $\frac{1}{10}$, il y a au moins un α, on pourra donc supposer que les distances sphériques de ces trois α sont supérieures à une constante numérique.

Appliquons alors le théorème A [avec remplacement, au besoin, de $\varphi'(0)$ par $c[\varphi'(0)]$ si l'origine est un zéro de φ'] à la fonction Φ déduite de φ par la transformation précédente. Après retour à la fonction φ, on obtient l'inégalité

$$\mathrm{T}(\mathrm{R}, \varphi) < k\mathrm{J}(\mathrm{R}) + k + \lambda + k \log \frac{1}{1-\mathrm{R}},$$

où λ est une quantité fixe, indépendante de R.

D'où l'énoncé suivant :

Théorème XIV. — *Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans le cercle unité; $\omega(t)$ et $n(t)$ deux fonctions, la première non croissante, la deuxième non décroissante satisfaisant à la convergence de l'intégrale*

$$\mathrm{I} = \int^{1} \frac{e^{-n(t)}}{(1-t)^2\,\omega^2(t)}\,dt.$$

La décroissance de $\omega(t)$ est supposée assez régulière pour que, en posant $r' - r = (1-r)\,\omega(r)$, le rapport $\frac{\omega(r)}{\omega(r')}$ soit inférieur à une constante numérique.

Si aucun cercle de remplissage à indices au moins égaux à $n(r)$ et de pseudo-rayon $\omega(r)$ ne peut être trouvé, empiétant sur la couronne rr', alors on a l'inégalité

$$\mathrm{J}(\mathrm{R}) = \int_{r_0}^{\mathrm{R}} \frac{n(t)\,dt}{(1-t)\,\omega^2(t)} > k\mathrm{T}(\mathrm{R}, \varphi) - k - \lambda - k \log \frac{1}{1-\mathrm{R}}, \tag{38}$$

où λ est une quantité fixe, indépendante de R. *k est une constante numérique.*

106. **Première application : ω est constant.** — On constate de suite

que l'intégrale I est convergente si l'on choisit

$$n(t) = 3 \log \frac{1}{1-t}$$

et

$$J(R) = \frac{k}{\omega^2} \operatorname{Log}^2 \frac{1}{1-R};$$

d'où le

THÉORÈME XV. — *Toute fonction méromorphe satisfaisant à la condition*

$$\overline{\lim} \frac{T(r, \varphi)}{\log^2 \frac{1}{1-r}} = \infty \tag{39}$$

admet une infinité de cercles de remplissage, à indices indéfiniment croissants, vus du cercle unité sous des angles tendant vers zéro.

On sait que si la condition

$$\overline{\lim} \frac{T(r, \varphi)}{\log \frac{1}{1-r}} = \infty \tag{39'}$$

est réalisée, alors la fonction φ satisfait au théorème de Picard dans le cercle unité, et il n'est pas possible d'améliorer ce résultat. L'existence des cercles de remplissage est-elle aussi assurée pour les fonctions (39′), ou un exemple montre-t-il que la condition (39) est la meilleure possible? C'est une question que je n'ai pu résoudre; l'existence de cercles de remplissage pour les fonctions (39′) semble probable.

107. **Étude des fonctions méromorphes d'ordre fini** ρ. — Ce sont les fonctions satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r, \varphi)}{\log \frac{1}{1-r}} = \rho,$$

ρ est appelé par M. G. Valiron : ordre *moyen*; $\rho + 1$ est l'ordre *total*.

Prenons

$$n(t) = (1-t)^{-\mu},$$

μ étant une constante positive. Il est manifeste que l'intégrale I est convergente. Quant à l'intégrale $J(R)$, elle vaut, lorsque ω est constant,

$$\frac{1}{\omega^2(1+\mu)}(1-R)^{-\mu}+\lambda',$$

λ' ne dépend pas de R.

En comparant avec le deuxième membre de l'inégalité (38), on constate qu'il y a impossibilité si μ est inférieur à l'ordre ρ de la fonction φ.

