Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jean Dieudonné

Sur la variation des zéros des dérivées des fractions rationnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 101-150
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__101_0>

SUR

LA VARIATION DES ZÉROS DES DÉRIVÉES

DES FRACTIONS RATIONNELLES

Par M. J. DIEUDONNÉ.

Lorsqu'on se donne les zéros d'un polynome, ceux de toutes ses dérivées sont déterminés; le théorème de Gauss-Lucas exprime une des conséquences de cette dépendance. Plus généralement, on sait (1) que, si p zéros d'un polynome sont bornés, il en est de même de $p-k$ zéros de sa dérivée d'ordre $k<p$.

Il est naturel de se poser des problèmes analogues pour les fractions rationnelles : les zéros et les pôles d'une telle fraction la déterminent à un facteur constant près, et par suite déterminent les zéros de toutes ses dérivées.

C'est à l'étude de ces problèmes qu'est consacrée la plus grande partie de ce travail (2).

1. **Conventions et remarques préliminaires.** — La dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fraction rationnelle ne détermine pas cette fraction de façon unique : si $\frac{P(z)}{Q(z)}$ et $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ sont deux fractions réduites à leur plus simple expres-

(1) *Voir* S. Kakeya, *Tôhoku Math. Journal*, t. 11, 1917, p. 5-16.

(2) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 203, 1936, p. 975-977.

sion et telles que

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right) \equiv \lambda \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P}{Q}\right) \qquad (\lambda \text{ const.} \neq 0),$$

la différence $\frac{P_1}{Q_1} - \lambda \frac{P}{Q}$ est un polynome R de degré $m - 1$ au plus, d'où l'on tire $Q_1 \equiv Q$ et

$$(1) \qquad P_1 \equiv \lambda P + QR.$$

La réciproque est immédiate; autrement dit, toute fraction rationnelle ayant une dérivée $m^{\text{ième}}$ donnée est de la forme $\frac{P_1}{Q}$ où P_1 est donné par (1), R étant un polynome *arbitraire* de degré $m - 1$ au plus. Deux polynomes P, P_1 vérifiant la relation (2) seront dits *équivalents* (relativement au polynome Q et à l'entier m; nous sous-entendrons ces précisions la plupart du temps).

Pour l'étude de la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fraction rationnelle, nous sommes donc amenés à considérer que la forme *générale* d'une telle fraction est celle où le dénominateur est de degré n et le numérateur de degré $n + m - 1$. Nous dirons pour abréger qu'une telle fraction est *du type* (n, m).

De façon précise, considérons deux polynomes $P(z)$, $Q(z)$, de degrés respectifs $n + m - 1$ et n, premiers entre eux et n'ayant que des zéros simples. Ces hypothèses entraînent que l'on a

$$(2) \qquad \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_1}{z - z_1} + \frac{a_2}{z - z_2} + \ldots + \frac{a_n}{z - z_n} + b_0 + b_1 z + \ldots + b_{m-1} z^{m-1}$$

(où $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les zéros de Q) avec $a_i \neq 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et $b_{m-1} \neq 0$. Si nous supposons de plus

$$(3) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_n \neq 0,$$

nous dirons que les polynomes P, Q forment un couple de polynomes *généraux* et que la fraction $\frac{P}{Q}$ est une fraction *générale* de type (n, m).

On a, dans ces conditions,

$$(4) \qquad \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^m m! \left[\frac{a_1}{(z - z_1)^{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{(z - z_n)^{m+1}}\right]$$
$$= (-1)^m \frac{F_m(z)}{[Q(z)]^{m+1}},$$

où $F_m(z)$ est un polynome de degré $(m+1)(n-1)$, premier avec Q. Proposons-nous d'abord d'obtenir l'expression de F_m au moyen de P, Q et de leurs dérivées.

Remarquons pour cela qu'en un zéro z_0 de $F_m(z)$, $Q(z_0) \neq 0$; le développement de Taylor de $\frac{P}{Q}$ au voisinage de ce point montre alors qu'il existe un polynome $R(z)$ de degré $m-1$ au plus, tel que le polynome $P+QR$ ait en z_0 un zéro d'ordre $m+1$ au moins. En écrivant que ce polynome et ses m premières dérivées sont nulles en z_0, on a donc

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} P + QR = 0, \\ P' + Q'R + QR' = 0, \\ P'' + Q''R + 2Q'R' + QR'' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ P^{(m)} + Q^{(m)}R + C_m^1 Q^{(m-1)}R' + \dots + C_m^{m-1} Q' R^{(m-1)} = 0, \end{array}\right.$$

puisque $R^{(m)} \equiv 0$. Éliminant $R(z_0)$, $R'(z_0)$, ..., $R^{(m-1)}(z_0)$ entre ces $(m+1)$ équations, on voit que z_0 annule le polynome

$$(6)\qquad \Phi(P, Q, m) \equiv \begin{vmatrix} P & Q & 0 & 0 & \dots & 0 \\ P' & Q' & Q & 0 & \dots & 0 \\ P'' & Q'' & 2Q' & Q & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ P^{(m)} & Q^{(m)} & C_m^1 Q^{(m-1)} & \dots & \dots & C_m^{m-1} Q' \end{vmatrix}$$

Nous allons voir que, *sans aucune hypothèse sur* P et Q, on a

$$F_m(z) \equiv \Phi(P, Q, m).$$

Ajoutons, en effet, à la première colonne du déterminant précédent la seconde colonne multipliée par $-\frac{P}{Q}$, la troisième multipliée par $-\frac{d}{dz}\left(\frac{P}{Q}\right)$, etc., la dernière multipliée par $-\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{P}{Q}\right)$.

D'après la formule de Leibniz, les m premiers termes de la première colonne s'annulent après ces opérations, et le dernier devient

$$\begin{aligned} P^{(m)} &- \left[Q^{(m)} \frac{P}{Q} + C_m^1 Q^{(m-1)} \frac{d}{dz}\left(\frac{P}{Q}\right) + \dots + C_m^{m-1} Q' \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left(\frac{P}{Q}\right) \right] \\ &= P^{(m)} + Q \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P}{Q}\right) - \frac{d^m}{dz^m}\left(Q \frac{P}{Q}\right) = Q \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P}{Q}\right), \end{aligned}$$

et en développant par rapport à la première colonne, il vient

$$\Phi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, m) \equiv (-1)^m \mathrm{Q}^{m+1} \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\right) \equiv \mathrm{F}_m(z). \tag{7}$$

Nous n'avons considéré jusqu'ici que des polynomes P, Q *généraux :* mais deux polynomes P, Q, de degrés respectifs au plus égaux à $n+m-1$ et n, mais par ailleurs absolument quelconques (premiers entre eux ou non), peuvent toujours être obtenus comme limites de polynomes *généraux.*

Pour l'étude de la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fraction rationnelle générale $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ de type (n, m), nous devons donc tenir compte de ces cas limites; cela nous conduit à faire les conventions suivantes :

1° Tout couple de polynomes P, Q, de degrés respectifs

$$p \leqq n+m-1, \qquad q \leqq n$$

définit *une fraction rationnelle* $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ *de type* (n, m). On considère que le point à l'infini est un zéro d'ordre $n+m-1-p$ pour P, un zéro d'ordre $n-q$ pour Q. Les seuls *zéros* de la fraction rationnelle sont les zéros de P, avec leur ordre de multiplicité; ses seuls *pôles* sont de même les zéros de Q avec leur ordre de multiplicité. Si un point (en particulier le point à l'infini) est zéro commun de P et Q, il est considéré comme étant *à la fois* zéro et pôle de $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$.

2° Les « zéros de la dérivée $m^{\text{ième}}$ de $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ » sont, par définition, les zéros du polynome $\Phi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, m)$, avec leur ordre de multiplicité : si $\Phi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, m)$ est de degré $r < (m+1)(n-1)$, on considère que le point à l'infini est un zéro multiple d'ordre $(m+1)(n-1)-r$ de ce polynome.

2. Ces conventions s'écartent assez notablement du langage usuel : par exemple, lorsque P et Q sont *généraux*, on ne doit pas considérer le point à l'infini comme un pôle de $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ (bien qu'au sens usuel ce soit

un pôle d'ordre $m - 1$). L'intérêt de ces conventions est qu'elles permettent d'énoncer le théorème suivant :

Si l'on effectue sur les pôles et les zéros d'une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ *de type* (n, m), *la même transformation homographique*

$$x = \frac{az + b}{cz + b'}, \tag{8}$$

et si P_1 *et* Q_1 *sont les polynomes ayant respectivement pour zéros les transformés des zéros de* P *et* Q (*avec le même ordre de multiplicité*), *les zéros de* $\Phi(P_1, Q_1, m)$ *sont les transformés par* (8) *des zéros de* $\Phi(P, Q, m)$, *avec le même ordre de multiplicité.*

On peut dire plus brièvement que *les transformés des zéros de la dérivée* $m^{\text{ième}}$ *d'une fraction rationnelle sont les zéros de la dérivée* $m^{\text{ième}}$ *de la fraction transformée.*

Le théorème est immédiat pour les transformations élémentaires $x = z + a$, $x = kz$. Il suffit donc de le démontrer pour la transformation

$$x = \frac{1}{z}. \tag{9}$$

Posons $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$; on a, avec nos conventions,

$$P_1(x) = x^{n+m-1}\, P\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Q_1(x) = x^n\, Q\left(\frac{1}{x}\right),$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = x^{m-1} f\left(\frac{1}{x}\right).$$

De même, les transformés des zéros de $F_m(z) = \Phi(P, Q, m)$ sont les zéros du polynome

$$\begin{aligned} G(x) &= x^{(m+1)(n-1)} F_m\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (-1)^m x^{(m+1)(n-1)} \left[Q\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{m+1} f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= (-1)^m [Q_1(x)]^{m+1} \frac{1}{x^{m+1}} f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Or, d'après une formule de Beman [1]

$$\frac{1}{x^{m+1}} f^{(m)}\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\left[x^{m-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right] = (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}[\varphi(x)].$$

Donc, d'après (7),

$$G(x) = Q_1^{m+1} \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right) \equiv (-1)^m \Phi(P_1, Q_1, m) \quad \text{C. Q. F. D.}$$

3. Le problème général que nous allons étudier est celui de *la variation des zéros de la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fraction rationnelle en fonction des zéros et des pôles de la fraction*. De façon précise, soient p et q deux entiers tels que

$$0 \leqq p \leqq n + m - 1, \qquad 0 \leqq q \leqq n,$$

et soient, d'autre part, dans le plan *fermé*, deux *ensembles fermés* D, Δ, non identiques au plan tout entier. Parmi toutes les fractions rationnelles de type (n, m), nous considérerons la classe $C(p, q, D, \Delta)$ [2] formée des fractions *ayant au moins p zéros dans* D, *et au moins q pôles* [3] *dans* Δ; si $p = 0$, l'hypothèse relative à D étant toujours remplie quel que soit D, on désignera par $C(q, \Delta)$ la classe de fractions correspondantes, et de même par $C(p, D)$ la classe correspondant à $q = 0$.

La question que nous nous posons est la suivante : *existe-t-il un entier $r > 0$ et un ensemble fermé E_r non identique au plan tout entier, tels que la dérivée $m^{\text{ième}}$ d'une fraction quelconque de la classe* $C(p, q, D, \Delta)$ *ait au moins r zéros dans E_r si elle n'est pas identiquement nulle ?* Il est clair que si r possède cette propriété, il en est de même de tout entier $r' < r$; tout revient donc à déterminer *le plus grand entier* $\rho(p, q, D, \Delta)$, auquel on puisse associer un ensemble E_ρ ayant la propriété voulue.

Avant d'aborder ce problème, indiquons quelques propriétés immédiates du nombre ρ comme fonction de p, q et des ensembles D, Δ :

---

(1) *Voir* GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. 1, 4e édit., p. 77. La formule se démontre aisément par récurrence.

(2) On écrira souvent « classe C » lorsque aucune confusion ne sera à craindre.

(3) Les notions de « zéro » et de « pôle » étant celles qui viennent d'être précisées. Zéros et pôles sont toujours comptés avec leur ordre de multiplicité.

on a :

$$\rho(p_1, q, D, \Delta) \leqq \rho(p, q, D, \Delta) \quad \text{si} \quad p_1 < p \tag{10}$$

et

$$\rho(p, q, D_1, \Delta) \geqq \rho(p, q, D, \Delta) \quad \text{si} \quad D_1 \subset D, \tag{11}$$

avec les propriétés analogues relativement à q et Δ; on peut dire que ρ est fonction *croissante* de p et q, fonction *décroissante* des ensembles D et Δ.

4. Indiquons rapidement le principe de la méthode employée. Le nombre ρ est caractérisé par la propriété suivante : à *tout* ensemble ouvert E correspond une fraction de la classe $C(p, q, D, \Delta)$ dont la dérivée $m^{\text{ième}}$ n'est pas identiquement nulle et a au moins $(m+1)(n-1)-\rho$ zéros dans E, et cette propriété n'a plus lieu lorsqu'on remplace ρ par $\rho - 1$.

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction de classe $C(p, q, D, \Delta)$, pour laquelle $\Phi(P, Q, m)$ n'est pas identiquement nulle, z_0 un point quelconque du plan, $k(z_0, P, Q)$ l'ordre de multiplicité de z_0 comme zéro de $\Phi(P, Q, m)$ ($k = 0$ si z_0 n'annule pas Φ).

Désignons par $\lambda(z_0)$ le *maximum* de k lorsque $\frac{P}{Q}$ parcourt toutes les fractions de la classe $C(p, q, D, \Delta)$ pour lesquelles $\Phi(P, Q, m)$ n'est pas identiquement nulle. Soit enfin μ le *minimum* de $\lambda(z_0)$ lorsque z_0 décrit le plan fermé. D'après la définition de ρ, on a évidemment

$$(m+1)(n-1) - \rho \geqq \mu,$$

d'où

$$\rho \leqq (m+1)(n-1) - \mu. \tag{12}$$

D'autre part, soit z_0 un point tel que $\lambda(z_0) = \mu$. Considérons une suite $\{V_i(z_0)\}$ de voisinages de z_0 tendant vers z_0 lorsque i croît indéfiniment : à chaque valeur de l'entier i correspond une fraction $\frac{P_i}{Q_i}$ de classe $C(p, q, D, \Delta)$ dont la dérivée $m^{\text{ième}}$ n'est pas identiquement nulle et a $(m+1)(n-1)-\rho$ zéros au moins dans $V_i(z_0)$. Si l'on peut extraire de cette suite une suite partielle telle que P_i, Q_i, et $\Phi(P_i, Q_i, m)$ aient pour limites trois polynomes P, Q, $\Phi(P, Q, m)$, *non identique-*

ment nuls, $\frac{P}{Q}$ appartiendra à la classe C, et $\Phi(P, Q, m)$ aura en z_0 un zéro d'ordre $(m+1)(n-1)-\rho$ au moins, donc

$$(m+1)(n-1)-\rho \leqq \lambda(z_0)=\mu,$$

d'où, en comparant à (12),

$$\rho=(m+1)(n-1)-\mu. \tag{13}$$

Le problème se décompose donc, dans chaque cas, en deux autres : la recherche de μ d'une part, et d'autre part la justification du passage à la limite qui permet de démontrer (13).

