ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

EUGÈNE LEIMANIS

Sur les multiplicités singulières d'un système différentiel réel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 309-327
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__309_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR

LES MULTIPLICITÉS SINGULIÈRES

D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL RÉEL

PAR M. EUGÈNE LEIMANIS.

1. Dans ses recherches sur les courbes définies par les équations différentielles Poincaré a pris comme point de départ l'étude des points singuliers des équations différentielles du premier ordre et du second ordre (¹). Des résultats, bien connus, sont les suivants : les équations différentielles du premier ordre, si les coefficients sont arbitraires, c'est-à-dire ne sont liés par aucune relation d'égalité, ont trois espèces de points singuliers : les *nœuds*, les *cols* et les *foyers*. Les équations du second ordre ont de même quatre espèces de points singuliers isolés : les *nœuds*, les *cols*, les *foyers* et les *cols-foyers*, et d'autre part peuvent admettre des lignes, dont tous les points sont des points singuliers : *lignes de nœuds*, *lignes de cols* et *lignes de foyers*.

Dans un système différentiel du second ordre, à un col, à un col-foyer ou à un point d'une ligne de nœuds ou d'une ligne de foyers aboutissent, comme l'a montré Poincaré, une infinité de caractéristiques qui engendrent une surface S admettant un plan tangent déterminé au point singulier considéré. D'autre part en ces points singuliers, sous

---

(¹) *Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. 7, 1881, p. 385-393, et 4ᵉ série, t. 2, 1886, p. 151-167; *Œuvres*, t. 1, 1928, Paris, p. 12-20 et 167-181.

des conditions d'inégalité entre les coefficients, passent trois caractéristiques holomorphes ([1]), parmi lesquelles deux sont situées sur la surface S et peuvent être réelles ou imaginaires conjuguées et dont la troisième n'est pas située sur la surface. De même à un point d'une ligne de cols aboutissent trois caractéristiques holomorphes réelles, dont l'une est la ligne de cols elle-même.

M. Picard et M. Chazy ont complété sur certains points la théorie des courbes définies par les équations différentielles. En particulier M. Picard ([2]) a démontré que réciproquement en un col d'une équation différentielle du premier ordre n'aboutissent pas et vers ce col ne tendent pas d'autres caractéristiques que les deux caractéristiques holomorphes mises en évidence par Poincaré. M. Chazy ([3]) a démontré des propositions réciproques analogues pour les équations différentielles du second ordre : à un col, à un col-foyer ou à un point d'une ligne de nœuds, d'une ligne de foyers ou d'une ligne de cols n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que celles mises en évidence par Poincaré. Enfin M. Chazy ([4]) a étendu ces résultats, théorèmes d'existence et théorèmes réciproques, à un système d'ordre quelconque, en supposant que les racines de l'équation caractéristique sont réelles (les racines nulles y compris).

Je me suis proposé d'étendre complétement la théorie précédente à un système différentiel d'ordre quelconque, en supposant que les racines de l'équation caractéristique sont réelles (dont un certain nombre peuvent s'annuler) et imaginaires conjuguées. Les résultats principaux de cet article sont résumés dans deux Notes ([5]) que j'ai communiquées à l'Académie des Sciences. Je vais démontrer d'abord le théorème énoncé dans ma seconde Note et je l'appliquerai ensuite à la discussion des points singuliers d'un système différentiel du troisième ordre.

([1]) C'est-à-dire dont les coordonnées d'un point s'expriment en fonctions holomorphes d'un paramètre et qui admettent par suite des tangentes déterminées.

([2]) *Traité d'Analyse*, t. 3, 3e édition, 1928, Paris, p. 28 et 209. On peut aussi trouver dans cet ouvrage une étude des points singuliers spéciaux, les *centres*, p. 214-223.

([3]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 45, 1921, p. 270-280.

([4]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 56, 1932, p. 81.

([5]) *C. R. Acad. Sc.*, t. **202**, 1936, p. 1244 et 1738.

2. Théorème. — Soit le système différentiel Σ

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\bar{x}_1}{\alpha_1\bar{x}_1+\alpha_2\bar{x}_2+\ldots}=\frac{d\bar{x}_2}{-\alpha_2\bar{x}_1+\alpha_1\bar{x}_2+\ldots}=\ldots=\frac{d\bar{x}_{2r-1}}{\alpha_{2r-1}\bar{x}_{2r-1}+\alpha_{2r}\bar{x}_{2r}+\ldots}\\
&=\frac{d\bar{x}_{2r}}{-\alpha_{2r}\bar{x}_{2r-1}+\alpha_{2r-1}\bar{x}_{2r}+\ldots}=\frac{dx_1}{\lambda_1x_1+\ldots}=\frac{dx_2}{\lambda_2x_2+\ldots}=\ldots=\frac{dx_p}{\lambda_px_p+\ldots}\\
&=\frac{d\bar{y}_1}{\beta_1\bar{y}_1+\beta_2\bar{y}_2+\ldots}=\frac{d\bar{y}_2}{-\beta_2\bar{y}_1+\beta_1\bar{y}_2+\ldots}=\ldots=\frac{d\bar{y}_{2s-1}}{\beta_{2s-1}\bar{y}_{2s-1}+\beta_{2s}\bar{y}_{2s}+\ldots}\\
&=\frac{d\bar{y}_{2s}}{-\beta_{2s}\bar{y}_{2s-1}+\beta_{2s-1}\bar{y}_{2s}+\ldots}=\frac{dy_1}{\mu_1y_1+\ldots}=\frac{dy_2}{\mu_2y_2+\ldots}=\ldots=\frac{dy_n}{\mu_ny_n+\ldots}\\
&=\frac{dz_1}{\ldots}=\frac{dz_2}{\ldots}=\ldots=\frac{dz_q}{\ldots},
\end{aligned}
$$