Donc $n(t)$ surpasse $(1-t)^{-\rho+\varepsilon}$ pour une suite de valeurs de t tendant vers 1. On a supposé ω constant; mais ω est arbitrairement petit, et d'ailleurs on peut à la rigueur l'associer à ε et t de façon que l'impossibilité de l'inégalité (38) subsiste lorsque $n(t)$ est inférieur à $(1-t)^{-\rho+\varepsilon}$.

D'où le théorème suivant, déjà obtenu différemment par M. G. Valiron (1) :

THÉORÈME XVI. — *Toute fonction méromorphe d'ordre ρ possède une suite de cercles de remplissage vus du cercle unité sous des angles tendant vers* 0. *Dans l'un de ces cercles traversé par le cercle de centre* O *et de rayon t, le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ est supérieur à $(1-t)^{-\rho+\varepsilon}=n$, sauf peut-être pour des valeurs de α dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayons e^{-n}.*

ε est une constante positive arbitrairement petite; on peut la faire dépendre de t de façon qu'elle tende vers 0 lorsque t tend vers 1.

Si l'on considère une suite infinie quelconque de tels cercles de remplissage, et si l'on désigne par $z(\alpha)$ l'affixe d'un zéro de $\varphi-\alpha$ contenu dans ces cercles, la série

$$\sum[1-|z(\alpha)|]^{\rho-\varepsilon} \tag{40}$$

diverge, sauf pour deux valeurs de α au plus.

On dit pour cela que la suite des cercles de remplissage est une suite d'ordre *au moins égal à* ρ. On remarquera que si dans la série (40)

(1) G. VALIRON, *Recherches sur le théorème de M. Borel* (*Acta Math.*, t. 52, p. 87).

on remplace $\rho - \varepsilon$ par $\rho + 1 + \varepsilon$, alors la série converge (résultat de R. Nevanlinna) pour tous les $z(\alpha)$ situés dans le cercle unité, donc, *a fortiori*, dans la suite envisagée des cercles de remplissage.

Cette suite de cercles de remplissage admet au moins un point limite, A sur le cercle unité. Ce point limite est tel que la série (40) diverge lorsqu'on se borne à y faire figurer les $z(\alpha)$ situés dans un cercle de centre A et de rayon arbitrairement petit. C'est suivant la terminologie de M. Valiron [1], un *point de Borel d'ordre au moins égal à* ρ. Nous étudierons ultérieurement l'approche des points de Borel, en utilisant une méthode différente.

108. On dit que la fonction φ est d'ordre ρ et de *type maximum* si

$$\overline{\lim}(1-r)^{\rho}\,\mathrm{T}(r, \varphi) = \infty.$$

Sur l'inégalité (38) on constate immédiatement que si la suite de cercles de remplissage nés de cette inégalité est d'ordre ρ (elle est d'ordre au moins égal à ρ), elle est aussi de *type maximum*.

Pour le type moyen (dans la condition précédente on remplace ∞ par un nombre fini) on ne peut rien dire, si l'on astreint $\omega(t)$ à tendre vers 0 lorsque t tend vers 1.

Classe divergente. — La fonction φ est dite de *classe divergente* si l'intégrale

$$\int^{1} \mathrm{T}(r, \varphi)(1-r)^{\rho-1}\,dr$$

est divergente. D'après l'inégalité (38), si l'on fait ω constant, il en est de même de l'intégrale

$$\int^{1} (1-r)^{\rho-1}\,dr \int_{r_0}^{r} \frac{n(t)}{1-t}\,dt.$$

La dernière intégrale est majorée par $\frac{1}{\omega}\sum n(t)$, d'après la constitution des cercles $\mathrm{C}(\omega)$, lesquels ont approximativement pour rayon $\omega(1-t)$. La somme $\sum n(t)$ s'étend depuis r_0 jusque r; en sup-