5. Pour évaluer μ, nous allons d'abord chercher des limites de $k(z_0, P, Q)$, connaissant l'ordre de multiplicité de z_0 comme zéro de P et de Q.

Remarquons d'abord que $\Phi(P, Q, m)$ n'est identiquement nul que si $\frac{P}{Q}$ est égal à un polynome de degré $m-1$ au plus, c'est-à-dire, avec les conventions adoptées, *si tout zéro de* Q *est un zéro de* P *avec un ordre de multiplicité au moins égal à son ordre de multiplicité comme zéro de* Q.

Si l'on n'est pas dans ce cas, soit σ la plus haute puissance de $(z-z_0)$ qui divise à la fois P et Q; on a donc $\sigma \leqq n-1$.

Si l'on pose

$$P(z)=(z-z_0)^\sigma P_1(z),$$
$$Q(z)=(z-z_0)^\sigma Q_1(z),$$

on a, d'après (7),

$$\begin{aligned}\Phi(P, Q, m) &= (-1)^m (z-z_0)^{(m+1)\sigma} Q_1^{m+1} \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right) \\ &= (z-z_0)^{(m+1)\sigma}\Phi(P_1, Q_1, m).\end{aligned}$$

Si z_0 est zéro d'ordre ϖ de $P(z)$, zéro d'ordre ν de $Q(z)$, on a $\sigma=\min(\varpi, \nu)$. Nous distinguerons deux cas :

Cas *a*. $\sigma=\varpi<\nu$. z_0 est un pôle d'ordre $\nu-\varpi$ de $\frac{P_1}{Q_1}$, donc pôle d'ordre $\nu-\varpi+m$ de $\frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P_1}{Q_1}\right)$, et par suite zéro d'ordre

$$k_1=(m+1)(\nu-\varpi)-(\nu-\varpi+m)=m(\nu-\varpi-1),$$

de $\Phi(P_1, Q_1, m)$. On a donc dans ce cas

$$k = m(\nu - 1) + \varpi \leqq (m+1)(\nu - 1). \tag{14}$$

Cas *b*. $\nu = \sigma \leqq \varpi$. — Si z_0 est zéro d'ordre k_1 de $\Phi(P_1, Q_1, m)$, il existe un polynome R_1, de degré $m-1$ au plus, tel que z_0 soit zéro d'ordre $m + k_1$ de $P_1 + Q_1 R_1$; donc

$$m + k_1 \leqq n + m - 1 - \nu,$$
$$0 \leqq k_1 \leqq n - \nu - 1,$$

d'où

$$(m+1)\nu \leqq k \leqq m\nu + n - 1. \tag{15}$$

Lorsque $\varpi - \nu \geqq m$ (ce qui est possible, puisque

$$\nu + m = \sigma + m \leqq n + m - 1)$$

z_0 est zéro d'ordre $\varpi - \nu - m$ de $\Phi(P_1, Q_1, m)$, d'où

$$k = m(\nu - 1) + \varpi. \tag{16}$$

Lorsque $\nu \leqq \varpi < \nu + m$, on ne peut plus, sans autre hypothèse, préciser la valeur de k, qui dépend des zéros de P et Q autres que z_0 ; nous reviendrons plus loin sur cette question (*voir* § 13).

6. Commençons la recherche de μ et ρ par le cas où l'un des nombres p, q est nul, et d'abord lorsque $p = 0$.

Si z_0 est un point de Δ, on a $\nu \leqq n$, $\varpi \leqq n + m - 1$, les limites pouvant être atteintes. Si l'on prend $\nu = n$, $\varpi = n - 1$, on a, d'après (14), $k = (m+1)(n-1)$, d'où $\lambda(z_0) = (m+1)(n-1)$. Au contraire, si z_0 n'appartient pas à Δ, $\nu \leqq n - q$, $\varpi \leqq n + m - 1$ (limites atteintes), d'où l'on déduit aisément, d'après (14), (15) et (16), que

$$\lambda(z_0) = m(n - q - 1) + n + m - 1 = (m+1)(n-1) - m(q-1).$$

On a donc

$$\mu = (m+1)(n-1) - m(q-1).$$

Pour démontrer l'égalité (13), il se présente une difficulté dans le passage à la limite, car, les zéros des P_i étant arbitraires, il peut se faire que la limite de $\frac{P_i}{Q_i}$ soit un polynome de degré $m-1$ au plus, auquel cas $\Phi(P_i, Q_i, m)$ tendrait vers un polynome identiquement nul. On évite cette difficulté à l'aide du lemme suivant.

LEMME 1. — *Quelle que soit la suite de fractions rationnelles* $\left\{\frac{P_i}{Q_i}\right\}$ *de type* (n, m), *et telles que* $\Phi(P_i, Q_i, m)$ *ne soit identiquement nul pour aucune valeur de* i, *il est possible de trouver, pour chaque valeur de* i, *un polynome* Π_i ÉQUIVALENT (1) *à* P_i, *de sorte que, de la suite* $\left\{\frac{\Pi_i}{Q_i}\right\}$, *on puisse extraire une suite partielle pour laquelle* Π_i *et* Q_i *tendent respectivement vers deux polynomes* Π *et* Q, *tels que* $\Phi(\Pi, Q, m)$ *ne soit pas identiquement nul.*

En multipliant P_i et Q_i par l'inverse d'un des coefficients de plus grand module de Q_i, on peut toujours supposer qu'un des coefficients de plus grand module de Q_i est égal à *un*; par suite, on peut extraire de la suite $\{Q_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, une suite partielle convergeant vers un polynome Q non identiquement nul; nous désignerons encore cette nouvelle suite par $\{Q_i\}$.

Considérons alors m points distincts $z_1, z_2, \ldots, z_m$, différents des zéros des polynomes $Q_i (i = 1, 2, \ldots)$ et Q. Déterminons le polynome $R_i(z)$ de degré $m - 1$ au plus, par les m conditions

$$P_i(z_j) + Q_i(z_j) R_i(z_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Comme $Q_i(z_j) \neq 0$, ces conditions déterminent bien un polynome $R_i(z)$ du degré voulu, et de plus $P_i + Q_i R_i$ n'est pas identiquement nul, puisque $\Phi(P_i, Q_i, m) \not\equiv 0$. Soit a_i un des coefficients de plus grand module de $P_i + Q_i R_i$; nous poserons

$$\Pi_i = \frac{1}{a_i} (P_i + Q_i R_i).$$

Ce polynome est équivalent à P_i et un de ses coefficients de plus grand module est égal à *un*; enfin

$$\Pi_i(z_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

On peut donc extraire de la suite $\{\Pi_i\}$ une suite partielle qui converge

(1) Relativement à Q_i et à m.

vers un polynome Π non identiquement nul et tel que

$$\Pi(z_j) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Comme $Q(z_j) \neq 0$, il existe au moins un zéro de Q qui n'est pas zéro de Π avec un ordre de multiplicité au moins égal, ce qui achève la démonstration.

Comme $\Phi(\Pi_i, Q_i, m)$ est égal à $\Phi(P_i, Q_i, m)$ à un facteur constant près, et que par ailleurs $\frac{\Pi_i}{Q_i}$ appartient ici, comme $\frac{P_i}{Q_i}$, à la classe $C(q, \Delta)$, le raisonnement du paragraphe 4 s'applique, et l'on a donc d'après (13)

$$\rho = m(q-1). \tag{17}$$

7. Nous allons voir que *la formule* (17) *est encore valable lorsque* $p \leqq m$, *et* D *quelconque, sauf dans le cas particulier où la réunion de* D *et* Δ *se réduit à un point.*

Il suffit de montrer que μ a la même valeur, car d'après (12) on en déduit

$$\rho(p, q, D, \Delta) \leqq m(q-1),$$

et, d'après (10),

$$\rho(p, q, D, \Delta) \geqq \rho(q, \Delta) = m(q-1).$$

Or, si $\frac{P}{Q}$ est une fraction de la classe $C(q, \Delta)$ pour laquelle $\Phi(P, Q, m)$ a un zéro d'ordre μ au point z_0 extérieur à Δ, on peut toujours supposer qu'il existe un point z_1 de D pour lequel $Q(z_1) \neq 0$, puisque D et Δ ne se réduisent pas au même point et que les q zéros de Q appartenant à Δ peuvent être pris arbitrairement sans changer $k(z_0, P, Q) = \mu$. Déterminons alors un polynome R de degré $m-1$ au plus, tel que $\Pi = P + QR$ ait un zéro d'ordre m au point z_1, ce qui est possible, puisque $Q(z_1) \neq 0$. $\Phi(\Pi, Q, m) \equiv \Phi(P, Q, m)$ n'est pas identiquement nul, et $\frac{\Pi}{Q}$ appartient à $C(p, q, D, \Delta)$, ce qui établit la proposition.

8. Passons maintenant au cas où $q = 0$, $p > m$ (le raisonnement précédent montre que $\rho = 0$ si $p \leqq m$). Pour le calcul du nombre μ, on a ici, en un point z_0 *extérieur à* D, $\nu \leqq n$, $\varpi \leqq n + m - 1 - p < n - 1$;

l'examen des formules (14) et (15) montre que

$$\mu = (m+1)(n-1) - (p-m),$$

d'où

$$\rho \leqq p - m. \tag{18}$$

Étudions le passage à la limite; de la suite $\left\{\frac{P_i}{Q_i}\right\}$ relative au point z_0 pris *à l'extérieur de* D, on peut toujours extraire une suite partielle telle que P_i et Q_i tendent respectivement vers deux polynomes non identiquement nuls P et Q. Si l'on avait $\Phi(P, Q, m) \equiv 0$, on en déduirait, puisque P a au moins p zéros dans D, que Q a au moins $p-m+1$ zéros dans D, et, par suite, qu'à partir d'une certaine valeur de i, Q_i a $p-m+1$ zéros appartenant à un ensemble D_1, obtenu en ajoutant à D un voisinage arbitrairement petit de chacun des zéros de Q appartenant à D.

Mais alors la suite $\left\{\frac{P_i}{Q_i}\right\}$ serait formée, à partir d'un certain rang, de fractions de la classe $C(p, p-m+1, D, D_1)$, et comme on peut supposer z_0 extérieur à D_1, l'application du lemme 1 donnerait, comme au paragraphe 6,

$$\rho \geqq m(p-m),$$

ce qui est impossible d'après (18), si $m > 1$, et donne $\rho = p - m$ si $m = 1$.

Si maintenant $\Phi(P, Q, m)$ n'est pas identiquement nulle (ce qui sera toujours le cas pour $m > 1$), le raisonnement du paragraphe 4 s'applique et l'on a l'égalité (13); autrement dit, dans tous les cas

$$\rho = p - m. \tag{19}$$

9. Lorsqu'on aborde les cas où $p > m$ et $q > 0$, la situation respective de D et Δ dans le plan va jouer un rôle essentiel dans la détermination de ρ. Il y a d'abord les deux cas extrêmes suivants :

a. La réunion de D *et* Δ *est identique au plan tout entier.*

b. La réunion de D *et* Δ *se compose d'un seul point* (p quelconque).

Si l'on n'est pas dans un de ces deux cas, on peut, d'une part, trouver un point de D et un point de Δ qui soient distincts. D'autre part, on peut trouver deux ensembles D_1, Δ_1, contenant respectivement D et Δ, tels que la réunion de D_1 et Δ_1 ne soit pas le plan tout entier, et que l'intersection de D_1 et Δ_1 contienne un *ensemble ouvert*. Nous sommes donc conduits à considérer deux nouveaux cas :

c. L'intersection de D *et* Δ *contient un ensemble ouvert.*

d. D *et* Δ *se réduisent chacun à un point, les deux points étant distincts.*

Dans ce dernier cas (d), il est évident que la valeur de $\rho(p, q, D, \Delta)$ ne dépend pas de la position des deux points D, Δ dans le plan, car une transformation homographique peut les amener en deux points *quelconques*. Nous verrons aussi que, dans les cas (a) et (c), la valeur de ρ est la même pour tous les couples d'ensembles D, Δ vérifiant respectivement l'une ou l'autre de ces hypothèses (p et q ayant toujours les mêmes valeurs). Nous désignerons par $\rho_0(p, q)$, $\rho_1(p, q)$, $\rho_2(p, q)$ les valeurs prises par $\rho(p, q, D, \Delta)$ dans les cas (a), (c), (d) respectivement. On a évidemment, d'après (11),

$$\rho_0(p, q) \leqq \rho_1(p, q) \leqq \rho_2(p, q) \tag{20}$$

et, *si l'on ne se trouve pas dans l'un des cas* (a), (b),

$$\rho_1(p, q) \leqq \rho(p, q, D, \Delta) \leqq \rho_2(p, q). \tag{21}$$

Nous allons examiner successivement chacun des cas (a), (b), (c), (d).

10. **Cas** a. — D'après (10), on a, dans tous les cas,

$$\rho(p, q, D, \Delta) \geqq \text{Max}[\rho(p, D), \rho(q, \Delta)],$$

ou

$$\rho(p, q, D, \Delta) \geqq \text{Max}[p - m, m(q - 1)]. \tag{22}$$

Cherchons le nombre μ dans le cas actuel. Tout point du plan est dans D ou dans Δ; si z_0 est dans D, mais non dans Δ, on a $\nu \leqq n - q$, $\varpi \leqq n + m - 1$, d'où $\lambda(z_0) = (m+1)(n-1) - m(q-1)$. De même, si z_0 est dans Δ, mais non dans D, $\nu \leqq n$, $\varpi \leqq n + m - 1 - p$, d'où $\lambda(z_0) = (m+1)(n-1) - (p-m)$. Enfin, si z_0 est à la fois dans D et Δ, $\nu \leqq n$, $\varpi \leqq n + m - 1$, $\lambda(z_0) = (m+1)(n-1)$. On a donc

$$\mu = \text{Min}[(m+1)(n-1) - (p-m), (m+1)(n-1) - m(q-1)],$$

d'où, d'après (12),

$$\rho \leqq \operatorname{Max}[p-m,\ m(q-1)].$$

Comparant à (22), on a donc

$$\rho_0(p, q) = \operatorname{Max}[p-m,\ m(q-1)]. \tag{23}$$

11. **Cas** *b*. — On peut toujours amener, par une transformation homographique, le point auquel se réduisent D et Δ à être *le point à l'infini*.