entre les $2r+p+2s+n+q$ variables $\bar{x}, x; \bar{y}, y; z$: nous supposons que les $2r$ coefficients α et les p coefficients λ sont des constantes positives, et les $2s$ coefficients β et les n coefficients μ des contantes négatives, et que les termes non écrits sont des fonctions holomorphes des variables $\bar{x}, x; \bar{y}, y; z$ de degré deux au moins en $\bar{x}, x, \bar{y}$ et y dans les $2r+p+2s+n$ premiers dénominateurs, et de degré un au moins dans les q derniers. *Le système Σ admet la multiplicité singulière représentée par les $2r+p+2s+n$ équations*

$$
\begin{aligned}
&\bar{x}_1=\bar{x}_2=\ldots=\bar{x}_{2r-1}=\bar{x}_{2r}=0, \qquad x_1=x_2=\ldots=x_p=0,\\
&\bar{y}_1=\bar{y}_2=\ldots=\bar{y}_{2s-1}=\bar{y}_{2s}=0, \qquad y_1=y_2=\ldots=y_n=0,
\end{aligned}
$$

puisque, ces équations étant vérifiées, tous les dénominateurs s'annulent, *et, le long de cette multiplicité singulière, l'équation caractéristique a p racines positives, n racines négatives, $2r$ racines imaginaires conjuguées à partie réelle positive, $2s$ racines imaginaires conjuguées à partie réelle négative et q racines nulles.*

Dans les hypothèses énoncées, *en chaque point, soit z_0, de coordonnées $z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{q0}$, de la multiplité singulière, passent deux familles de caractéristiques du système Σ. La première est définie d'abord par $n+2s+q$ équations qu'on peut écrire symboliquement* [1]

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad y=P_2(x,\bar{x}|z),\\
&(2) \qquad \bar{y}=P'_2(x,\bar{x}|z),\\
&(3) \qquad z=z_0+P_1(x,\bar{x}|z_0),
\end{aligned}
$$

[1] Les trois équations symboliques (1), (2) et (3) remplacent respectivement les

et qui expriment les $n + 2s$ variables y et $\bar{y}$ en fonctions holomorphes des x, $\bar{x}$ et des z, nulles à l'ordre deux avec les x et les $\bar{x}$, et les q différences $z - z_0$ en fonctions holomorphes des x, $\bar{x}$ et des z_0, nulles aussi avec les x et les $\bar{x}$; *et d'autre part est définie, après substitution des* $n + 2s + q$ *équations* (1), (2), (3) *dans les* $2r + p$ *premiers rapports du système* Σ, *par un système différentiel d'ordre* $2r + p - 1$, dont l'équation caractéristique a $2r$ racines imaginaires conjuguées à partie réelle positive et p racines positives.

Au total *les caractéristiques de cette première famille* engendrent en chaque point z_0 de la multiplicité singulière la multiplicité à $p + 2r$ dimensions définie par les équations (1), (2) et (3); et, quand ce point varie le long de la multiplicité singulière, elles *engendrent la multiplicité à* $p + 2r + q$ *dimensions définie par les* $n + 2s$ *équations* (1) *et* (2)

$$y = P_2(x, \bar{x}|z),$$
$$\bar{y} = P'_2(x, \bar{x}|z).$$

La *seconde famille de caractéristiques* est obtenue à partir de la première famille par échange des variables x, $\bar{x}$ et y, $\bar{y}$ respectivement et des coefficients α, λ et β, μ, ou encore par changement des signes de tous les dénominateurs des équations Σ. Le long de la multiplicité singulière, les caractéristiques de cette seconde famille engendrent une multiplicité à $n + 2s + q$ dimensions, définie par les $p + 2r$ équations

$$x = P_2(y, \bar{y}|z),$$
$$\bar{x} = P'_2(y, \bar{y}|z).$$

---

n, $2s$ et q équations suivantes :

$$y_i = P_2(x_1, x_2, \ldots, x_p; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2r-1}, \bar{x}_{2r} \mid z_1, z_2, \ldots, z_q) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\bar{y}_i = P'_2(x_1, x_2, \ldots, x_p; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2r-1}, \bar{x}_{2r} \mid z_1, z_2, \ldots, z_q) \quad (i = 1, 2, \ldots, 2s),$$

$$z_i = z_{i0} + P_1(x_1, x_2, \ldots, x_p; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2r-1}, \bar{x}_{2r} \mid z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{q0}) \quad (i = 1, \ldots, q),$$

P_2, P'_2 et P_1 représentant des séries entières par rapport aux variables x et $\bar{x}$, commençant respectivement par des termes de degré 2 et 1, au moins, et dont les coefficients dépendent respectivement des derniers arguments z et z_0.