---

[1] G. VALIRON, *Points de Picard et points de Borel des fonctions méromorphes dans un cercle* (*Bull. des Sc. Math.*, t. 56, janvier 1932, p. 1-22).

posant r_0 supérieur à $\frac{1}{2}$, on peut diviser par t, et alors $\sum n(t)$ n'est autre que $n(r, \alpha) - n(r, \alpha)$, l'indice n'ayant ici la signification classique; il est entendu qu'ici on ne considère que les zéros de $\varphi - \alpha$ situés dans les cercles $C(\omega)$, et l'on prend seulement un cercle par valeur de t (avec sauts brusques de t, comme il a été indiqué plus haut). Ceci nous montre que l'intégrale

$$\int^{1} n(r, \alpha)(1 - r)^{\rho-1}\, dr$$

est divergente, sauf peut-être pour deux valeurs au plus de α; d'où le résultat suivant (ω est arbitrairement petit) :

Si la fonction φ est d'ordre ρ et de classe divergente, il existe une suite de cercles de remplissage, vus du cercle unité sous des angles tendant vers o, *suite qui, si elle est d'ordre ρ, est de classe divergente.*

109. **Fonctions méromorphes d'ordre nul ou infini.** — Ces résultats s'étendent à ces fonctions, à condition de remplacer le mot *ordre* par *ordre précisé*.

Pour les fonctions d'ordre nul, il est bien entendu que nous ne pouvons atteindre ici que les fonctions (39). On peut par exemple étudier les fonctions satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim} \frac{T(r, \varphi)}{\log^{\rho} \frac{1}{1 - r}} = \infty,$$

où ρ est un nombre supérieur à 2.

Il est immédiat, sur l'inégalité (38), que $n(t)$ ne peut être (pour ω constant) toujours inférieur à $\log^{\rho-1} \frac{1}{1 - t}$.

Observations analogues pour les fonctions d'ordre infini; on constate de suite, sur l'inégalité (38), l'existence d'une *suite de cercles de remplissage d'ordre infini*. Pour introduire d'intéressantes précisions, on pourra utiliser un travail récent [1], où les propriétés de l'ordre $\rho(r)$ sont étudiées avec beaucoup de détails.

---

(1) KING-LAI-HIONG, *Sur les fonctions entières et les fonctions méromorphes d'ordre infini* (*Thèse, J. de Math.*, t. XIV, 1935, p. 233-307).

Indiquons seulement ici une propriété relative aux fonctions d'ordre infini pour lesquelles

$$\overline{\lim} \frac{\log \log T(r, \varphi)}{\log \frac{1}{1-r}} = \rho.$$

Il y a impossibilité de satisfaire à l'inégalité (38) si l'on prend (ω constant)

$$\overline{\lim} \frac{\log \log n(t)}{\log \frac{1}{1-t}} < \rho.$$

110. Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des cercles de remplissage au point de vue du nombre des zéros de $\varphi - \alpha$ dans ces cercles; de la sorte, nous délaissions le rôle de la fonction $\omega(t)$, en la prenant constante. Un point de vue diamétralement opposé consiste en le problème suivant : *étude des suites de cercles de remplissage à plus petits rayons possibles;* cette fois, c'est le rôle de $n(t)$ qui est délaissé; mais bien entendu, pour que le théorème de Picard soit vérifié dans la suite de cercles de remplissage étudiée, il nous faudra faire tendre $n(t)$ vers l'infini; c'est aussi, du reste, une condition nécessaire pour que l'intégrale I converge.

Abandonnons les fonctions d'ordre nul ou infini (elles peuvent aussi être étudiées à ce point de vue) et intéressons-nous uniquement aux fonctions d'ordre fini.

Choisissons pour $\omega(t)$ la fonction

$$\omega(t) = (1-t)^{\frac{\rho}{2}-\varepsilon},$$

ε étant une quantité positive fixe, arbitrairement petite; quant à $n(t)$, son choix est astreint à la condition de convergence de l'intégrale I; et cette condition est assurée si l'on prend

$$n(t) = (1-t)^{-\varepsilon}.$$

On pourrait aussi choisir une fonction plus petite $(\rho + 2) \log \frac{1}{1-t}$.