Remarquons alors que ρ n'est autre ici que le *minimum* de $k(\infty, \mathrm{P}, \mathrm{Q})$ lorsque $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ parcourt toutes les fractions de la classe C à dérivée m^e non identiquement nulle. Soit, en effet, $\frac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{Q}_0}$ une fraction pour laquelle ce minimum k_0 est atteint; les $(m+1)(n-1)-k_0$ zéros finis de $\Phi(\mathrm{P}_0, \mathrm{Q}_0, m)$ sont intérieurs à un certain cercle Γ. Il est impossible qu'il existe un ensemble fermé E contenant plus de k_0 zéros de $\Phi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, m)$ pour *toutes* les fractions de la classe C : car, si γ est un cercle quelconque contenu dans le complémentaire (ouvert) de E, on peut toujours, par une transformation homographique *laissant invariant le point à l'infini*, transformer Γ en γ; la fraction $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{Q}_1}$, transformée de $\frac{\mathrm{P}_0}{\mathrm{Q}_0}$, serait évidemment de la classe C, et telle que $\Phi(\mathrm{P}_1, \mathrm{Q}_1, m)$ ait $(m+1)(n-1)-k_0$ zéros dans γ, contrairement à l'hypothèse. On a donc bien $\rho = k_0$, et tout revient à chercher k_0.

1° $q < p - m$ (ce qui suppose évidemment $p > m$). On a, au point à l'infini,

$$\nu \geqq q, \qquad \varpi \geqq p.$$

Si

$$\nu > \varpi \geqq p,$$

on a

$$k = m(\nu - 1) + \varpi \geqq (m+1)p.$$

Si

$$\nu \leqq \varpi < \nu + m, \qquad k \geqq (m+1)\nu \geqq (m+1)(\varpi - m + 1) \geqq (m+1)(p-m+1),$$

Enfin, si

$$\nu \leqq \varpi - m, \qquad k = m(\nu - 1) + \varpi \geqq m(q-1) + p,$$

(cette dernière valeur pourrait être atteinte pour $\varpi = p$, $\nu = q$, puisque $q < p - m$).

Comme

$$m(q-1)+p<(m+1)(p-m),$$

on a

$$\rho = k_0 = m(q-1)+p.$$

2° $p - m \leqq q \leqq p$. Si $\nu > \varpi$, $k \geqq (m+1)p$; si

$$\nu \leqq \varpi < \nu + m, \qquad k \geqq (m+1)\nu \geqq (m+1)q \qquad \text{pour} \quad q > p-m,$$
$$k \geqq (m+1)(q+1) \qquad \text{pour} \quad q = p-m.$$

Enfin, si

$$\nu \leqq \varpi - m, \qquad k = m(\nu-1)+\varpi \geqq (m+1)q,$$

puisque ici on doit avoir

$$\varpi \geqq \nu + m \geqq q + m \geqq p.$$

On a donc

$$\rho = k_0 = (m+1)q,$$

cette valeur de k étant atteinte pour $\nu = q$, $\varpi = q + m$.

3° $p < q$. Si

$$\nu > \varpi, \qquad k = m(\nu-1)+\varpi \geqq m(q-1)+p,$$

si

$$\nu \leqq \varpi < \nu + m, \qquad k \geqq (m+1)\nu \geqq (m+1)q.$$

Enfin, si

$$\nu \leqq \varpi - m, \qquad k = m(\nu-1)+\varpi \geqq (m+1)q,$$

d'où

$$\rho = k_0 = m(q-1)+p,$$

cette valeur de k étant atteinte pour $\nu = q$, $\varpi = p$.

Remarquons que, lorsque $p - m \leqq q \leqq p$, il faut évidemment supposer de plus $q < n$, car, pour $q = n$, $\Phi(P, Q, m) \equiv 0$ pour toute fraction de la classe C.

12. **Cas** c. — Nous distinguerons ici deux cas, suivant les valeurs de p et q.

1° $q \geqq p - m + 1$. Nous allons voir que

$$\mu \geqq (m+1)(n-1) - m(q-1).$$

Soit, en effet, z_0 un point *quelconque* du plan : par une transformation homographique, on peut toujours supposer que ce soit *le point à l'infini*. Comme D et Δ ont un ensemble ouvert E commun, si z_1 est un point de E, on peut trouver un nombre a assez petit tel que, si l'on pose

$$P(z) = (z - z_1)^{q+m-1} + a, \qquad Q(z) = (z - z_1)^q,$$

$\frac{P}{Q}$ soit de la classe $C(p, q, D, \Delta)$. Or

$$\frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{P}{Q}\right) = (-1)^m \frac{q(q+1)\ldots(q+m-1)a}{(z-z_1)^{q+m}}.$$

Par suite, $\Phi(P, Q, m)$ a un zéro d'ordre

$$(m+1)q - (q+m) = m(q-1)$$

en z_1, tous les autres étant confondus en z_0, et, par suite,

$$\lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1) - m(q-1).$$

D'après (12), on a donc

$$\rho \leqq m(q-1),$$

mais, d'après (20) et (23), cela entraîne

$$\rho_1(p, q) = m(q-1).$$

2° $q < p - m + 1$. Si z_0 est un point *extérieur à* D *et à* Δ, on a, en ce point,

$$\nu \leqq n - q, \qquad \varpi \leqq n + m - p - 1 < n - q.$$

Les formules (14), (15), (16) montrent alors que l'on a

$$(24) \qquad \lambda(z_0) \leqq \mathrm{Max} \begin{cases} (m+1)(n-1) - m(p-m) \\ (m+1)(n-1) - [m(q-1) + p]. \end{cases}$$

On a effectivement

$$k(z_0, P, Q) = (m+1)(n-1) - [m(q-1) + p]$$

lorsque

$$\nu = n - q, \qquad \varpi = n + m - p - 1.$$

D'autre part, en supposant le point z_0 envoyé à l'infini par une transformation homographique, et en prenant

$$P(z) = (z - z_1)^p + a, \qquad Q(z) = (z - z_1)^{p-m+1},$$

où z_1 est un point de l'ensemble ouvert commun à D et Δ, et a un nombre assez petit, $\frac{P}{Q}$ est bien une fraction de classe $C(p, q, D, \Delta)$ et $\Phi(P, Q, m)$ a un zéro d'ordre $m(p-m)$ au point z_1, les autres au point à l'infini. On peut donc avoir effectivement

$$k(z_0, P, Q) = (m+1)(n-1) - m(p-m)$$

en tout point du plan, d'où, d'après (24),

$$\mu = \operatorname{Max} \begin{cases} (m+1)(n-1) - m(p-m) \\ (m+1)(n-1) - [m(q-1)+p], \end{cases}$$

et, par suite,

$$\rho \leqq \operatorname{Min} \begin{cases} m(p-m) \\ m(q-1)+p. \end{cases} \tag{25}$$

Il reste à démontrer l'égalité (13) : il suffit de reprendre le raisonnement fait au paragraphe 8 pour voir que le cas où le passage à la limite donnerait un polynome $\Phi \equiv 0$, entraînerait

$$\rho \geqq m(p-m).$$

Comparant à (25), on en conclut que l'égalité (13) est toujours vérifiée, et par suite :

si

$$q \leqq \left(1 - \frac{1}{m}\right)(p-m), \qquad \rho_1(p, q) = m(q-1) + p$$

si

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right)(p-m) < q < p - m + 1, \qquad \rho_1(p, q) = m(p-m).$$

13. **Cas** *d*. — Lorsque D et Δ sont chacun formés d'un seul point, les deux points D et Δ étant distincts, on peut toujours, par une transformation homographique, supposer que D est *l'origine* $z=0$, et Δ le *point à l'infini*.

Remarquons ici que la valeur de $\lambda(z_0)$ est la même pour tous les points du plan différents de 0 et ∞, car deux tels points peuvent toujours être transformés l'un dans l'autre par une transformation homographique *laissant invariants* 0 et ∞.

Pour calculer $\lambda(z_0)$, nous allons compléter les résultats du paragraphe 5; en tenant compte des hypothèses particulières faites ici sur P et Q, nous déterminerons la valeur maxima $k_0(\nu, \varpi)$ effectivement atteinte par le nombre $k(z_0, P, Q)$ lorsque ν et ϖ ont des valeurs fixées au point z_0. Nous allons nous appuyer sur le lemme suivant :

Lemme 2. — *Soient α, β, p trois entiers positifs tels que*

$$\beta - 1 \leqq \alpha + p,$$

et $z_0 \neq 0$ un point quelconque du plan. Si A *est un polynome quelconque de degré α au plus,* B *un polynome quelconque de degré $\beta - 1$ au plus, le polynome*

$$F \equiv z^p A + B$$

a, au point z_0, un zéro de multiplicité

$$h \leqq p + \alpha \quad \text{si} \quad p \leqq \beta,$$
$$h \leqq \alpha + \beta \quad \text{si} \quad p > \beta,$$

s'il n'est pas identiquement nul.

De plus, il existe toujours un couple A_0, B_0, *de polynomes premiers entre eux pour lequel le maximum de h est atteint.*

1° $p \leqq \beta$. On a évidemment $h \leqq p + \alpha$, $p + \alpha$ étant le degré de F. Si l'on divise $(z - z_0)^{p+\alpha}$ par z^p, le quotient A_0 et le reste B_0 de la division sont bien de degrés respectifs au plus égaux à α et à $p - 1 \leqq \beta - 1$, et l'on a

$$F_0 \equiv z^p A_0 + B_0 \equiv (z - z_0)^{p+\alpha}.$$

Remarquons que B_0 est *exactement de degré $p - 1$*. Sinon

$$\frac{d^{p-1} F_0}{dz^{p-1}} = (p + \alpha)(p + \alpha - 1)\ldots(\alpha + 2)(z - z_0)^{\alpha+1}$$

s'annulerait à l'origine, ce qui est absurde.

On en conclut que A_0 et B_0 sont premiers entre eux, sinon ils seraient divisibles par $z - z_0$, et en posant

$$A_0 = (z - z_0) A_1, \qquad B_0 = (z - z_0) B_1.$$

on aurait

$$z^p A_1 + B_1 \equiv (z - z_0)^{p+\alpha-1},$$

ce qui est impossible, d'après ce qui précède, puisque B_1 est de degré $(p - 2)$.

2° $\beta < p$. On a

$$\frac{d^\beta F}{dz^\beta} \equiv \frac{d^\beta}{dz^\beta}(z^p A),$$

donc ce polynome, de degré $p+\alpha-\beta$ au plus, a un zéro d'ordre $p-\beta$ à l'origine, et par suite ne peut avoir au point z_0 qu'un zéro d'ordre α au plus; F ne peut donc avoir en ce point qu'un zéro d'ordre $\alpha+\beta$ au plus.

Pour montrer que ce maximum est atteint, divisons successivement $(z-z_0)^{p+\alpha}$, $(z-z_0)^{p+\alpha-1}$, ..., $(z-z_0)^{\alpha+\beta}$ par z^p, soit

$$\begin{aligned}
(z-z_0)^{p+\alpha} &= z^p A_1 + B_1,\\
(z-z_0)^{p+\alpha-1} &= z^p A_2 + B_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(z-z_0)^{\alpha+\beta} &= z^p A_{p-\beta+1} + B_{p-\beta+1},
\end{aligned}$$

B_1, B_2, ..., $B_{p-\beta+1}$ sont au plus de degré $p-1$; on peut donc trouver $(p-\beta+1)$ constantes λ_1, λ_2, ..., $\lambda_{p-\beta+1}$ non toutes nulles telles que

$$B_0 = \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_{p-\beta+1} B_{p-\beta+1}$$

soit de degré $\beta-1$ au plus. Si l'on pose

$$A_0 = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_2 + \ldots + \lambda_{p-\beta+1} B_{p-\beta+1},$$

le polynome $F_0 \equiv z^p A_0 + B_0$ n'est pas identiquement nul et a un zéro d'ordre $\alpha+\beta$ en z_0.

B_0 est *exactement de degré* $\beta-1$. Sinon $\frac{d^{\beta-1} F_0}{dz^{\beta-1}}$, qui est de degré $p+\alpha-\beta+1$ au plus, aurait un zéro d'ordre $p-\beta+1$ à l'origine, et un zéro d'ordre $\alpha+1$ au point z_0, ce qui est absurde, ce polynome n'étant pas identiquement nul.

On en déduit encore que A_0 et B_0 sont premiers entre eux : car s'ils avaient un facteur commun P de degré $r \geqq 1$, F_0 serait divisible par P : on en conclurait qu'il existe deux polynomes $A_1 = \frac{A_0}{P}$ de degré $\leqq \alpha - r$, et $B_1 = \frac{B_0}{P}$ de degré $\leqq \beta - r - 1 < p - 1$, tels que $z^p A_1 + B_1$ ait un zéro d'ordre

$$\alpha + \beta - r = (\alpha - r) + (\beta - r) + r,$$

au moins en z_0, ce qui est absurde.

On peut remarquer aussi que A_0 et B_0 sont déterminés de façon *unique* à un facteur constant près. Car si A_0^*, B_0^* est un autre couple tel que $z^p A_0^* + B_0^*$ ait un zéro d'ordre $\alpha + \beta$ en z_0, le polynome

$$z^p(aA_0 + bA_0^*) + (aB_0 + bB_0^*)$$

aurait aussi un zéro d'ordre $\alpha + \beta$ en z_0, et l'on peut choisir les constantes a et b telles que $aB_0 + bB_0^*$ soit de degré $\beta - 2$ au plus, ce qui est impossible à moins que

$$aA_0 + bA_0^* = aB_0 + b\,B_0^* \equiv 0.$$

14. **Cas** *d* (*suite*). — Pour appliquer le lemme précédent à la recherche de $k_0(\nu, \varpi)$, il suffit de se borner au cas où

$$\nu \leqq \varpi < \nu + m,$$

car dans les autres cas $k_0 = k$ est donné par (14) ou (16).