Pour démontrer le théorème énoncé, cherchons à déterminer au point z_0 de la multiplicité singulière la multiplicité engendrée par des caractéristiques du système Σ passant en ce point, et qui soit définie par les équations

$$(4) \qquad y = P_2(x, \bar{x}|z_0), \qquad \bar{y} = P'_2(x, \bar{x}|z_0), \qquad z - z_0 = P_1(x, \bar{x}|z_0);$$

la multiplicité cherchée aura $p+2r$ dimensions, et les coefficients des séries P_2, P'_2 et P_1 dépendront en général du point z_0 de la multiplicité singulière. Si l'on désigne respectivement par $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_{2r-1}, \bar{X}_{2r}$; $X_1, X_2, \ldots, X_p$; $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \ldots, \bar{Y}_{2s-1}, \bar{Y}_{2s}$; $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$; $Z_1, Z_2, \ldots, Z_q$ les dénominateurs du système Σ, et si l'on substitue dans l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\bar{X}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} + \bar{X}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_2} + \ldots + \bar{X}_{2r-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{2r-1}} + \bar{X}_{2r} \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_{2r}} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ &+ X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_p \frac{\partial f}{\partial x_p} + \bar{Y}_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_1} + \bar{Y}_2 \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_2} + \ldots + \bar{Y}_{2s-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_{2s-1}} \\ &+ \bar{Y}_{2s} \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_{2s}} + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial f}{\partial y_n} \\ &\qquad\qquad + Z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + Z_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \ldots + Z_q \frac{\partial f}{\partial z_q} = 0, \end{aligned}$$

qui détermine les intégrales premières du système Σ, chacune des $n+2s+q$ fonctions

$$(6) \qquad y - P_2(x, \bar{x}|z_0), \qquad \bar{y} - P'_2(x, \bar{x}|z_0), \qquad z - z_0 - P_1(x, \bar{x}|z_0),$$

tirées des équations (4), en substituant en même temps dans les coefficients de l'équation (5) les expressions (4), on obtient $n+2s+q$ équations qui doivent être satisfaites identiquement en fonctions des variables x et $\bar{x}$, et qui par suite déterminent de proche en proche et de façon unique les coefficients des séries entières P_2, P'_2 et P_1. Pour démontrer leur convergence il suffit d'étendre la démonstration à l'aide de séries majorantes appliquée par Poincaré à un système différentiel du second ordre [1].

---

[1] Cf. *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. 2, 1886, p. 155-157 et 164; *Œuvres*, t. 1, 1928, p. 171-172 et 177; *voir* aussi le Mémoire de M. CHAZY, *loc. cit.*, 5, p. 82-83.

Ensuite, si l'on substitue dans le système Σ les $n+2s+q$ séries entières obtenues, ce système se réduit à l'égalité des $2r+p$ premiers rapports, donc à un système différentiel d'ordre $2r+p-1$.

La multiplicité engendrée par la famille de caractéristiques, passant au point z_0, quand celui-ci varie le long de la multiplicité singulière, s'obtiendra par élimination des q variables z_0 entre les équations (4), d'où $n+2s$ équations de la forme (1) et (2).

En permutant les rôles des variables $x, \overline{x}$ et $y, \overline{y}$, on obtient la seconde famille de caractéristiques.

On démontre aussi que *le système Σ n'admet pas d'autres caractéristiques aboutissant à un point de la multiplicité singulière ou s'en rapprochant asymptotiquement, que les caractéristiques des deux familles obtenues, et la multiplicité singulière elle-même* : par extension de la proposition de M. Picard (1), selon laquelle en un col d'une équation différentielle réelle n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les deux caractéristiques holomorphes.

Selon la nature des racines de l'équation caractéristique, différents cas particuliers se présentent : 1° si les racines non nulles sont toutes réelles, on retombe sur le cas considéré par M. Chazy; 2° si les racines réelles non nulles sont toutes de même signe et si toutes les racines imaginaires conjuguées ont leur partie réelle de signe contraire à celui des racines réelles, *la multiplicité, donnée par les équations*

$$y = P_2(\overline{x}|z_0),$$
$$z - z_0 = P_1(\overline{x}|z_0),$$

est l'extension de la surface lieu de caractéristiques mise en évidence par Poincaré en un point d'une ligne de foyers et la multiplicité

$$y = P_2(\overline{x}|z)$$

peut être considérée comme l'extension de la surface mise en évidence par Poincaré en un col-foyer d'un système différentiel du second ordre.