Dans ces deux choix, il est manifeste que I converge, et que l'inégalité (38) n'est pas vérifiée. D'où le

THÉORÈME XVI. — *Toute fonction méromorphe d'ordre fini possède* *une suite infinie de cercles de remplissage à indices indéfiniment croissants. Si r désigne le module de l'affixe du centre d'un quelconque de ces cercles, ce cercle est vu du cercle unité sous un angle inférieur à*

$$(1-r)^{\frac{\rho}{2}-\varepsilon},$$

ε *étant une constante positive arbitrairement petite.*

111. Toutes ces propriétés sont parallèles à celles des fonctions méromorphes dans le plan. Ainsi, toute fonction méromorphe dans le plan d'ordre fini ρ possède une suite infinie de cercles de remplissage à indices indéfiniment croissants, vus de l'origine sous des angles inférieurs à $r^{\frac{\rho}{2}-\varepsilon}$ (r désigne le module de l'affixe du centre du cercle). Pour les fonctions holomorphes, et plus généralement pour les fonctions méromorphes à valeur exceptionnelle au sens large, j'ai relevé l'exposant de $\frac{\rho}{2}$ à ρ. Il y a lieu ici de faire une étude analogue.

Signalons aussi que toutes ces propriétés des fonctions méromorphes dans un cercle s'appliquent, après transformation conforme, aux fonctions méromorphes dans un angle.

112. Nous allons terminer ce mémoire sur *l'étude des points de Borel des fonctions méromorphes d'ordre fini* ρ. Notre but est de compléter et préciser les renseignements obtenus déjà par M. G. Valiron avec d'autres méthodes (*voir* Mémoire cité au n° 107). R. Nevanlinna a démontré que si $z(a)$ désigne l'affixe d'un zéro de $\varphi-\alpha$ dans le cercle unité, la série

$$\sum[1-|z(a)|]^{\rho+1+\varepsilon}$$

converge quel que soit a, tandis que la série

$$\sum[1-|z(a)|]^{\rho+1-\varepsilon} \tag{41}$$

diverge, sauf peut-être pour deux valeurs au plus de a.

M. G. Valiron, par un fractionnement du cercle unité en secteurs, a établi l'existence *d'un point de Borel d'ordre* $\rho+1$, point où la série (41) diverge, si l'on se borne à y faire figurer les $z(a)$ voisins de ce point. Il introduit alors une distinction de ces points en points *directs* et points *indirects*. Un point A est dit *direct* si la série (41) diverge (sauf pour deux a), lorsqu'on fait figurer les $z(a)$ intérieurs à un angle de sommet A dont aucun côté ne se confond avec la tangente en A au cercle unité. M. G. Valiron établit dans ces conditions l'existence d'une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho + 1$.

Nous allons ici compléter la documentation des points directs, l'étendre à une classe plus générale, et attaquer l'étude des points indirects.

Le théorème XIII constitue notre base de départ. Il remplace le théorème de M. Rauch, sur lequel s'appuie M. Valiron.

113. Considérons donc un point A du cercle unité, et un domaine D admettant A comme frontière. Ce domaine D est limité par une courbe F dont deux arcs viennent aboutir en A. On suppose que cette courbe est assez régulière, que les deux arcs admettent en A des tangentes, et qu'en coupant le domaine D par le cercle $|z| = r$, on obtient un seul arc d'intersection, lequel a un angle au centre inférieur ou égal à $(1-r)\theta(r)$. Quitte à majorer légèrement $\theta(r)$, on peut toujours supposer que $\theta(r)$ *est une fonction décroissante de* r.