Si l'on pose

$$P = (z - z_0)^\nu z^p P_1, \qquad Q = (z - z_0)^\nu Q_1,$$

on a

$$k(z_0, P, Q) = k(z_0, z^p P_1, Q_1) + (m + 1)\nu,$$

et il existe un polynome R_1 de degré $m - 1$ au plus tel que $z^p P_1 + Q_1 R_1$ ait en z_0 un zéro d'ordre $m + k(z_0, z^p P_1, Q_1)$.

Appliquant le lemme 2, avec

$$\alpha = n + m - p - \nu - 1, \qquad \beta = n + m - q - \nu,$$

on a

$$m + k(z_0, z^p P_1, Q_1) \leqq p + \alpha = n + m - \nu - 1$$

si

$$n + m - \nu \geqq p + q,$$

et

$$m + k(z_0, z^p P_1, Q_1) \leqq \alpha + \beta = 2(n + m - \nu) - p - q - 1$$

si

$$n + m - \nu < p + q.$$

Donc, comme les maxima sont atteints dans ces formules pour des polynomes P_1 et Q_1 premiers entre eux, on a

(26) $$k_0(\nu, \varpi) = m\nu + n - 1$$

si

(27) $$\nu \leqq n + m - (p + q) \qquad \text{et} \quad \nu \leqq \varpi < \nu + m$$

et

$$k_0(\nu, \varpi) = (m-1)\nu + 2n + m - (p+q+1) \tag{28}$$

si

$$\nu > n + m - (p+q) \qquad \text{et} \qquad \nu \leqq \varpi < \nu + m. \tag{29}$$

Remarquons que, lorsque $\varpi \geqq \nu + m$, $k_0(\nu, \varpi) = m(\nu - 1) + \varpi$ est au plus égal aux valeurs (26) et (28), comme on le vérifie sans peine en tenant compte de ce que

$$\nu \leqq n - q \qquad \text{et} \qquad \varpi \leqq n + m - p - 1.$$

Il est facile maintenant d'avoir la valeur de $\lambda(z_0)$. Nous distinguerons plusieurs cas.

1° $q \geqq p - m + 1$. Si

$$\varpi < \nu \leqq n - q \leqq n + m - p - 1,$$

le maximum de $k_0(\nu, \varpi)$ est, d'après (14),

$$a = (m+1)(n-q-1).$$

On a, d'autre part, $n + m - (p+q) < n - q$, donc, si $n + m > p + q$, l'inégalité (29) est vérifiée à partir d'une certaine valeur de ν. Donc, si (27) a lieu, le maximum de $k_0(\nu, \varpi)$ est

$$b = m(n+m-p-q) + n - 1 = m(n-q) + n - 1 - m(p-m)$$

et, si (29) est vérifié, le maximum de $k_0(\nu, \varpi)$ est

$$c = (m-1)(n-q) + 2n + m - p - q - 1 = m(n-q) + n - 1 - (p-m).$$

Si l'on compare ces divers maxima, on voit de suite que $b \leqq c$; d'autre part

$$a = m(n-q) + n - 1 - (q+m)$$

et

$$p - m \leqq q - 1 < q + m,$$

donc $a < c$, et finalement

$$\mu = \lambda(z_0) = (m+1)(n-1) - [m(q-1) + p - m].$$

2° $q < p - m + 1$. Si $\varpi < \nu$, le maximum de $k_0(\nu, \varpi)$ est

$$a' = m(n-q-1) + n + m - p - 1.$$

De même, les maxima de $k_0(\nu, \varpi)$, lorsque les inégalités (27) ou (29) sont vérifiées, sont respectivement

$$\begin{aligned} b' &= m(n+m-p-q)+n-1,\\ c' &= (m-1)(n+m-p-1)+2n+m-(p+q+1)\\ &= m(n+m-p-1)+n-q, \end{aligned}$$

puisque alors

$$\nu \leqq \varpi \leqq n+m-p-1.$$

On a

$$c'-b' = (m-1)(q-1) \geqq 0,$$

et

$$c'-a' = (m-1)(q-p+m)+1.$$

2 A. Si $m=1$, $c'-a'>0$, donc

$$\mu = \lambda(z_0) = c' = 2n-(p+q).$$

2 B. Si $m>1$ et $q=p-m$, on a encore $c'-a'>0$, donc

$$\mu = c' = (m+1)(n-1)-[(m+1)(p-m)-1].$$

2 C. Si $m>1$ et $q<p-m$, on a $c'-a'\leqq 0$, d'où

$$\mu = a' = (m+1)(n-1)-[m(q-1)+p].$$

μ étant déterminé, il reste à démontrer l'égalité (13). Le raisonnement est le même qu'au paragraphe 8 : si le passage à la limite conduisait à une fraction $\frac{P}{Q}$ telle que $\Phi(P, Q, m)\equiv 0$, on en déduirait

$$\rho \geqq m(q+p-m),$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité (12), étant donnée la valeur de μ [1].

On a donc les résultats suivants :

(a) $$m=1, \qquad \rho_2(p, q) = p+q-2,$$

(b) $$m>1,$$

$$\rho_2(p, q) = \begin{cases} m(q-1)+p & \text{si } q<p-m\\ (m+1)(p-m)-1 & \text{si } q=p-m\\ m(q-1)+p-m & \text{si } q>p-m. \end{cases}$$

---

[1] Le même raisonnement, joint à l'inégalité (21), montre que la relation (13) est toujours vérifiée lorsque D et Δ *n'ont aucun point commun.*

15. Lorsqu'on n'est pas dans l'un des quatre cas étudiés jusqu'ici, le seul renseignement que nous ayons sur ρ consiste en les inégalités (21). Ceci ne nous donne ρ que lorsque $m > 1$, $q < \left(1 - \frac{1}{m}\right)(p - m)$ ou $m = 1$ et soit $p = 1$, soit $q = 1$, car alors $\rho_1 = \rho_2$; à défaut d'une méthode donnant ρ dans tous les autres cas, il serait intéressant d'obtenir les *conditions nécessaires et suffisantes* pour que l'on ait, soit $\rho = \rho_1$, soit $\rho = \rho_2$. Nous ne sommes pas parvenus à ce résultat, mais il est probable que ces conditions doivent être de nature assez complexe, comme le montrent les remarques suivantes.

En examinant la démonstration du paragraphe 12, on constate aisément que la condition imposée alors à D et Δ, à savoir que leur intersection contient un ensemble ouvert, est trop restrictive. Il suffit, par exemple, lorsque $q \geqq p - m + 1$, qu'on puisse trouver un point z_1 de l'intersection de D et Δ, centre d'un polygone régulier de $q + m - 1$ côtés dont les sommets appartiennent à D et dont le côté puisse être pris arbitrairement petit, avec la condition supplémentaire que cette propriété reste vraie après une transformation homographique arbitraire : c'est le cas, par exemple, si z_1 est intérieur à un ensemble ouvert contenu dans D.

Par contre, il est certain qu'il ne suffit pas de supposer que D et Δ ont *deux points communs* pour que $\rho = \rho_1$. Nous allons voir en effet que, dans le cas où D et Δ sont *identiques* et *formés de deux points distincts* a, b, on a $\rho = \rho_2$.

Les fractions $\frac{P}{Q}$ de $C(p, q, D, \Delta)$ se répartissent en trois catégories :

1° les fractions qui, réduites à leur plus simple expression, ont toujours au moins p_1 zéros en un des points a, b et q_1 pôles en l'autre, c'est-à-dire appartiennent (une fois réduites) à $C(p_1, q_1, a, b)$ ou $C(p_1, q_1, b, a)$, avec

$$p - p_1 = q - q_1 = h, \qquad 0 \leqq h \leqq \mathrm{Min}\,(p, q).$$

2° les fractions qui, une fois réduites, ont au moins p_1 zéros répartis entre les points a, b, et aucun pôle en ces points, donc appartiennent à $C(p_1, D)$, ce qui exige

$$h = p - p_1 \geqq q.$$

3° les fractions qui, une fois réduites, appartiennent à $C(q_1, D)$, avec

$$h = q - q_1 \geqq p.$$

La valeur de ρ est le minimum des valeurs qu'on obtiendrait en supposant successivement que *toutes* les fractions de $C(p, q, D, \Delta)$ appartiennent à l'une des catégories précédentes.

Or, pour la catégorie 1°, on obtient ainsi

$$\rho' = (m+1)h + \rho(p_1, q_1, a, b),$$

si $p_1 > m$, on a $\rho(p_1, q_1, a, b) = \rho_2(p_1, q_1)$, et d'après la valeur de ρ_2

$$\rho' = \rho_2(p, q);$$

si $p_1 \leqq m$, $\rho(p_1, q_1, a, b) = m(q_1 - 1)$, d'où

$$\rho' = m(q-1) + h.$$

Mais alors $p - q = p_1 - q_1 < m$, et $h = p - p_1 \geqq p - m$, donc

$$\rho' \geqq m(q-1) + p - m = \rho_2(p, q).$$

Pour la catégorie 2°, on a de même

$$\rho'' = (m+1)h + \rho(p_1, D).$$

Donc, si $p_1 > m$,

$$\rho'' = (m+1)h + p_1 - m = m(h-1) + p \geqq m(q-1) + p \geqq \rho_2(p, q),$$

et si $p_1 \leqq m$,

$$\rho'' = (m+1)h \geqq \mathrm{Max}[(m+1)q, (m+1)(p-m)] \geqq \rho_2(p, q).$$

Enfin, pour la catégorie 3°, on a

$$\begin{aligned} \rho''' &= (m+1)h + \rho(q_1, D) = (m+1)h + m(q_1 - 1) \\ &= m(q-1) + h \geqq m(q-1) + p \geqq \rho_2(p, q). \end{aligned}$$

Les inégalités précédentes, jointes à (21), montrent donc bien que $\rho = \rho_2$.

16. Ce qui précède nous fournit un exemple d'un cas différent du cas d et où $\rho = \rho_2$. Nous allons voir que cette égalité a encore lieu pour toute une catégorie de cas, différents du précédent, mais comprenant par contre le cas d comme cas limite.

On peut dire que dans le cas d les domaines D et Δ sont *séparés au maximum;* les cas dont nous allons parler sont ceux où D et Δ sont *suffisamment séparés* l'un de l'autre. Pour préciser cette notion nous allons définir la *constante de séparation* de deux ensembles D et Δ. Supposons d'abord que D et Δ soient deux *domaines circulaires fermés;* s'ils n'ont aucun point commun, on peut, par une transformation homographique, transformer leurs frontières en deux circonférences concentriques; soit $K(D, \Delta) > 1$ le rapport du plus grand au plus petit des rayons de ces deux circonférences : c'est ce que nous appellerons la *constante de séparation* de D et Δ. Lorsque D et Δ ont au moins un point commun, nous poserons $K(D, \Delta) = 1$. Le nombre ainsi introduit est évidemment invariant par toute transformation homographique.

Si maintenant D et Δ sont deux *ensembles quelconques*, nous prendrons comme définition de leur constante de séparation

$$K(D, \Delta) = \overline{\text{Borne}}\, K(D_1, \Delta_1),$$

pour tous les couples de domaines circulaires D_1, Δ_1 contenant respectivement D et Δ; ce nombre est encore invariant par toute transformation homographique.

Faisons quelques remarques élémentaires relatives à cette notion : si D' est une partie de D, Δ' une partie de Δ, on a évidemment

$$K(D', \Delta') \geqq K(D, \Delta).$$

Lorsque $K(D, \Delta) > 1$, il est clair que D et Δ n'ont aucun point commun, mais la réciproque est inexacte, comme le montre l'exemple simple où D se compose des points $z = \pm 1$, et Δ des points $z = \pm i$. Remarquons enfin que la condition nécessaire et suffisante pour que $K(D, \Delta) = \infty$ est que l'un des ensembles D, Δ au moins se réduise à un point n'appartenant pas à l'autre. Cela étant, nous allons voir qu'*il existe un nombre fini* $L \geqq 1$, *tel que, lorsque* $K(D, \Delta) > L$, *on ait, quels que soient* p, q, $\rho(p, q, D, \Delta) = \rho_2(p, q)$.

Supposons en effet qu'il n'en soit pas ainsi, et considérons une suite de nombres positifs $r_1, r_2, \ldots, r_i, \ldots$ croissant indéfiniment : pour chaque valeur de l'indice i, il existerait deux ensembles D_i, Δ_i, tels que $K(D_i, \Delta_i) > r_i$, et que $\rho(p, q, D_i, \Delta_i) < \rho_2(p, q)$ pour un système d'entiers p, q, au moins $(p \leqq n + m - 1,\ q \leqq n)$.

On peut toujours supposer à l'aide d'une transformation homographique que D_i est dans le domaine circulaire $|z| \leqq \frac{1}{\sqrt{r_i}}$, et Δ_i dans le domaine circulaire $|z| \geqq \sqrt{r_i}$. *Quel que soit l'ensemble* E *du plan*, il existerait donc, pour chaque indice i, une fraction $\frac{P_i}{Q_i}$ de la classe $C(p, q, D_i, \Delta_i)$ telle que $\Phi(P_i, Q_i, m)$ ne soit pas identiquement nulle et ait $(m+1)(n-1)-\rho_2+1$ zéros au moins dans E; on peut d'ailleurs extraire au besoin de la suite $\{r_i\}$ une suite partielle pour laquelle les entiers p, q soient les mêmes pour toutes les valeurs correspondantes de i; nous supposerons que la suite primitive est déjà de cette nature.

Extrayons alors de la suite $\left\{\frac{P_i}{Q_i}\right\}$ une suite convergente de limite $\frac{P}{Q} \not\equiv 0$. Si l'on avait $\Phi(P, Q, m) \equiv 0$, on pourrait, en appliquant le lemme 1, trouver une fraction $\frac{\Pi}{Q}$ ayant q pôles au moins au point à l'infini, et $(p-m+1)$ pôles au moins à l'origine, telle que $\Phi(\Pi, Q, m)$ ne soit pas identiquement nulle et ait $(m+1)(n-1)-\rho_2+1$ zéros dans E : or, ceci est impossible, car cette dérivée a au plus

$$(m+1)(n-1)-m(q+p-m) < (m+1)(n-1)-\rho_2$$

zéros différents des points 0 et ∞.