3. Appliquons maintenant ce théorème à un système différentiel

(1) *Loc. cit.*, p. 310, note (2).

du troisième ordre. Pour cela envisageons le système des équations différentielles

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{du}{U}, \tag{7}$$

où X, Y, Z, U sont des fonctions réelles et holomorphes des variables x, y, z, u pour les valeurs considérées. Toute équation du troisième ordre et du premier degré peut être ramenée à cette forme au voisinage d'un point singulier. Pour employer dans ce cas un mode de représentation géométrique, nous regardons x, y, z, u comme les coordonnées d'un point dans l'espace à quatre dimensions. Par un point de cet espace passe en général une caractéristique et une seule définie par le système (7), il n'y a d'exception que pour les *points singuliers*, où les quatre fonctions X, Y, Z, U s'annulent à la fois. Ces points sont par suite les points d'intersection des quatre hypersurfaces

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad U = 0. \tag{8}$$

Il peut arriver que ces hypersurfaces passent par une même ligne ou par une surface dans l'espace à quatre dimensions. Alors tous les points de cette ligne ou de cette surface sont des points singuliers et l'on a une *ligne singulière* ou une *surface singulière*.

D'abord nous allons considérer les points singuliers isolés. Soit O, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $u=0$, un tel point; pour classer les points singuliers, formons l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} - S & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} & \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} - S & \frac{\partial Y}{\partial z} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} - S & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} & \frac{\partial U}{\partial u} - S \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Supposons que cette équation n'a ni racine nulle ni racine multiple et qu'aucune des racines n'est égale à une fonction linéaire à coefficients entiers positifs des trois autres : conditions suffisantes sans être nécessaires. Désignons respectivement par p, n, $2r$, $2s$ les nombres des racines positives, négatives, imaginaires conjuguées de partie réelle positive et négative. Ces quatre nombres, qui satisfont à la relation

$$p+n+2r+2s=4,$$

caractérisent le point singulier O et font connaître la forme des caractéristiques au voisinage de ce point; mais, toutefois, les points (p, n, r, s) et les points (n, p, s, r) doivent être regardés comme de même espèce, puisqu'on passe des uns aux autres par le changement des signes des racines S de l'équation (9).

Au total le point singulier O peut présenter huit cas différents. Il peut être

1° un *nœud*............	$p=4$,	$n=0$,	$r=0$,	$s=0$,
2° un *col-nœud*.........	$p=3$,	$n=1$,	$r=0$,	$s=0$,
3° un *col*..............	$p=2$,	$n=2$,	$r=0$,	$s=0$,
4° un *col-foyer*.........	$p=1$,	$n=1$,	$r=1$,	$s=0$,
5° un *nœud-foyer*......	$p=2$,	$n=0$,	$r=1$,	$s=0$,
6° un *col-nœud-foyer*...	$p=2$,	$n=0$,	$r=0$,	$s=1$,
7° un *foyer*............	$p=0$,	$n=0$,	$r=2$,	$s=0$,
8° un *foyer-col*.........	$p=0$,	$n=0$,	$r=1$,	$s=1$.

Nous allons examiner successivement ces huit cas.

1° Nœud : $p=4$, $n=0$, $r=0$, $s=0$. — Dans ce cas, d'après un théorème de Poincaré [1], les intégrales générales des équations (7) peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$(10)\qquad \frac{H_1^{\frac{1}{S_1}}}{A_1}=\frac{H_2^{\frac{1}{S_2}}}{A_2}=\frac{H_3^{\frac{1}{S_3}}}{A_3}=\frac{H_4^{\frac{1}{S_4}}}{A_4},$$

où H_1, H_2, H_3, H_4 sont des fonctions de x, y, z et u, holomorphes dans le voisinage du point singulier et s'annulant en ce point, S_1, S_2, S_3, S_4 sont les racines de l'équation caractéristique (9) et A_1, A_2, A_3, A_4 des constantes d'intégration. Les équations (10) représentent ∞^3 caractéristiques qui vont toutes passer par le point singulier. Donc, *dans le cas d'un nœud, ∞^3 caractéristiques passent en ce point.*

---

(1) *Thèse*, Paris 1879, p. 70, ou *Œuvres*, t. 1, 1928, p. CIX.

Exemple. — Le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C} = \frac{u}{D},$$

A, B, C, D étant des constantes d'intégration.

2° Col-noeud : $p = 3$, $n = 1$, $r = 0$, $s = 0$. — En général dans ce cas on ne peut pas mettre les intégrales des équations (7) sous la forme (10); mais on sait qu'il existe d'après les recherches de Briot et Bouquet ([1]), sous des conditions d'inégalité entre les coefficients des fonctions X, Y, Z, U, qui sont satisfaites dans le cas actuel ([2]), quatre intégrales particulières des équations (7) qui sont de la forme

$$(11) \qquad x = \varphi_1(v), \qquad y = \varphi_2(v), \qquad z = \varphi_3(v), \qquad u = \varphi_4(v),$$

$\varphi_i(v)$, $i = 1, 2, 3, 4$ étant des fonctions holomorphes d'une variable v, s'annulant avec cette variable au point O. Donc dans ce second cas quatre caractéristiques réelles T_1, T_2, T_3 et T_4 passent par le point singulier O et, si l'on prend pour les axes des coordonnées les tangentes aux quatre caractéristiques réelles, les équations (7) conservent la même forme et les termes du premier degré de X, Y, Z et U se réduisent respectivement à

$$S_1 x, \quad S_2 y, \quad S_3 z, \quad S_4 u,$$

où S_1, S_2, S_3 sont positifs et S_4 négatif.