Premier exemple, qui servira dans l'étude du point indirect le plus général : le domaine D est la partie commune au cercle unité et au cercle de centre A et de rayon η. Les deux arcs de F aboutissant en A sont les deux arcs du cercle unité. La fonction $\theta(r)$ est inférieure à $\dfrac{\eta}{1-r}$.

Deuxième exemple, angle de sommet A, limité au voisinage de A, et n'ayant pas de côté commum avec la tangente au cercle unité : alors $\theta(r)$ peut être remplacé par une constante dépendant de la position de l'angle. Cette constante est finie. Cet exemple sert dans l'étude des points *directs*.

D'autres exemples peuvent être examinés : si le domaine D est constitué par un cercle tangent intérieurement en A au cercle unité, on trouve que $\theta(r)$ est égal à $\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-r}}$, λ dépendant du rayon du cercle seulement. On peut imaginer des contours simples tels que les arcs F soient tangents en A au cercle unité, et où $(1-r)^{\varepsilon}\theta(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers 1, si petit que soit ε.

Ceci posé, nous opérons 1 fractionnement du domaine D par des cercles de centre O, et de rayons croissants, $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ comme il a été opéré au n° 105. Les raisonnements que l'on fait ici sont absolument identiques. Le but poursuivi est le même. Mais une distinction importante est ici à faire, relativement au nombre des cercles $C'(\omega)$ qui balayent la portion de couronne $r'r$; où $r-r'=\omega(1-r)$. Ce nombre est en effet ici majoré par $\frac{k\theta(r)}{\omega}$. On suppose encore qu'aucun cercle $C(\omega)$ n'est de remplissage à indices au moins égaux à n; alors le nombre des zéros de $\varphi-\alpha$ dans la portion de couronne $r'r$ est inférieur à $\frac{kn\theta(r)}{\omega}$, sauf peut-être pour des valeurs de α, dont les images sphériques sont incluses dans des cercles dont la somme des rayons $d'(r)$ satisfait à l'inégalité :

$$d'(r) < \frac{k\theta(r)}{\omega} e^{-n}. \tag{37'}$$

La fin du raisonnement est identique à celle du n° 105. On remplace $k\sum d'(r)$ par sa majorante, l'intégrale

$$I' = \int^{1} \frac{\theta(t)e^{-n(t)}\,dt}{\omega^2(t)(1-t)},$$

et l'on opère de même pour remplacer l'indice N correspondant à n par une intégrale minorante. Finalement on obtient l'énoncé suivant :

THÉORÈME XVII. — *Soit* D *un domaine avoisinant le point* A *du cercle unité et qui sectionne le cercle* $|z|=r$, *suivant un arc d'ouverture* $(1-r)\theta(r)$; $\theta(r)$ *est une fonction non décroissante de* r. *Soient* $\omega(t)$ *et* $n(t)$ *deux fonctions de* t, *la première non croissante et au besoin de décroissance assez régulière comme il est indiqué au théorème XIV; la deuxième non décroissante, ces deux fonctions assurent la convergence de l'intégrale*

$$I' = \int_{r_0}^{1} \frac{e^{-n(t)}\theta(t)}{(1-t)\omega^2(t)}\,dt$$

supposée inférieure à $\frac{1}{10}$.

Si aucun cercle de remplissage à indices au moins égaux à $n(r)$, et de pseudo-rayon $\omega(r)$, ne peut être trouvé, empiétant sur le domaine D *et la couronne $r'r[r'-r=(1-r)\omega(r)]$, alors on a l'inégalité*

$$N_1(R, \alpha) < k\int_{r_0}^{R} \frac{n(t)\theta(t)\,dt}{\omega^2(t)} = kJ'.$$

$N_1(R, \alpha)$ *désigne l'indice de densité des zéros de $\varphi - \alpha$ situés dans la portion r_0R du domaine* D; *α doit être pris non quelconque, mais soumis à la seule condition que son image sphérique soit extérieure à des cercles fixes (indépendants de* R) *dont la somme des rayons est inférieure à $\frac{1}{10}$.*