On aurait donc $\Phi(P, Q, m) \not\equiv 0$, et ce polynome aurait au moins $(m+1)(n-1)-\rho_2+1$ zéros dans E; mais comme $\frac{P}{Q}$ est de classe $C(p, q, 0, \infty)$, cela est en contradiction avec la définition de ρ_2, puisque E est arbitraire. C. Q. F. D.

17. Pour un système donné d'entiers n, m, p, q, nous désignerons par $L_0(n, m, p, q)$ la borne inférieure des nombres $L \geqq 1$ pour lesquels le théorème précédent s'applique. Lorsque $L_0 > 1$, on peut encore définir ce nombre par la propriété suivante : pour tout couple de *domaines circulaires* D, Δ tels que $1 \leqq K(D, \Delta) < L_0$, on a

$$\rho(p, q, D, \Delta) < \rho_2(p, q),$$

et L_0 est la plus grande valeur possédant cette propriété.

L'exemple du paragraphe 15, où l'on a $K(D, \Delta) = 1$ et $\rho = \rho_2$, montre d'ailleurs que la proposition précédente est inexacte lorsqu'on n'y suppose plus que D et Δ sont des domaines circulaires.

Le calcul de L_0 semble en général malaisé : nous le ferons plus loin dans un cas particulier. Mais la seconde définition que nous venons de donner de ce nombre *lorsque* $L_0 > 1$ pose le problème de savoir *dans quel cas cette inégalité est vérifiée*.

L'étude de ce problème va nous montrer que, hormis les cas où $\rho_1 = \rho_2$, on a, *dans la plupart des autres cas*, $L_0 > 1$.

La méthode que nous emploierons est la suivante : considérons d'abord la classe $C(p, q, D, \Delta)$ correspondant au cas où D est le point à l'infini, Δ l'intérieur d'un cercle Γ de rayon R; comme $K(D, \Delta) = \infty$, on a alors $\rho(p, q, D, \Delta) = \rho_2$. Supposons que, pour les fractions de cette classe, on puisse établir que l'on a $\lambda(z_0) > \mu$ pour tous les points intérieurs à un cercle Γ' concentrique à Γ et de rayon $R' > R$. Si, alors, on considère la classe $C(p, q, D', \Delta)$ où D' est formé de *l'extérieur de* Γ' (et de la circonférence de ce cercle), on aura, *en tout point* z_0 *du plan*, $\lambda(z_0) > (m+1)(n-1) - \rho_2$. Car cela a été établi pour les points intérieurs à Γ', par hypothèse, et, aux points de D', on peut avoir

$$\varpi = n + m - 1, \qquad \nu = n - q,$$

d'où

$$\lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1) - m(q-1) > (m+1)(n-1) - \rho_2.$$

D'après l'inégalité (12), on a donc

$$\rho(p, q, D', \Delta) < \rho_2(p, q),$$

autrement dit

$$L_0 \geqq \frac{R'}{R} > 1.$$

Le raisonnement peut naturellement s'appliquer de la même manière lorsqu'on y intervertit le rôle des zéros et des pôles.

18. Pour pouvoir appliquer le raisonnement précédent, il suffit d'avoir une limite inférieure de $\lambda(z_0)$ supérieure à μ aux points de la couronne limitée par les cercles Γ et Γ', car en un point intérieur à Γ, on peut prendre $\varpi = n + m - p - 1$, $\nu = n$, d'où

$$\lambda(z_0) = (m+1)(n-1) - (p-m) > (m+1)(n-1) - \rho_2 = \mu.$$

Nous obtiendrons une telle limite pour $\lambda(z_0)$ à l'aide du lemme suivant :

Lemme 3. — *Soient* α, β, γ *trois entiers positifs tels que* $\beta \leqq \alpha$, $\gamma \leqq \alpha$; *posons*

$$h = \alpha \qquad \text{si } \gamma \leqq \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$h = 2(\alpha-\gamma)+\beta \qquad \text{si } \gamma > \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

On peut trouver un polynome A *de degré* $\alpha - h$ *et un polynome* B, *de degré* $\beta - 1$ *au plus, tel que le polynome*

$$C \equiv z^h A + B$$

ait γ *zéros au moins dans un demi-plan* ouvert *dont la frontière passe par l'origine.*

Pour établir ce lemme, considérons deux entiers positifs ou nuls, r et s, et le polynome

$$F(t, z) \equiv t z^{r+2s+1} - (z-1)^r.$$

Lorsque t tend vers 0, la fonction $z(t)$ définie par $F(t, z) = 0$ a r déterminations tendant vers 1, les $2s+1$ autres tendant vers ∞. Il est facile d'avoir les développements de ces dernières au voisinage de $t=0$, car on a, pour la fonction inverse au voisinage de $z=\infty$,

$$t(z) = \frac{(z-1)^r}{z^{r+2s+1}} = \frac{1}{z^{2s+1}} + \ldots,$$

d'où

$$z = \frac{1}{t^{\frac{1}{2s+1}}} + \ldots.$$

Autrement dit, les arguments des $2s+1$ déterminations de z qui tendent vers ∞ sont de la forme $\theta + \frac{2k\pi}{2s+1} + \varepsilon_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, 2s+1)$, $\varepsilon_k(t)$ tendant vers 0 avec t. Par suite, on peut prendre t assez petit pour que $F(t, z)$ ait $(r+s+1)$ zéros dans un demi-plan ouvert limité par une droite passant par l'origine.

Supposons alors tout d'abord $\gamma \leqq \frac{\alpha+1}{2} \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}$; il suffit alors de prendre $A = B = 1$ pour avoir la propriété du lemme.

Si $\frac{\alpha+1}{2} < \gamma \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}$, en prenant, dans le polynome F, $r = 2\gamma - \alpha - 1$, $s = \alpha - \gamma$, les polynomes $A = t$, $B = -(z-1)^r$ répondent à la question.

Supposons maintenant $\gamma > \frac{\alpha+\beta}{2}$; prenons $r = \beta - 1$, $s = \alpha - \gamma$ et, t étant déterminé comme plus haut dans le polynome F correspondant, considérons le polynome

$$F_1(z) = t z^{\beta+2(\alpha-\gamma)}(1-\varepsilon z)^{2\gamma-(\alpha+\beta)} - (z-1)^{\beta-1}.$$

Lorsque ε tend vers zéro, $\beta + 2(\alpha-\gamma)$ zéros de F_1 tendent vers les zéros de $F(t, z)$. D'autre part, en posant $z = \frac{1-u}{\varepsilon}$, l'équation $F_1(z) = 0$ devient

$$t u^{2\gamma-(\alpha+\beta)}(1-u)^{\beta+2(\alpha-\gamma)} = \varepsilon^{2(\alpha-\gamma)+1}(1-\varepsilon-u)^{\beta-1}.$$

Donc $2\gamma - (\alpha+\beta)$ zéros de cette équation tendent vers o avec ε. Par suite, on peut trouver une valeur de ε assez petite pour qu'il existe $(\alpha-\gamma) + \beta + 2\gamma - (\alpha+\beta) = \gamma$ zéros de F_1 dans un demi-plan ouvert limité par une droite passant par l'origine, ce qui démontre le lemme, en prenant

$$A = t(1-\varepsilon z)^{2\gamma-(\alpha+\beta)}, \qquad B = -(z-1)^{\beta-1}.$$

Remarque. — Il serait intéressant, lorsque $\gamma > \frac{\alpha+\beta}{2}$, de chercher la plus grande valeur de h pour laquelle le lemme 3 reste vrai. Ce qui précède ne permet pas d'affirmer que $2(\alpha-\gamma)+\beta$ soit cette valeur maxima; on peut remarquer seulement que c'est certainement la valeur maxima pour $\gamma = \alpha$, comme le montre immédiatement le théorème de Gauss-Lucas, appliqué successivement aux dérivées de C jusqu'à l'ordre β.

19. Pour appliquer le lemme 3 à la démonstration de l'inégalité $L_0 > 1$, reprenons d'abord, avec les notations du paragraphe 17, le cas où D est le point à l'infini, Δ l'intérieur d'un cercle Γ, et cherchons une limite inférieure de $\lambda(z_0)$ en des points extérieurs à Γ, mais assez voisins de la circonférence. Il nous suffira pour cela d'avoir une limite inférieure pour le maximum $k_0(z_0, \nu, \varpi)$ de $k(z_0, P, Q)$ lorsque

ν et ϖ sont donnés. Si $\nu > \varpi$, $k_0(z_0, \nu, \varpi) = k(z_0, P, Q)$ est donné par (14). Lorsque $\nu \leqq \varpi$, posons

$$P_1(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^\nu}, \qquad Q_1(z) = \frac{Q(z)}{(z-z_0)^\nu};$$

si l'on peut trouver un polynome $R_1(z)$ de degré $m-1$ au plus, tel que $P_1 + Q_1 R_1$ ait un zéro de multiplicité $h > m$ au point z_0, on aura

$$k_0(z_0, \nu, \varpi) \geqq (m+1)\nu + h - m.$$

Or, si l'on applique le lemme 3 avec

$$\alpha = n + m - \nu - 1,$$
$$\beta = n + m - p - \nu,$$
$$\gamma = q,$$

on voit qu'on peut trouver un polynome $C = Q_2 R_2$ où R_2 est de degré $m-1$, Q_2 de degré $n-\nu$, et un polynome $-B = P_2$ de degré $n+m-p-\nu-1$ au plus, tel que $P_2 + Q_2 R_2$ ait un zéro de multiplicité h au point $z=0$, avec

$$h = \alpha = n + m - \nu - 1 \qquad \text{si } \nu \leqq n + m - q - \frac{p+1}{2},$$
$$h = 2(\alpha - \gamma) + \beta$$
$$= 2(n+m-\nu-q-1) + n + m - p - \nu \qquad \text{si } \nu > n + m - q - \frac{p+1}{2},$$

et que Q_2 ait q zéros dans un cercle Γ'' *ne contenant pas l'origine*. Si nous faisons une transformation homographique *conservant le point à l'infini* et transformant Γ'' en Γ, les transformés P_1, Q_1, R_1 de P_2, Q_2, R_2 répondront à la question, avec la valeur précédente de h, relativement au point z_0 transformé de l'origine. On a donc, en ce point,

$$(30) \begin{cases} k_0(z_0, \nu, \varpi) \geqq m\nu + n - 1 & \text{si } \nu \leqq n + m - q - \dfrac{p+1}{2}, \\ k_0(z_0, \nu, \varpi) \geqq (m-2)\nu + 3(n-1) & \\ \qquad\qquad + 2m - 2q - p + 1 & \text{si } \nu > n + m - q - \dfrac{p+1}{2}. \end{cases}$$

Il est clair d'ailleurs que les mêmes inégalités auront lieu en tout point z_1 de la couronne comprise entre le cercle Γ et le cercle concentrique Γ' passant par z_0, comme le montre une simple similitude de pôle le centre de Γ, effectuée sur les zéros de P, Q, R et transformant z_0 en z_1.

Une limite inférieure de $\lambda(z_0)$ valable pour tous les points de cette couronne, sera donc obtenue en prenant la valeur maxima des seconds membres de (14) et (30) lorsque $\nu \leqq n-q$, $\varpi \leqq n+m-p-1$. Un calcul sans difficulté donne les résultats suivants :

I. $m=1$ [ce cas se distingue des autres, car c'est le seul où le coefficient de ν dans la seconde formule (30) soit *négatif*] :

$$(\mathrm{I}a) \qquad q \leqq \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right) \qquad \lambda(z_0) \geqq 2(n-1)-(p-1)=2(n-1)-\rho_1(p,q),$$

$$(\mathrm{I}b) \quad \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)<q \leqq n-\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right) \qquad \lambda(z_0) \geqq 2(n-1)-\left[q-1+\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right)\right],$$

$$(\mathrm{I}c) \quad n-\mathrm{E}\left(\frac{p}{2}\right)<q \leqq n \qquad \lambda(z_0) \geqq 2(n-1)-(p+2q-n-2).$$

II. $1<m \leqq p \leqq 2m-1$:

$$\lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1)-\rho_1(p,q).$$

III. $m>1, p>2m-1$:

$$(\mathrm{III}a) \qquad q \leqq \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right) \qquad \lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1)-\rho_1(p,q),$$

$$(\mathrm{III}b) \quad \begin{cases} \mathrm{E}\left(\dfrac{p+1}{2}\right)<q<p-m+1 \\ \lambda(z_0) \geqq \mathrm{Max}\begin{Bmatrix} (m+1)(n-1)-[m(p-m)+2q-p-1] \\ (m+1)(n-1)-[m(q-1)+p] \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}c) \quad p-m+1 \leqq q \qquad \lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1)-[m(q-1)+(p-m)-(m-1)].$$

Si l'on étudie de la même manière le cas où D est l'intérieur d'un cercle Γ et Δ le point à l'infini, on n'obtient de nouvelles limites, meilleures que les précédentes, que dans les cas suivants :

I'. $m=1$ (il est évident, vu le rôle symétrique que jouent alors les zéros et les pôles, que l'on doit obtenir les formules (I) où l'on a permuté p et q) :

$$(\mathrm{I}'a) \qquad p \leqq \mathrm{E}\left(\frac{q+1}{2}\right) \qquad \lambda(z_0) \geqq 2(n-1)-(q-1)=2(n-1)-\rho_1(p,q),$$

$$(\mathrm{I}'b) \quad \mathrm{E}\left(\frac{q+1}{2}\right)<p \leqq n-\mathrm{E}\left(\frac{q}{2}\right) \qquad \lambda(z_0) \geqq 2(n-1)-\left[p-1+\mathrm{E}\left(\frac{q}{2}\right)\right],$$

$$(\mathrm{I}'c) \quad n-\mathrm{E}\left(\frac{q}{2}\right)<p \leqq n \qquad \lambda(z_0) \geqq 2(n-1)-[q+2p-n-2].$$

III'c. $m > 1$, $p > 2m - 1$, $q > p$:

$$(\mathrm{III}'c^1) \begin{cases} p < q < 2(p-m)+1 \\ \lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1) - [m(q-1)+p-m-(q-p+m-1)], \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}'c^2) \begin{cases} 2(p-m)+1 \leqq q \\ \lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1) - m(q-1) = (m+1)(n-1) - \rho_1(p, q). \end{cases}$$

Si l'on compare alors toutes les limites inférieures trouvées à $(m+1)(n-1) - \rho_2(p, q)$, on arrive au résultat suivant :

Lorsque $q > \left(1 - \frac{1}{m}\right)(p - m)$, *on a* $L_0 > 1$, *sauf peut-être dans les trois cas suivants :*

(A) $\quad m = 1, \quad p = q = n.$

(B) $\quad m = 1, \quad p = q = 2.$

$$(\mathrm{C}) \quad \begin{cases} m > 2, \quad p > 2m + 3 + \dfrac{6}{m-2}, \\ \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)(p-m) < q \leqq p - m - 1 - \dfrac{3}{m-2}. \end{cases}$$

Nous allons compléter ce résultat en montrant que, *dans les cas* A *et* B *on a effectivement* $L_0 = 1$.