D'après notre théorème, au point O passent deux familles de caractéristiques, la première forme une hypersurface

$$u = \psi(x, y, z),$$

sur laquelle sont situées ∞^2 caractéristiques, parmi lesquelles se

---

([1]) *Journal de l'École Polytechnique*, 36e cahier, 1856, p. 133-198.

([2]) Il suffit des hypothèses que nous avons faites relativement aux racines de l'équation caractéristique (9).

trouvent aussi les caractéristiques T_1, T_2, T_3 ; $u=\psi(x, y, z)$ désigne une intégrale holomorphe s'annulant avec x, y, z de l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial u}{\partial x}+Y\frac{\partial u}{\partial y}+Z\frac{\partial u}{\partial z}=U.$$

La seconde famille de caractéristiques se réduit à la caractéristique isolée T_4.

Si selon le théorème antérieur on remplace dans les trois premiers rapports des équations (7) u par son expression $\psi(x, y, z)$, on obtient les équations

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}, \tag{12}$$

où, après substitution, X, Y, Z sont des fonctions holomorphes de x, y, z, s'annulant avec ces variables, et dont les termes du premier degré se réduisent à S_1x, S_2y, S_3z respectivement. On est donc ramené au cas des équations du second ordre, x, y, z représentant les coordonnées d'un point dans l'espace ordinaire. Les courbes définies par les équations (12) sont les projections des caractéristiques situées sur l'hypersurface $u=\psi(x, y, z)$; mais pour ces projections le point singulier est un nœud, d'où la conclusion que toutes les caractéristiques situées sur l'hypersurface en question vont se croiser au point singulier O. Les autres caractéristiques, après s'être approchées plus ou moins de ce point, s'en éloignent et sortent de son domaine.

Ainsi ∞^2 *caractéristiques formant une hypersurface et une caractéristique isolée passent au point singulier considéré, les autres restent à distance finie de ce point.*

Exemple. — Le système

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\frac{du}{-u},$$

dont l'intégrale générale s'écrit

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}=\frac{1}{Du},$$

A, B, C, D étant les constantes d'intégration. ∞^2 caractéristiques

$$u=0, \qquad \frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C},$$

situées dans l'hyperplan $u=0$, ainsi que la caractéristique isolée

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0,$$

c'est-à-dire l'axe des u, viennent passer par l'origine. Les autres caractéristiques, qui ont pour équations

$$xu=\text{const.}, \qquad yu=\text{const.}, \qquad zu=\text{const.},$$

restent à distance finie de l'origine.

3° Col : $p=2$, $n=2$, $r=0$, $s=0$. — Soient parmi les quatre racines réelles de l'équation caractéristique (9) S_1, S_2 les racines positives et S_3, S_4 les racines négatives. Dans ce cas, comme dans le précédent, nous avons quatre caractéristiques réelles, T_1, T_2, T_3 et T_4 de la forme (11) passant par le point singulier O, et, si l'on effectue le même changement des coordonnées que dans le cas précédent, il existe d'après notre théorème deux familles de caractéristiques formant chacune une surface et passant au point singulier considéré O. La première de ces surfaces est donnée par l'intersection des deux hypersurfaces correspondant aux deux intégrales holomorphes

$$(13) \qquad z=\sum_{m+n=2}^{\infty}\alpha_{mn}x^m y^n, \qquad u=\sum_{m+n=2}^{\infty}\beta_{mn}x^m y^n$$

de l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+U\frac{\partial f}{\partial u}=0,$$

et les équations de la seconde surface s'obtiennent à partir des équations de la première par échange des variables x, y et z, u et des coefficients S_1, S_2 et S_3, S_4. Parmi les quatre caractéristiques réelles, deux sont situées sur l'une des deux surfaces et deux sur l'autre. Remplaçant dans le système initial (7) z et u par les séries entières obtenues, ce système se réduit à l'équation de la forme

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y},$$

les premiers termes des fonctions holomorphes X et Y se réduisant à $S_1 x$ et $S_2 y$ respectivement. Nous sommes donc ramenés au cas d'une équation du premier ordre, x, y étant les coordonnées d'un point dans le plan. Les courbes définies par la dernière équation sont les projections des caractéristiques situées sur la surface (13), mais pour ces projections le point singulier est un nœud. Donc ∞^1 caractéristiques situées sur la surface (13) passent par le point singulier O avec des tangentes déterminées. De même les caractéristiques tracées sur la seconde surface passent au point O; les autres restent à distance finie de ce point. D'où la conclusion : *dans le cas d'un col deux surfaces passent au point* O, *formées chacune de* ∞^1 *caractéristiques passant en ce point*; *les autres caractéristiques restent à distance finie de* O.

Exemple. — Le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{-z} = \frac{du}{-u},$$

dont l'intégrale générale est

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{1}{Cz} = \frac{1}{Du},$$

A, B, C, D désignant quatre constantes d'intégration. Dans ce cas une double infinité de droites

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad \frac{z}{u} = \text{const.},$$

$$z = 0, \qquad u = 0, \qquad \frac{x}{y} = \text{const.},$$

situées dans les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, $u = 0$ respectivement, passent par l'origine; les autres caractéristiques restent à distance finie de ce point.