114. Comme première application du théorème XVII, retrouvons les résultats de M. G. Valiron.

Prenons le cas où $\theta(t)$ est constant, et, d'abord, donnons à $\omega(t)$ une valeur fixe arbitrairement petite. Il est manifeste que l'intégrale I′ converge si l'on choisit pour $n(t)$ la fonction $(1-t)^{-\rho-1+\varepsilon}$; quant à J′, c'est une fonction inférieure à $\lambda(1-t)^{-\rho+\varepsilon}$ λ étant fixe. Il y a donc contradiction dès que l'on suppose que la série (41) diverge dans le domaine D, pour des valeurs de a ne pouvant être enfermées (en image sur la sphère de Riemann) en des cercles dont la somme des rayons est inférieure à $\frac{1}{10}$ (1). On retrouve ainsi *l'existence d'une suite de cercles de remplissage d'ordre $\rho+1$ vus du cercle unité sous des angles tendant vers zéro, et ayant leurs centres dans le domaine* D (2).

D'où encore, dans le cas du point direct d'ordre $\rho+1$, l'existence d'une direction de Borel d'ordre $\rho+1$ issue de A.

La conservation de la divergence dans le type de la suite de cercles de remplissage, lorsque la divergence a lieu dans la série (41), lorsque ε est nul, se démontre comme plus haut.

115. Les premiers de ces résultats s'étendent plus généralement à

---

(1) Plus généralement : *en des cercles dont la somme des rayons est non nulle.*

(2) D'après la définition de $n(t)$ et le mode de décomposition en couronnes circulaires successives, il est bien entendu qu'il n'est pas nécessaire de prendre deux ou plusieurs cercles $C(\omega)$ attachés à la même couronne; un suffit. Cette remarque s'applique ici dans les études antérieures.

des domaines D où

$$\lim (1-r)^{\varepsilon} \theta(r) = 0,$$

quelle que soit la constante positive ε : *il y a encore une suite de cercles de remplissage d'ordre* $\rho + 1$ *tendant vers* A, *et vus du cercle unité sous des angles tendant vers zéro.*

La conservation du type de divergence est plus exigeante et réclame des précisions dans la nature de cette divergence; cependant, on peut dire qu'à chaque genre de divergence (plus ou moins rapide) de la série (41) correspondent des domaines D tangents en A au cercle unité, et tels qu'il existe une suite de cercles de remplissage de type divergent, et d'ordre $\rho + 1$. Il n'est pas difficile de créer des exemples, par exemple en introduisant des logarithmes.

116 **Points indirects.** — Notre méthode nous permet d'aborder l'étude des points indirects les plus généraux, aussi facilement que celle des points directs. Il suffit de remplacer la fonction $\theta(r)$ par $\frac{\eta}{1-r}$. On retrouve alors les conditions du théorème XIV, avec remplacement de l'inégalité (38) par

$$N_1(R, \alpha) > kJ.$$

Les résultats sont les mêmes; la connaissance des propriétés de $T(R, \varphi)$ est remplacée par celle de $N_1(R, \alpha)$ (sauf pour deux valeurs au plus de α), d'où le

THÉORÈME XVIII. — *Soit* A *un point de Borel indirect d'ordre* $\rho + 1$ *sur le cercle unité. Il est limite de suite de cercles de remplissage vus du cercle unité sous des angles tendant vers zéro. Cette suite est d'ordre au moins égal à* ρ. *Si* A *est de type divergent et si la suite est d'ordre* ρ, *elle est aussi de type divergent.*

117. Toutes ces propriétés font jouer à $\omega(t)$ un rôle négligeable : on prend $\omega(t)$ presque constant, pour se préoccuper d'avoir $n((t)$ le plus grand possible. On peut faire l'inverse, comme nous avons opéré plus haut. Signalons simplement le résultat général du n° 16 encore valable ici, aux environs d'un point de Borel, direct ou indirect, d'ordre $\rho + 1$.