Pour le cas A, cela résulte d'un théorème élémentaire de Bôcher [1], d'après lequel, si D et Δ sont deux domaines circulaires fermés sans point commun, la dérivée d'une fonction de classe $C(n, n, D, \Delta)$ a $(n-1)$ zéros dans D et $(n-1)$ zéros dans Δ.

Le cas B peut également s'élucider à l'aide de ce théorème. Supposons en effet que D et Δ soient deux domaines circulaires fermés sans point commun, et calculons la valeur de μ. En un point z_0 *extérieur à* D *et* Δ, on a, d'après les formules (14), (15) et (16), puisque $\nu \leqq n-2$, $\varpi \leqq n-2$,

$$\lambda(z_0) \leqq 2n - 3,$$

et cette valeur maxima ne saurait être atteinte que pour $\nu = \varpi = n - 2$. Or, si l'on pose alors

$$P_1(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^{n-2}}, \qquad Q_1(z) = \frac{Q(z)}{(z - z_0)^{n-2}},$$

---

(1) M. Bôcher, *Proceedings of the American Academy of Sciences*, t. 40, 1904, p. 469-484.

les zéros de $\Phi(P, Q, 1)$ distincts de z_0 sont ceux de $\Phi(P_1, Q_1, 1)$, et le théorème de Bôcher nous apprend qu'il y en a un dans D et un dans Δ, et par suite $\Phi(P, Q, 1)$ a $2(n-1)-2=2n-4$ zéros au point z_0, d'où

$$\lambda(z_0) \leqq 2n-4,$$

et par suite

$$\mu = 2n-4,$$

d'où, d'après (12),

$$\rho \leqq 2.$$

Mais, d'autre part, l'égalité (13) a lieu, sans quoi, en raisonnant comme au paragraphe 8, on aurait l'inégalité $\rho \geqq 3$, ce qui est absurde. Donc

$$\rho(p, q, \mathrm{D}, \Delta) = 2 = p+q-2 = \rho_2(p, q),$$

ce qui montre bien que $\mathrm{L}_0 = 1$.

Le seul cas dans lequel la méthode laisse subsister un doute est donc le cas C.

Remarque. — Les inégalités obtenues dans ce paragraphe montrent encore qu'en dehors du cas évident $q < \left(1 - \frac{1}{m}\right)(p-m)$, où $\rho_1 = \rho_2$, *on peut avoir* $\rho = \rho_1$ *pour des ensembles* D *et* Δ *sans point commun*, dans les cas suivants :

(*a*) $\quad m = 1, \quad q \leqq \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right) \quad$ ou $\quad p \leqq \mathrm{E}\left(\frac{q+1}{2}\right)$,

(*b*) $\quad 1 < m < p \leqq 2m-1, \quad q$ quelconque,

(*c*) $\quad m > 1, \quad 2m-1 < p \leqq 2m+3+\frac{6}{m-2}, \quad q \leqq \mathrm{E}\left(\frac{p+1}{2}\right)$,

(*d*) $\quad m > 1, \quad 2m-1 < p, \quad q \geqq 2(p-m)+1.$

20. Nous allons calculer la *valeur exacte* de L_0 dans le cas particulier suivant : $m=2$, $p=n+1$, $q=n$, *n pair*. Nous savons déjà que $\mathrm{L}_0 > 1$. La valeur de ce nombre va nous être fournie par une application du théorème de Grace et d'un résultat connu sur les polynomes [1].

Nous supposons donc que D et Δ sont deux *domaines circulaires*

[1] Voir J. Dieudonné, *Sur quelques points de la théorie des polynomes* (*Bull. Sciences math.*, t. 58, 1934, p. 273-296). Le théorème dont il s'agit ici est dû à M. Biernacki.

sans point commun; par une homographie, on peut amener Δ à être le cercle $|z| \leqq 1$, D l'extérieur du cercle $|z| \geqq R > 1$; tous les zéros de P sont dans D, tous les zéros de Q dans Δ, et pour $R > L_0$, on aura donc

$$\rho = \rho_2 = m(q-1) + p - m = (m+1)(n-1) = 3(n-1),$$

autrement dit, il existera des points du plan où $\Phi(P, Q, 2)$ *ne pourra s'annuler*, quelle que soit la fraction $\frac{P}{Q}$ de classe $C(p, q, D, \Delta)$; et inversement, s'il existe de tels points, on aura $R > L_0$.

Tout revient donc à chercher en quels points du plan $\Phi(P, Q, 2)$ peut s'annuler; or, si z_0 est un tel point, et si l'on désigne par z_1, $z_2, \ldots, z_{n+1}$ les zéros de $P(z)$, la relation $\Phi(P, Q, 2) = 0$, où l'on fait $z = z_0$, est, d'après (6), *linéaire* par rapport à $P(z_0)$, $P'(z_0)$, $P''(z_0)$, donc *linéaire* en $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ et *symétrique* par rapport à ces variables. D'après le théorème de Grace, il existe donc un point a *dans* D tel que $\Phi(P_1, Q, 2)$ s'annule en z_0, avec $P_1(z) = (z-a)^{n+1}$.

Nous procéderons alors de la façon suivante : pour une valeur donnée de a dans D, les zéros de $\Phi(P_1, Q, 2)$ différents de a, décrivent un certain domaine δ_a lorsque les zéros de Q prennent toutes les positions possibles dans Δ. Lorsque a varie ensuite arbitrairement dans D, le domaine δ_a balaie un certain domaine δ_D; la valeur de L_0 sera *la borne inférieure des valeurs de* R *telles que* δ_D *n'ait aucun point commun avec* D. Comme d'ailleurs une rotation sur a autour de l'origine fait subir la même rotation à δ_a, on peut encore dire que, si $d(a)$ est la distance maxima de l'origine aux points de δ_a, le nombre L_0 est la plus grande valeur de R pour laquelle

$$R \leqq \operatorname*{Max}_{a \geqq R} d(a), \tag{31}$$

le maximum étant pris pour toutes les valeurs de a *réelles* et $\geqq R$.

Pour avoir δ_a, traitons d'abord le cas particulier où $a = \infty$. On a alors $P_1 \equiv 1$, d'où

$$\Phi(P_1, Q, 2) \equiv 2Q'^2 - QQ''.$$

Mais, à un point z_0 où $2Q'^2 - QQ'' = 0$, correspond une valeur λ telle que l'équation

$$(z-\lambda)Q' + Q = 0$$

ait *une racine double en* z_0. Or, on sait (*loc. cit*) que, *quel que soit* λ, cela ne peut avoir lieu que pour

$$|z_0| \leqq \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}},$$

la limite étant *exacte* (n étant *pair*); δ_∞ est donc l'intérieur du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$.

Pour passer de là au cas général, remarquons qu'on peut toujours, pour $a > 1$, faire une transformation homographique *transformant* Δ *en lui-même* et envoyant le point a à l'infini, à savoir

$$x = \frac{az - 1}{z - a}.$$

Dans le plan des x, le transformé de δ_a est donc δ_∞, c'est-à-dire le cercle

$$|x| \leqq \sqrt{\frac{n+2}{n+1}},$$

et, par suite, en revenant au plan des z, δ_a est un des deux domaines circulaires limités par la circonférence (γ) ayant pour diamètre le segment d'extrémités

$$z_1 = \frac{a\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} - a\sqrt{n+1}}$$

et

$$z_2 = \frac{a\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + a\sqrt{n+1}}.$$

Si $a \leqq \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$, δ_a est celui de ces domaines qui contient le point à l'infini, donc $d(a) = \infty$ dans ce cas. Au contraire, si $a > \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$, δ_a est l'intérieur de (γ), et l'on a

$$d(a) = \operatorname{Max}(-z_1, z_2) = \frac{a\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{a\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}},$$

fonction décroissante de a, d'où on tire, d'après (31),

$$L_0 = \frac{1 + \sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}. \tag{32}$$

Lorsque n est *impair*, le même raisonnement montre que L_0 a une valeur *inférieure* à l'expression (32).

21. Le principe de la méthode précédente s'étend immédiatement au cas plus général où m est quelconque, $p = n + m - 1$ et $q = n$. Si $A(n, m) = d(\infty)$ est le rayon du cercle δ_∞, on voit ainsi que l'on a

$$L_0 = A(n, m) + \sqrt{A^2(n, m) - 1}.$$

Tout revient donc à calculer $A(n, m)$, c'est-à-dire à déterminer la borne supérieure des zéros finis de $\Phi(1, Q, m) \equiv Q^{m+1} \frac{d^m}{dz^m}\left(\frac{1}{Q}\right)$ lorsque tous les zéros de $Q(z)$ varient arbitrairement à l'intérieur du cercle unité.

La méthode des fonctions bornées ([1]) pourrait en théorie s'appliquer ici, car $\frac{1}{Q^m}\Phi(1, Q, m)$ s'exprime à l'aide de $\frac{Q'}{Q}$ et des dérivées de cette fraction. Mais les calculs se compliquent rapidement à mesure que m croît, et deviennent vite impraticables.

Nous allons montrer, par une autre méthode, comment on peut avoir une *borne supérieure* de $A(n, m)$, qui nous montrera que, pour une valeur donnée de m, $A(n, m)$ *tend vers un lorsque n croît indéfiniment.*

Soit z_0 un zéro fini de $\Phi(1, Q, m)$ extérieur au cercle unité : on peut toujours, en faisant une rotation autour de l'origine, supposer z_0 *réel et positif*, soit $z_0 = 1 + x$, $x > 0$. Par hypothèse, il existe un polynome

$$H(z) \equiv u_0 + u_1(z - z_0) + \ldots + u_{m-1}(z - z_0)^{m-1} \qquad (u_0 \neq 0)$$

tel que le polynome $F \equiv QH + 1$ ait un zéro d'ordre $m + 1$ au moins au point z_0 ; on en déduit que le développement de Taylor de

$$\frac{F'}{F - 1} \equiv \frac{Q'}{Q} + \frac{H'}{H},$$

au voisinage de z_0, commence par un terme de degré m au moins en $(z - z_0)$, et réciproquement. Autrement dit, si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont

([1]) Voir J. DIEUDONNÉ, *Sur quelques propriétés des polynomes* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° **114**, Hermann et C^ie^, Paris, 1934).

les zéros de Q, et si l'on pose

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(z_i - z_0)^k},$$

on a les relations

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 \quad u_0 - \qquad u_1 = 0,\\
&\sigma_2 \quad u_0 + \sigma_1 \quad u_1 - 2u_2 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\sigma_{m-1} u_0 + \sigma_{m-2} u_1 + \ldots + \sigma_1 u_{m-2} - (m-1) u_{m-1} = 0,\\
&\sigma_m \quad u_0 + \sigma_{m-1} u_1 + \ldots + \sigma_1 u_{m-1} = 0,
\end{aligned}$$

et, comme $u_0 \neq 0$,

$$(33) \qquad \begin{vmatrix}
\sigma_1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
\sigma_2 & \sigma_1 & -2 & 0 & \ldots & 0\\
\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & -3 & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .\\
\sigma_m & \sigma_{m-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \sigma_1
\end{vmatrix} = 0.$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$|z_i - z_0| \geqq x,$$

et que l'on peut par suite écrire

$$\sigma_k = \frac{n}{x^k} \lambda_k \qquad \text{avec} \quad |\lambda_k| \leqq 1.$$

Portant dans (33), on voit immédiatement que cette équation peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix}
\lambda_1 & -\frac{1}{n} & 0 & \ldots & 0\\
\lambda_2 & \lambda_1 & -\frac{2}{n} & \ldots & 0\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .\\
\lambda_{m-1} & \lambda_{m-2} & \ldots & \ldots & -\frac{m-1}{n}\\
\lambda_m & \lambda_{m-1} & \ldots & \ldots & \lambda_1
\end{vmatrix} = 0$$

ou

$$(34) \qquad \lambda_1^m - \frac{\varphi(z_0, z_1, \ldots, z_n)}{n} = 0,$$

avec

$$|\varphi(z_0, z_1, \ldots, z_n)| < K,$$

où K est une constante indépendante de $z_0, z_1, \ldots, z_n$ et de n.

D'autre part, comme $|z_i| \leqq 1$, on a évidemment

$$-\frac{1}{x} \leqq \mathcal{R}\left(\frac{1}{z_i - z_0}\right) \leqq -\frac{1}{2+x},$$

d'où

$$|\lambda_1| = \frac{x}{n}|\sigma_1| \geqq \frac{x}{n}|\mathcal{R}\sigma_1| \geqq \frac{x}{2+x},$$

et, d'après (34),

$$\frac{x}{2+x} < \left(\frac{K}{n}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{35}$$

ce qui donne une borne supérieure pour x, et, par suite, pour $A(n, m) - 1$, dès que le second membre de (35) est inférieur à 1, c'est-à-dire pour $n > K$; on voit ainsi que $A(n, m) - 1$ *tend vers zéro au moins aussi vite que* $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$; la formule $A(n, 2) = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}}$ montre d'ailleurs que cette limitation n'est pas la meilleure possible.