4° Col-foyer : $p = 1$, $n = 1$, $r = 1$, $s = 0$. — Dans ce cas, parmi les quatre intégrales particulières définies plus haut, deux seulement sont réelles, et par un changement linéaire de variables les termes du premier degré de X, Y, Z et U se réduisent respectivement à

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad -\alpha_2 x + \alpha_1 y, \quad S_3 z, \quad S_4 u \qquad (\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0,\ S_3 > 0,\ S_4 < 0).$$

Donc, d'après notre théorème, l'une des deux familles de caractéristiques, passant au point O, forme une hypersurface contenant ∞^2 caractéristiques, parmi lesquelles se trouve aussi l'une des deux caractéristiques holomorphes réelles mises en évidence par Briot et Bouquet, et l'autre famille se réduit à une caractéristique isolée, la seconde des deux caractéristiques réelles de Briot et Bouquet. Soit

$$u = \varphi(x, y, z) \tag{14}$$

l'équation de cette hypersurface, $u = \varphi(x, y, z)$ désignant une intégrale holomorphe s'annulant avec x, y, z de l'équation aux dérivées partielles

$$X\frac{\partial u}{\partial x} + Y\frac{\partial u}{\partial y} + Z\frac{\partial u}{\partial z} = U.$$

Si l'on remplace u par $\varphi(x, y, z)$ dans X, Y, Z et U, le système (7) se réduit à un système du second ordre qui représente dans l'espace à trois dimensions les courbes projections des caractéristiques tracées sur l'hypersurface (14), mais pour ces projections le point singulier O est un foyer. D'où la conclusion suivante : ∞^2 *caractéristiques formant une hypersurface admettent le point singulier* O *comme point asymptote, sauf l'une qui passe en ce point avec une tangente déterminée*; *une caractéristique isolée passe en* O *aussi avec une tangente bien déterminée. Toutes les autres caractéristiques restent à distance finie de* O.

Exemple. — Soit le système

$$\frac{dx}{x+y} = \frac{dy}{-x+y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{-u}.$$

Les caractéristiques ont pour équations générales

$$(x^2+y^2)\left(\frac{y+ix}{y-ix}\right)^i = A, \qquad x^2+y^2-Bz^2 = 0, \qquad (x^2+y^2)u^2 = C,$$

A, B, C étant des constantes d'intégration. Les ∞^2 caractéristiques, s'approchant du point singulier O asymptotiquement et formant l'hyperplan $u = 0$, sont des courbes d'intersection des cylindres et des cônes de l'hyperplan $u = 0$, donnés par les deux premières équations de l'intégrale générale; une seule de ces caractéristiques, l'axe des z,

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad u = 0,$$

passe par l'origine avec une tangente déterminée. L'axe des u

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

est ici la caractéristique isolée passant par l'origine. Les autres caractéristiques restent à distance finie de O.

5° Noeud-foyer : $p=2$, $n=0$, $r=1$, $s=0$. — Soient S_1, S_2 les deux racines imaginaires conjuguées à partie réelle positive, et soient S_3, S_4 les deux racines positives. Dans ce cas, comme dans le cas 1, les intégrales générales des équations (7) sont de la forme

$$\frac{H_1^{\frac{1}{S_1}}}{A_1}=\frac{H_2^{\frac{1}{S_2}}}{A_2}=\frac{H_3^{\frac{1}{S_3}}}{A_3}=\frac{H_4^{\frac{1}{S_4}}}{A_4}.$$

D'ailleurs, pour simplifier l'écriture, nous pouvons poser

$$H_1=y+ix, \quad H_2=y-ix, \quad H_3=z, \quad H_4=u,$$

les nouvelles variables x, y, z, u étant des fonctions holomorphes et réelles des anciennes, sans bien entendu leur être identiques. Les équations d'une caractéristique quelconque peuvent s'écrire

$$y+ix=(A+iB)\,u^{\frac{S_1}{S_4}},$$
$$y-ix=(A-iB)\,u^{\frac{S_2}{S_4}},$$
$$z=C\,u^{\frac{S_3}{S_4}},$$

où A, B, C sont trois constantes réelles. Considérons l'équation générale

$$x^2+y^2+z^2+u^2=\text{const.}, \tag{15}$$

qui représente une infinité d'hypersurfaces, s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point singulier O. On se rend compte facilement que chacune des caractéristiques coupe chacune des hypersurfaces (15) en un seul point, si la constante du second membre est suffisamment petite : les hypersurfaces sont des hypersurfaces sans contact, analogues aux cycles et surfaces sans contact étudiés par Poincaré; donc une caractéristique, qui a pénétré une fois à l'intérieur d'une hypersurface (15), ira en se rapprochant asymptotiquement du point singulier O.

Mais il y a aussi quelques exceptions. Parmi les quatre caractéristiques qui existent d'après Briot et Bouquet, et qui passent au point singulier O avec des tangentes bien déterminées, deux seulement sont réelles et leurs équations sont respectivement

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \tag{16}$$

et

$$x = 0, \quad y = 0, \quad u = 0. \tag{17}$$

Ensuite

$$x = 0, \quad y = 0$$

donne une surface contenant des caractéristiques qui passent par le point singulier avec des tangentes déterminées, et sur laquelle sont tracées aussi les deux caractéristiques particulières (16) et (17). Les autres caractéristiques, tracées sur les hypersurfaces

$$z = 0 \quad \text{ou} \quad u = 0,$$

et sur les hypersurfaces dont l'équation générale est

$$\frac{x^2 + y^2}{z^{\frac{S_1+S_2}{S_3}}} = \text{const.} \quad \text{ou} \quad \frac{x^2 + y^2}{u^{\frac{S_1+S_2}{S_4}}} = \text{const.},$$

admettent le point singulier O comme point asymptote.

Donc, *dans le cas d'un nœud-foyer, ∞^3 caractéristiques sont en général asymptotes au point singulier O et parmi elles ∞^1 formant une surface passent en ce point.*

Exemple. — Soit le système

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{-x + y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u}.$$

Les caractéristiques de ce système ont pour équations générales

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{y + ix}{y - ix}\right)^i = A, \qquad x^2 + y^2 - Bz^2 = 0, \qquad u = Cz,$$

et les hypersurfaces $z = 0$ et $u = 0$, dont nous avons parlé plus haut, sont les hyperplans $z = 0$ et $u = 0$, lieux respectifs des caractéristiques

$$z = 0, \qquad (x^2 + y^2)\left(\frac{y + ix}{y - ix}\right)^i = A, \qquad x^2 + y^2 - D u^2 = 0$$

et

$$u = 0, \qquad (x^2 + y^2)\left(\frac{y + ix}{y - ix}\right)^i = A, \qquad x^2 + y^2 - B z^2 = 0.$$

Toutes ces caractéristiques admettent le point O comme point asymptote. A la surface engendrée par les caractéristiques ayant des tangentes déterminées correspond le plan des zu engendré par des droites

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad u = C z,$$

qui passent par l'origine.

6° Col-noeud-foyer : $p = 2$, $n = 0$, $r = 0$, $s = 1$. — Dans ce cas, par un changement linéaire de variables, les termes du premier degré des X, Y, Z et U se réduisent à

$$\beta_1 x + \beta_2 y, \quad -\beta_2 x + \beta_1 y, \quad S_3 z, \quad S_4 u \qquad (\beta_1 < 0,\ \beta_2 < 0,\ S_3 > 0,\ S_4 > 0)$$

respectivement, et, en appliquant notre théorème et raisonnant comme dans les cas précédents, on trouve que ∞^1 *caractéristiques formant une surface passent au point* O *avec des tangentes déterminées, et* ∞^1 *caractéristiques formant une autre surface sont asymptotes à ce point; toutes les autres restent à distance finie de* O.

Exemple. — Le système

$$\frac{dx}{-x - y} = \frac{dy}{x - y} = \frac{dz}{z} = \frac{du}{u},$$

qui peut être discuté de la même manière que les exemples précédents.

7° Foyer : $p = 0$, $n = 0$, $r = 2$, $s = 0$. — Dans ce cas les intégrales générales du système (7) sont de la forme

$$\frac{H_1^{\frac{1}{S_1}}}{A_1} = \frac{H_2^{\frac{1}{S_2}}}{A_2} = \frac{H_3^{\frac{1}{S_3}}}{A_3} = \frac{H_4^{\frac{1}{S_4}}}{A_4},$$

où nous posons

$$H_1 = y + ix, \qquad H_2 = y - ix,$$
$$H_3 = u + iz, \qquad H_4 = u - iz,$$

les nouvelles variables x, y, z, u étant comme antérieurement des fonctions holomorphes et réelles des anciennes. Les équations d'une caractéristique quelconque peuvent se mettre sous la forme

$$y + ix = (A + iB)(u - iz)^{\frac{S_1}{S_4}},$$
$$y - ix = (A - iB)(u + iz)^{\frac{S_2}{S_3}};$$
$$(u + iz)^{S_4} = C(u - iz)^{S_3},$$

où A, B sont des constantes réelles et C est une constante imaginaire de module égal à un. Considérons l'équation générale

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \text{const.}, \tag{18}$$

qui représente une infinité d'hypersurfaces s'enveloppant mutuellement et enveloppant le point singulier O. On vérifie aisément que, si la constante du second membre est suffisamment petite, chacune des caractéristiques coupe chacune de ces hypersurfaces en un seul point. Par conséquent les hypersurfaces (18) sont des hypersurfaces sans contact : une caractéristique qui a pénétré une fois à l'intérieur d'une des hypersurfaces (18), ira en s'en rapprochant asymptotiquement du point singulier considéré. Les quatre caractéristiques particulières, qui existent d'après Briot et Bouquet, sont dans ce cas imaginaires. Les autres caractéristiques, tracées sur les surfaces

$$x = 0, \qquad y = 0,$$

et

$$z = 0, \qquad u = 0,$$

et sur les hypersurfaces d'équation générale

$$\frac{x^2 + y^2}{(z^2 + u^2)^{\frac{S_1+S_2}{S_3+S_4}}} = \text{const.},$$

sont des spirales analogues à celles que nous avons déjà rencontrées.