22. En généralisant encore la méthode précédente, nous allons montrer que $L_0(n, m, p, q)$ *tend vers* un *lorsque*, *m restant fixe*, *p*, *q et n croissent indéfiniment de sorte que n* — *p et n* — *q soient bornés.*

Soit, en effet, R un nombre quelconque tel que $1 < R < L_0$. Si l'on prend pour ensemble Δ le cercle unité $|z| \leqq 1$, et pour ensemble D le domaine circulaire $|z| \geqq R$, on a, par définition, en *tout* point z_0 de la couronne circulaire $1 < |z| < R$,

$$\lambda(z_0) \geqq \mu + 1, \tag{36}$$

où $\mu = (m+1)(n-1) - \rho_2(p, q)$. Nous supposerons $p \leqq q$ (s'il n'en était pas ainsi, on transformerait D et Δ l'un dans l'autre par une homographie, et le raisonnement qui va suivre s'applique alors de la même manière), et nous prendrons

$$z_0 = \frac{1+R}{2}.$$

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction de la classe $C(p, q, D, \Delta)$ pour laquelle

$k(z_0, \mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \lambda(z_0)$, et soit $(z - z_0)^\sigma$ la plus haute puisssance de $z - z_0$ divisant P et Q; on a $\sigma = \nu \leqq \varpi < \nu + m$, sans quoi, d'après les formules (14) et (16) et la valeur de $\rho_2(p, q)$, l'inégalité (36) ne serait pas vérifiée. Si l'on pose

$$\mathrm{P}_1(z) = \frac{\mathrm{P}(z)}{(z - z_0)^\sigma}, \qquad \mathrm{Q}_1(z) = \frac{\mathrm{Q}(z)}{(z - z_0)^\sigma},$$

il existe donc un polynome R_1 de degré $m - 1$ au plus tel que $\mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ ait un zéro d'ordre $\mu - (m + 1)\sigma + m + 1$ au moins en z_0. Comme $\mathrm{Q}_1(z_0) \neq 0$, et que P_1 a un zéro d'ordre $\varpi - \sigma$ en z_0, R_1 a un zéro d'ordre $\varpi - \sigma$ également en z_0. Divisant $\mathrm{P}_1 + \mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ par $(z - z_0)^{\varpi - \sigma}$, on voit donc qu'il existe quatre polynomes P_2, P_3, Q_2, Q_3 tels que $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 + \mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3$ ait un zéro d'ordre $\mu + m + 1 - m\sigma - \varpi$ au moins en z_0, P_2 étant un polynome de degré p dont les zéros sont dans D, Q_2 un polynome de degré q dont les zéros sont dans Δ, P_3 et Q_3 des polynomes de degrés respectifs au plus égaux à $n + m - p - 1 - \varpi$ et $n + m - q - 1 - \varpi$; de plus ces polynomes ne s'annulent pas en z_0. Si l'on pose

$$\gamma = (n + m - p - 1 - \varpi) + (n + m - q - 1 - \varpi),$$

γ est *borné* par hypothèse, et d'autre part on vérifie sans peine que

$$\mu + m - (m\sigma + \varpi) \geqq \gamma + 1. \tag{37}$$

Cela étant, en dérivant la fraction $\frac{\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3}{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$, pour laquelle z_0 n'est ni un zéro, ni un pôle, on voit que la fraction

$$\frac{\mathrm{Q}'_2}{\mathrm{Q}_2} - \frac{\mathrm{P}'_2}{\mathrm{P}_2} + \frac{\mathrm{Q}'_3}{\mathrm{Q}_3} - \frac{\mathrm{P}'_3}{\mathrm{P}_3}$$

a un zéro d'ordre $\mu + m - (m\sigma + \varpi)$ au moins au point z_0.

Par suite, si l'on pose

$$\frac{\mathrm{Q}'_3}{\mathrm{Q}_3} - \frac{\mathrm{P}'_3}{\mathrm{P}_3} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2(z - z_0) + \ldots + \mathrm{C}_{h+1}(z - z_0)^h + \ldots$$

et

$$u_h = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{(z_i - z_0)^h} - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(z'_j - z_0)^h} \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

$z_1, z_2, \ldots, z_q$ désignant les zéros de Q_2 et $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ ceux de P_2, on a, d'après (37), les relations

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad \dots, \quad u_{\gamma+1} = C_{\gamma+1}.$$

Mais on a, d'autre part, le lemme suivant :

LEMME 4. — *Soient* A, B *deux polynomes de degrés respectifs au plus égaux à* α *et* β, *et tels que* $A(0).B(0) \neq 0$. *Si l'on considère la série de Maclaurin*

$$\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \equiv a_1 + a_2 z + \dots + a_{h+1} z^h + \dots,$$

il existe entre $a_1, a_2, \dots, a_{\alpha+\beta+1}$, *une relation algébrique isobare à coefficients ne dépendant que de* α *et* β, *de la forme*

$$a_1^r = F(a_1, a_2, \dots, a_{\alpha+\beta+1}), \tag{38}$$

où F *est de poids* r *et de degré inférieur à* r *par rapport à* $a_1, a_2, \dots, a_{\alpha+\beta+1}$.

En effet, comme $\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B}$ est entièrement déterminé par les $\alpha + \beta$ zéros de A et B, il est évident qu'il existe une relation algébrique entre $a_1, a_2, \dots, a_{\alpha+\beta+1}$ à coefficients numériques fonctions de α et β, et le changement de z en tz montre de suite que cette relation est isobare. Tout revient à établir qu'elle est de la forme (38), c'est-à-dire contient un terme en a_1^r à coefficient différent de zéro. Or, s'il n'en était pas ainsi, la relation serait vérifiée pour

$$a_1 \neq 0, \qquad a_2 = a_3 = \dots = a_{\alpha+\beta+1} = 0,$$

autrement dit il existerait deux polynomes A, B du type voulu, tels que $\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} - a_1 = \frac{BA' - AB' - a_1 AB}{AB}$ ait un zéro d'ordre $\alpha + \beta + 1$ au moins à l'origine, ce qui est évidemment impossible si l'on n'a pas $a_1 = 0$, $BA' - AB' \equiv 0$, d'où C. Q. F. D.

Appliquons le lemme en prenant

$$A(z) \equiv Q_3(z_0 + z), \; B(z) \equiv P_3(z_0 + z),$$

d'où $\alpha + \beta = \gamma$. On a donc une relation de la forme

$$u_1^r = F(u_1, u_2, \dots, u_{\gamma+1}). \tag{39}$$

Or, on a

$$\left|\frac{1}{z_i - z_0}\right| \leqq \frac{1}{|z_0| - 1} = \frac{2}{R-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\left|\frac{1}{z'_j - z_0}\right| \leqq \frac{1}{R - |z_0|} = \frac{2}{R-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p).$$

Donc, si l'on pose

(40)
$$u_h = \frac{2q}{\left(\frac{R-1}{2}\right)^h} v_h \qquad (h = 1, 2, \ldots),$$

on a

$$|v_h| \leqq 1.$$

Portant dans (39), et tenant compte du fait que cette relation est isobare et que F est de degré *inférieur* à r, il vient

$$v_1^r = \frac{1}{q}\,\Theta(v_1, v_2, \ldots, v_{\gamma+1}),$$

et l'on a, quels que soient q et R, $|\Theta| \leqq M$, où M est une constante ne dépendant que de l'entier γ.

Mais on a

$$-\frac{1}{z_0 - 1} \leqq \mathcal{R}\left(\frac{1}{z_i - z_0}\right) \leqq -\frac{1}{z_0 + 1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q),$$

$$-\frac{1}{z_0 + R} \leqq \mathcal{R}\left(\frac{1}{z'_j - z_0}\right) \leqq \frac{1}{R - z_0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

d'où

$$|u_1| \geqq |\mathcal{R}\, u_1| \geqq \frac{q}{z_0 + 1} - \frac{p}{z_0 + R} \geqq \frac{q(R-1)}{(z_0+1)(z_0+R)} = \frac{4q(R-1)}{(R+3)(3R+1)},$$

et, par suite, comme $|v_1| \leqq \left(\frac{M}{q}\right)^{\frac{1}{r}}$,

(41)
$$\frac{(R-1)^2}{(R+3)(3R+1)} \leqq \left(\frac{M}{q}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Remarquons maintenant que r et M, qui ne dépendent de γ, ne peuvent prendre qu'un *nombre fini* de valeurs, puisque γ est *borné*. L'inégalité (41) montre donc bien que $R - 1$ tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$, et comme R est un nombre quelconque compris entre 1 et L_0, cela démontre la proposition.

Remarque. Le théorème précédent peut devenir inexact lorsque $n-p$ et $n-q$ peuvent devenir infinis avec n : on le voit par exemple en remarquant que l'on a

$$L_0(n', m, p, q) \geqq L_0(n, m, p, q), \tag{42}$$

si $n' \geqq n$, et par suite que, si $L_0(n, m, p, q) > 1$ et si n' croît indéfiniment, *p et q restant fixes*, $L_0(n', m, p, q)$ ne tend certainement pas vers *un*. La démonstration de l'inégalité (42) est immédiate : si $\frac{P}{Q}$ est une fraction du type (n, m) et de classe $C(p, q, D, \Delta)$ telle que

$$k(z_0, P, Q) \geqq (m+1)(n-1) - \rho_2(p, q) + 1,$$

et si l'on pose

$$P_1(z) \equiv (z-z_0)^{n'-n} P(z), \qquad Q_1(z) \equiv (z-z_0)^{n'-n} Q(z),$$

$\frac{P_1}{Q_1}$ est du type (n', m) et de la classe $C(p, q, D, \Delta)$, et l'on a

$$\begin{aligned} k(z_0, P_1, Q_1) = k(z_0, P, Q) \\ + (m+1)(n'-n) \geqq (m+1)(n'-1) - \rho_2(p, q) + 1. \end{aligned}$$

23. Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que de la détermination du nombre $\rho(p, q, D, \Delta)$. Une fois trouvée la valeur de ce nombre, il reste à déterminer, pour chaque entier $r \leqq \rho$, les ensembles E_r contenant toujours r zéros au moins de $\Phi(P, Q, m)$ pour toute fraction de la classe $C(p, q, D, \Delta)$. Il se pose là toute une série de problèmes dont on n'a abordé jusqu'à présent qu'un très petit nombre de cas particuliers, et dont la difficulté est d'ailleurs très grande. Nous nous bornerons ici à quelques remarques sur ce sujet.

Il suffit évidemment de déterminer les *ensembles minima* $E_r^\star$, c'est-à-dire tels qu'aucun sous-ensemble de $E_r^\star$, différent de $E_r^\star$, ne soit un E_r. Il peut y avoir *plusieurs* ensembles minima $E_r^\star$, et même *une infinité* de tels ensembles; nous en verrons un exemple plus loin. Un cas intéressant est celui où $r = \rho = (m+1)(n-1)$; l'intersection de tous les ensembles E_r est encore un E_r, et par suite c'est *le seul ensemble minimum* $E_r^\star$.

Dans le cas général, les E_r contiennent tous un même ensemble H_r, l'ensemble des points z_0 où

$$\lambda(z_0) \geqq (m+1)(n-1) - r + 1$$

d'après la définition de $\lambda(z_0)$; cet ensemble peut éventuellement être vide. Écartons le cas b, sans intérêt (il y a alors un seul E^*_r, identique à D et Δ); si $q=0$, H_r contient toujours D, et si $p\leqq m$, H_r contient toujours Δ; si $q>0$, $p>m$, H_r contient toujours l'intersection de D et Δ; de plus, lorsque $r-1\geqq m(q-1)$, H_r contient D, et lorsque $r-1\geqq p-m$, H_r contient Δ. Si H_r est lui-même un ensemble E_r, c'est évidemment *le seul ensemble minimum* E^*_r : nous en verrons un cas plus loin.

Remarquons encore qu'un ensemble E_r contient toujours *l'un ou l'autre* des ensembles D, Δ : sinon, il existerait un point a de D et un point b de Δ n'appartenant pas à E_r, et, en considérant la fraction $\frac{(z-a)^{n+m-1}}{(z-b)^n}$, on voit qu'elle appartient à $C(p, q, D, \Delta)$ et que sa dérivée $m^{\text{ième}}$ n'a pas de zéros distincts de a et b, contrairement à l'hypothèse.

Enfin, s'il existe une transformation homographique laissant invariants D et Δ, elle change tout ensemble E_r en un ensemble E_r, et tout ensemble minimum E^*_r en un ensemble minimum. Lorsque D et Δ sont des *domaines circulaires*, il existe une infinité de telles transformations, dépendant d'*un* paramètre réel; lorsque $p\leqq m$ et que Δ est un domaine circulaire, il en existe une infinité dépendant de *trois* paramètres réels; de même lorsque $q=0$ et que D est un domaine circulaire.

Il est clair que, si un ensemble est un ensemble E_r pour les fractions de type (n, m) et de classe $C(p, q, D, \Delta)$, c'est aussi un ensemble E_r pour les fractions de même type et de classe $C(p_1, q_1, D_1, \Delta_1)$, lorsque

$$p_1\geqq p, \qquad q_1\geqq q, \qquad D_1\subset D, \qquad \Delta_1\subset \Delta.$$

De même, c'est un ensemble E_r pour les fractions de type (n_1, m) et de classe $C(p, q, D, \Delta)$, lorsque $n_1\leqq n$, car une telle fraction peut toujours être considérée comme une fraction de type (n, m) dont $n-n_1$ pôles et $n-n_1$ zéros sont confondus en un point n'appartenant pas à E_r.

Ces deux propositions sont inexactes en général pour *les ensembles minima* E^*_r : un tel ensemble cesse d'être minimum lorsqu'on remplace p, q, n, D, Δ par p_1, q_1, n_1, D_1, Δ_1. Signalons pourtant un cas où les ensembles minima sont les mêmes pour différentes classes de fractions : c'est le cas où $p+m+1 \leqq q$ et où D contient *un ensemble ouvert* Ω *contenant* Δ. Dans ce cas, les ensembles E_r^* relatifs à la classe $C(p, q, D, \Delta)$ sont les mêmes que pour la classe $C(q, \Delta)$.

En effet, soit $\frac{P}{Q}$ une fraction quelconque de la classe $C(q, \Delta)$; soit $R(z)$ un polynome de degré $m-1$ ayant tous ses zéros dans Δ, et prenons le nombre λ assez petit pour que les $q+m-1$ zéros de $\Pi = \lambda P + QR$, qui tendent vers les zéros de QR contenus dans Δ, lorsque λ tend vers zéro, soient tous dans Ω. $\frac{\Pi}{Q}$ est alors une fraction de classe $C(p, q, D, \Delta)$ et les zéros de $\Phi(P, Q, m)$ sont identiques aux zéros de $\Phi(\Pi, Q, m)$, ce qui démontre la proposition.