Donc *dans le cas d'un foyer* ∞^3 *caractéristiques sont en général asymptotes au point* O *sans qu'aucune passe en ce point.*

Exemple. — Le système

$$\frac{dx}{x + y} = \frac{dy}{-x + y} = \frac{dz}{z + u} = \frac{du}{-z + u},$$

dont les caractéristiques ont pour équations générales

$$(x^2+y^2)\left(\frac{y+ix}{y-ix}\right)^i=A, \qquad (z^2+u^2)\left(\frac{u+iz}{u-iz}\right)^i=B, \qquad x^2+y^2=C(z^2+u^2),$$

A, B, C désignant trois constantes d'intégration.

8° Foyer-col : $p=0, n=0, r=1, s=1$. — Dans ce cas, comme dans le précédent, les quatre caractéristiques de Briot et Bouquet sont imaginaires, et par un changement linéaire de variables les termes du premier degré de X, Y, Z et U se réduisent à

$$\alpha_1 x+\alpha_2 y, \quad -\alpha_2 x+\alpha_1 y, \quad \beta_1 z+\beta_2 u, \quad -\beta_2 z+\beta_1 u$$
$$(\alpha_1>0,\ \alpha_2>0,\ \beta_1<0,\ \beta_2<0).$$

Par suite, en appliquant notre théorème, on trouve que *deux surfaces, formées chacune de ∞^1 caractéristiques asymptotes au point singulier* O, *passent en ce point, les autres caractéristiques restent à distance finie de* O.

Exemple : le système

$$\frac{dx}{x+y}=\frac{dy}{-x+y}=\frac{dz}{-z-u}=\frac{du}{z-u}.$$

Différents cas particuliers se présentent si les parties réelles de certaines racines imaginaires conjuguées de l'équation caractéristique (9) du système (7), ou plus généralement de l'équation caractéristique du système Σ, s'annulent; ces cas particuliers peuvent être considérés comme des cas limites, et ils ne se présentent pas si les fonctions X, Y, Z, U du système (7) ou si les fonctions correspondantes du système Σ sont les plus générales. Sur ces cas exceptionnels je n'insisterai pas.

Il reste à considérer les cas particuliers où les quatre hypersurfaces (8) se coupent suivant une même ligne ou suivant une surface. Sur ces cas particuliers je me contenterai des remarques suivantes. Si les quatre hypersurfaces (8) se coupent suivant une même ligne, qui est une *ligne singulière*, en chaque point de cette ligne une racine de l'équation caractéristique (9) est nulle, supposons que ce soit S_4 : après un changement de variables les dénominateurs du système (7) présenteront, en général, l'un des quatre cas suivants. Ils pourront, si l'on écrit seulement les termes du premier degré, avoir la forme

$$X=S_1x+\ldots, \qquad Y=S_2y+\ldots, \qquad Z=S_3z+\ldots, \qquad U=\ldots,$$

et, ou bien S_1, S_2, S_3 sont de même signe, ou bien deux d'entre eux sont positifs et le troisième négatif. Ou au contraire les dénominateurs auront la forme

$$X = \alpha x + \beta y + \ldots, \qquad Y = -\beta x + \alpha y + \ldots, \qquad Z = S_3 z + \ldots, \qquad U = \ldots,$$

α, β désignant des constantes, et S_3 est du signe de α, ou du signe opposé. On voit donc qu'on retombe en général sur les quatre cas distingués par Poincaré en un point singulier isolé de l'espace à trois dimensions : *nœud, col, foyer* et *col-foyer*. La ligne singulière elle-même est l'une des caractéristiques passant au point considéré. Ainsi la ligne singulière peut se décomposer en arcs formés de points singuliers qui sont tous de même espèce. Les points qui séparent ces arcs les uns des autres ou les points multiples de la ligne singulière sont des singularités de nature plus compliquée.

De même dans le cas où les hypersurfaces (8) se coupent suivant une surface, qui est une *surface singulière*, en chaque point de cette surface deux racines de l'équation caractéristique (9) sont nulles, soient S_3 et S_4. Les dénominateurs du système (7) peuvent présenter alors trois cas. On peut avoir

$$X = S_1 x + \ldots, \qquad Y = S_2 y + \ldots, \qquad Z = \ldots, \qquad U = \ldots,$$

et S_1, S_2 peuvent être de même signe ou de signes opposés, ou bien X et Y peuvent avoir pour termes du premier degré

$$\alpha x + \beta y, \quad -\beta x + \alpha y,$$

α, β étant des constantes. Donc en général on retombe sur les trois cas distingués par Poincaré en un point singulier isolé du plan : *nœud, col* et *foyer*. La surface singulière elle-même comprend deux caractéristiques passant au point singulier considéré. Les points qui séparent les régions de la surface singulière, dont tous les points sont des nœuds, des cols ou des foyers, sont des singularités de nature plus compliquée.

Remarquons encore que si l'ordre du système différentiel augmente, le nombre des espèces de points singuliers croît très rapidement, mais dans le cas général les singularités peuvent être discutées au moyen du théorème énoncé plus haut.