24. Donnons maintenant quelques exemples de détermination d'ensembles E_r.

Lorsque $p = n+m-1$, $q = n$, et que D et Δ sont deux *domaines circulaires* tels que $K(D, \Delta) > L_0(n, m, p, q)$, la méthode développée aux paragraphes 20 et 21 montre que la connaissance de la constante $A(n, m)$ détermine complètement le domaine minimum E_ρ^* (qui est ici unique et par conséquent invariant par une transformation homographique laissant invariants D et Δ). Les domaines minima E_r^* correspondant aux entiers $r < \rho$ sont évidemment contenus dans E_ρ^*. Dans le cas particulier où $m = 1$, le théorème de Bôcher cité plus haut (§ 19) montre que, pour $r > n-1$, il y a *un seul* ensemble E_r^*, formé de la réunion de D et Δ; pour $r \leqq n-1$, il y a *deux* ensembles minima E_r^*, à savoir D et Δ.

Un autre cas où l'on peut déterminer les ensembles minima, est celui où $p = 0$, $q = n$, $r = 1$, et où Δ est un *domaine circulaire*. J'ai montré alors ([1]) que H_1, qui est ici identique à Δ, est un ensemble E_1, et par suite *le seul ensemble minimum* E_1^*. La démonstration repose essentiellement sur la formule

$$\frac{F'_m(z_k)}{F_m(z_k)} = \frac{m+1}{2}\,\frac{Q''(z_k)}{Q'(z_k)}, \tag{43}$$

où z_k est un *zéro simple* de $Q(z)$. Cette formule s'établit aisément par

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, 198, 1934, p. 1966-1967, et 203, 1936, p. 767-769.

récurrence, à partir de la relation

$$(44) \qquad F_{m+1} = (m+1)\,Q'F_m - QF'_m$$

et de celle qu'on en déduit par dérivation. [Remarquons en passant que cette relation, jointe à la représentation (6) de F_m par un déterminant, montre que F'_m est égal à ce déterminant où on a remplacé la dernière ligne par

$$P^{(m+1)} \quad Q^{(m+1)} \quad C^1_{m+1}\,Q^{(m)} \ldots C^{m-1}_{m+1}\,Q''.]$$

Lorsque $m = 1$, on peut montrer de plus qu'il existe des fractions de la classe $C(n, \Delta)$ dont la dérivée a *un seul zéro* dans Δ; autrement dit, pour $r > 1$, tout ensemble minimum E^*_r contient au moins un point extérieur à Δ. Cette remarque permet de montrer qu'il existe dans ce cas *une infinité* d'ensembles E^*_r; en effet, on peut toujours, par une transformation homographique laissant invariant Δ, supposer qu'un tel ensemble E^*_r ne contient pas le point à l'infini, et qu'il admet des points sur le segment $(1, +\infty)$ de l'axe réel. Soit t la borne supérieure de ces points. La transformation homographique

$$x = \frac{z+a}{1+az} \qquad (a \text{ réel},\ 0 < a < 1)$$

laisse invariant Δ et transforme E^*_r en un autre ensemble E^*_r dont les points situés sur $(1, +\infty)$ ont pour borne supérieure $\frac{t+a}{1+at}$; lorsque a varie entre 0 et 1, tous les ensembles minima ainsi obtenus sont donc bien distincts.

Il est *probable* que dans le cas où $p = n + m - 1$, $q = 0$, et où D est un domaine circulaire, H_1, qui est ici identique à D, est encore un ensemble E_1; mais je ne suis pas parvenu à démontrer ce théorème dans toute sa généralité.

Lorsque $m = 1$, c'est une conséquence du théorème analogue relatif à la classe $C(n, \Delta)$, vu le rôle symétrique que jouent dans ce cas les zéros et les pôles. Un autre cas où on peut l'établir est celui où $n = 2$, et par suite

$$(m+1)(n-1) = m + 1 = p = n + m - 1.$$

Le théorème résulte en effet dans ce cas du fait que *les polynomes* P et $F_m \equiv \Phi(P, Q, m)$ *sont apolaires*. Pour établir cette proposition, il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que les deux zéros de Q sont distincts ou confondus. S'ils sont distincts, on peut toujours supposer, par une homographie, que ce sont les points $z = 0$ et $z = \infty$, et par suite, que

$$\frac{P}{Q} \equiv b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m + \frac{a_1}{z},$$

d'où

$$P \equiv b_0 z^{m+1} + b_1 z^m + \ldots + b_m z + a_1,$$

et

$$F_m \equiv (-1)^m [m!\, b_0 z^{m+1} + (-1)^m m!\, a_1],$$

Si les deux zéros de Q sont confondus, on peut les supposer à l'infini, et alors

$$\frac{P}{Q} \equiv P \equiv b_0 z^{m+1} + b_1 z^m + \ldots + b_m z + b_{m+1}$$

et

$$F_m \equiv (-1)^m [(m+1)!\, b_0 z + m!\, b_1].$$

Dans les deux cas, la vérification de l'apolarité est immédiate.

25. Pour terminer cette étude, nous allons reprendre un des résultats obtenus ci-dessus pour l'examiner sous un point de vue légèrement différent.

Nous avons vu que, pour la classe $C(q, \Delta)$, on a $\rho = m(q-1)$. Lorsque Δ est l'intérieur d'un cercle, ce résultat peut s'exprimer de la façon suivante : *Si l'on suppose les q nombres $z_1, z_2, \ldots, z_q$ intérieurs à un cercle Δ, l'équation*

$$(45) \quad \frac{a_1}{(z-z_1)^{m+1}} + \frac{a_2}{(z-z_2)^{m+1}} + \ldots + \frac{a_q}{(z-z_q)^{m+1}} + \ldots + \frac{a_n}{(z-z_n)^{m+1}} = 0$$

a toujours $m(q-1)$ zéros bornés, quelles que soient les valeurs de $z_{q+1}, \ldots, z_n$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (1).

(1) Pour $q = 2$, ce résultat présente une certaine analogie avec un remarquable théorème de M. Fekete (*Math. Zeitschrift*, t. 22, 1925, p. 1-7), d'après lequel, si z_1 et z_2 sont intérieurs à Δ, l'équation

$$\frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{z-z_2} + \ldots + \frac{a_n}{z-z_n} = 0$$

a toujours *un* zéro borné, quels que soient $z_3, z_4, \ldots, z_n$, et quels que soient les nombres positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ce résultat, qui généralise le théorème de Grace-Heawood, serait naturellement inexact si l'on y faisait aucune hypothèse sur $a_1, a_2, \ldots, a_n$, comme dans le théorème du texte.

En particulier, pour $q = n$, on voit que si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont *bornés*, il y a au plus $(n-1)$ zéros *non bornés* de l'équation (45), lorsque $a_1, a_2, \ldots, a_n$ varient arbitrairement.

On peut encore exprimer cela autrement : si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n zéros (supposés distincts) de (45), on a la relation

$$D_{-(m+1)} \equiv \begin{vmatrix} (x_1 - z_1)^{-m-1} & (x_1 - z_2)^{-m-1} & \ldots & (x_1 - z_n)^{-m-1} \\ (x_2 - z_1)^{-m-1} & (x_2 - z_2)^{-m-1} & \ldots & (x_2 - z_n)^{-m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_n - z_1)^{-m-1} & (x_n - z_2)^{-m-1} & \ldots & (x_n - z_n)^{-m-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Le numérateur de cette fraction rationnelle, divisé par les déterminants de Vandermonde de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ est un polynome $S_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n)$ homogène et de degré $mn(n-1)$ par rapport à l'ensemble des variables, de degré $m(n-1)$ par rapport à chacune d'elles, symétrique par rapport aux x_i et par rapport aux z_i; enfin, la relation $S_{m+1} = 0$ reste la même quand on permute les x et les z de même indice (1). On sait de plus (1) que cette relation n'est pas une apolarité généralisée, c'est-à-dire qu'il peut exister deux domaines circulaires Δ, Δ', de constante de séparation $K(\Delta, \Delta') > 1$, et contenant respectivement *tous* les x_i et *tous* les z_i; mais le théorème rappelé ci-dessus montre que, si Δ et Δ' ont cette propriété, *leur constante de séparation* $K(\Delta, \Delta')$ *est inférieur à un nombre fixe* $G(n, m)$ *ne dépendant que de* m *et* n.

Ce point de vue conduit à étudier de la même manière, les relations entre les points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et les zéros de l'équation

$$(46) \qquad a_1(z - z_1)^k + a_2(z - z_2)^k + \ldots + a_n(z - z_n)^k = 0$$

dont l'analogie formelle avec (45) est évidente. Si $k \leq n-1$, ces deux groupes de points n'ont entre eux aucune relation indépendante des a_i. Si $k > n-1$, on obtient, comme ci-dessus, une relation entre $z_1, z_2, \ldots, z_n$, et n zéros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de (46)

$$(47) \qquad R_k(x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0,$$

---

(1) Voir J. Dieudonné, *Sur le théorème de Grace et les relations algébriques analogues* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 60, 1932, p. 173-196). La relation $S_{m+1} = 0$ est encore vérifiée si quelques-uns des x_i, ou des z_i, sont confondus.

en divisant, par les déterminants de Vandermonde des x_i et des z_i la relation

$$D_k \equiv \begin{vmatrix} (x_1 - z_1)^k \ldots (x_1 - z_n)^k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (x_n - z_1)^k \ldots (x_n - z_n)^k \end{vmatrix} = 0.$$

R_k est ici un polynome homogène et de degré $n[k-(n-1)]$ par rapport à l'ensemble des variables, de degré $k-(n-1)$ par rapport à chacune d'elles, et avec les mêmes propriétés de symétrie que S_{m+1}. De plus, pour $k=n$, *la relation* $R_k = 0$ *n'est autre que la relation de Grace;* au contraire, pour $k > n$, ce n'est pas une apolarité généralisée [*loc. cit.*, note (1) de la page précédente]. Mais ici encore, *si deux domaines circulaires* Δ, Δ' *contiennent respectivement tous les* x_i *et tous les* z_i, *on a* $K(\Delta, \Delta') \leqq H(n, k)$, *où la constante* H *ne dépend que de* n *et* k.

Nous allons établir cette proposition par une méthode qui s'appliquerait aussi à la relation $S_{m+1} = 0$. D'après les valeurs des degrés de R_k par rapport à l'ensemble des variables, et par rapport à chacune d'elles, le seul terme de R_k ne contenant aucun z_i est nécessairement de la forme $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{k-[n-1]}$, tout revient à montrer que *le coefficient de ce terme n'est pas nul.* Supposons, en effet, ce point établi; en divisant (47) par $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{k-n+1}$, cette relation prend la forme

$$C + \varphi\left(\frac{z_1}{x_1}, \frac{z_2}{x_2}, \ldots, \frac{z_n}{x_n}\right) = 0, \tag{48}$$

où $C \neq 0$ et φ est un polynome *sans terme constant.* S'il existait, *quel que soit* $R > 1$, un groupe de points x_i et un groupe de points z_i satisfaisant à (47), et tels que

$$|z_i| \leqq 1, \qquad |x_i| \geqq R \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{z_i}{x_i}\right| \leqq \frac{1}{R},$$

il en résulterait que φ peut avoir une valeur arbitrairement petite, en contradiction avec (48).

Tout revient donc à développer R_k en fonction des z_i et à montrer que le terme indépendant des z_i n'est pas nul. Or, si, dans D_k, on développe chaque terme suivant la formule du binome

$$(x_i - z_j)^k = x_i^k - k x_i^{k-1} z_j + \frac{k(k-1)}{2} x_i^{k-2} z_j^2 + \ldots,$$

il est clair qu'on aura les termes de plus bas degré de D_k, en y remplaçant chaque terme par les n premiers termes de son développement; mais le déterminant obtenu ainsi n'est autre, comme on le voit immédiatement, que le produit

$$\begin{vmatrix} x_1^k & x_1^{k-1} & \ldots & x_1^{k-n+1} \\ x_2^k & x_2^{k-1} & \ldots & x_2^{k-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^k & x_n^{k-1} & \ldots & x_n^{k-n+1} \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} 1 & -kz_1 & \frac{k(k-1)}{2} z_1^2 & \ldots & (-1)^{n-1} \frac{k!\, z_1^{n-1}}{(k-n+1)!\,(n-1)!} \\ 1 & -kz_2 & \frac{k(k-1)}{2} z_2^2 & \ldots & (-1)^{n-1} \frac{k!\, z_2^{n-1}}{(k-n+1)!\,(n-1)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -kz_n & \frac{k(k-1)}{2} z_n^2 & \ldots & (-1)^{n-1} \frac{k!\, z_n^{n-1}}{(k-n+1)!\,(n-1)!} \end{vmatrix}.$$

Donc, après division par les déterminants de Vandermonde des z_i et des x_i, il reste, pour terme de plus bas degré de R_k, l'expression

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{k^{n-1}(k-1)^{n-2}\ldots(k-n+2)}{2^{n-2}3^{n-3}\ldots(n-1)} (x_1 x_2 \ldots x_n)^{k-n+1},$$

ce qui établit la proposition.

Pour les petites valeurs de n, la méthode employée permettrait même de calculer une limite supérieure de $H(n, k)$, en prenant une majorante pour $|\varphi|$.

On peut aussi étendre à l'équation (46), lorsque $k > n-1$, une autre propriété de l'équation (45), à savoir le fait que *si $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont dans un domaine circulaire Δ, il y a au moins un zéro de* (46) *dans Δ, quels que soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

C'est évident pour $k = n$, la relation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $z_1, z_2, \ldots, z_n$ étant alors la relation de Grace. Pour l'établir dans le cas où $k > n$, supposons que la proposition soit inexacte, et que, pour un système de valeurs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, l'équation (46) ait toutes ses racines dans le nombre circulaire Δ' complémentaire de Δ; on peut toujours, par une transformation homographique préalable, supposer que Δ' est *l'intérieur d'un cercle.*

Mais alors les dérivées successives de l'équation (46) auraient aussi leurs racines dans Δ', d'après le théorème de Gauss-Lucas, et en particulier la dérivée d'ordre $k-n$

$$k(k-1), \ldots (k-n+1)[a_1(z-z_1)^n + a_2(z-z_2)^n + \ldots + a_n(z-z_n)^n] = 0,$$

d'où contradiction.

Il ne faudrait pourtant pas croire que l'analogie entre les équations (45) et (46) soit complète. En effet, il n'existe rien d'analogue pour (46) à la proposition rappelée au début de ce paragraphe pour l'équation (45), lorsque $q < n$; car si *un* des z_i est arbitraire, par exemple z_n, ainsi que *tous* les a_i, on ne peut fixer d'ensembles contenant toujours des zéros de (46) et non identiques au plan tout entier, puisque pour

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0, \qquad a_n = 1,$$

cette équation se réduit à

$$(z-z_n)^n = 0.$$